



Die Ingenieur-Mathematik in elementarer Behandlung

Enthaltend die statischen Momente und Schwerpunktslagen, die Trägheits- und Centrifugalmomente für die wichtigsten Querschnittsformen und Körper der technischen Mechanik in rechnerischer und graphischer Behandlung unter Berücksichtigung der Methoden von Nehls, Mohr, Culmann, Land und Reye

Holzmüller, Gustav

Leipzig, 1897

Physikalische Betrachtungen.

[urn:nbn:de:hbz:466:1-76845](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466:1-76845)

Transformiert man das System der confokalen Lemniskaten und der orthogonalen Schar gleichseitiger Hyperbeln noch einmal mittels der Funktion $Z = \sqrt{z}$, so entstehen Lemniskaten 4^{ter} Ordnung von der Gleichung $p_1 p_2 p_3 p_4 = c$ und Hyperbeln 4^{ter} Ordnung von der Gleichung $\vartheta_1 + \vartheta_2 + \vartheta_3 + \vartheta_4 = \gamma$, die ebenfalls für die Festigkeitslehre von Bedeutung sind.

254) Als Gesamtergebnis des Obigen kann man für die Theorie der Polarmomente 1^{ter} und 2^{ter} Ordnung Folgendes hinstellen:

a) Kennt man den Inhalt einer Fläche, zu deren Begrenzung Gerade, Kreise, Parabeln, cardioidische Kurven, gleichseitige Hyperbeln, Lemniskaten 2^{ter} Ordnung im Sinne der obigen Darlegungen gehören, so kennt man für die durch $z = \sqrt{Z}$ entstehende Fläche, die bezüglich von gleichseitigen Hyperbeln, Lemniskaten 2^{ter} Ordnung, Geraden, Kreisen, Hyperbeln 4^{ter} Ordnung, Lemniskaten 4^{ter} Ordnung begrenzt ist, das polare Trägheitsmoment in Bezug auf den Nullpunkt.

b) Kennt man umgekehrt das Trägheitsmoment der letzteren Fläche in Bezug auf den Nullpunkt, so kennt man auch den Inhalt der ersteren Fläche.

c) Kennt man die Peripherie der ersten Fläche, so kennt man das Polarmoment 1^{ter} Ordnung für die Peripherie der zweiten Fläche.

d) Kennt man umgekehrt das Polarmoment 1^{ter} Ordnung für die Peripherie der letzteren, so kennt man die Peripherie der ersteren Fläche.

[255) Physikalische Bemerkungen zu den behandelten Kurvensystemen.

Um für die besprochenen Kurvenscharen zu interessieren, mögen einige physikalische Bemerkungen über dieselben eingeschaltet werden. *)

a) Fig. 168. Strömt längs der Koordinatenachsen Elektrizität konstanter Spannung in die leitende Platte ein, die unbegrenzt zu denken ist, und wird die Elektrizität in unendlich großer Entfernung auf den Winkelhalbierenden abgeleitet, so ist die eine Hyperbelgruppe die der Strömungslinien der Elektrizität, die andere Gruppe ist die der Linien gleicher Spannung, sobald der stationäre Zustand eingetreten ist.

*) Die Bemerkungen in den eingeklammerten Abschnitten sind nur für vorgeschrittene Leser bestimmt. Sie mögen als eine Hindeutung darauf, daß es noch höhere Gebiete gibt, aufgefaßt werden. Dort kommt die höhere Analysis zur Geltung, die im Anfange des Studiums noch entbehrt werden kann.

An Stelle der stationären Elektrizitätsströmung kann man eine stationäre Wärmeströmung setzen. Die Stromlinien behalten dann ihre Bedeutung und die Spannungscurven werden Isothermen. Solche Kurvensysteme bezeichnet man daher als isothermische Kurvensysteme.

Erkennt man die Forchheimersche Theorie der Grundwasserstände für gleichmäßig durchlässiges Erdreich als richtig an, so gilt von der Figur 168 Folgendes: Man denke sich die Koordinatenachsen als sehr weitgehende Sickerschlitze, die energisch ausgepumpt werden, dann geben die einen Hyperbeln die Strömung des Grundwassers an, die andern die Niveaukurven des Grundwasserstandes. Durch die einzelnen „Quadrate“ fließen dabei stets gleich große Flüssigkeitsmengen, sobald nur das Niveau in den Schlitzen als überall gleichmäßig betrachtet werden darf. Man vergleiche auch die Theorie des Helmholtzschen Geschwindigkeits-Potentials.

b) Fig. 172. Man denke sich die Brennpunkte der konfokalen Lemniskaten als Einströmungsstellen konstant gespannter Elektrizität in die ebene Platte und den unendlich fernen Bereich derselben als Ausströmungsstelle, dann ist das Büschel der Hyperbeln das System der Stromlinien, während die Lemniskaten zweiter Ordnung die Linien konstanter Spannung sind. Bezüglich der Wärmeströmung und der Grundwasserbewegung findet Analoges statt, wie vorher. Übrigens lassen sich die Stromlinien und Spannungskurven bei geeignetem Arrangement mit einander vertauschen. MM_1 und das Lot in O sind dabei als Einströmungslinien, die beiderseitigen Fortsetzungen nach außen als Ausströmungslinien zu betrachten.

Hat man ein Gefäß, dessen Gestalt die äußere Lemniskate der Figur 172 ist und denkt man sich den Boden an den Brennpunkten durchbohrt, so hat man ein angenähertes Bild von dem Gange der Stromlinien und Niveaukurven unter Voraussetzung niedrigen Wasserstandes und Konstanthaltung desselben am Rande des Gefäßes.

Denkt man sich eine elastische Platte von der Form der äußeren Lemniskate der Figur 172, die längs des Randes horizontal aufliegt und in den Brennpunkten gleich stark belastet wird, so hat man unter gewissen theoretischen Voraussetzungen ein angenähertes Bild von Biegung der Platte, und zwar kann man mehrere Theorien aufstellen. Nach der einen würden die Lemniskaten Niveaulinien sein, die Hyperbeln Linien stärksten Gefälles. Nach einer andern würden die Lemniskaten Linien für konstante Werte einer Funktion der größten Biegungsspannung sein, woraus sich Entsprechendes über die Krümmungsradien aussagen lassen würde. Damit soll über die Richtigkeit solcher Theorien nichts behauptet werden. Es steht zu

vermuten, daß eine Reihe von Physikern ihre Theorien der Lehre von der konformen Abbildung geradezu anbequemt haben, so daß an Stelle ihrer Hypothesen eine einzige gesetzt werden könnte, welche die Erhaltung der Konformität und der unendlich kleinen Quadrate bedeutet. Dies dürfte z. B. bei der Forchheimerschen Theorie der Grundwasserstände der Fall gewesen sein, ebenso bei der Theorie freier Ausflußstrahlen von Helmholtz und Kirchhoff.

Zu Fig. 180 läßt sich bezüglich der Parabeln und cardioidischen Kurven Entsprechendes aussagen, nur tritt für die außerhalb der Cardioide liegenden Isothermen die Unbequemlichkeit ein, daß man sich die Ebenen doppelt bedeckt denken muß.

Auf kartographische und andere Deutungen soll hier nicht eingegangen werden, auch nicht auf den schwierigen Fall der Torsionsprobleme nach St. Venants Theorie, auch nicht auf gewisse Probleme der Kapillarität.]

[256] Die reiche Anwendbarkeit der Transformationen $Z = z^2$ und $z = \sqrt{Z}$ auf die Lehre von den Polarmomenten 1^{ter} und 2^{ter} Ordnung, von der Flächen- und Bogenberechnung, von der Elastizität, von den stationären Strömungen der Elektrizität, der Wärme, des Grundwassers und der Flüssigkeiten überhaupt, auf stereometrische Berechnungen u. dgl. sollten die Ingenieure veranlassen, sich in höherem Grade mit der Lehre von den konformen Abbildungen zu beschäftigen.

Es wird gestattet sein, außerhalb des Zusammenhanges auf einige besonders wichtige Anwendungen der Abbildungslehre hinzudeuten.

Die Abbildungen

$$Z = \frac{1}{z}, \quad Z = \frac{a + bz}{d + ez} \quad (\text{z. B. } Z = \frac{a - z}{a + z})$$

sind identisch mit der Kreisverwandtschaft von Möbius. An den entsprechenden Kreisbüscheln und Kreisscharen hat Kirchhoff zuerst die Theorie der stationären Elektrizitätsströmung erörtert, Thomson zuerst die Theorie der elektrischen Bilder erläutert. An die Abbildung $Z = \frac{1}{z}$ lassen sich gewisse Gravitationsprobleme anschließen.

Die Abbildung

$$Z = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)$$

führt auf die wichtigen elliptischen Koordinaten (Fig. 207) und wurde zuerst von Prof. E. Heine physikalisch verwertet. Die erste Einführung der letzteren verdankt man Jacobi.

Durch die Abbildung $Z = z^n$ bzw. $z = \sqrt[n]{Z}$ lernt man die Lemniskaten und Hyperbeln n^{ter} Ordnung kennen, die ebenfalls in physikalischer Hinsicht von Wichtigkeit sind.

Die Abbildungen

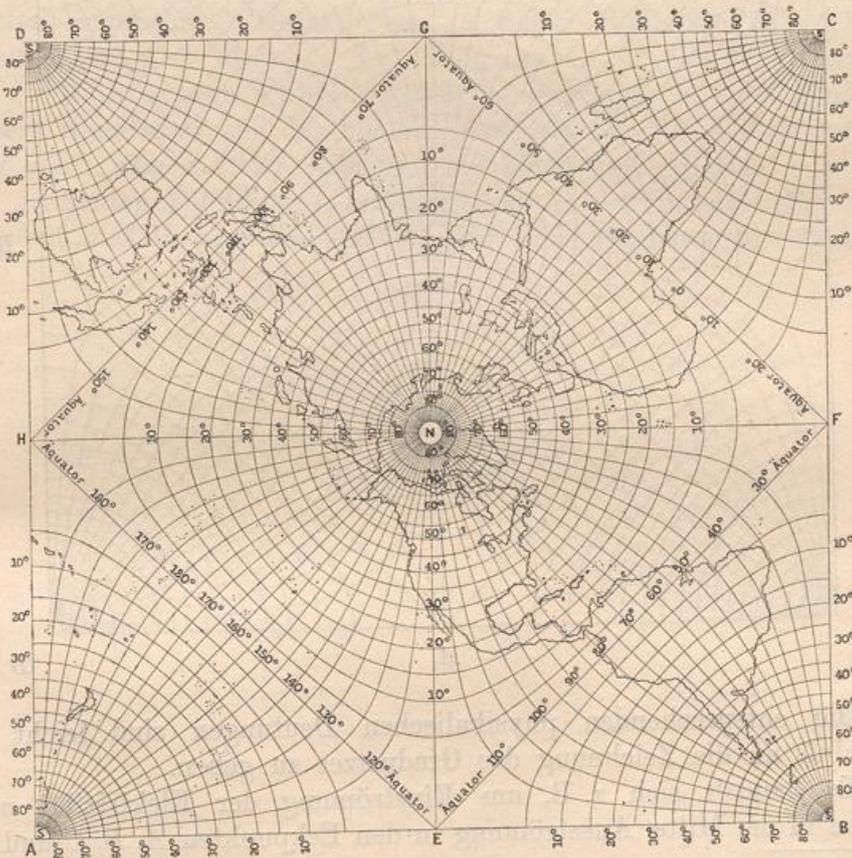
$$Z = \sqrt{1 - z^2}, \quad Z = \sin z, \quad Z = \cos z$$

führen auf die zuerst von Lamé behandelten lemniskatischen Koordinaten, die oben eingehender besprochen wurden.

Die Abbildungen $Z = \lg z$ und $z = e^Z$ geben den Zusammenhang der Mercatorkarte mit der Polarkarte von Hipparch und Ptolemäus, erleichtern die Theorie der logarithmischen Spiralen und lassen im Anschluß an Burmesters Untersuchungen kinematische Deutungen zu. Auch Gravitations- und Potentialprobleme lassen sich anschließen.

Ganz neue Bereiche des mathematischen Denkens werden durch die Abbildung mittels der elliptischen Funktionen $Z = \sin am z$, $Z = \cos am z$ und $Z = \Delta am z$ eröffnet, durch deren doppelperiodischen Charakter die Möglichkeit eröffnet wird, die ganze Ebene auf ein Rechteck konform zu übertragen.

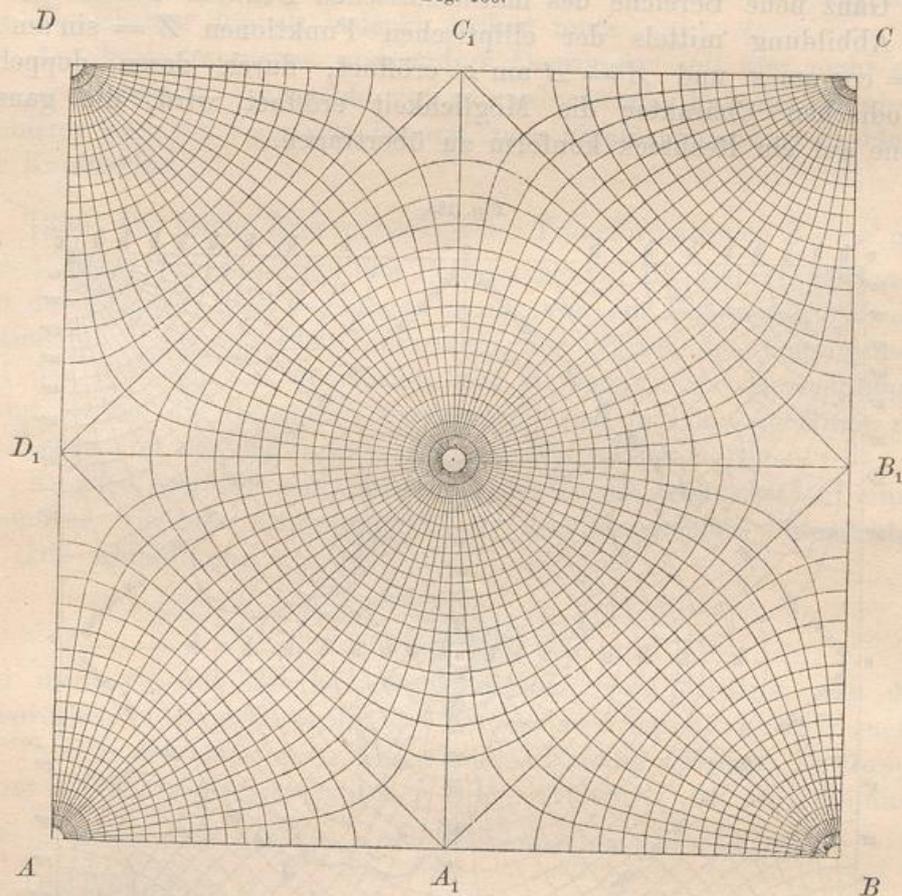
Fig. 185.



So ist z. B. im Anschluß an Jacobi, Schering und Schwarz durch Peirce gezeigt worden, wie man im Stande ist, die Kugelober-

fläche mit dem Netz der Meridiane und Parallelkreise auf der Fläche eines Quadrates darzustellen. Die Unstetigkeitspunkte sind geschickter Weise in den Ocean verlegt worden. Der Äquator erscheint als Quadrat. Die symmetrische Fortsetzung der einzelnen Oktanten läßt zwanglos die doppelte Periodizität erkennen. Aus geographischen Gründen ist in Figur 185 nicht die Einteilung in kleine Quadrate gewählt, sondern die Einteilung in Rechtecke, die, wie auf dem Globus, nur in der Nähe des Äquators quadratisch erscheinen, dagegen nach den Polen hin das Verhältnis der Länge zur Breite gesetzmäßig zunehmen lassen.*)

Fig. 186.



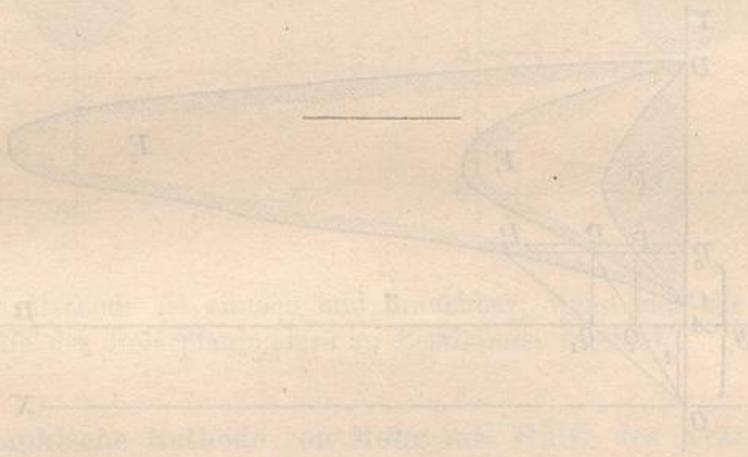
Die entsprechenden physikalischen Deutungen sind leicht im Anschluß an die Zeichnung des Gradnetzes zu geben.

Es handelt sich z. B. um Einströmung der Elektrizität oder Wärme in der Mitte, Ausströmung in den Eckpunkten A , B , C und D .

*) Die Figuren 185 und 186 sind nach einem Cliché angefertigt worden, welches von Herrn Prof. A. dr. Guébard in Paris freundlichst zur Verfügung gestellt wurde.

Denkt man sich das Quadrat $A_1B_1C_1D_1$ aus der Figur herausgeschnitten, so lassen sich Deutungen entsprechender Art ablesen, auch solche über den Zustand einer quadratisch geformten elastischen Platte, die in der Mitte belastet ist, auch über die Kapillarität im Innern eines engen Röhrchens von quadratischem Querschnitt, oder über die Wasserstandslinien in dem Terrain einer quadratisch geformten Insel, in deren Mitte sich ein Pumpwerk befindet. Nur ist zu beachten, daß die Annahme der Hypothesen, die dem Charakter der Konformität mit den einfacheren Koordinatensystemen entsprechen, an der Hand des Experimentes auf ihre Zulässigkeit zu prüfen ist.

Ohne Kenntnis des konformen Zusammenhanges ist ein Eindringen in die feineren Theorien undenkbar. Dieser spielt schon jetzt in einigen Lehrbüchern der Mechanik eine hervorragende Rolle, und Kirchhoff und Helmholtz haben mit dem Hülfsmittel der konformen Abbildung sogar die schwierige Theorie der freien Ausflußstrahlen angebahnt. Deshalb sei an dieser Stelle auf die „Einführung in die Theorie der isogonalen Verwandtschaften und der konformen Abbildungen“ hingewiesen, zu deren Studium grössere Kenntnisse aus der höheren Analysis nur für den Schlufsteil nötig sind, während der Anfang ganz elementar gehalten ist. Die oben genannten Abbildungen und zahlreiche andere sind dort eingehend behandelt und die angedeuteten physikalischen Beziehungen erläutert.]



die Punkte $A, B, C, D, E, F, G, H, I, K, L, M, N, O, P, Q, R, S, T, U, V, W, X, Y, Z$ sind die Ecken der verschiedenen Figuren, die in der Abbildung dargestellt sind. Die Punkte $A, B, C, D, E, F, G, H, I, K, L, M, N, O, P, Q, R, S, T, U, V, W, X, Y, Z$ sind die Ecken der verschiedenen Figuren, die in der Abbildung dargestellt sind.