



UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Die Statik der Hochbau-Constructions

Landsberg, Theodor

Stuttgart, 1899

2. Abschnitt: Elemente der Elasticitäts- und Festigkeitslehre.

[urn:nbn:de:hbz:466:1-77733](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466:1-77733)

2. Abschnitt.

Elemente der Elasticitäts- und Festigkeitslehre.

1. Kapitel.

Grundbegriffe.

74.
Molecüle.

Jeder in der Natur vorkommende Körper besteht aus einzelnen, mit einander verbundenen, außerordentlich kleinen Theilen, den sog. Molecülen. Diese einzelnen Theile sind nicht unabänderlich fest zu einem starren Ganzen mit einander verbunden; vielmehr verändert sich die gegenseitige Lage derselben, also auch die Form des Körpers, wenn Kräfte auf den Körper wirken. Größe und Form der Aenderung sind vom Material des Körpers, von seiner Form, von der Größe und Wirkungsdauer der wirkenden Kräfte, von der Temperatur und von verschiedenen anderen Umständen abhängig.

Wenn die Kräfte, welche die Formveränderung hervorgebracht haben, zu wirken aufhören, so nimmt unter gewissen Bedingungen der Körper seine frühere Form wieder an.

75.
Elasticität.

Jeder Körper hat die Eigenschaft, unter der Einwirkung von Kräften seine Form zu verändern und nach dem Aufhören der Kräftewirkung seine ursprüngliche Form mehr oder weniger vollständig wieder anzunehmen. Man nennt diese Eigenschaft Elasticität.

Vollkommen elastisch würde ein Körper sein, der nach dem Aufhören der Kräfteeinwirkung seine frühere Gestalt genau wieder annähme; vollkommen unelastisch derjenige Körper, welcher die in Folge der Kräfteeinwirkung geänderte Gestalt genau beibehalten würde, auch wenn die Kräfte zu wirken aufhörten.

Es giebt in der Natur weder vollkommen elastische, noch vollkommen unelastische Körper. Daraus folgt, daß kein Körper nach dem Aufhören der Kräfteeinwirkung vollständig seine frühere Form wieder annimmt; je näher er dem vollkommen elastischen Körper steht, desto mehr verschwindet die Formänderung; niemals aber verschwindet sie ganz.

76.
Elastische und
bleibende Form-
änderung.

Man unterscheidet die elastische Formänderung, d. h. diejenige, welche mit dem Aufhören der Kräfteeinwirkung wieder verschwindet, und die bleibende Formänderung, d. h. diejenige, welche nicht wieder verschwindet, auch wenn die Kraft zu wirken aufhört.

Die gesammte Formänderung ist die Summe der bleibenden und der elastischen Formänderung; sie ist eine Folge der durch die äusseren Kräfte im Körper hervorgerufenen inneren Kräfte, welche, auf die Flächeneinheit bezogen, als Spannungen bezeichnet werden. Legt man der Betrachtung einen auf Zug oder Druck beanspruchten, geraden, prismatischen Stab von der ursprünglichen Länge l zu Grunde, so bezeichnet man das Verhältniß der absoluten Verlängerung Δl zur ursprünglichen Länge, d. h. $\frac{\Delta l}{l}$ als Dehnung oder Verlängerungsverhältniß. Für einige wenige, aber gerade die wichtigsten Baustoffe, nämlich für Schweifseifen, Flusseifen und Stahl ist die Grösse der Dehnung direct proportional der im Stabe herrschenden Spannung, so lange diese Spannung eine gewisse Grenze nicht überschreitet. Man bezeichnet die Grenzspannung, bis zu welcher die Proportionalität zwischen Dehnung (bezw. Längenänderung) des Stabes und der Spannung im Stabe stattfindet, als Proportionalitätsgrenze. Innerhalb dieser Grenze ist für die genannten Baustoffe auch die bleibende Dehnung so gering, daß sie für die Praxis als nicht vorhanden angenommen werden kann; man braucht demnach innerhalb dieser Grenze nur die elastische Formänderung zu berücksichtigen.

Die Grenzspannung, bis zu welcher die bleibende Formänderung so gering ist, daß sie vernachlässigt werden kann, bezeichnet man als Elasticitätsgrenze. Für die oben angeführten Baustoffe fallen demnach Elasticitätsgrenze und Proportionalitätsgrenze zusammen, so daß im Nachfolgenden für diese Baustoffe die Proportionalitätsgrenze als Elasticitätsgrenze bezeichnet werden soll.

Für Gufseifen, Beton, Cementmörtel, Steine findet nach neueren Versuchen¹⁷⁾ keine directe Proportionalität zwischen Dehnung und Spannung statt; man kann demnach bei diesen Baustoffen auch nicht von einer Proportionalitätsgrenze reden.

Die Elasticitätsgrenze ist für die verschiedenen Baustoffe, aber auch für die verschiedenen Arten der Beanspruchung verschieden. Im Allgemeinen wird sie für Beanspruchung durch Zug bei demselben Baustoff eine andere sein, als für Beanspruchung durch Druck.

Nach den Versuchen *Bauschinger's*¹⁸⁾ ist für Schweifseifen, Flusseifen und Stahl, selbst für dieselbe Art der Beanspruchung, die Elasticitätsgrenze außerordentlich veränderlich. Man kann dieselbe durch gewisse Arbeiten allmählich immer mehr bis zu einer oberen Grenze heben, die bei manchen Stoffen nahe der Bruchgrenze liegt. Andererseits kann man die Elasticitätsgrenze sehr stark hinabwerfen und wieder heben, dann aber nur bis zu einer weit unter der ursprünglichen Grenze liegenden Höhe. Diese letztere bezeichnet *Bauschinger* als die natürliche Elasticitätsgrenze.

Wird bei den Stoffen mit ausgesprochener Elasticitätsgrenze die wirkende Spannung über die Elasticitätsgrenze gesteigert, so wächst die Formänderung wesentlich rascher, als die Spannung; insbesondere tritt eine sehr merkbare bleibende Formänderung ein; eine weitere Vergrößerung der Spannung bewirkt schliesslich das Zerreißen, Zerdrücken oder Zerbrechen des Körpers.

Diejenige Spannung, welche ein Stab vom Querschnitte gleich der Flächeneinheit höchstens ertragen kann, ehe er zerstört wird, nennt man den Festigkeits-Coefficienten des Materials.

77-
Festigkeits-
Coefficient.

¹⁷⁾ BACH, C. Elasticität und Festigkeit. 3. Aufl. Berlin 1898.

¹⁸⁾ Siehe: Vortrag *Bauschinger's* auf der Wanderversammlung des Verbandes deutscher Architekten- und Ingenieur-Vereine zu Frankfurt a. M. 1866. Verbandsmittheilungen, Bd. 1, S. 230 u. ff.

BAUSCHINGER, J. Mittheilungen aus dem mechanisch-technischen Laboratorium der K. technischen Hochschule in München. Heft XIII. München 1866.

Auch die Festigkeits-Coefficienten sind nach dem verschiedenen Baustoff und nach den verschiedenen Beanspruchungsweisen verschieden.

78.
Aufgabe
der
Construction.

Man muß an jede Bauconstruction zunächst die Forderung stellen, daß sie durch die wirkenden Kräfte nicht zerstört wird. Mit dieser Anforderung allein darf man sich aber nicht begnügen. Das Verhalten der Baustoffe, sobald sie über die Elasticitätsgrenze hinaus beansprucht werden, ist wenig zuverlässig, und man stellt deshalb bei denjenigen Baustoffen, für welche die Elasticitätsgrenze genügend sicher bestimmt werden kann, die Bedingung, daß die Construction niemals über die Elasticitätsgrenze hinaus in Anspruch genommen werde.

79.
Stabförmige
Körper.

In den folgenden Untersuchungen werden wir uns hauptsächlich mit den sog. stabförmigen Körpern beschäftigen. Stabförmige Körper sind solche, bei denen die Längenabmessung die Breiten- und Höhenabmessungen wesentlich übertrifft.

Schneidet man den Körper an irgend einer Stelle durch eine senkrecht zur Längenrichtung an dieser Stelle gerichtete Ebene, so erhält man einen Querschnitt des Körpers. Die Verbindungslinie der Schwerpunkte aller Querschnitte des Körpers heißt die Axe des Körpers.

Ist die Axe eine Gerade, so hat man einen geraden stabförmigen Körper; alsdann sind alle Querschnitte des Körpers parallel. Ist die Axe eine krumme Linie, so ist der Körper ein krummer stabförmiger Körper.

80.
Arten der
Beanspruchung
und
Festigkeit.

Je nach der Wirkungsweise der Kräfte werden die Körper verschiedenartig beansprucht. Man unterscheidet

- 1) Beanspruchung auf Zug und Druck;
- 2) Beanspruchung auf Schub;
- 3) Beanspruchung auf Biegung;
- 4) Beanspruchung auf Drehung.

Zu 1). Beanspruchung auf Zug und Druck tritt auf, wenn die auf den Körper wirkenden Kräfte die Querschnitte so gegen einander zu verschieben streben, daß sich ihre Entfernung in der Richtung der Axe gegen einander verändert, vergrößert oder verringert.

Unter Zug-, bzw. Druckfestigkeit wird diejenige Kraft verstanden, welche in der Richtung der Axe auf die Flächeneinheit des Querschnittes höchstens wirken darf, ohne daß durch bloßen Zug, bzw. Druck eine Zerstörung des Körpers stattfindet; die geringste Vergrößerung dieser Kraft würde demnach den Zusammenhang des Körpers zerstören.

Zu 2). Beanspruchung auf Schub oder Abscheren findet statt, wenn die äußeren Kräfte das Bestreben haben, zwei benachbarte Querschnitte längs einander zu verschieben, ohne daß ihre Entfernung in der Richtung der Axe sich ändert.

Unter Schub- oder Abscherungsfestigkeit wird diejenige Kraft verstanden, welche auf die Flächeneinheit des Querschnittes höchstens wirken darf, ohne daß eine Zerstörung des Körpers an dieser Stelle durch Verschiebung der Nachbarquerschnitte gegen einander erfolgt.

Zu 3). Die Beanspruchung auf Biegung tritt auf, wenn die äußeren Kräfte das Bestreben zeigen, zwei Nachbarquerschnitte um eine Axe derart zu drehen, daß die Entfernung zweier Querschnitte an den verschiedenen Querschnittspunkten sich ändert.

Biegungsfestigkeit ist die Beanspruchung, welche die am meisten gespannten Fasern des Körpers für die Flächeneinheit des Querschnittes höchstens ertragen

können, ehe eine Zerstörung des Körpers durch Biegen, d. h. hier, bevor ein Zerbrechen eintritt.

Zu 4). Die Drehungsbeanspruchung tritt auf, wenn die wirkenden Kräfte zwei Nachbarquerchnitte gegen einander so zu verdrehen streben, daß ihre Entfernung gleich bleibt. Die Drehungsbeanspruchung ist für die Hochbau-Constructionen von untergeordneter Bedeutung.

Literatur.

Bücher über »Lehre von der Elasticität und Festigkeit«.

Indem auf die Werke über »Mechanik«, die stets einen Abriss über »Elasticität und Festigkeit« enthalten, nur ganz allgemein verwiesen werden mag, seien im Nachstehenden bloß die einschlägigen Sonderchriften namhaft gemacht:

- BARLOW, P. *Treatise on the strength of materials*. London 1833. — Neue Ausg. von W. HUMBER. 1867.
 LAMÉ, G. *Leçons sur la théorie mathématique de l'élasticité des corps solides*. Paris 1852. — 2. Aufl. 1866.
 MOLL, C. L. & F. REULEAUX. *Die Festigkeit der Materialien etc.* Braunschweig 1853.
 MORIN, A. *Résistance des matériaux*. Paris 1853. — 3. Aufl. 1862.
 ROFFIAEN, E. *Traité sur la résistance des matériaux dans les constructions*. Lüttich 1858.
 BOURDAIS, J. *Traité pratique de la résistance des matériaux appliquée à la construction etc.* Paris 1859.
 JEEP, W. *Die Festigkeit der Materialien etc.* Weimar 1861.
 SHIELDS, F. W. *The strains on structures of ironwork*. London 1861.
 CLEBSCH, A. *Theorie der Elasticität fester Körper*. Leipzig 1862.
 GRASHOF, F. *Theorie der Elasticität und Festigkeit etc.* Berlin 1866. — 2. Aufl. 1878.
 WINKLER, E. *Die Lehre von der Elasticität und Festigkeit etc.* Theil 1. Prag 1867.
 ANDERSON, C. E. *The strength of materials and structures*. London 1872.
 MÜLLER-Breslau, H. *Elementares Handbuch der Festigkeitslehre etc.* Berlin 1875.
 KURZ, A. *Taschenbuch der Festigkeitslehre etc.* Berlin 1877.
 HATFIELD, R. G. *Theory of transverse strains and its application to the construction of buildings*. New-York 1877.
 SERGENT, E. *Traité pratique de la résistance des matériaux*. Paris 1878. — 5. Aufl. 1884.
 KENT, W. *The strength of materials*. New-York 1879.
 LAMBERT, P. Tabellarische Zusammenstellung der Resultate aus der angewandten Festigkeitslehre, mit besonderer Berücksichtigung von Constructionen in Eisen und Holz. Zürich 1880.
 LINGLIN, TH. *Traité élémentaire de la résistance des matériaux*. Paris 1880.
 MADAMET, A. *Résistance des matériaux*. Paris 1881.
 SIMERKA, V. *Elemente der technischen Mechanik etc.* Theil 1: *Elemente der Festigkeitslehre*. Pilsen 1882.
 BOX, TH. *A practical treatise on the strength of materials etc.* London 1883.
 VIGREUX, L. *Traité théorique et pratique de la résistance des matériaux*. Paris 1885.
 STONEY, B. B. *The theory of stresses in girders and similar structures etc.* London 1885.
 UHLICH, P. *Die Festigkeitslehre und ihre Anwendung*. Mittweida 1885. — 2. Aufl.: Dresden 1887.
 PLANAT, P. *Pratique de la mécanique appliquée à la résistance des matériaux*. Paris 1887.
 MOOS, N. A. *Elementary treatise on the strength of materials and strains in structures*. London 1887.
 AERTS, L. *Eléments pratiques de la résistance des matériaux*. Paris 1888.
 BRUNE, E. *Cours de construction professé à l'école des beaux-arts. 1^e partie: Résistance des matériaux publiée avec le concours de A. FLAMANT*. Paris 1888.
 JOHNEN, P. J. *Elemente der Festigkeitslehre etc.* Weimar 1889.
 LAUENSTEIN, R. *Die Festigkeitslehre etc.* Stuttgart 1889. — 4. Aufl. 1898.
 BACH, C. *Elasticität und Festigkeit*. Berlin 1889. — 3. Aufl. Berlin 1898.
 GLINZER. *Grundriss der Festigkeitslehre*. Dresden 1890.
 MÜLLER-Breslau, F. B. *Die neueren Methoden der Festigkeitslehre und der Statik der Bauconstructionen*. Leipzig 1893—96.
 KECK, W. *Vorträge über Elasticitäts-Lehre als Grundlage für die Festigkeits-Berechnung der Bauwerke*. Hannover 1893.
 DUQUESNAY, M. *Résistance des matériaux*. Paris 1893. — 2. Aufl. 1897.

- TETMAJER. Die Gesetze der Knickfestigkeit. Zürich 1896.
 KECK, W. Vorträge über Mechanik. Theil 2. Hannover 1897.
 FÖEPL, A. Vorlesungen über Technische Mechanik. Band 3: Festigkeitslehre. Leipzig 1897.
 DUPLAIX, M. *Résistance des matériaux etc.* Paris 1897.

2. Kapitel.

Zug und Druck, bzw. Zug- und Druckfestigkeit.

8r.
Elasticitäts-
gesetz.

Die reine Zug- und Druckelasticität kommt nur bei geraden Stäben vor.

Die Gesetze für alle Arten der Beanspruchung ergeben sich aus denjenigen, welche für die Zug- und Druckbeanspruchung gelten; demnach muß die letztere die Grundlage für die ganze Behandlung bilden.

Die gefammte Elasticitätslehre beruht auf folgendem Gesetze:

1) Die Verlängerung, bzw. Verkürzung eines in seiner Axenrichtung, d. h. auf Zug- oder Druckelasticität beanspruchten Stabes ist, so lange die Beanspruchung innerhalb der Elasticitätsgrenze bleibt, der ursprünglichen Länge des Stabes direct proportional. Das Verhältniß der Verlängerung (positiv oder negativ genommen) zu der ursprünglichen Länge wird die Dehnung oder das Verlängerungsverhältniß genannt.

2) Die Verlängerung eines, wie angegeben, beanspruchten Stabes ist, so lange die Spannung desselben innerhalb der Elasticitätsgrenze liegt, direct proportional der im Stabe herrschenden Spannung. Ist also die Spannung im Stabe σ , so ist die Verlängerung, also auch das Verlängerungsverhältniß σ -mal so groß, als bei der Spannung 1.

Dasjenige Verlängerungsverhältniß, welches bei der Spannung eintritt, die gleich der Krafteinheit ist, bezeichnet man mit $\frac{1}{E}$. Nennt man die ursprüngliche Länge des Stabes l und die bei der Spannung σ eintretende Verlängerung Δl , so findet nach dem unter 2 gegebenen Gesetze statt:

$$\frac{\Delta l}{l} = \sigma \frac{1}{E} = \frac{\sigma}{E} \dots \dots \dots 34.$$

Die Gleichung 34 kann man als die Grundgleichung der Elasticitätslehre auffassen (*Hooke'sches Gesetz*).

Der Werth E ist vom Baustoff abhängig; man nennt E Elasticitäts-Modulus, Elasticitäts-Coefficient oder Elasticitätsziffer, auch wohl Elasticitätsmaß. E ist der umgekehrte (reciproke) Werth des Verlängerungsverhältnisses, welches durch die Kraft 1 an einem Stabe vom Querschnitt gleich der Flächeneinheit hervorgerufen wird. *Bach* bezeichnet $\frac{1}{E}$ mit α , und nennt diesen Werth den Dehnungscoefficienten; dies ist also das Verlängerungsverhältniß, welches bei der Belastung eines Stabes vom Querschnitt gleich der Flächeneinheit (1 qcm) mit der Lastenheit (1 kg) eintritt.

Das in Gleichung 34 ausgesprochene »*Hooke'sche Gesetz*« hat von den wichtigeren Baustoffen nur für Schweifseisen, Flusseisen und Stahl Giltigkeit. Allgemein scheint der Ausdruck nach den neuesten Untersuchungen von *Bach* und *Schüle* zu lauten:

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{\sigma^m}{E} \dots \dots \dots 35.$$

Für die vorgenannten Baustoffe ist dann $m = 1$, woraus sich die Gleichung 34 ergibt. Für Gufseifen und Körper aus Cementmörtel und Beton fand *Bach*¹⁹⁾ bei

Baustoff	Beanspruchung auf Zug		Beanspruchung auf Druck	
	E	m	E	m
1) Gufseifen:				
Körper vorher nicht belastet	1338000	1,083	1320000 1043000	1,0885 1,035
Körper vorher stark belastet	1150000	1,1	1217000 1124000	1,052 1,048
2) Körper aus Cementmörtel:				
1 Theil Cement, 1½ Theile Donaufand	—	—	356000	1,11
1 Theil Cement, 3 Theile Donaufand	—	—	315000	1,15
1 Theil Cement, 4½ Theile Donaufand	—	—	230000	1,17
3) Körper aus Beton:				
1 Theil Cement, 2½ Theile Donaufand, 5 Theile Donaukies	—	—	298000	1,145
1 Theil Cement, 5 Theile Donaufand, 6 Theile Donaukies	—	—	280000	1,137
1 Theil Cement, 5 Theile Donaufand, 10 Theile Donaukies	—	—	217000	1,157
1 Theil Cement, 2½ Theile Eggingerfand, 5 Theile Kalksteinfchotter	—	—	457000	1,157
1 Theil Cement, 3 Theile Donaufand, 6 Theile Kalksteinfchotter	—	—	380000	1,164
1 Theil Cement, 5 Theile Eggingerfand, 10 Theile Kalksteinfchotter	—	—	367000	1,207
	Kilogr. für 1 qcm		Kilogr. für 1 qcm	

Wirkt auf einen Stab, dessen Querschnitt F Flächeneinheiten enthält, dessen Querschnitt also gleich F ist, eine Kraft P und kann man annehmen, daß diese Kraft sich gleichmäÙig über den ganzen Querschnitt vertheilt, so ist die Spannung für die Flächeneinheit derselben $\sigma = \frac{P}{F}$, und wenn man diesen Werth für σ in die Gleichung für $\frac{\Delta l}{l}$ einsetzt, erhält man

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{P}{FE} \quad \text{oder} \quad \Delta l = \frac{Pl}{FE} \quad \dots \dots \dots 36.$$

Die hier vorgeführten Ergebnisse gelten fowohl, wenn die Verlängerung eine positive, d. h. eine wirkliche Verlängerung, als auch wenn sie eine negative, d. h. eine Verkürzung ist. Sie gelten also fowohl für Zug- als auch für Druckbeanspruchungen; nur hat für erstere im Allgemeinen E einen anderen Werth, als für letztere.

Es ist üblich, die Zugbeanspruchungen als positive und die Druckbeanspruchungen als negative Größen einzuführen. Im Folgenden soll, wo nichts Gegentheiliges bemerkt ist, diese Bezeichnungsweise durchgeführt werden.

Die Gleichung $\sigma = \frac{P}{F}$ kann benutzt werden, um die Größe der Kraft zu bestimmen, mit welcher ein Stab von gegebenem Querschnitt höchstens auf Zug-^{82.} bzw. Druck beansprucht werden darf. Zulässige Beanspruchung.

Nach dieser Gleichung ist $P = \sigma F$. Wird für σ der größte Werth \mathfrak{S} eingesetzt, welchen das Material auf die Flächeneinheit des Querschnittes höchstens erleiden kann, ohne zerstört zu werden, d. i. der Festigkeits-Coefficient, so ergibt sich $\mathfrak{P}_{max} = \mathfrak{S} F$. In dieser Gleichung ist \mathfrak{P}_{max} diejenige Belastung, deren geringste

¹⁹⁾ Siehe: *BACH*, a. a. O., S. 33, 34, 57, 58.

Vergrößerung das Zerreißen, bezw. Zerdrücken des Stabes zur Folge haben würde; \mathfrak{S} ist nach Früherem die Zug-, bezw. Druckfestigkeit.

Die Stäbe werden nicht bis zu dieser Grenze beansprucht; vielmehr werden Sicherheits-Coefficienten eingeführt, welche für verschiedene Baustoffe verschiedene Werthe haben. Man trägt durch dieselben den etwa möglichen Ueberlastungen, den Fehlern im Baustoff, den im Laufe der Zeit möglichen Veränderungen durch Rost, Faulen etc., den Stößen und anderen ungünstigen Einflüssen Rechnung.

Bezeichnet n den Sicherheits-Coefficienten, so ist als wirkliche Größtbelastung P des Stabes nur $\frac{1}{n}$ von \mathfrak{P}_{max} einzuführen, d. h. es darf nur sein:

$$P = \frac{\mathfrak{S} F}{n}.$$

Man nennt nun $\frac{\mathfrak{S}}{n}$ die zulässige Beanspruchung, die im Folgenden mit K bezeichnet werden soll. Es ist demnach

$$K = \frac{\mathfrak{S}}{n} \quad \text{und} \quad P = KF.$$

Aus den vorstehenden Gleichungen folgt als Bedingungsgleichung für die Querschnittsgröße:

$$F = \frac{P_{max}}{K} \dots \dots \dots 37.$$

In dieser Gleichung bedeutet P_{max} die im ganzen Stabe höchstens auftretende Kraft.

Für die meisten Baustoffe muß man sich damit begnügen, die zulässige Beanspruchung K aus den Festigkeits-Coefficienten \mathfrak{S} unter Annahme eines nach der Erfahrung ausreichenden Sicherheits-Coefficienten n abzuleiten. Die üblichen Werthe für K und die wichtigsten Baustoffe sind in den Tabellen auf S. 64 angegeben.

83.
Querschnitts-
bestimmung
für
Schweißseifen-
und
Flusseisenstäbe.

Für solche Baustoffe, für welche die Elasticitätsgrenze mit genügender Sicherheit angegeben werden kann (Schweißseifen, Flusseifen, Stahl) erhält man Formeln für die Querschnittsbestimmung durch nachstehende Ueberlegung.

Da die Baustoffe, sobald die Beanspruchungen die Elasticitätsgrenze überschreiten, merkbare bleibende Veränderungen erleiden, so muß die Ueberschreitung der Elasticitätsgrenze bei der Belastung vermieden werden. Die Lage der Elasticitätsgrenze ist aber nach Früherem nicht mit vollständiger Gewisheit bekannt; auch haben kleine Arbeitsfehler sehr großen, schädlichen Einfluß. Deshalb muß man mit der zulässigen Beanspruchung wesentlich unter der Elasticitätsgrenze bleiben, so daß auch eine unbeabsichtigte Vergrößerung der Spannung, in Folge etwaiger Fehler, selbst die tiefer als erwartet liegende Elasticitätsgrenze nicht erreicht. Beim Schweißseifen und Flusseifen, den wichtigsten einer genauen Berechnung zu unterwerfenden Baustoffen, kann man diese zulässige Beanspruchung auf die Hälfte bis zwei Drittel der Spannung an der Elasticitätsgrenze fest stellen. Wenn die Belastung ruhend, ohne Stöße, stattfindet, so ist die höhere Grenze zulässig; wirkt die Last dagegen in Verbindung mit Stößen, so ist die untere Grenze einzuführen.

84.
Nur gezogene
oder nur
gedrückte
Schweißseifen-
und
Flusseisenstäbe.

Für schweiß- und flusseiserne Stäbe, welche nur gezogen, bezw. nur gedrückt werden, kann man einen genaueren Anhalt über die zu wählenden Beanspruchungen folgendermaßen finden. Wenn der Stab abwechselnd eine höhere und niedrigere Beanspruchung zu erleiden hat, etwa dadurch, daß die betreffende Construction zeitweilig außer dem Eigengewicht noch eine Nutzlast trägt, so mögen die obere

und untere Grenze der ganzen Stabkraft P_{max} und P_{min} fein; die entsprechenden Grenzen der auf die Flächeneinheit entfallenden Spannungen seien

$$\sigma_{max} = \frac{P_{max}}{F} \quad \text{und} \quad \sigma_{min} = \frac{P_{min}}{F}.$$

Bei dieser Art der Beanspruchung kann von der Rücksichtnahme auf das Vorzeichen abgesehen werden; man braucht hier nur die absoluten Werthe der Stabkräfte in das Auge zu fassen.

Die Verkehrslast tritt stets mit größeren oder geringeren Stößen verbunden auf, welchem Umfande man dadurch Rechnung trägt, dafs man dieselbe mit einem Werthe $(1 + \mu)$ multiplicirt in die Rechnung einführt; dabei ist μ der sog. Stoßcoefficient. Durch das Eigengewicht allein wird P_{min} , bezw. σ_{min} erzeugt; durch Eigengewicht und Verkehrslast werden P_{max} , bezw. σ_{max} hervorgerufen; demnach wird die Verkehrslast allein

$$(P_{max} - P_{min}), \quad \text{bezw.} \quad (\sigma_{max} - \sigma_{min})$$

erzeugen. Wird nun die Verkehrslast mit $(1 + \mu)$ multiplicirt eingeführt, so wird durch dieselbe die Spannung $(1 + \mu)(\sigma_{max} - \sigma_{min})$ auf die Flächeneinheit des Querschnittes hervorgerufen; die gefammte Beanspruchung auf die Flächeneinheit ist alsdann

$$\sigma_{min} + (1 + \mu)(\sigma_{max} - \sigma_{min}).$$

Wäre man vor unbeabsichtigten Spannungen in der Construction ganz sicher, so könnte man diese soeben entwickelte Spannung gleich derjenigen an der Elasticitätsgrenze setzen; da aber unbeabsichtigte Spannungen sehr wohl auftreten können, da eine Querschnittsverminderung durch Rosten nicht ausgeschlossen ist, auch wohl einmal höhere Verkehrslasten, als angenommen sind, vorkommen können, so wird es sich empfehlen, die oben vorgeführte Spannung nur auf $\frac{2}{3}$ der Spannung an der Elasticitätsgrenze fest zu stellen. Nimmt man die Spannung an der Elasticitätsgrenze

für Schweifseisen zu 1600 kg für 1 qcm,

für Flusseisen zu 2000 kg für 1 qcm

an und rundet man ab, so ergibt sich als Bedingungsgleichung

$$\left. \begin{array}{l} \text{für Schweifseisen: } \sigma_{min} + (1 + \mu)(\sigma_{max} - \sigma_{min}) = 1050 \\ \text{für Flusseisen: } \sigma_{min} + (1 + \mu)(\sigma_{max} - \sigma_{min}) = 1350 \end{array} \right\} \dots \dots 38.$$

Die Auflöfung nach σ_{max} ergibt für Schweifseisen:

$$\sigma_{max} = \frac{1050}{1 + \mu - \mu \frac{\sigma_{min}}{\sigma_{max}}} \dots \dots \dots 39.$$

σ_{max} ist die zulässige Beanspruchung, und die erforderliche Querschnittsfläche des Stabes wird

$$F = \frac{P_{max}}{\sigma_{max}} \dots \dots \dots 40.$$

Nun ist offenbar $\sigma_{min} = \frac{P_{min}}{F}$ und $\sigma_{max} = \frac{P_{max}}{F}$, demnach

$$\frac{\sigma_{min}}{\sigma_{max}} = \frac{P_{min}}{P_{max}} \quad \text{und} \quad \sigma_{max} = \frac{1050}{1 + \mu - \mu \frac{P_{min}}{P_{max}}}.$$

Man kann $\mu = 0,5$ setzen; P_{min} und P_{max} sind bekannt, mithin auch σ_{max} . Es wird

$$\sigma_{max} = \frac{1050}{1,5 - 0,5 \frac{P_{min}}{P_{max}}} \dots \dots \dots 41.$$

Wird der Werth für σ_{max} aus Gleichung 41 in die Gleichung 40 eingeführt, so ergibt sich

$$F = \frac{P_{max} \left(1,5 - \frac{0,5 P_{min}}{P_{max}} \right)}{1050} = \frac{1,5 P_{max} - 0,5 P_{min}}{1050}$$

Werden die durch das Eigengewicht, bezw. die Verkehrslast allein im ganzen Stabe erzeugten Stabkräfte mit P_0 , bezw. P_1 bezeichnet, so ist

$$P_{max} = P_0 + P_1 \quad \text{und} \quad P_{min} = P_0,$$

also

$$F = \frac{1,5 P_0 + 1,5 P_1 - 0,5 P_0}{1050} = \frac{P_0 + 1,5 P_1}{1050} = \frac{P_0}{1050} + \frac{P_1}{700} \quad 42.$$

Gleichung 42 gilt für Schweifseifenstäbe, welche nur auf Zug oder nur auf Druck beansprucht werden.

Für Flusseifen ergibt sich in gleicher Weise aus obiger Gleichung:

$$\sigma_{max} = \frac{1350}{1,5 - 0,5 \frac{P_{min}}{P_{max}}} \quad 43.$$

$$F = \frac{P_0 + 1,5 P_1}{1350} \quad 44.$$

oder

$$F = \frac{P_0}{1350} + \frac{P_1}{900}$$

Die Werthe für P_0 und P_1 sind in absoluten Zahlen, und zwar in Kilogr., einzusetzen, und man erhält F in Quadr.-Centim.

85.
Schweifseifen-
und
Flusseifenstäbe,
die abwechselnd
gezogen
und gedrückt
werden.

Weniger einfach werden die Formeln für F , wenn die Beanspruchungen zwischen Zug und Druck wechseln; die Entwicklung nachstehender Formeln für Schweifseifen ist in des Verfassers unten genannter Abhandlung zu finden²⁰⁾.

Es bedeuten: P_0 die Stabspannung, welche durch das Eigengewicht allein hervorgerufen wird; P_1 die durch ungünstigste Verkehrslast allein hervorgerufene Stabspannung, welche mit P_0 gleichen Sinn hat (Zug oder Druck, je nachdem P_0 Zug oder Druck bedeutet); P_2 die durch ungünstigste Verkehrslast allein hervorgerufene Stabspannung, welche entgegengesetzten Sinn hat, wie P_0 (Druck oder Zug, je nachdem P_0 Zug oder Druck bedeutet).

Falls (alle Werthe absolut genommen) $P_2 < \frac{2}{3} P_0$ ist, so sind die obigen Formeln 42, bezw. 44 anzuwenden; alsdann ist die Berechnung genau so, als ob P_2 gar nicht vorhanden wäre.

Wenn dagegen $P_2 > \frac{2}{3} P_0$ ist, so ermittle man F nach folgenden Formeln:

1) Schweifseifen:

$$\text{für } P_2 - P_1 < \frac{4}{3} P_0$$

$$F = \frac{P_0}{1575} + \frac{P_1}{700} + \frac{P_2}{2100} \quad \text{oder} \quad F = \frac{3 P_1 + P_2 + \frac{4}{3} P_0}{2100} \quad 45.$$

$$\text{für } P_2 - P_1 > \frac{4}{3} P_0$$

$$F = \frac{P_0}{1575} + \frac{P_1}{2100} + \frac{P_2}{700} \quad \text{oder} \quad F = \frac{3 P_2 + P_1 - \frac{4}{3} P_0}{2100} \quad 46.$$

²⁰⁾ Ueber die Bestimmung der Querschnitte von Eifenconstructions. Zeitschr. d. Arch.- u. Ing.-Ver. zu Hannover 1888, S. 575.

2) Flusseisen:

$$\begin{array}{l}
 \text{für } P_2 - P_1 < \frac{4}{3} P_0 \\
 F = \frac{P_0}{2000} + \frac{P_1}{900} + \frac{P_2}{2700} \\
 \text{oder } F = \frac{3P_1 + P_2 + \frac{4}{3}P_0}{2700}
 \end{array}
 \left.
 \begin{array}{l}
 \text{für } P_2 - P_1 > \frac{4}{3} P_0 \\
 F = -\frac{P_0}{2000} + \frac{P_1}{2100} + \frac{P_2}{900} \\
 F = \frac{3P_2 + P_1 - \frac{4}{3}P_0}{2700}
 \end{array}
 \right\} \cdot 47.$$

Die Werthe für P_0, P_1, P_2 sind in vorstehende Formeln in Kilogr. und in absoluten Zahlen einzufetzen; man erhält alsdann F in Quadr.-Centim.

Beispiele. 1) Es sei $P_0 = 36000$ kg, $P_1 = 48000$ kg und $P_2 = -18000$ kg. Alsdann ist, absolut genommen, $P_2 < \frac{2}{3} P_0$; denn es ist $18000 < \frac{2}{3} \cdot 36000$. Sonach kommen die Formeln 42, bzw. 44 zur Anwendung. Man erhält

$$\begin{array}{l}
 \text{für Schweisseisen: } F = \frac{36000 + 1,5 \cdot 48000}{1050} = 103 \text{ qcm,} \\
 \text{für Flusseisen: } F = \frac{36000 + 1,5 \cdot 48000}{1350} = 80 \text{ qcm.}
 \end{array}$$

Dieselben Ergebnisse wären zu verzeichnen für

$$P_0 = -36000 \text{ kg, } P_1 = -48000 \text{ kg und } P_2 = 18000 \text{ kg;}$$

Alles bleibt genau wie vorstehend.

2) Es sei $P_0 = 7600$ kg, $P_1 = 29000$ kg und $P_2 = -23200$ kg. Alsdann ist, absolut genommen, $P_2 > \frac{2}{3} P_0$; denn es ist $23200 > \frac{2}{3} \cdot 7600$. Daher muß eine der Gleichungen 45, 46, 47 oder 48 angewendet werden. Ferner ist, wieder absolut genommen, $P_2 - P_1 = 23200 - 29000 = -5800$ kg und $\frac{4}{3} P_0 = \frac{4}{3} \cdot 7600 = 10130$ kg; somit ist $P_2 - P_1 < \frac{4}{3} P_0$. Daher kommen Formel 45, bzw. 47 zur Verwendung. Man erhält

$$\begin{array}{l}
 \text{für Schweisseisen: } F = \frac{3 \cdot 29000 + 23200 + \frac{4}{3} \cdot 7600}{2100} = 90 \text{ qcm,} \\
 \text{für Flusseisen: } F = \frac{3 \cdot 29000 + 23200 + \frac{4}{3} \cdot 7600}{2700} = 70 \text{ qcm.}
 \end{array}$$

Dieselben Werthe hätten sich auch ergeben, für

$$P_0 = -7600 \text{ kg, } P_1 = -29000 \text{ kg und } P_2 = 23200 \text{ kg,}$$

da für die Kriterien und die Formeln nur die absoluten Werthe in Frage kommen.

3) Es sei $P_0 = -12000$ kg, $P_1 = -4000$ kg und $P_2 = +24000$ kg. Alsdann ist absolut genommen, $P_2 > \frac{2}{3} P_0$, da $24000 > \frac{2}{3} \cdot 12000$ ist; weiter ist auch $P_2 - P_1 > \frac{4}{3} P_0$, da $24000 - 4000 > \frac{4}{3} \cdot 12000$ ist. Mithin sind die Formeln 46 oder 48 zu verwenden. Man erhält

$$\begin{array}{l}
 \text{für Schweisseisen: } F = \frac{3 \cdot 24000 + 4000 - \frac{4}{3} \cdot 12000}{2100} = \approx 29 \text{ qcm,} \\
 \text{für Flusseisen: } F = \frac{3 \cdot 24000 + 4000 - \frac{4}{3} \cdot 12000}{2700} = \approx 23 \text{ qcm.}
 \end{array}$$

Dieselben Werthe hätten sich auch ergeben für

$$P_0 = 12000 \text{ kg, } P_1 = 4000 \text{ kg und } P_2 = -24000 \text{ kg.}$$

In der Spalte 5 der umstehenden Tabelle sind für die hauptsächlichsten Constructions-Materialien die üblichen Werthe der zulässigen Beanspruchung K zusammengestellt; ferner sind in der Tabelle die Elasticitäts-Coefficienten, die Festigkeits-Coefficienten, so wie diejenigen Beanspruchungen angegeben, bei welchen die Elasticitätsgrenze erreicht wird. Naturgemäß können die in der Tabelle angegebenen Werthe nur Mittelwerthe sein, die sich mit der Güte des Materials, der Art der Beanspruchung und anderen Umständen ändern.

86.
Tabellen.

1. Bezeichnung der Materialien	2. Elasticitäts- Coefficient E	3. Festigkeits-Coefficient bei Beanspruchung auf		4. Beanspruchung an der Elasticitätsgrenze auf		5. Zulässige Beanspruchung K für					
		Zug	Druck	Zug	Druck	endgiltige Bauwerke		zeitweilige Bauten,		Belastung mit mäßigen Erschütterungen	
						Belastung mit starken Stößen	Belastung mit mäßigen Erschütterungen	Zug	Druck	Zug	Druck
Schweißseifen	2000	3500 bis 4000	3200 bis 3600	1,6	1,6	700	700	1000	1000	—	—
Flusseifen	2200	4000 bis 4200	4000 bis 4200	2,0 bis 2,4	2,0 bis 2,4	900	900	1200	1200	—	—
Gusseifen	—	1250 bis 1450	7500 bis 8000	—	—	—	—	250	500	—	—
Stahl	2000 bis 2400	7000 bis 8000		3000 bis 4000		1500	1500	2000	2000	—	—
Holz in der Faserrichtung:											
Eichenholz	120	965	487	0,26	0,21	—	—	90	65	180	130
Kiefernholz	120	820	410	0,29	0,22	—	—	80	60	160	110
Holz radial, d. h. in der Richtung der Jahresringe:											
Eichenholz	18,9	120	270	—	—	—	—	—	—	—	—
Kiefernholz	9,6	120	270	—	—	—	—	—	—	—	—
	Tonnen für 1 qcm	Kilogr. für 1 qcm		Tonnen für 1 qcm		Kilogr. für 1 qcm					

Das Berliner Polizei-Präsidium legt bei feinen Berechnungen die nachstehend angegebenen Zahlenwerthe als zulässige Beanspruchung zu Grunde (Bekanntmachung vom 21. Februar 1887):

Material	Zulässige Beanspruchung auf	
	Zug	Druck
Schweißseifen	750	750
Gusseifen	250	500
Bombirtes Eisenblech	500	500
Eisendraht	1200	—
Eichen- und Buchenholz	100	80
Kiefernholz	100	60
Granit	—	45
Sandstein, je nach der Härte	—	15 bis 30
Rüdersdorfer Kalkstein in Quadern	—	25
Kalkfeinmauerwerk in Kalkmörtel	—	5
Gewöhnliches Ziegelmauerwerk	—	7
Ziegelmauerwerk in Cementmörtel	—	11
Bestes Klinkermauerwerk in Cementmörtel	—	12 bis 14
Mauerwerk aus porösen Steinen	—	3 bis 6
Guter Baugrund	—	2,5
	Kilogr. für 1 qcm	

Neuerdings gefattet das Berliner Polizei-Präsidium²¹⁾ für Schweißseifen eine Beanspruchung bis 1000 kg auf 1 qcm für Zug und Druck, wenn die Belastung vorwiegend ruhend ist oder wenn die Nutzlast so groß in die Rechnung eingeführt ist, daß unvorhergesehene Vergrößerung ausgeschlossen ist und Erschütterungen nicht zu befürchten sind. Diese Vergünstigung wird nur für Theile zugestanden, welche nur Zug oder nur Druck zu ertragen haben und keine Nietverschwächung aufweisen. Für bestes Klinkermauerwerk in reinem Cementmörtel wird von derselben Behörde ein größter Druck bis zu 20 kg für 1 qcm und ein größter Zug bis 1 kg für 1 qcm zugelassen.

87. Beispiele. 1) Eine schweißseiserne Stange werde höchstens mit einer Zugkraft $P = 18750$ kg beansprucht. Es ist die Querschnittsgröße unter der Annahme zu bestimmen, daß die Stange einer endgiltigen Construction angehört und die Belastung nur mit mäßigen Erschütterungen auftritt.

Nach vorstehender Tabelle ist für den vorliegenden Fall $K = 1000$ kg, sonach

$$F = \frac{P}{K} = \frac{18750}{1000} = 18,75 \text{ qcm.}$$

21) Siehe: FRÖLICH, H. Elementare Anleitung zur Anfertigung statischer Berechnungen etc. 2. Aufl. Berlin 1897. S. 4.

Wenn die Stange aus Rundeisen conструиrt werden soll, so muß sein:

$$d = \sqrt{\frac{4P}{\pi}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 1875}{3,14}} = 4,9 \text{ cm.}$$

Wird entsprechend den Annahmen des Berliner Polizei-Präfidiums $K = 750 \text{ kg}$ gefetzt, so muß

$$F = \frac{P}{K} = \frac{18750}{750} = 25 \text{ qcm}$$

fein und

$$d = \sqrt{\frac{4F}{\pi}} = 5,64 \text{ cm.}$$

2) Bei einer gußeisernen gedrückten Stange sei die größte Druckkraft $P = 5850 \text{ kg}$. Der Querschnitt derselben ist demnach, wenn die Construction wiederum als endgiltig und die Belastung als mit mäfsigen Erschütterungen wirkend angenommen wird,

$$F = \frac{P}{K} = \frac{5850}{500} = 11,7 \text{ qcm.}$$

Bei Wahl eines kreisförmigen Querschnittes ergibt sich der Durchmesser d aus der Gleichung:

$$d = \sqrt{\frac{4F}{\pi}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 11,7}{3,14}} = 3,8 \text{ cm.}$$

3) Auf einen Holzstab mit rechteckigem Querschnitt wirke ein Größtdruck $P = 16000 \text{ kg}$. Der Stab soll einer zeitweiligen Construction, welche mäfsigen Erschütterungen ausgesetzt ist, angehören; verwendet wird Kiefernholz. Nach Gleichung 37 ergibt sich

$$F = \frac{16000}{110} = 145,4 \text{ qcm.}$$

Ein quadratischer Querschnitt von $12,1 \text{ cm}$ Seitenlänge würde demnach genügen.

4) Wäre im ersten Beispiele die Stabkraft durch das Eigengewicht $P_0 = 6750 \text{ kg}$, diejenige durch Verkehrslast $P_1 = 12000 \text{ kg}$, so ergäbe sich aus Gleichung 42

$$F = \frac{6750}{1050} + \frac{12000}{700} = 6,43 + 17,14 = 23,57 \text{ qcm,}$$

und es müßte sein:

$$d = \sqrt{\frac{4 \cdot 23,57}{3,14}} = \approx 5,5 \text{ cm.}$$

Von der bei den gedrückten Stäben wegen Beanspruchung auf Zerknicken vorzunehmenden Vergrößerung des Querschnittes wird im nächsten Abschnitt (Kap. 2) die Rede sein.

Die Gleichung $\sigma = \frac{P}{F}$ ergab sich unter der Annahme einer gleichförmigen Vertheilung der Kraft P über die ganze Querschnittsfläche F . Diese Annahme ist aber nur richtig, wenn 1) der Querschnitt des Körpers constant ist und 2) die äußere Kraft P sich über die Endflächen gleichmäfsig vertheilt. Die Gesetze der Kraftvertheilung für den Fall, dafs diese beiden Bedingungen nicht erfüllt sind, können auf rein theoretischem Wege nicht oder nur in einzelnen Fällen genau ermittelt werden. Gewöhnlich wird jedoch bei den Berechnungen auf die Nichtbekannthschaft mit diesen Gesetzen keine Rücksicht genommen und die Gleichung $\sigma = \frac{P}{F}$ auch für diese Fälle einfach als richtig angenommen.

Wenn ein Stab an einigen Stellen kleinere Querschnittsflächen, als an anderen hat, so ist der Berechnung des Stabes die kleinste Querschnittsfläche zu Grunde zu legen und diese so zu bemessen, dafs die in ihr wirkende Spannung an keiner Stelle die zulässige Beanspruchung übersteigt. Findet in dem betreffenden Querschnitte die Kraft P statt, so berechnet man die Querschnittsfläche F an dieser Stelle nach der Gleichung 37

$$F = \frac{P}{K},$$

Fig. 78.

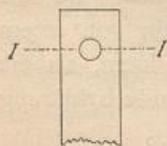


Fig. 79.

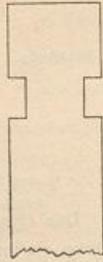
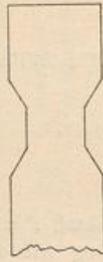


Fig. 80.



worin K die zulässige Beanspruchung bedeutet, bezw. nach den Gleichungen 42 bis 48. Der umstehende Stab (Fig. 78) hat seine kleinste Querschnittsfläche im Querschnitte II , welcher der Nietmitte entspricht, und diese Querschnittsfläche muß demnach der obigen Gleichung genügen. Aehnlich ist bei den Stäben in Fig. 79 u. 80 die durch die Verengung bestimmte Stelle als schwächste der Berechnung zu Grunde zu legen. Dabei ist jedoch zu beachten, daß bei Anwendung obiger Gleichung für K ein anderer Werth als derjenige einzu-

führen ist, welcher für Berechnung einer ungeschwächten Stange zu Grunde gelegt wird; man kann nämlich nicht annehmen, daß die Kraft P sich gleichmäßig über den ver schwächten Querschnitt vertheilt; die größte Beanspruchung findet in Fig. 78 neben dem Nietloche statt. Es empfiehlt sich demnach, für K einen kleineren Werth einzuführen, als zur Berechnung des ungeschwächten Stabes.

Die Größe der Längenänderung gezogener oder gedrückter Stäbe ergibt die Gleichung 36:

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{P}{FE} \quad \text{oder} \quad \Delta l = \frac{Pl}{FE}.$$

Beispiel. Ist bei der in Beispiel 1 auf S. 64 angenommenen Stange $l = 5 \text{ m}$, so wird

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{18750}{18,75 E}.$$

Nach der Tabelle in Art. 86 (S. 64) ist für Schweißseifen $E = 2000000 \text{ kg}$ für 1 qcm ; daher

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{18750}{18,75 \cdot 2000000} = 0,0005 \quad \text{und} \quad \Delta l = 0,0005 \cdot 5 = 0,0025 \text{ m} = 2,5 \text{ mm}.$$

Die Verlängerung beträgt also $2,5 \text{ mm}$.

Betrachtet man die Gleichung 34:

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{\sigma}{E}$$

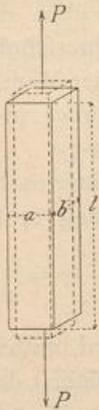
und untersucht, wie groß die Spannung σ für die Flächeneinheit des Querschnittes sein müßte, damit die Verlängerung Δl genau so groß würde, wie die ursprüngliche Stablänge — vorausgesetzt, daß diese Formel für das Verlängerungsverhältniß noch bis zu der in diesem Falle nöthigen Spannungsgröße gelten würde, so erhält man

$$\frac{l}{l} = \frac{\sigma}{E} = 1 \quad \text{oder} \quad \sigma = E,$$

d. h. diejenige Spannung für die Flächeneinheit, welche den Stab auf die doppelte Länge verlängern würde, wenn das Verlängerungsgesetz innerhalb dieser Grenzen gültig wäre, ist gleich E . Daher findet man häufig den Elasticitäts-Modulus folgendermaßen erklärt: Der Elasticitäts-Modulus ist diejenige Spannung, welche für die Flächeneinheit des Stabquerschnittes wirken müßte, um den Stab auf das Doppelte seiner ursprünglichen Länge zu vergrößern, falls innerhalb der dadurch bedingten Spannungsgrenzen das Elasticitätsgesetz gültig bliebe.

Bei Beanspruchung auf Druck würde die Verkürzung in diesem Falle gleich l sein, d. h. der Stab würde zur Länge Null zusammengedrückt werden. Da die Elasticitätsgesetze nicht bis zu den erwähnten Grenzen gelten, vielmehr von einem annähernd constanten Elasticitäts-Modul E nur so lange die Rede sein kann, als die Spannungen innerhalb der Elasticitätsgrenze bleiben, so ist die vorstehende Erklärung des Elasticitäts-Moduls nicht zweckmäßig.

Fig. 81.



Die auf einen Körper wirkenden Kräfte P erzeugen außer der Längenänderung in der Krafrichtung auch solche in allen anderen Richtungen. Wir legen durch einen beliebigen Punkt der Stabaxe (Fig. 81) drei Koordinatenaxen, deren eine mit der Stabaxe zusammenfällt, deren andere beiden senkrecht zur ersteren stehen. Man nennt sodann die Längenänderung in der Richtung der Stabaxe die *longitudinale*, diejenigen in den Richtungen der beiden anderen Axen die *transversalen* Längenänderungen.

Die transversalen Längenänderungen sind der longitudinalen Längenänderung umgekehrt proportional. Bezeichnet μ einen für verschiedene Materialien besonders zu ermittelnden Zahlenwerth, so ist

$$\frac{\Delta a}{a} = -\frac{1}{\mu} \frac{\Delta l}{l} \quad \text{und} \quad \frac{\Delta b}{b} = -\frac{1}{\mu_1} \frac{\Delta l}{l}.$$

Nun ist nach Gleichung 34: $\frac{\Delta l}{l} = \frac{\sigma}{E}$, daher

$$\frac{\Delta a}{a} = -\frac{1}{\mu} \frac{\sigma}{E} \quad \text{und} \quad \frac{\Delta b}{b} = -\frac{1}{\mu_1} \frac{\sigma}{E}.$$

Bei Körpern, welche nach allen Richtungen gleiche Elasticität besitzen, d. h. bei sog. *isotropen* Körpern, ist $\mu = \mu_1$, daher

$$\frac{\Delta a}{a} = \frac{\Delta b}{b} = -\frac{1}{\mu} \frac{\sigma}{E}.$$

Für isotrope Körper liegt μ zwischen 3 und 4.

90.
Änderungen
der
Querschnitts-
maße.

3. Kapitel.

Schub und Schubfestigkeit.

Der Fall der reinen Schubbeanspruchung tritt, wie bereits in Art. 80 (S. 56) gefügt wurde, ein, wenn die wirkenden Kräfte das Bestreben haben, zwei Nachbarquerchnitte so gegen einander zu verschieben, daß die Entfernung der Querschnitte dieselbe bleibt. Dies ist nur möglich, wenn die Kräfte unmittelbar neben der Ebene wirken, längs deren das Bestreben einer Verschiebung stattfindet, und wenn dieselben sich zu zwei Kräften vereinen lassen, welche einander nach Größe

und Richtung genau gleich, dem Sinne nach entgegengesetzt sind. Man nennt diese Kräfte die *abscherenden* Kräfte.

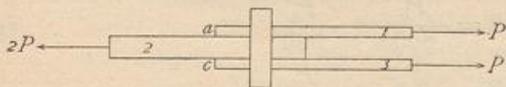
In der Technik kommt dieser Fall ziemlich rein bei den Niet- und Bolzen-

verbindungen vor. Die beiden Kräfte P (Fig. 82) haben das Bestreben, die Bleche 1 und 3 nach rechts zu verschieben; diese Verschiebung wird durch den Niet verhindert, welcher die Bleche 1 und 3 mit 2 verbindet. Längs jeder der beiden Trennungsf lächen wirkt je eine Kraft P nach rechts im Bleche 1, bzw. 3, je eine Kraft P nach links im Bleche 2.

In den meisten Fällen tritt zu der durch die abscherenden Kräfte erzeugten Schubspannung noch eine durch gleichzeitig wirkende Momente erzeugte Biegungsspannung; bezüglich dieser zusammengesetzten Beanspruchung wird auf das folgende Kapitel verwiesen. Auch in dem durch Fig. 82 veranschaulichten Falle findet, genau genommen, eine solche zusammengesetzte Beanspruchung statt.

Die genaue Untersuchung der Spannungen, welche in den auf Abscherung beanspruchten Querschnitten auftreten, ergibt, daß die Schubspannungen in den einzelnen Querschnittspunkten verschieden groß sind; das Gesetz der Vertheilung hängt von der Form des Querschnittes ab. Für die meisten Fälle der Praxis, ins-

Fig. 82.



91.
Schub-
spannungen.

befondere für die wichtigen Nietverbindungen, kann man aber mit hinreichender Genauigkeit annehmen, daß die abscherenden Kräfte sich gleichförmig über die ganzen auf Abscherung beanspruchten Querschnitte vertheilen, mithin im Querschnitt eine gleichförmig vertheilte Schubspannung erzeugen. Daraus folgt, daß der Widerstand gegen Abscheren der GröÙe des abzuscherenen Querschnittes direct proportional angenommen werden kann.

92.
Querschnitts-
bestimmung.

Ist also der Flächeninhalt des auf Abscheren beanspruchten Querschnittes F , die abscherende Kraft P und die im Querschnitt entstehende Schubspannung τ , so ist $P = F \tau$, woraus

$$\tau = \frac{P}{F} \dots \dots \dots 49.$$

Die QuerschnittsgröÙe der auf Schub beanspruchten Querschnitte wird mittels Gleichung 49 ermittelt. Versteht man unter T die gröÙste für die Flächeneinheit des Querschnittes zulässige Schubbeanspruchung, unter P die auf Abscheren wirkende Kraft, so ergibt sich aus der angegebenen Gleichung die nöthige QuerschnittsgröÙe

$$F = \frac{P}{T} \dots \dots \dots 50.$$

Was nun die für T einzuführenden Werthe anlangt, so haben die angestellten Versuche in Uebereinstimmung mit den theoretischen Untersuchungen ergeben, daß der Widerstand der Baustoffe gegen Beanspruchung auf Schub geringer ist, als gegen Beanspruchung auf Zug oder Druck. Man darf also die Baustoffe auf Schub nicht so stark beanspruchen, wie auf Zug oder Druck.

Nachstehende Tabelle giebt für eine Reihe wichtiger Baustoffe die Festigkeits-Coefficienten für Schub und die zulässigen Schubbeanspruchungen für das Quadr.-Centim. als Flächeneinheit an. Bemerket wird, daß man für Schweifseifen und Flußeisen die in Art. 84 u. 85 (S. 61 u. 62) berechneten Formeln verwenden kann, wenn man die maßgebenden Coefficienten 1050 für Schweifseifen, bzw. 1350 für Flußeisen mit $\frac{4}{5}$ multiplicirt einführt. Demnach kann man den erforderlichen Querschnitt berechnen aus den Formeln:

für Schweifseifen: $F = \frac{P_0}{800} + \frac{P_1}{560} \dots \dots \dots 51.$

für Flußeisen: $F = \frac{P_0}{1080} + \frac{P_1}{720} \dots \dots \dots 52.$

Bei Berechnung der Nietquerschnitte ist wegen des hier verwendeten vorzüglichen Materials die erlaubte Schubspannung gleich derjenigen Zug-, bzw. Druckbeanspruchung einzuführen, welche im Blech und im Façoneisen als zulässig gilt. Für die Berechnung der Nietquerschnitte können also die Formeln 42 bis 48 verwendet werden.

Bezeichnung der Baustoffe	Festigkeits-Coefficient für Schub	Zulässige Schubbeanspruchung T'
Schweifseifen	3200 bis 4000	600 bis 800
Flußeisen	3200 bis 4000	700 bis 1000
Gufseifen	1000 bis 1100	220
Gufstahl	4000	800
Nadelholz: parallel der Faserrichtung	46	9 bis 10
senkrecht zur Faserrichtung	125	16 bis 19
Eichenholz: parallel der Faserrichtung	86	22 bis 27
senkrecht zur Faserrichtung	125	22 bis 27
Kilogr. für 1 qcm der Querschnittsfläche.		

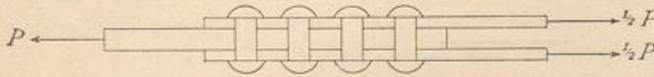
Beispiele. 1) Eine Stange, in welcher ein Zug $P = 5600 \text{ kg}$ herrscht, soll mit einem Bolzen aus Schweisseisen an einem Knotenbleche befestigt werden. Der Durchmesser d des Bolzens ist zu bestimmen.

Der Querschnitt F des Bolzens ergibt sich aus der Gleichung 50. Die zulässige Schubbeanspruchung T sei hier 700 kg , sonach

$$F = \frac{5600}{700} = 8 \text{ qcm} \quad \text{und} \quad d = \sqrt{\frac{4F}{\pi}} = 3,2 \text{ cm}.$$

2) Es ist die Anzahl Nietquerchnitte zu bestimmen, welche nöthig sind, um einen schweisseisernen Constructionstheil, in welchem ein Zug $P = 30000 \text{ kg}$ herrscht, mit einem Knotenbleche zu verbinden.

Fig. 83.



Der Durchmesser der Niete sei 2 cm ; der betreffende Constructionstheil (Fig. 83) soll aus zwei Flacheisen hergestellt sein, welche das Knotenblech zwischen sich nehmen.

Jedes Flacheisen hat einen Zug von $\frac{P}{2} = 15000 \text{ kg}$ zu ertragen; den gleichen Zug haben die Nietquerchnitte zwischen diesem Flacheisen und dem Knotenbleche aus dem einen in das andere zu überführen, d. h. die auf Abfcheren dieser Querchnitte wirkende Kraft beträgt 15000 kg . Der Gesamtquerschnitt aller zur Befestigung des einen Flacheisens dienenden Nietquerchnitte ergibt sich demnach zu

$$F = \frac{15000}{T}.$$

Die für Niete erlaubte Schubbeanspruchung T kann man unbedenklich gleich der im gewöhnlichen Stabeisen und Blech erlaubten Zugbeanspruchung annehmen. Wir nehmen deshalb $T = 750 \text{ kg}$, und es wird

$$F = \frac{15000}{750} = 20 \text{ qcm}.$$

Ist die Anzahl der Nietquerchnitte n , so muß $\frac{n d^2 \pi}{4} = F = 20 \text{ qcm}$ sein, oder, wenn $d = 2 \text{ cm}$,

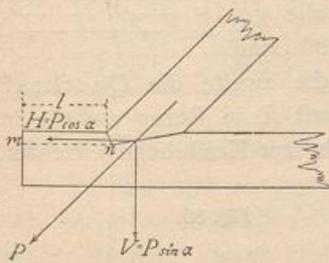
$$n = \frac{20 \cdot 4}{d^2 \pi} = 6,37, \text{ statt dessen } 7.$$

Es müssen also 7 Nietquerchnitte zur Verbindung des einen Flacheisens mit dem Knotenbleche angeordnet werden; genau eben so groß muß die Zahl der Nietquerchnitte sein, welche zur Verbindung des anderen Flacheisens mit dem Knotenbleche dienen.

Ein Abfcheren ist bei der Construction in Fig. 83 nur möglich, wenn jeder Niet in zwei Querchnitten abfchert; jeder Niet bietet also zwei Querchnitte, so daß im Ganzen 7 Niete, d. h. 14 Nietquerchnitte anzuordnen sind²²⁾.

3) Eine Strebe (Fig. 84), welche einen Druck $P = 20000 \text{ kg}$ zu ertragen hat, sei mit einem Balken durch Verlatzung verbunden; der Winkel beider Axen sei 45° . Die Länge l ist so zu bestimmen, daß ein Abfcheren längs der Fläche mn nicht stattfindet.

Fig. 84.



Die Kraft P zerlegt sich in eine lothrechte Seitenkraft $V = P \sin \alpha$ und eine wagrechte Seitenkraft $H = P \cos \alpha$.

Es ist $H = 20000 \cos 45^\circ = 14140 \text{ kg}$ und

$$V = 20000 \sin 45^\circ = 14140 \text{ kg}.$$

Die abfcherende Kraft A ist die Kraft H abzüglich des Reibungswiderstandes fV , wenn f den Reibungs-Coefficienten bedeutet. Ist $f = 0,3$, so ist die abfcherende Kraft

$$A = H - fV = 14140 (1 - 0,3) = 9898 \text{ kg} \\ \text{oder } A = \infty 10000 \text{ kg}.$$

Dabei ist auf die durch den Bolzen möglicher Weise erzeugte Reibung keine Rücksicht genommen, weil ein Lockern des Bolzens denkbar ist.

Die Breite des Balkens und der Strebe sei b ; alsdann wird eine Fläche von der Länge l und der Breite b auf Abfcheren in Anspruch genommen (d. h. die Fläche mn). Ist die für 1 qcm der abfcherenden Fläche zulässige Schubspannung T , so darf in dieser Fläche im Ganzen eine Schubspannung $S = b l T$ stattfinden.

²²⁾ Man unterscheidet einschnittige und zweischnittige Niete. Bei den einschnittigen Nieten wird von jedem Niet nur ein Querchnitt, bei den zweischnittigen Nieten werden von jedem Niet zwei Querchnitte auf Abfcheren beansprucht. Näheres hierüber in Theil III, Bd. 1 (Abth. I, Abfchn. 3: Constructions-Elemente in Eisen) dieses Handbuchs.

So groß darf also A höchstens sein. Die Bedingungsgleichung für die Ermittlung von l ist folglich:

$$b l T = A \quad \text{oder} \quad l = \frac{A}{b T}.$$

In unserem Falle sei $b = 25 \text{ cm}$; T ist nach der Tabelle auf S. 68 für Nadelholz gleich 10 kg für 1 qcm ; es muß also sein:

$$l = \frac{10000}{25 \cdot 10} = 40 \text{ cm}.$$

Auf weitere Fälle der Schubbeanspruchung werden wir im nächsten Kapitel zurückkommen.

4. Kapitel.

Biegung und Biegefestigkeit.

94-
Biegemoment und
Querkraft.

Beanspruchung eines Balkens auf Biegung findet statt, wenn die äußeren Kräfte die beiden an den verschiedenen Seiten eines Querschnittes (etwa aa in Fig. 86) liegenden Balkentheile um eine senkrecht oder geneigt zur Kräfteebene stehende Achse zu drehen streben. Drehung setzt ein Moment voraus; folglich muß ein Moment der äußeren Kräfte für den Querschnitt vorhanden sein. Gewöhnlich wirkt außer diesem Momente noch eine abscherende Kraft, welche weitere Beanspruchungen hervorruft; letztere setzen sich dann mit den reinen Biegebeanspruchungen zusammen.

Es sei hier die Annahme gemacht, daß die Balkenachse in der Kräfteebene liege; wenn somit die Bildebene die Kräfteebene vorstellt, so liegen in derselben sowohl die äußeren Kräfte, wie auch die Balkenachse.

Die äußeren Kräfte, als welche die Stützdrücke und die Belastungen einzuführen sind, können beliebige Richtung und Größe haben.

Der allgemeine Fall ist durch Fig. 85 veranschaulicht. Die Mittelkraft R aller an der einen Seite irgend eines Querschnittes aa wirkenden äußeren Kräfte schneide die Achse des Körpers unter dem Winkel φ . Zerlegt man R in zwei Seitenkräfte, deren eine, P , parallel zur Achse des Körpers an der betreffenden Stelle gerichtet ist, deren andere, Q , die Achse des Körpers unter 90° Grad schneidet, so nennt man die erstere die Axialkraft, die zweite die Querkraft oder Transversalkraft. Das statische Moment der Kraft R in Bezug auf die im Schwerpunkt des zu betrachtenden Querschnittes senkrecht zur Kräfteebene errichtete Achse erstrebt die Drehung des linken Balkentheiles um diese Achse und wird das Biegemoment des Querschnittes genannt.

Der ganze Träger AB (Fig. 86) muß unter der Einwirkung aller äußeren Kräfte im Gleichgewichte sein; demnach muß die algebraische Summe der statischen Momente aller Kräfte in Bezug auf jeden beliebigen Punkt der Ebene gleich Null sein. Bezeichnet man nun das statische Moment der an dem links von aa liegenden Trägertheile angreifenden äußeren Kräfte für den Drehpunkt O

Fig. 85.

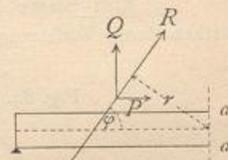
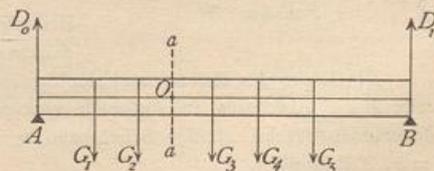


Fig. 86.



mit M_{links} , dasjenige der äußeren Kräfte an dem rechts liegenden Trägertheile ebenfalls für O als Drehpunkt mit M_{rechts} , so muß sein

$$0 = M_{links} + M_{rechts},$$

d. h.

$$M_{rechts} = - M_{links}.$$

Die auf die rechte Balkenseite des Querschnittes wirkenden äußeren Kräfte haben also ein resultirendes Biegemoment, welches dem Zahlenwerthe nach genau so groß ist, wie das auf die linke Balkenseite des Querschnittes wirkende; die Vorzeichen sind entgegengesetzt. Wenn das Moment an der einen Seite nach rechts

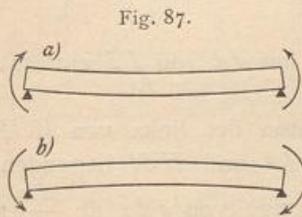


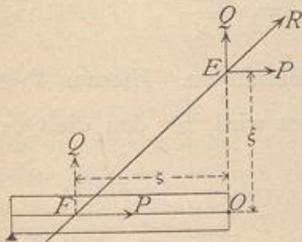
Fig. 87.

(im Sinne des Uhrzeigers) dreht, so ist die Drehrichtung des Momentes an der anderen Seite nach links (entgegengesetzt der Uhrzeigerdrehrichtung). Beide Momente beanspruchen den Balken gleichzeitig entweder so, daß er seine hohle Seite nach oben (Fig. 87a) oder nach unten (Fig. 87b) kehrt. Die erstere Drehrichtung der Momente soll in der Folge, wenn nichts anderes angegeben ist, als positiv, die letztere als negativ eingeführt werden. Die Momente sind daher positiv, wenn sie den Theil links vom Querschnitt nach rechts und den Theil rechts vom Querschnitt nach links drehen.

Für die Anwendung ist zu bemerken, daß es nach Vorstehendem ganz gleichgültig ist, ob man das Moment der an der einen oder der an der anderen Seite des Querschnittes wirkenden Kräfte ermittelt; man wird zweckmäßig stets diejenige Seite wählen, welche für die Rechnung und Anschauung die bequemere ist.

Die Zerlegung der Mittelkraft R in Axial- und Querkraft kann an beliebiger Stelle der Kraft R vorgenommen werden. Geschieht dieselbe im Punkte E , dem Schnittpunkte von R mit dem Querschnitt (oder seiner Verlängerung), so hat Q

Fig. 88.



kein Moment für O als Drehpunkt, und das Biegemoment, d. h. das statische Moment von R ist dann gleich dem statischen Momente der im Punkte E wirkenden Kraft P , also $M = P \xi$ (Fig. 88). Zerlegt man dagegen R in F , dem Schnittpunkte von R mit der Axe, so hat P kein Moment für O als Drehpunkt, und das Biegemoment wird gleich dem statischen Momente von der in F wirkenden Kraft Q , also $M = Q \zeta$ (Fig. 88). Wenn bei einem Balken mit wagrechter Axe nur lothrechte äußere Kräfte wirken, so ist R gleichfalls lothrecht, also die Seitenkraft P gleich Null; dann ist $R = Q$.

Bei den hier zu betrachtenden Balken ist dieser Fall der fast ausschließlich vorkommende; deshalb sollen in Folgendem vorwiegend lothrechte Kräfte zu Grunde gelegt werden. Dann besteht nachstehende einfache Beziehung zwischen dem Biegemomente und der Querkraft: Die Querkraft Q ist gleich dem ersten Differentialquotienten des Biegemomentes nach x , wenn x die Abscisse eines Querschnittes bedeutet.

Der Balken AB (Fig. 89) trage eine beliebige, an den einzelnen Stellen verschiedene Belastung q für die Längeneinheit und eine Reihe von Einzellasten P_1, P_2, P_3 . Die Größe von q werde an jeder Stelle durch die Ordinate der Curve mno dargestellt. Die Abscisse irgend eines Querschnittes II sei x ; links von diesem

Querschnitt wirken D_0 , P_1 und $\int_0^x q dx$. Die Mittelkraft dieser drei Kräfte ist die Querkraft Q für den Querschnitt II , d. h. es ist

$$Q = D_0 - P_1 - \int_0^x q dx.$$

Q möge im Abstände b links von A angreifen. Das Biegemoment für den Querschnitt II ist gleich dem statischen Moment von Q für diesen Querschnitt, d. h. es ist

$$M = Q (b + x).$$

Betrachtet man einen zweiten Querschnitt $IIII$, der um dx von II entfernt ist, so ist für diesen das Moment $M + dM$.

Dieses Moment setzt sich zusammen aus den Momenten der links von $IIII$ wirkenden Kräfte, d. h. der Kraft Q , und der zwischen II und $IIII$ liegenden Kraft $q dx$. Der Hebelsarm von Q ist $b + x + dx$, derjenige von $q dx$ ist $\frac{dx}{2}$; mithin ist

$$M + dM = Q (b + x + dx) - q dx \frac{dx}{2} = Q (b + x) + Q dx - q \frac{dx^2}{2}.$$

Zieht man von dieser Gleichung die oben für M gefundene ab, so bleibt:

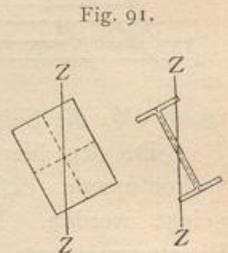
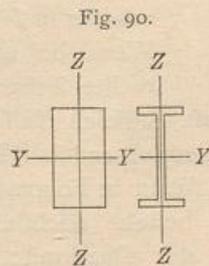
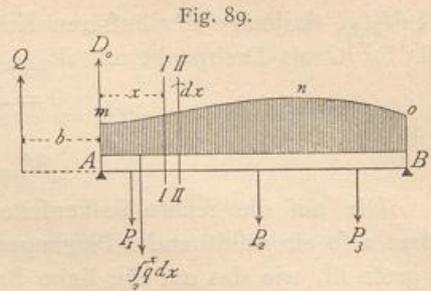
$$dM = Q dx - \frac{q dx^2}{2}.$$

$\frac{q dx^2}{2}$ ist eine unendlich kleine GröÙe zweiter Ordnung und verschwindet gegen die übrigen GröÙen der Gleichung, welche unendlich kleine GröÙen erster Ordnung sind. Es ist demnach

$$dM = Q dx \text{ und, wie oben behauptet, } Q = \frac{dM}{dx} \dots \dots \dots 53.$$

Wird $Q = 0$, so ist auch $\frac{dM}{dx} = 0$, also M ein Maximum. Hieraus folgt, daß das Moment für denjenigen Querschnitt zum Maximum wird, für den die Querkraft gleich Null ist.

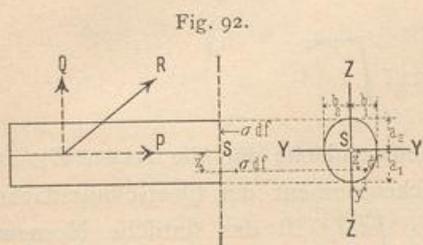
Für die Berechnung auf Biegung beanspruchter Balken ist es von grundlegender Bedeutung, wie die einzelnen Balkenquerschnitte von der Kraftebene geschnitten werden. Wenn, wie meistens der Fall, die Kraftebene alle Balkenquerschnitte in Hauptaxen schneidet (siehe Art. 62, S. 41), so ergeben sich für die Spannung sehr einfache Formeln. Nach Früherem ist jede Symmetrie-Axe eine Hauptaxe; wenn also z. B. die Querschnitte die in Fig. 90 dargestellten Formen haben und die Kraftebene durch ZZ , senkrecht zur Bildebene geht, so ist die obige Voraussetzung erfüllt. Wesentlich verwickelter ist die Berechnung, wenn die Kraftebene die Querschnitte nicht in Hauptaxen schneidet; dieser Fall wird durch Fig. 91 veranschaulicht, in welcher die Querschnitte lothrecht belasteter Dachpfetten vorgeführt sind.



a) Axiale Biegungsstressungen,
wenn die Kraftebene die Balkenquerschnitte in Hauptachsen schneidet.

Unter der Einwirkung des Biegemomentes entstehen in den einzelnen Querschnitten des Balkens an den verschiedenen Stellen Spannungen; dieselben dürfen die zulässigen Grenzen nicht überschreiten.

Für die Ermittlung der Beziehungen zwischen den äußeren Kräften und den durch sie hervorgerufenen Spannungen werde der Untersuchung Fig. 92 zu Grunde gelegt. Der links vom Querschnitt *II* gelegene Theil des Balkens kann als dem Balken in Fig. 88 angehörig betrachtet werden; derselbe muß unter der Einwirkung der auf ihn wirkenden äußeren Kräfte, deren Mittelkraft *R* sei, und der auf ihn im Querschnitt *II* von dem rechts liegenden (nicht gezeichneten) Balkentheile übertragenen Kräfte, eben der Spannungen, im Gleichgewicht sein.



Man macht die Annahme, daß die senkrecht zum Querschnitte wirkenden Seitenkräfte der Spannungen, die sog. axialen Biegungsstressungen, von der ersten Potenz der Coordinaten der Querschnittspunkte abhängen. Für irgend einen Querschnittspunkt mit den Coordinaten *y* und *z* setzt man demnach

$$\sigma = \alpha + \beta y + \gamma z.$$

Als Anfangspunkt der rechtwinkligen Coordinatenachsen *Y* und *Z* ist der Schwerpunkt *S* des Querschnittes gewählt; die Kraftebene schneidet den Querschnitt in der Linie *ZZ*, welche nach der Annahme eine Hauptaxe ist; alsdann ist die Abseissenaxe *YY* die andere Hauptaxe. Der Ausdruck für σ enthält drei Unbekannte, nämlich die Constanten α , β , γ . Für die Bestimmung derselben stehen drei Gleichungen zu Gebote. Da das Bruchstück des Balkens links vom Querschnitt *II* im Gleichgewicht sein soll, so müssen sich die allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen auf dasselbe anwenden lassen. Von den sechs verfügbaren Gleichgewichtsbedingungen werden hier die drei Gleichungen aufgestellt, welche besagen, daß die algebraische Summe der in die Axenrichtung des Balkens fallenden Kräfte gleich Null sei, ferner daß die algebraische Summe der statischen Momente aller Kräfte für die Axe *YY* gleich Null sei, endlich daß die algebraische Summe der statischen Momente aller Kräfte für die Axe *ZZ* gleich Null sei. Die drei Gleichungen lauten:

$$I) 0 = P - \int \sigma df,$$

$$II) 0 = M - \int \sigma z df,$$

$$III) 0 = \int \sigma y df.$$

Erläuternd wird zu den vorstehenden Gleichungen bemerkt: In einem unendlich kleinen Flächentheile *df* wirkt die axiale Spannung σdf ; die gesammten axialen Spannungen im Querschnitt geben die Summe $\int \sigma df$. Die Integration erstreckt sich über den ganzen Querschnitt. In Gleichung I ist *P* als nach rechts und $\int \sigma df$ als nach links wirkend eingeführt.

In Gleichung II bedeutet *M* das resultirende Moment aller links vom Querschnitt *II* gelegenen äußeren Kräfte für die Axe *YY*, welche sich in Fig. 92 (links)

als Punkt S darstellt; jede Spannung σdf hat für diese Axe das Moment $\sigma \cdot z df$; die Summe aller dieser Einzelmomente ist, abgesehen vom Vorzeichen, $\int \sigma z df$. Auch hier, wie bei Gleichung I und III, ist über die ganze Querschnittsfläche zu integrieren.

In Gleichung III haben die äußeren Kräfte für die Axe ZZ das Moment Null, weil ihre Mittelkraft jedenfalls die Axe ZZ schneidet; jede Spannung $\sigma \cdot df$ hat das Einzelmoment $\sigma \cdot y df$.

Setzt man in obige drei Gleichungen den oben für σ angegebenen Werth ein und beachtet, daß bei den Integrationen die Werthe α , β , γ unverändert bleiben, so erhält man aus Gleichung I

$$P = \alpha \int df + \beta \int_{-b_2}^{+b_1} y df + \gamma \int_{-a_2}^{+a_1} z df.$$

$\int y df$ ist das statische Moment der Querschnittsfläche für die Axe ZZ ; da diese eine Schwerpunktsaxe ist, so ist das statische Moment der Querschnittsfläche für diese Axe nach Art. 33 (S. 26) gleich Null. $\int z df$ ist das statische Moment der Querschnittsfläche für die Axe YY und, da diese Axe ebenfalls eine Schwerpunktsaxe ist, gleichfalls Null. Demnach ist

$$\int_{-b_2}^{+b_1} y df = 0 \quad \text{und} \quad \int_{-a_2}^{+a_1} z df = 0,$$

ferner, wenn F den Inhalt der ganzen Querschnittsfläche bedeutet,

$$F = \int df; \quad \text{mithin} \quad P = \alpha F,$$

und

$$\alpha = \frac{P}{F}.$$

Gleichung II lautet mit dem Werthe für σ :

$$M = \alpha \int_{-a_2}^{+a_1} z df + \beta \int_{-a_2}^{+a_1} y z df + \gamma \int_{-a_2}^{+a_1} z^2 df.$$

Nun ist $\int z df = 0$.

$\int y z df$ ist das Centrifugalmoment für die beiden Axen YY und ZZ ; da diese nach der Annahme Hauptaxen sind, so folgt

$$\int_{-a_2}^{+a_1} y z df = 0.$$

$\int_{-a_2}^{+a_1} z^2 df$ ist nach Früherem das Trägheitsmoment des Querschnittes für die Axe YY , d. h. es ist

$$\int_{-a_2}^{+a_1} z^2 df = \mathcal{I}_Y;$$

die Gleichung II heißt demnach:

$$M = \gamma \mathcal{I}_Y, \quad \text{also} \quad \gamma = \frac{M}{\mathcal{I}_Y}.$$

Gleichung III lautet mit dem Werthe für σ :

$$0 = \alpha \int_{-b_2}^{+b_1} y \, df + \beta \int_{-b_2}^{+b_1} y^2 \, df + \gamma \int_{-a_2}^{+a_1} y z \, df.$$

Da $\int_{-b_2}^{+b_1} y \, df = 0$ und $\int_{-a_2}^{+a_1} y z \, df = 0$ ist (siehe oben), so bleibt $0 = \beta \int_{-b}^{+b} y^2 \, df$,

woraus folgt, da $\int_{-b_2}^{+b_1} y^2 \, df$ nicht gleich Null ist,

$$\beta = 0.$$

Demnach sind die Werthe für die drei Constanten:

$$\alpha = \frac{P}{F}, \quad \beta = 0 \quad \text{und} \quad \gamma = \frac{M}{\mathcal{F}_Y},$$

und es ist schliesslich

$$\sigma = \frac{P}{F} + \frac{M}{\mathcal{F}_Y} z \dots \dots \dots 54.$$

Wenn, wie meistens, die Axialkraft P gleich Null ist, so ergibt sich für die axiale Biegungsspannung der Ausdruck

$$\sigma = \frac{Mz}{\mathcal{F}_Y}, \dots \dots \dots 55.$$

und wenn man vereinfachend \mathcal{F} statt \mathcal{F}_Y setzt,

$$\sigma = \frac{Mz}{\mathcal{F}} \dots \dots \dots 56.$$

Gleichung 55, bzw. 56 giebt die axialen Biegungsspannungen für einen Balken mit gerader Axe an, auf welchen die äusseren Kräfte nur senkrecht zur Axe wirken und bei dem die Kraftebene alle Querschnitte in Hauptaxen schneidet. Diese Gleichung soll zunächst besprochen werden.

1) Die Axialkraft hat die Grösse Null.

Gleichung 56 enthält ausser der Ordinate z eines Querschnittspunktes auf der rechten Seite nur die Grössen M und \mathcal{F} . Bei einer bestimmten, gegebenen Belastung haben für alle Punkte desselben Querschnittes, also für alle möglichen Werthe von z , sowohl M (das Biegemoment oder das Moment der an der einen Seite des Querschnittes wirkenden äusseren Kräfte, bezogen auf die wagrechte Schweraxe desselben als Drehaxe), wie auch das Trägheitsmoment \mathcal{F} , welches nur von der Form und Grösse der Querschnittsfläche abhängt, denselben Werth. Demnach ist nach Gleichung 56 die axiale Spannung σ an den verschiedenen Stellen eines Querschnittes nur mit dem Abstände z derselben von der wagrechten Schwerpunktsaxe veränderlich. Alle Punkte eines Querschnittes, welche in gleicher Höhe z über der wagrechten Schwerpunktsaxe liegen, werden also gleich stark beansprucht. Trägt man die in den verschiedenen Höhen z für die Flächeneinheit wirkenden Axialspannungen derart graphisch auf, dass man die z als Abscissen, die zugehörigen σ als Ordinaten zeichnet, und verbindet man die Endpunkte der Ordinaten, so erhält man die Linie

96.
Balken,
bei denen die
Axialkraft
die Grösse Null
hat.

der Gleichung $\sigma = \frac{M}{\mathcal{F}} z$. Diese Linie wird eine Gerade, weil die Veränderlichen σ und z nur in der ersten Potenz vorkommen.

Für $z = 0$ wird $\sigma = 0$, d. h. in allen in der wagrechten Schwerpunktsaxe liegenden Punkten ist die Axialspannung gleich Null.

An diesen Stellen ist also auch die Verlängerung oder Verkürzung gleich Null; denn dieselbe ist $\Delta dx = \frac{\sigma}{E} dx$, also für $\sigma = 0$ ebenfalls gleich Null.

Man nennt die Linie, welche alle Querschnittspunkte enthält, in denen die Axialspannung Null ist, die Null-Linie oder neutrale Linie. Diese Linie fällt nach Vorstehendem hier mit der wagrechten Schwerpunktsaxe YY zusammen; deshalb findet statt: Bei einem geraden wagrechten Balken, dessen Querschnitte durch die Kraftebene in Hauptaxen geschnitten werden und auf den nur lothrechte Kräfte wirken, fällt in jedem Querschnitt die Null-Linie mit der wagrechten Schwerpunktsaxe zusammen.

97.
Größte
Beanspruchung. Aus Gleichung 56 folgt ferner, daß σ desto größer ist, je größer z ist, d. h. je weiter der betreffende Punkt von der wagrechten Schwerpunktsaxe entfernt ist. Die größten Werthe von σ finden also in den am weitesten entfernten Punkten statt. Es seien die Abstände der am weitesten nach oben und unten von der Null-Linie entfernten Punkte (Fig. 92) bzw. $+a_1$ und $-a_2$; alsdann ist

$$\sigma_{max} = + \frac{M}{\mathcal{F}} a_1 \quad \text{und} \quad \sigma_{min} = - \frac{M}{\mathcal{F}} a_2 \quad \dots \quad 57.$$

Die Gleichungen 57 werden benutzt, um die Größe und Form des Querschnittes an den verschiedenen Stellen des Balkens zu bestimmen. Bedeutet M das größte für einen Querschnitt mögliche Moment, so ist die größte in diesem Querschnitt vorhandene Zug-, bzw. Druckspannung aus den Gleichungen 57 zu ermitteln. Ist für den betreffenden Stoff und den vorliegenden Fall die zulässige Beanspruchung für die Flächeneinheit des Querschnittes K' , bzw. $-K''$ (für Zug, bzw. Druck), so darf höchstens stattfinden:

$$\sigma_{max} = K' \quad \text{und} \quad \sigma_{min} = -K'',$$

d. h. die Bedingungsgleichungen für den Querschnitt werden:

$$K' = \frac{M}{\mathcal{F}} a_1, \quad -K'' = - \frac{M}{\mathcal{F}} a_2 \quad \text{oder} \quad K'' = \frac{M}{\mathcal{F}} a_2.$$

Die beiden Gleichungen für K' und K'' können auch geschrieben werden:

$$\frac{\mathcal{F}}{a_1} = \frac{M}{K'} \quad \text{und} \quad \frac{\mathcal{F}}{a_2} = \frac{M}{K''} \quad \dots \quad 58.$$

Die rechten Seiten der Gleichungen 58 sind bekannt; es wird weiterhin gezeigt werden, wie man für die verschiedenen Fälle die Werthe von M ermittelt; diejenigen der zulässigen Beanspruchungen, d. h. die Werthe für K' und K'' sind ebenfalls (aus den Tabellen auf S. 64) bekannt. Sollen also an den meist beanspruchten Stellen der Querschnitte die zulässigen Beanspruchungen K' und K'' nicht überschritten werden, so sind $\frac{\mathcal{F}}{a_1}$ und $\frac{\mathcal{F}}{a_2}$ so zu bestimmen, daß die Gleichungen 58 erfüllt sind. \mathcal{F} , a_1 und a_2 hängen aber nur von der Form und Größe der Querschnittsfläche ab; man kann daher durch passende Anordnung des Querschnittes diese Bedingung erfüllen. Wenn beide Gleichungen 58 erfüllt sind, so treten gleichzeitig in den am meisten gezogenen und gedrückten Punkten des

Querschnittes die zulässigen größten Beanspruchungen auf Zug und Druck ein; diese Anordnung ist für die Materialausnutzung die günstigste.

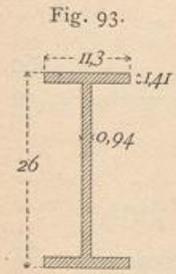
Für Baustoffe, bei denen die zulässigen Zug-, bzw. Druckbeanspruchungen (absolut genommen) nahezu gleich groß sind, ist in den Gleichungen 58 die Größe $K' = K'' = K$ zu setzen. Für diese Stoffe (Schweißseifen, Flufseifen, Stahl, Holz) ergibt sich

$$\frac{M}{\mathcal{J}} a_1 = \frac{M}{\mathcal{J}} a_2 \quad \text{oder} \quad a_1 = a_2,$$

d. h. die Querschnittsform für derartige auf Biegung beanspruchte Balken ist so zu wählen, daß die am meisten gezogenen, bzw. gedrückten Punkte gleich weit vom Schwerpunkte des Querschnittes entfernt sind, daß also der Schwerpunkt der Querschnittsfläche in halber Höhe liegt.

Bezeichnet man die halbe Höhe des Querschnittes alsdann mit a , so ist die nunmehr geltende Gleichung:

$$\frac{\mathcal{J}}{a} = \frac{M}{K} \dots \dots \dots 59.$$



Beispiel. Das Maximalmoment in einem schweißeisernen Walzbalken mit I-förmigem Querschnitt betrage $M = 280\,000 \text{ kgcm}$.

Nach der Tabelle auf S. 64 ist für Schweißseifen $K' = K'' = K = 700 \text{ kg}$ für 1 qcm , also

$$\frac{\mathcal{J}}{a_1} = \frac{\mathcal{J}}{a_2} = \frac{\mathcal{J}}{a} = \frac{M}{K} = \frac{280\,000}{700} = 400.$$

Das neben stehende Profil Nr. 26 der »Deutschen Normal Profile für I-Eisen« (Fig. 93) hat ein Trägheitsmoment $\mathcal{J} = 5798$; ferner ist $a = \frac{26}{2} = 13 \text{ cm}$, demnach $\frac{\mathcal{J}}{a} = 446$, so daß dieser Querschnitt im vorliegenden Falle genügt.

Den Quotienten $\frac{\mathcal{J}}{a}$ nennt man wohl auch das Widerstandsmoment und bezeichnet ihn mit W .

Man kann die Querschnitte der Balken mit genau bestimmbarer Elastizitätsgrenze auf ganz ähnliche Weise ermitteln, wie dies in Art. 84 u. 85 (S. 60 u. 62) für Stäbe gezeigt ist, die in ihrer Axenrichtung beansprucht werden.

Derjenige Querschnittspunkt möge der Untersuchung zu Grunde gelegt werden, welcher die größte Zugbeanspruchung erleidet; was von diesem Punkte gilt, hat auch für denjenigen Punkt Giltigkeit, welcher den größten Druck erleidet. Entsprechend den Bezeichnungen in Art. 84 (S. 60) bezeichne nunmehr σ_{max} die in dem betrachteten Punkte höchstens auftretende Zugspannung; dieselbe ist

$$\sigma_{max} = \frac{M_{max} a_1}{\mathcal{J}};$$

desgleichen bezeichne σ_{min} die in demselben Punkte mögliche kleinste Zugspannung, d. h. es ist

$$\sigma_{min} = \frac{M_{min} a_1}{\mathcal{J}}.$$

Wie dort, ergibt sich wieder

$$\text{für Schweißseifen: } \sigma_{max} = \frac{1050}{1,5 - 0,5 \frac{M_{min}}{M_{max}}},$$

58.
Neuere
Querschnitts-
bestimmung
für Schweiß-
und Flufseifen-
balken.

für Flusseisen: $\sigma_{max} = \frac{1350}{1,5 - 0,5 \frac{M_{min}}{M_{max}}}$,

wobei zu beachten ist, daß $\frac{\sigma_{min}}{\sigma_{max}} = \frac{M_{min}}{M_{max}}$ ist.

Bedeutet M_0 das Moment, welches im Querschnitt durch Eigengewicht allein und M_1 das größte Moment, welches im Querschnitt durch zufällige oder Verkehrs- last allein hervorgerufen wird, so ist

$$M_{max} = M_0 + M_1 \quad \text{und} \quad M_{min} = M_0,$$

und man erhält für Schweisseisen:

$$\frac{\mathcal{F}}{a} = \frac{M_{max}}{\sigma_{max}} = \frac{M_{max}}{1050} \left(1,5 - 0,5 \frac{M_{min}}{M_{max}} \right) = \frac{1,5 M_{max} - 0,5 M_{min}}{1050},$$

$$\frac{\mathcal{F}}{a} = \frac{1,5 M_0 + 1,5 M_1 - 0,5 M_0}{1050} = \frac{M_0 + 1,5 M_1}{1050},$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\mathcal{F}}{a} &= \frac{M_0 + 1,5 M_1}{1050}, \\ \frac{\mathcal{F}}{a} &= \frac{M_0}{1050} + \frac{M_1}{700}. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 60.$$

Für Flusseisen ergibt sich:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\mathcal{F}}{a} &= \frac{M_0 + 1,5 M_1}{1350}, \\ \frac{\mathcal{F}}{a} &= \frac{M_0}{1350} + \frac{M_1}{900}. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 61.$$

Beispiel: Die Größtmomente in einem Balken, der als flusseiserner Walzbalken angeordnet werden soll, betragen $M_0 = 180\,000$ kgcm und $M_1 = 230\,000$ kgcm. Alsdann muß

$$\frac{\mathcal{F}}{a} = \frac{180\,000}{1350} + \frac{230\,000}{900} = 133 + 255 = 388 \text{ cm}^2$$

sein. Das deutsche Normal-Profil Nr. 24 hat $\frac{\mathcal{F}}{a} = 357 \text{ cm}^2$ und das Profil Nr. 26 $\frac{\mathcal{F}}{a} = 446 \text{ cm}^2$; letzteres ist zu wählen.

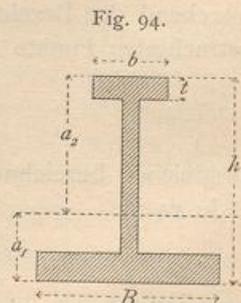
Für Gußeisen ist die zulässige Beanspruchung auf Druck doppelt so groß, als diejenige auf Zug (vergl. die Tabelle auf S. 64), also $K'' = 2 K'$, und demnach

$$\frac{M}{\mathcal{F}} a_2 = 2 \frac{M}{\mathcal{F}} a_1 \quad \text{und} \quad a_2 = 2 a_1.$$

Nun ist die ganze Höhe des Querschnittes

$$h = a_1 + a_2 = 3 a_1, \quad \text{woraus} \quad a_1 = \frac{h}{3}.$$

Daraus folgt die Regel: Die Querschnitte der gußeisernen Balken (Fig. 94) sind so anzuordnen, daß der Schwerpunkt um $\frac{1}{3}$ der Gesamthöhe des Querschnittes von der am meisten gezogenen Faser entfernt liegt. Befinden sich also die gezogenen Fasern, wie meistens, unten, die gedrückten Fasern oben, so soll der Schwerpunkt im Abstände $\frac{h}{3}$ über der Grundlinie des Querschnittes liegen.



99.
Stäbe
aus
Gußeisen.

Für Gufseifen hat nach neueren Verfuchen das Proportionalitätsgefetz keine Giltigkeit; die vorstehenden Entwicklungen find demnach auch nicht als unbedingt richtig anzusehen. Für Balken verwendet man zweckmäfsig kein Gufseifen.

Die auf Biegung beanspruchten Stäbe aus Holz werden, der Natur des Materials entsprechend, mit rechteckigem Querschnitt hergestellt; der Schwerpunkt des Querschnittes liegt also in halber Höhe h , und es ist $a_1 = a_2 = \frac{h}{2}$. Demnach wird $K' = K''$, und aus der Tabelle auf S. 64 ist der kleinere der beiden Werthe, welche als zulässige Zug-, bezw. Druckbeanspruchung angegeben find, einzuführen. Wenn dieser Werth K genannt wird, so ist

$$\frac{\mathcal{F}}{a} = \frac{M}{K}$$

Beispiel. Es sei etwa $M = 180000$ kgcm; alsdann muß für kieferne Balken stattfinden:

$$\frac{\mathcal{F}}{a} = \frac{180000}{60} = 3000.$$

Nach Gleichung 19 ist

$$\mathcal{F} = \frac{b h^3}{12} \quad \text{und} \quad \frac{\mathcal{F}}{a} = \frac{b h^3}{12 \frac{h}{2}} = \frac{b h^2}{6}.$$

Im vorliegenden Falle muß also sein

$$\frac{b h^2}{6} = 3000 \quad \text{oder} \quad b h^2 = 18000.$$

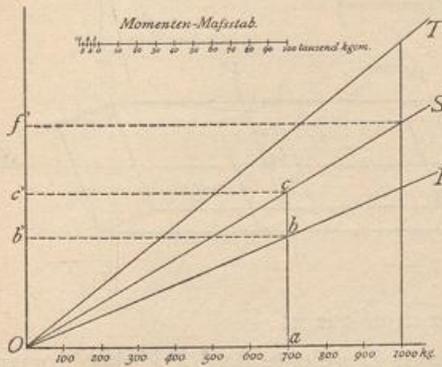
Ist $b = \frac{3}{4} h$, so wird $\frac{3}{4} h^3 = 18000$ und $h = \sqrt[3]{24000} = \approx 29$ cm, fonach $b = 22$ cm.

Bei den schweis- und flufseisernen Walzbalken I- und C-förmigen Querschnittes, welche im Handel in ganz bestimmten Kalibern erhältlich sind, kann man das für jeden Fall nothwendige Kaliber mittels einer einfachen Figur sehr leicht ermitteln. Die Bedingung für die Querschnittsbildung ist

$$M = K \frac{\mathcal{F}}{a}$$

Je nachdem man bei einem Balken mit gegebenem Querschnitt, also bekanntem

Fig. 95.



Widerstandsmoment $\frac{\mathcal{F}}{a}$, eine größere oder geringere Beanspruchung K als zulässig einführt, kann man ihn für ein größeres oder geringeres Moment M verwenden. Trägt man nun die Werthe von K als Abscissen, die zugehörigen Werthe $\frac{K \mathcal{F}}{a} = M$ als Ordinaten auf, so ergibt sich für jedes Kaliber eine Gerade, etwa OR (Fig. 95), die durch den Koordinatenanfang O geht und die Größe der Momente angiebt, welche dieses Kaliber bei den verschiedenen Beanspruchungen K ertragen

kann. In Fig. 95 sind drei solche Linien OR , OS , OT angegeben. Bei einer als zulässig erachteten Beanspruchung $K = 700$ kg würde der zu OR gehörige Balken genügen, so lange das größte Moment nicht größer als $a b = O b'$ ist; der zu OS gehörige Balken genügt hierbei noch für ein Moment $a c = O c'$. Wird eine größere Bean-

100.
Stäbe
aus Holz.

101.
Querschnitts-
bestimmung
mittels
graphischer
Tafel.

spannung K , etwa $K = 1000 \text{ kg}$, zugelassen, so genügt der Balken OS bis zu einer Momentengröße \overline{OF} . Auf der neben stehenden Tafel sind für die »Deutschen Normal-Profile« mit I- und C-Form die Linien gezogen; auf der Abszissenaxe sind die Spannungen K , auf der Ordinatenaxe die Momente abgetragen.

Wenn z. B. ein Moment von 125000 kgcm aufzunehmen ist, so würde das I-Eisen Nr. 20 dieses mit einer größten Beanspruchung $K = 580 \text{ kg}$ ertragen können, Nr. 18 mit einer Beanspruchung von 765 kg , Nr. 16 mit einer Spannung von 1060 kg . Wäre vorgeschrieben, daß K nicht größer sein solle, als 700 kg , so würde das Kaliber zu wählen sein, welches zunächst über dem Punkte P liegt, in welchem die zu $K = 700 \text{ kg}$ gehörige Ordinate den Werth $M = 125000 \text{ kgcm}$ hat. Die Verwendung dieser graphischen Tafel ist sonach sehr bequem.

2) Die Axialkraft ist nicht gleich Null.

Dieser Fall wird aus Zweckmäßigkeitsrückichten im folgenden Abschnitt, und zwar im Kapitel über »Stützen« behandelt, da er für diese besondere Wichtigkeit hat.

b) Axiale Biegungsspannungen, wenn die Kraftebene die Balkenquerschnitte nicht in Hauptaxen schneidet.

102.
Axiale
Biegungs-
spannungen.

Auf den Querschnitt II in Fig. 96a wirke das Biegemoment $M = Q \zeta$; Fig. 96b giebt die Vorderansicht des Querschnittes; die Kraftebene fällt mit der Bildebene der Fig. 96a zusammen, geht durch die Balkenaxe und ist die XZ -Ebene.

Bezeichnen UU und VV die beiden Hauptaxen des Querschnittes, so kann nach bekannten Gesetzen der Statik das in der XZ -Ebene wirkende Moment M in zwei Seitenmomente zerlegt werden, welche in der XU - und XV -Ebene wirken; das erstere ist alsdann $M_u = M \sin \alpha$, das letztere $M_v = M \cos \alpha$. Diese Zerlegung, so wie die Drehrichtung der Seitenmomente wird durch die isometrische Ansicht in Fig. 96c verdeutlicht, bei welcher, der einfacheren Zeichnung halber, ein Rechteckquerschnitt angenommen ist. Q zerlegt sich im Punkte A in $Q \cos \alpha$ und $Q \sin \alpha$, welche Kräfte bezw. in den Ebenen XV und XU wirken. Die erstere Kraft hat in Bezug auf die durch O , den Schwerpunkt des betrachteten Querschnittes, gelegte Hauptaxe UU das Moment:

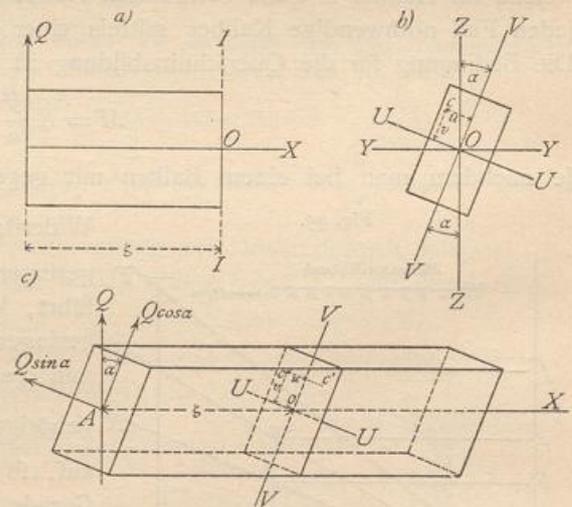
$$Q \cos \alpha \cdot \zeta = Q \zeta \cos \alpha = M \cos \alpha;$$

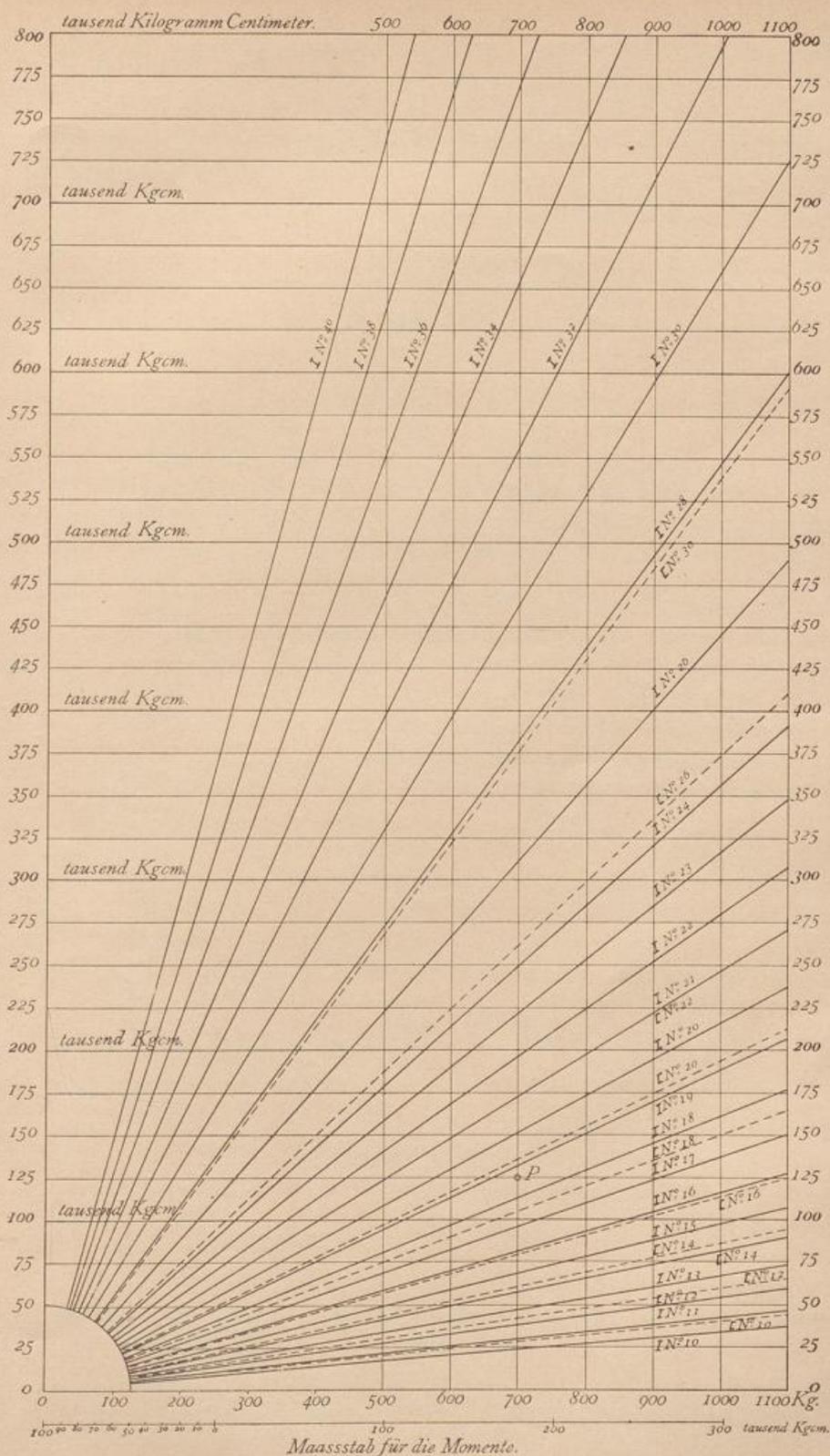
die letztere hat in Bezug auf die gleichfalls durch O gelegte Axe VV das Moment

$$Q \sin \alpha \cdot \zeta = Q \zeta \sin \alpha = M \sin \alpha.$$

Jedes dieser beiden Theilmomente wirkt nun aber in einer Ebene, welche die sämtlichen Querschnitte in Hauptaxen schneidet; die Ebene des ersteren schneidet die Querschnitte in VV , die des letzteren in den Axen UU ; jedes dieser Momente

Fig. 96.





Graphische Tafel

für die Querschnittsermittlung von I- und L-förmigen Walzbalken.
(Deutsche Normal-Profile.)

Handbuch der Architektur. I. 1, b. (3. Aufl.)

erzeugt fönach für sich allein Biegungsspannungen, welche nach Gleichung 56 zu berechnen sind. Das Trägheitsmoment des Querschnittes bezogen auf die Hauptaxe UU soll mit A , dasjenige bezogen auf die Hauptaxe VV mit B bezeichnet werden; dann erhält man die Spannungen in einem Punkte C mit den Coordinaten u und v mit Rücksicht auf Gleichung 56 wie folgt.

Wirkte nur $M \cos \alpha$, so wäre die Spannung $\sigma_1 = \frac{M \cos \alpha \cdot v}{A}$;

wirkte nur $M \sin \alpha$, so wäre die Spannung $\sigma_2 = \frac{M \sin \alpha \cdot u}{B}$.

Die wirkliche Spannung setzt sich aus beiden Einzelwerthen zusammen, d. h. es wird sein

$$\sigma = \sigma_1 + \sigma_2 = M \left(\frac{v \cos \alpha}{A} + \frac{u \sin \alpha}{B} \right).$$

Bei der angenommenen Kraft- und Drehrichtung der Momente, so wie bei der Lage des Punktes C werden, falls man die Coordinaten v und u nach oben, bezw. links als positiv einführt, sowohl σ_1 wie σ_2 positive, im vorliegenden Falle Druckbeanspruchungen bedeuten; wenn der Punkt an der anderen Seite von VV liegt, etwa in C' , so würde u negativ, demnach $\sigma_2 = -\frac{M \sin \alpha \cdot u}{B}$ werden. Man sieht leicht, dass alle Punkte, die in denjenigen von beiden Hauptaxen gebildeten Vierteln des Querschnittes liegen, welche von Q geschnitten werden, durch beide Momente Druck, bezw. Zug erhalten, dass dagegen in den beiden anderen Vierteln die Spannungen σ_1 und σ_2 verschiedene Vorzeichen haben.

Nach Vorstehendem ist allgemein

$$\sigma = M \left(\frac{v \cos \alpha}{A} + \frac{u \sin \alpha}{B} \right) \quad 62.$$

σ kann nur für diejenigen Querschnittspunkte Null werden, für welche der Klammerfactor Null wird (der Fall $M=0$ ist belanglos); alle Punkte des Querschnittes, in welchen die Spannung den Werth Null hat, genügen also der Gleichung

$$\frac{v \cos \alpha}{A} + \frac{u \sin \alpha}{B} = 0.$$

Dies ist hier demnach die Gleichung der Null-Linie (siehe Art. 96, S. 75).

Löst man diese Gleichung nach v auf, so erhält man

$$v = -\frac{A}{B} u \operatorname{tg} \alpha \quad \dots \quad 63.$$

Die beiden Veränderlichen u und v kommen nur in der ersten Potenz vor; mithin ist die Linie eine Gerade.

Für $u=0$ wird auch $v=0$, woraus folgt, dass die Null-Linie bei den gemachten Annahmen durch den Punkt O , den Schwerpunkt des Querschnittes, geht.

In Fig. 97 sei NN die Null-Linie. Die Werthe u , bezw. v sind nach links, bezw. oben als positiv, nach rechts, bezw. unten als negativ eingeführt. Der

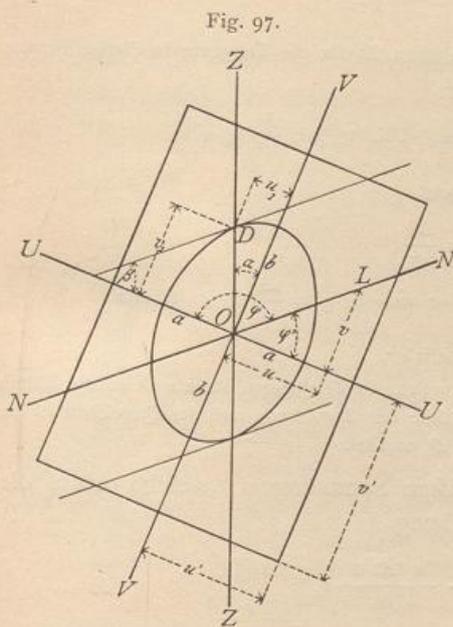


Fig. 97.

103.
Null-Linie.

Winkel φ , welchen die Linie NN mit der positiven U -Axe einschließt, hat nach Gleichung 63 die Tangente

$$\operatorname{tg} \varphi = -\frac{A}{B} \operatorname{tg} \alpha.$$

Nach Fig. 97 ist aber auch $\operatorname{tg} \varphi = -\operatorname{tg} \varphi'$; demnach ist

$$\operatorname{tg} \varphi' = \frac{A}{B} \operatorname{tg} \alpha \dots \dots \dots 64.$$

Die Lage der Null-Linie ist also nur von der Querschnittsbildung (darauf weist der Quotient $\frac{A}{B}$ hin) und der Lage der Kräfteebene zu den Hauptachsen (d. h. von α) abhängig, nicht aber von der Größe des Momentes.

Gleichung 64 giebt ein bequemes Mittel, die Lage der Null-Linie zu construiren. Zeichnet man (Fig. 97) für den betreffenden Querschnitt die Ellipse der Trägheitsmomente (siehe Art. 72, S. 51), so sind die beiden Halbachsen a und b derselben bezw.

$$a = \frac{K}{\sqrt{A}} \quad \text{und} \quad b = \frac{K}{\sqrt{B}}.$$

Die Gleichung der Ellipse ist bekanntlich $\frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2} = 1$, und die trigonometrische Tangente des Winkels, welchen die geometrische Tangente an die Ellipse in einem Punkte, dessen Coordinaten u und v sind, mit der U -Axe einschließt, ist

$$\frac{dv}{du} = -\frac{u b^2}{v a^2}.$$

Die Coordinaten des Punktes D seien u_1 und v_1 ; alsdann ist für die Tangente in diesem Punkte der Winkel mit der positiven U -Axe gleich $180 - \beta$, somit

$$\frac{dv}{du} = -\operatorname{tg} \beta = -\frac{b^2 u_1}{a^2 v_1} = -\frac{b^2}{a^2} \operatorname{tg} \alpha, \quad \text{d. h.} \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{b^2}{a^2} \operatorname{tg} \alpha.$$

Aus den oben stehenden Gleichungen für a und b folgt

$$A = \frac{K^2}{a^2} \quad \text{und} \quad B = \frac{K^2}{b^2};$$

Demnach ist $\operatorname{tg} \beta = \frac{A}{B} \operatorname{tg} \alpha$. Nach Gleichung 64 ist aber auch $\operatorname{tg} \varphi' = \frac{A}{B} \operatorname{tg} \alpha$; folglich

$$\operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg} \varphi' \quad \text{und} \quad \beta = \varphi'.$$

Die Null-Linie ist folglich parallel zu der Tangente, welche in demjenigen Punkte D an die Ellipse der Trägheitsmomente gelegt wird, in welchem die Schnittlinie der Kräfteebene und des Querschnittes die Ellipse schneidet. Die Null-Linie ist also zur Tangente in D parallel.

Alle Querschnittspunkte mit gleich großer Spannung σ , welche etwa die Größe $\sigma = C$ haben möge, genügen der Gleichung

$$C = M \left(\frac{v \cos \alpha}{A} + \frac{u \sin \alpha}{B} \right),$$

aus welcher folgt

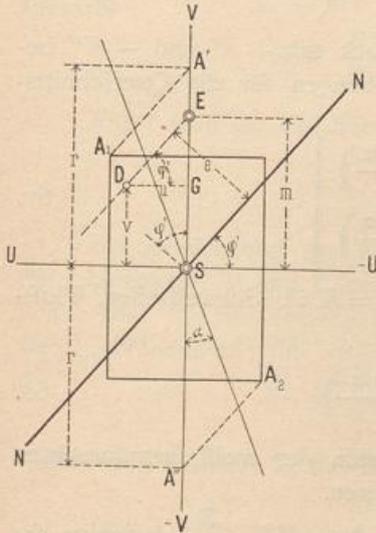
$$v = \frac{A}{M} \frac{C}{\cos \alpha} - u \frac{A}{B} \operatorname{tg} \alpha \dots \dots \dots 65.$$

Dies ist ebenfalls die Gleichung einer Geraden, und zwar einer solchen, welche den gleichen Winkel mit der UU -Axe einschließt, wie die Null-Linie, auf deren sämtlichen Punkten ja auch die Spannung gleich groß (d. h. gleich Null) ist. Demnach folgt: Alle Querschnittspunkte, in welchen gleiche axiale Spannung herrscht, liegen

auf einer zur Null-Linie parallelen Geraden; die Spannung σ ist also direct proportional dem senkrechten Abstände der Geraden von der Null-Linie.

Für die Spannung σ in einem beliebigen Punkte D des Querschnittes mit den Coordinaten u und v ergibt sich durch Umformung der Gleichung 62 ein sehr einfacher Ausdruck. Nach Gleichung 62 ist

Fig. 98.



$$\sigma = M \left(\frac{v \cos \alpha}{A} + \frac{u \sin \alpha}{B} \right),$$

$$\sigma = \frac{M \cos \alpha}{A} \left(v + \frac{u A}{B} \operatorname{tg} \alpha \right) = \frac{M}{A} \cos \alpha (v + u \operatorname{tg} \varphi').$$

Legt man parallel zur Null-Linie NN durch D eine Linie, welche die Hauptaxe VV im Punkte E schneidet, so ist $\overline{SE} = \overline{SG} + \overline{GE}$, $\overline{SG} = v$ und $\overline{GE} = u \operatorname{tg} \varphi'$, also $\overline{SE} = v + u \operatorname{tg} \varphi'$. Wird $\overline{SE} = m$ gesetzt, so erhält man

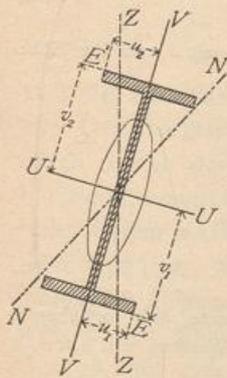
$$\sigma = \frac{M \cos \alpha}{A} m \dots \dots 66.$$

Fällt man von S die Senkrechte auf die durch D gezogene Parallele zur Null-Linie, so ist ihre Länge $e = m \cos \varphi'$ und

$$\sigma = \frac{M \cos \alpha}{A \cos \varphi'} e.$$

Der Fall, daß die Kräftebene die Balkenquerschnitte nicht in Hauptaxen schneidet, kommt im Hochbau sehr häufig vor, so z. B. bei den Dachpfetten, welche nach Fig. 99 mit einer Querschnittsseite in die Dachschräge gelegt sind, ferner bei

Fig. 99.



I- oder C-förmigen Walzbalken, welche Gewölbe tragen, falls der wagrechte Gewölbefschub nicht vollständig (durch Anker etc.) aufgehoben ist; außerdem bei einer Anzahl von Querschnittsformen, deren lothrechte Schwerpunktsaxe keine Hauptaxe ist, wie bei gleichschenkeligen und ungleichschenkeligen Winkeleisen, Z-Eisen etc., falls die Belastung lothrecht ist; auch die Gratsparren der Dächer gehören hierher. In allen diesen Fällen darf man nicht nach der einfachen Formel 56 rechnen, muß vielmehr die größte Beanspruchung aus Gleichung 62 entnehmen und dann den Querschnitt so bestimmen, daß die größte Beanspruchung die zulässige Grenze nicht überschreite.

Die Hauptaxen theilen den Querschnitt in vier Quadranten; die größte Beanspruchung wird in der Regel in denjenigen Querschnittspunkten stattfinden, welche in den von der Kräftebene geschnittenen Quadranten des Querschnittes liegen. Allgemein kann man mittels der Verzeichnung der Null-Linie leicht diejenigen Punkte finden, welche die größte Beanspruchung erleiden; denn da die Beanspruchung der senkrechten Entfernung von der Null-Linie proportional ist, so ist sie am größten in denjenigen Querschnittspunkten, welche, senkrecht zur Null-Linie gemessen, am weitesten von derselben entfernt liegen. So werden in Fig. 99 die Punkte E und E' am meisten beansprucht werden, ersterer bei der gewöhnlichen Drehrichtung der Momente auf

104.
Größte axiale
Spannung;
Querschnitts-
ermittlung.

Zug, letzterer auf Druck. Werden die Coordinaten der meist beanspruchten Punkte mit $+u_1, +v_1$ und $-u_2, -v_2$ bezeichnet, wobei dieselben nach denjenigen Seiten als positiv gerechnet sind, an welchen die Einzelmomente $M \cos \alpha$, bzw. $M \sin \alpha$ Zug erzeugen, so ergibt sich mit Rücksicht auf Gleichung 62

$$\sigma_{max} = M \left(\frac{v_1 \cos \alpha}{A} + \frac{u_1 \sin \alpha}{B} \right) \quad \text{und} \quad \sigma_{min} = -M \left(\frac{v_2 \cos \alpha}{A} + \frac{u_2 \sin \alpha}{B} \right).$$

Falls die zulässigen Beanspruchungen auf Zug und Druck mit $+K'$ und $-K''$ bezeichnet werden, so erhält man als Bedingungsgleichungen für die Querschnittsbildung:

$$\left. \begin{aligned} K' &= M \left(\frac{v_1 \cos \alpha}{A} + \frac{u_1 \sin \alpha}{B} \right) \\ K'' &= M \left(\frac{v_2 \cos \alpha}{A} + \frac{u_2 \sin \alpha}{B} \right) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 67.$$

Bei denjenigen Baustoffen, für welche nahezu $K' = K'' = K$ ist (Schweißseifen, Flusseisen, Holz), vereinfachen sich die Gleichungen 67 in

$$K = M \left(\frac{v' \cos \alpha}{A} + \frac{u' \sin \alpha}{B} \right) \dots \dots \dots 68.$$

Im letzten Ausdruck bedeuten v' und u' die Coordinaten des meist beanspruchten Punktes, bezogen auf die Hauptachsen als Coordinatenachsen.

$\frac{A}{v'}$ nennt man das Widerstandsmoment für die Axe UU , $\frac{B}{u'}$ dasjenige für die Axe VV ; man setzt abkürzungsweise

$$\frac{A}{v'} = W_u \quad \text{und} \quad \frac{B}{u'} = W_v,$$

so daß Gleichung 68 nunmehr lautet:

$$K = \frac{M \cos \alpha}{W_u} + \frac{M \sin \alpha}{W_v} \dots \dots \dots 69.$$

Für den rechteckigen Querschnitt ergibt sich sehr einfach, wenn die Breite mit b und die Höhe mit h bezeichnet wird,

$$\begin{aligned} A &= \frac{b h^3}{12}, & v' &= \frac{h}{2}, & \frac{A}{v'} &= W_u = \frac{b h^2}{6}, \\ B &= \frac{h b^3}{12}, & u' &= \frac{b}{2}, & \frac{B}{u'} &= W_v = \frac{h b^2}{6}; \end{aligned}$$

mithin aus Gleichung 69

$$K = \frac{6M}{bh} \left(\frac{\cos \alpha}{h} + \frac{\sin \alpha}{b} \right) \dots \dots \dots 70.$$

Für einen bestimmten Fall sind K, M, α gegeben; b und h sind so zu bestimmen, daß vorstehende Gleichung erfüllt ist. Meistens wird ein mehrmaliges Verfehlen mit verschiedenen Werthen von b und h erforderlich sein. Man kann der Gleichung 70 auch die Form geben:

$$K = \frac{6M}{b h^2} \left[\cos \alpha + \frac{h}{b} \sin \alpha \right];$$

im Mittel ist $\frac{h}{b} = 1,5$ und dann

$$K = \frac{6M}{b h^2} \left[\cos \alpha + 1,5 \sin \alpha \right].$$

Die Gleichung für die Querschnittsbestimmung lautet alsdann:

$$b h^2 = \frac{6M (\cos \alpha + 1,5 \sin \alpha)}{K} \quad \text{oder} \quad h^3 = \frac{6M (\cos \alpha + 1,5 \sin \alpha)}{K}.$$

In diesem Ausdruck ist auf der rechten Seite nur Bekanntes; man findet daraus leicht h und danach

$$b = \frac{2}{3} h.$$

Bezeichnet man die beiden in die Hauptaxenebenen fallenden Momente kurz mit M_1 und M_2 , also

$$M_1 = M \cos \alpha \quad \text{und} \quad M_2 = M \sin \alpha,$$

so wird

$$K = \frac{M_1}{W_u} + \frac{M_2}{W_v} = \frac{1}{W_u} \left(M_1 + M_2 \frac{W_u}{W_v} \right).$$

Führt man die abkürzende Bezeichnung $c = \frac{W_u}{W_v}$ ein, so wird ²³⁾

$$K = \frac{1}{W_u} (M_1 + c M_2) \dots \dots \dots 71.$$

Zur Ermittlung des erforderlichen Querschnittes kann diese Formel bequem für rechteckige, I- und C-förmige Querschnittsformen verwendet werden. Die Werthe von c sind für die verschiedenen Kaliber der Deutschen Normal-Profile (I und C) wenig veränderlich; für vorläufige Berechnungen kann man

für I-Eisen	für C-Eisen
$c = 7$	$c = 5$

eingeführen. Alsdann ist die Bedingungsgleichung für den Querschnitt

$$W_u = \frac{M_1 + c M_2}{K} \dots \dots \dots 72.$$

Man bestimmt nach Gleichung 72 das erforderliche W_u und wählt danach aus den Tabellen das Profil; hat dieses einen anderen Werth, als derjenige, welcher angenommen war, so nimmt man eine zweite, genauere Rechnung vor ²⁴⁾.

Bezüglich der einfachen Behandlung unsymmetrischer Querschnittsformen (Z-Eisen, F-Eisen u. dergl.) wird auf Art. 114 verwiesen.

Für die Berechnung bequem ist auch Gleichung 66:

$$\sigma = \frac{M \cos \alpha}{A} m,$$

weil sie nur das Seitenmoment in der Ebene der einen Hauptaxe enthält. Für alle Querschnittspunkte, welche in der Hauptaxe VV liegen, ist die Spannung durch das in der Ebene der UU wirkende Seitenmoment gleich Null; für alle diese Querschnittspunkte kommt also nur das Seitenmoment ($M \cos \alpha$) in Frage. Mit den Spannungen dieser Punkte kennt man aber auch die Spannungen derjenigen Querschnittspunkte, welche in bezw. gleichen, senkrecht gemessenen Abständen von der Null-Linie liegen, wie diese. Größte Beanspruchung findet in den Punkten statt, welche den weitesten Abstand (senkrecht gemessen) von der Null-Linie haben. In Fig. 98 sind dies die Punkte A_1 und A_2 . Um ihre Spannungen zu ermitteln, lege man durch dieselben Parallele zur Null-Linie, welche die VV -Axe bezw. in A' und A'' schneiden. Alsdann ist in A_1 , bezw. A_2 , so wie in A' und A''

$$\sigma_{\max} = \pm \frac{M \cos \alpha}{A} r.$$

²³⁾ Siehe: LAND, R. Profilbestimmung von I- und C-Trägern bei schiefer Belastung. Zeitschr. d. Ver. deutsch. Ing. 1895, S. 293.

²⁴⁾ In Theil III, Band 2, Heft 4 (Abth. III, Abchn. 2, E, Kap. 34, unter a) dieses Handbuchs werden die Tabellen für c vorgeführt und einige Beispiele durchgerechnet werden.

c) Allgemeine Untersuchung der Biegungsspannungen mit Zuhilfenahme der Trägheitskreife.

105.
Spannungen
an beliebiger
Stelle des
Querschnittes.

Für den allgemeinen Fall, der durch Fig. 100 dargestellt ist, schneide die an der einen Seite des Querschnittes wirkende Mittelkraft R den Querschnitt im Punkte E (bezw. E'); S sei der Schwerpunkt des Querschnittes; die Kraftebene schneide den Querschnitt nicht in einer Hauptaxe. Wie in Art. 95 (S. 73) wird die Annahme gemacht, daß die axialen Spannungen σ der einzelnen Querschnittspunkte in linearer Abhängigkeit von ihrer Lage stehen. Trägt man also in jedem Querschnittspunkte die axiale Spannung senkrecht zum Querschnitt als Ordinate auf, so liegen die Endpunkte aller Ordinaten auf einer Ebene, der Spannungsebene. Die Gleichung dieser Ebene ist auch die Gleichung für σ . Spannungsebene und Querschnittsebene schneiden einander in einer Geraden; in allen Punkten dieser Geraden hat die Spannung, d. h. die Ordinate der Spannungsebene, den Werth Null. Diese Linie ist die sog. Null-Linie (neutrale Linie). Fig. 101 zeigt die Spannungsebene, den Querschnitt (welcher der Einfachheit halber rechtwinkelig eingetragen ist) und die Null-Linie NN . Eine senkrecht zur Querschnittsebene parallel zur Linie NN hindurch gelegte Ebene schneidet den Querschnitt und die Spannungsebene in zwei Parallelen 11 und 22 . Daraus folgt: Alle Punkte des Querschnittes, welche auf einer Geraden liegen, die parallel zur Null-Linie ist, haben gleiche Spannung σ (vergl. auch Art. 103, S. 81). Die Spannung in den einzelnen Punkten der Linie 11 ist also unabhängig von der besonderen Lage des Punktes in der Linie; sie hängt nur von dem Abstände der Linie 11 und der Null-Linie ab. Bezeichnet man diesen Abstand, rechtwinkelig gemessen, mit η , so ist $\sigma = C\eta$. In diesem Ausdruck ist C eine noch zu bestimmende Constante.

Durch den Schwerpunkt S des Querschnittes (Fig. 102) werde eine Axe $N'N'$ parallel zur Null-Linie NN gelegt; der Abstand beider Axen sei s . Alsdann sei $\eta = y + s$, d. h. der senkrechte Abstand eines beliebigen Querschnittspunktes von der Null-Linie sei gleich η und von der Linie $N'N' = y$. Die an der einen Seite des Querschnittes auf den Balken wirkende Mittelkraft R (Fig. 100) schneide den Querschnitt im Punkte E . Die Linie ES , in welcher die Kraftebene den Querschnitt schneidet, wird die Kraftlinie genannt. Die Beziehungen, welche zwischen der Lage der Kraftlinie und Null-Linie bestehen, so wie die Größe von σ

Fig. 100.

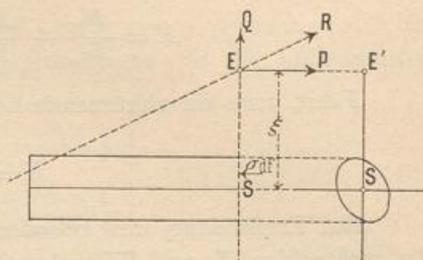


Fig. 101.

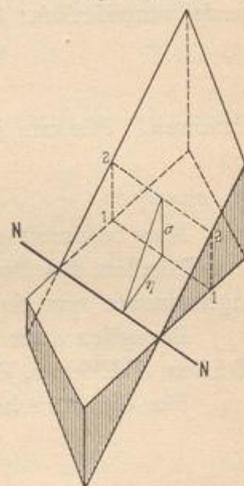
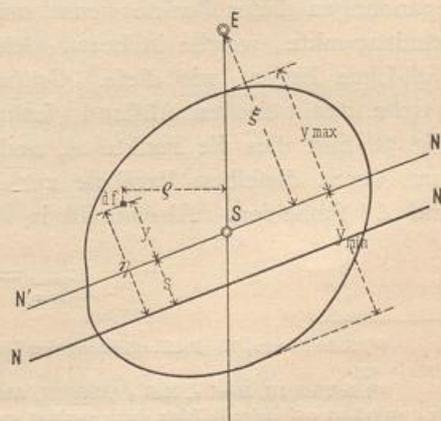


Fig. 102.



ergeben sich aus den Gleichgewichtsbedingungen. Die Mittelkraft R (Fig. 100) wird in die Axialkraft P und in die Querkraft Q zerlegt; sie muß mit den im Querschnitt anzubringenden Spannungen im Gleichgewicht sein, d. h. es muß stattfinden:

$$\text{I) } 0 = P - \int \sigma df \quad (\text{algebraische Summe der Kräfte, welche in der Richtung der Axe wirken, gleich Null}).$$

$$\text{II) } 0 = P\xi - \int \sigma y df \quad (\text{algebraische Summe der Momente für die Axe } N'N' \text{ gleich Null}).$$

$$\text{III) } 0 = \int \sigma \rho df \quad (\text{algebraische Summe der Momente für die Kraftlinie, d. h. für die Axe } ES, \text{ gleich Null}).$$

Unter ρ ist der normal gemessene Abstand eines Querschnittspunktes von der Kraftlinie ES verstanden. Beachtet man, daß $\sigma = C\eta = C(y+s)$ ist, so erhält man aus Gleichung I

$$P = C \int (y+s) df = C \int y df + C \int s df.$$

Da $N'N'$ eine Schwerpunktsaxe ist, so ist

$$\int y df = 0, \quad \text{also} \quad P = Cs \int df = CsF, \quad \text{d. h.}$$

$$\text{IV) } \quad \quad \quad C = \frac{P}{sF}.$$

Aus Gleichung II ergibt sich

$$P\xi = C \int y^2 df + Cs \int y df \quad \text{und mit} \quad \int y df = 0$$

$$P\xi = C \int y^2 df.$$

$\int y^2 df$ ist das Trägheitsmoment der Querschnittsfläche für die zur Null-Linie parallele Schwerpunktsaxe; dasselbe soll kurz mit \mathcal{I} bezeichnet, eben so $P\xi = M$ gesetzt werden. Dann wird $M = C\mathcal{I}$ und

$$\text{V) } \quad \quad \quad C = \frac{M}{\mathcal{I}}.$$

Die Gleichsetzung von IV und V ergibt

$$s = \frac{P}{F} \frac{\mathcal{I}}{M} = \frac{P\mathcal{I}}{F \cdot P\xi} = \frac{\mathcal{I}}{F\xi},$$

$$\text{VI) } \quad \quad \quad s = \frac{\mathcal{I}}{F\xi}.$$

Nach Art. 71 (S. 51) ist $\mathcal{I} = Fi^2$, worin i den Trägheitsradius bezeichnet, d. h.

$$\text{VIa) } \quad \quad \quad s = \frac{i^2}{\xi}.$$

Gleichung VIa befragt: i ist die mittlere geometrische Proportionale zwischen s und ξ . Wenn ξ und i bekannt sind, so kann man daraus leicht den Abstand s der Null-Linie vom Schwerpunkt finden.

Aus Gleichung III folgt endlich:

$$\int \sigma \rho df = C \int (y+s) \rho df = 0,$$

$$\int y \rho df + s \int \rho df = 0.$$

$\int \rho \, df$ ist das statische Moment der Querschnittsfläche für die Schwerpunktsaxe ES , d. h. es ist $\int \rho \, df = 0$, mithin auch

$$\text{VII) } \int \eta \rho \, df = 0.$$

Gleichung VII befagt, daß das Centrifugalmoment für die beiden Axen: Kraftlinie \overline{ES} und die zur Null-Linie parallele Schwerpunktsaxe, gleich Null ist, d. h. beide Axen sind conjugirt (siehe Art. 67, S. 46). Demnach ist bewiesen: Die Kraftlinie und die durch den Schwerpunkt des Querschnittes parallel zur Null-Linie gezogene Axe $N'N'$ sind conjugirte Axen. Daraus ergibt sich eine sehr einfache, unten folgende Construction.

Aus der Gleichung $s = \frac{P}{M} \frac{\mathcal{F}}{F}$ folgt noch, daß falls die Axialkraft P gleich Null ist, ohne daß auch M gleich Null ist, dann der Abstand s der Null-Linie vom Schwerpunkt ebenfalls Null ist. Also: Wenn die Axialkraft gleich Null ist, so geht die Null-Linie durch den Schwerpunkt des Querschnittes (siehe auch Art. 96, S. 75).

Es war $\sigma = C \eta = C (y + s)$, und mit Rücksicht auf Gleichung V u. VI wird

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{M}{\mathcal{F}} y + \frac{M}{\mathcal{F}} \frac{\mathcal{F}}{F\xi} = \frac{M}{\mathcal{F}} y + \frac{P\xi}{\mathcal{F}F\xi} = \frac{M}{\mathcal{F}} y + \frac{P}{F} \\ \sigma &= \frac{P}{F} + \frac{M}{\mathcal{F}} y \dots\dots\dots 73. \end{aligned}$$

Dies ist genau derselbe Ausdruck, welcher in Art. 95 (S. 73) für den Fall gefunden ist, daß die Kraftebene alle Querschnitte in Hauptaxen schneidet; nur beziehen sich in der hier entwickelten Gleichung M und \mathcal{F} auf diejenige Schwerpunktsaxe, welche der Kraftlinie conjugirt (d. h. parallel zur Null-Linie) ist. In der früheren Gleichung bezogen sich M und \mathcal{F} auf die eine Hauptaxe, wenn die Kraftlinie die andere Hauptaxe war. Man sieht, daß die frühere Gleichung ein Sonderfall der oben entwickelten allgemein giltigen Gleichung ist.

Aus Gleichung 73 folgt:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{max} &= \frac{P}{F} + \frac{M}{\mathcal{F}} y_{max} \\ \sigma_{min} &= \frac{P}{F} - \frac{M}{\mathcal{F}} y_{min} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots 74.$$

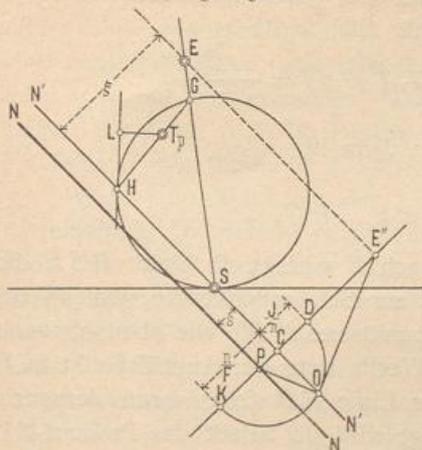
Maximum und Minimum der Spannungen ergeben sich in denjenigen Querschnittspunkten, durch welche die weitest gezogenen Parallelen zur Null-Linie möglich sind.

Da die Kraftlinie ES und die zur Null-Linie parallele Schwerpunktsaxe $N'N'$ conjugirt sind, so ergibt sich die folgende Construction (Fig. 103).

106.
Lage
der Null-Linie;
graphische
Ermittelung
mittels des
Trägheitskreises.

Man construire den Trägheitskreis des Querschnittes mit dem Durchmesser \mathcal{J}_p (siehe Art. 68, S. 46), suche T_p , den Trägheitshauptpunkt, ziehe die Kraftlinie \overline{SE} und verbinde den Schnittpunkt G der Kraftlinie und des Trägheitskreises mit T_p . Die Linie $\overline{GT_p}$ schneide den Kreis zum zweiten Male in H ; alsdann ist \overline{SH} die zu \overline{SE} conjugirte Axe, weil das Centrifugalmoment des Querschnittes für beide Axen SE und SH Null ist (siehe Art. 67, S. 46). Die Linie \overline{SH} ist also zur Null-Linie NN' parallel; der senkrechte Abstand beider ist s , und es ist $s = \frac{\mathcal{F}}{F\xi}$. In Fig. 103 wird \mathcal{F} , bezogen auf die Axe $N'N'$, dargestellt durch die Länge $\overline{LT_p}$. Ist der Maßstab für den Trägheitskreis derart, daß 1 cm = cm³

Fig. 103.



bedeutet, so ist $\mathcal{J} = \overline{LT}_p \cdot n$ und $\overline{LT}_p = \frac{\mathcal{J}}{n}$. Man kann den Ausdruck für s , ohne etwas zu ändern, im Zähler und Nenner durch n dividieren und erhält

$$s \xi = \frac{\mathcal{J}}{n} \frac{n}{F}$$

Daraus folgt: Auf einer senkrecht zur Linie $N'N'$ gezogenen Linie mache man $\overline{CD} = \frac{\mathcal{J}}{n} = \overline{LT}_p$, $\overline{CK} = \frac{n}{F}$ und schlage über \overline{DK} einen Halbkreis; alsdann ist

$$\overline{CO}^2 = \overline{CD} \cdot \overline{CK} = \frac{\mathcal{J}}{n} \frac{n}{F}$$

Nunmehr mache man $\overline{CE''} = \xi$, ziehe $\overline{E''O}$ und in O die Senkrechte \overline{OP} zu $\overline{OE''}$. Dann ist auch $\overline{CP} \cdot \overline{CE''} = \overline{CO}^2$, d. h.

$$\overline{CP} \cdot \xi = \frac{\mathcal{J}}{n} \frac{n}{F} \quad \text{oder} \quad \overline{CP} = \frac{\mathcal{J}}{n} \frac{n}{F \xi} = s$$

Die parallel zu $N'N'$ durch P gezogene Linie ist also die gefuchte Null-Linie NN .

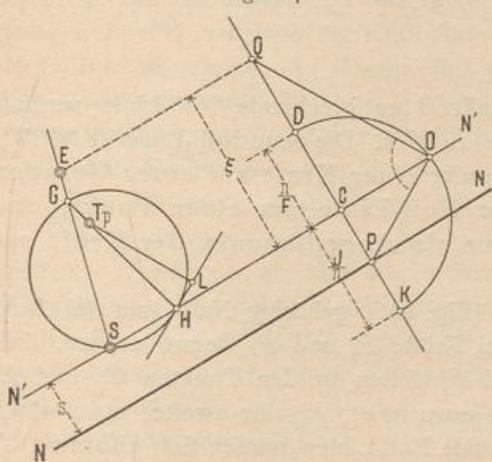
Es sei z. B. $n = 100 \text{ cm}^3$ und $F = 22 \text{ qcm}$. Als dann ist $\frac{n}{F} = \frac{100}{22} = 4,54 \text{ cm}$.

Man kann zur Auffindung von s auch die Gleichung $s \xi = i^2$ benutzen, indem man \overline{LT}_p abgreift, ausrechnet und den erhaltenen Werth für \mathcal{J} durch F dividirt. Macht man nun $\overline{CO} = i$, $\overline{CE''} = \xi$, zieht $\overline{OE''}$ und durch O senkrecht zu $\overline{OE''}$ die Linie \overline{OP} , so ist $\overline{CP} = s$.

Die umgekehrte Aufgabe, aus der Lage der Null-Linie den zugehörigen Angriffspunkt E zu ermitteln, wird in gleicher Weise gelöst.

Trägheitskreis und Trägheitshauptpunkt T_p werden verzeichnet; es sei NN (Fig. 104) als Null-Linie vorgeschrieben. Man ziehe durch den Schwerpunkt S eine Linie $N'N'$ parallel zur Null-Linie NN ; alsdann ist die Kraftlinie conjugirt zu $N'N'$. Der zweite Durchschnittpunkt von $N'N'$ mit dem Kreise sei H ;

Fig. 104.



man verbinde H mit T_p ; \overline{HT}_p schneide den Kreis zum zweiten Male in Punkt G ; \overline{SG} ist die gefuchte zu $N'N'$ conjugirte Axe, also die Kraftlinie, d. h. auf \overline{SG} liegt der gefuchte Angriffspunkt E . Nunmehr ist noch der senkrechte Abstand ξ des Punktes E von der Axe $N'N'$ zu ermitteln. Es ist $\xi = \frac{1}{s} \frac{\mathcal{J}}{n} \frac{n}{F}$. Man ziehe eine Linie senkrecht zur Null-Linie, mache auf derselben $\overline{CK} = \frac{\mathcal{J}}{n} = \overline{T}_p L$, $\overline{CD} = \frac{n}{F}$ und schlage über \overline{DK} einen Halbkreis; alsdann ist

$$\overline{CO}^2 = \frac{\mathcal{J}}{n} \frac{n}{F}$$

Zieht man ferner \overline{OP} und durch O senkrecht zu \overline{OP} die Linie \overline{OQ} , so ist $\overline{CO}^2 = \overline{CP} \cdot \overline{CQ} = s \cdot \overline{CQ}$, d. h.

$$\overline{CQ} = \frac{\overline{CO}^2}{s} = \frac{\mathcal{J}}{n} \frac{n}{F} \frac{1}{s} = \xi$$

Die durch Q parallel zu $N'N'$ gezogene Linie schneidet die Kraftlinie \overline{SG} im gefuchten Punkte E , welcher beiden Bedingungen genügt: er liegt auf der Kraftlinie und im senkrecht gemessenen Abstände ξ von der Axe $N'N'$.

Der Winkel der Kraftlinie \overline{SE} mit der Senkrechten zur Null-Linie sei δ (Fig. 105); dann ist $\overline{SB} = s' = \frac{s}{\cos \delta}$ und $\overline{ES} = \xi' = \frac{\xi}{\cos \delta}$, mithin

$$s \xi = \frac{\mathcal{J}}{F} = s' \xi' \cdot \cos^2 \delta \quad \text{oder} \quad s' \xi' = \frac{\mathcal{J}}{\cos^2 \delta} \frac{1}{F}$$

107.
Weitere
Beziehungen
zwischen
der Null-Linie
und dem
Angriffspunkt
der Kraft.

Multiplicirt man jedes Flächentheilchen df mit dem Quadrat feines Abstandes y' von $N'N'$, gemessen in der Richtung der Kraftlinie ES , so ist

$$\int df \cdot y'^2 = \int df \frac{y^2}{\cos^2 \delta} = \frac{1}{\cos^2 \delta} \int y^2 df = \frac{\mathcal{F}}{\cos^2 \delta}.$$

Es werde $\mathcal{F}' = \frac{\mathcal{F}}{\cos^2 \delta}$ und $F i_1^2 = \mathcal{F}'$ gefetzt; dann ist

$$s' \xi' = \frac{\mathcal{F}'}{F} = i_1^2 \quad \text{und} \quad s' \xi' = i_1^2 \dots \dots \dots 75.$$

Wird der Angriffspunkt der Kraft von E nach B verlegt, so bleibt BSE die Kraftlinie wie zuvor; die Null-Linie läuft parallel zur Schwerpunktsaxe, welche zur Kraftlinie conjugirt ist, d. h. zu derselben Schwerpunktsaxe $N'N'$, wie oben. Sonach haben fowohl \mathcal{F} und \mathcal{F}' , wie auch i_1^2 denselben Werth, mag der Angriffspunkt in E oder B oder in irgend einem anderen Punkt der Linie EB sein; wenn demnach der Angriffspunkt der Kraft von E nach B verlegt wird, so behält das Product $s' \xi'$

Fig. 105.

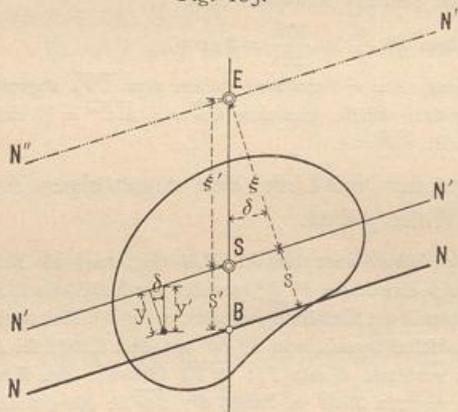
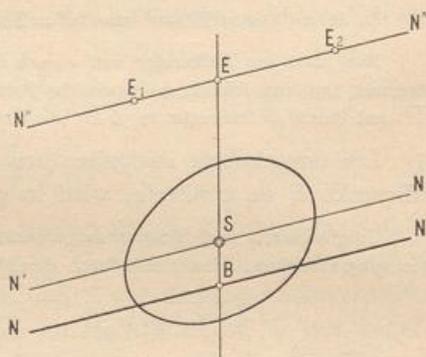


Fig. 106.



denselben Werth i_1^2 . Die dem Angriffspunkt B entsprechende Null-Linie verläuft also durch E und ist parallel zu $N'N'$, d. h. zu NN . Die neue Null-Linie ist $N''N''$.

Satz: Bewegt sich der Angriffspunkt einer Kraft auf einer Geraden ($N''N''$), so dreht sich die zugehörige Null-Linie um einen Punkt, und zwar um denjenigen Punkt B , welcher als Angriffspunkt der Kraft zur Null-Linie $N''N''$ gehören würde.

Beweis: Die zum Angriffspunkt E (Fig. 106) gehörige Null-Linie sei NN . Die in E wirkende Kraft werde durch zwei Kräfte P_1 und P_2 derart ersetzt, daß ihre Mittelkraft P durch E geht; P_1 und P_2 sollen in den Punkten E_1 und E_2 wirken. P_1 erzeugt irgend eine Null-Linie, etwa n_1n_1 , P_2 eine zweite, etwa n_2n_2 ; die resultirende Null-Linie muß NN sein; beide Null-Linien müssen sich also auf NN schneiden. Nun liege P_1 fest, also auch n_1n_1 ; dagegen gleite P_2 auf $N''N''$ und ändere seine Größe dabei so, daß die Mittelkraft von P_1 und P_2 immer durch E geht. Dann bleibt auch die resultirende Null-Linie beständig NN ; auch der Schnittpunkt von n_1n_1 und n_2n_2 muß immer auf NN bleiben, und da n_1n_1 ruht, so darf auch der Schnittpunkt nicht gleiten. Bewegt sich also der Angriffspunkt einer Kraft, hier derjenige von P_2 , auf einer Geraden $N''N''$, so dreht sich die zugehörige Null-Linie, hier n_2n_2 , um einen festen Punkt. Die Lage dieses festen Punktes ergibt sich folgendermaßen. Rückt die Kraft P_2 , also auch der Punkt E_2 , unendlich

weit, so wird die Linie $S \cdot \infty$, welche mit $N'N'$ zusammenfällt, die Kraftlinie, und dieser Linie conjugirt muſs die Null-Linie $n_2 n_2$ ſein. Nun ſind aber $\overline{N'N'}$ und \overline{SE} zwei conjugirte Axen; alſo fällt für dieſe Lage des Punktes E_2 die zugehörige Null-Linie $n_2 n_2$ mit \overline{SE} zuſammen. Die Null-Linie $n_2 n_2$ ſchneidet demnach für eine ihrer Lagen die Linie NN im Punkte B , und da der Schnittpunkt von NN und $n_2 n_2$ ein feſter Punkt iſt, ſo iſt B dieſer feſte Drehpunkt. Damit iſt obiger Satz bewieſen.

Wenn die Null-Linie den Querschnitt ſchneidet, ſo findet auf beiden Seiten derſelben im Querschnitt verſchiedenartige Beanspruchung ſtatt. Da nun jeder Null-Linie eine ganz beſtimmte Lage des Angriffspunktes E entſpricht, ſo liegt die Frage nahe: In welchen Grenzen muſs E liegen, damit ſtets im ganzen Querschnitt nur eine Art der Beanspruchung ſtattfindet, nur Zug oder nur Druck? Die Null-Linie darf offenbar höchſtens den Querschnitt berühren, wenn die Bedingung gleichartiger Beanspruchungsweiſe im Querschnitt erfüllt ſein ſoll. Läßt man die Null-Linie alle möglichen Lagen der Berührenden des Querschnittes einnehmen und ermittelt die zugehörigen Angriffspunkte E der Kraft, ſo ergiebt die Verbindungsline dieſer Punkte eine Figur, welche man den Kern des Querschnittes nennt. So lange der Angriffspunkt E der Kraft innerhalb des Kernes oder der Kernfläche liegt, fällt die Null-Linie auſerhalb des Querschnittes, und im Querschnitt herrſcht nur Zug oder nur Druck.

Demnach ergiebt ſich der Kern des Querschnittes durch die folgende Conſtruction. Man laſſe die Null-Linie alle Lagen einnehmen, in denen ſie den Querschnitt berührt, ermittle für jede derſelben den zugehörigen Angriffspunkt E der Kraft und verbinde die Punkte E miteinander.

Für die Conſtruction iſt noch das Nachſtehende zu beachten. In Art. 107 (S. 89) iſt der Satz gefunden: Bewegt ſich der Angriffspunkt E auf einer Geraden, ſo dreht ſich die zugehörige Null-Linie um einen feſten Punkt B , und zwar denjenigen Punkt, welchem als Kraft-Angriffspunkt die Weggerade des Punktes E als Null-Linie zugeordnet iſt. Dieſer Satz gilt auch umgekehrt, da zu jeder Null-Linie ein ganz beſtimmter Punkt E gehört, d. h. dreht ſich die Null-Linie um einen feſten Punkt B , ſo gleitet der Angriffspunkt E auf einer Geraden, welche als Null-Linie dem Punkte B zugeordnet iſt.

Die Benutzung dieſes Satzes ſoll an einigen Querschnitten gezeigt werden.

Beim Rechteck (Fig. 107) lege man die Null-Linie nach einander in die vier Seiten 11, 22, 33, 44 des Rechteckes und ermittle die Lage der zugehörigen Kernpunkte. Die durch den Schwerpunkt S zur Null-Linie 11 gezogene Parallele iſt die Hauptaxe XX ; der zugehörige Angriffspunkt I der Kraft liegt auf der conjugirten Axe; zur Hauptaxe XX iſt die andere Hauptaxe YY conjugirt; alſo liegt Punkt I auf dieſer. Der Abſtand ξ des Kernpunktes I von der Axe XX iſt nach Früherem aus der Gleichung

$$s \xi = \frac{\mathcal{F}}{F} = \frac{A}{F} = \frac{b h^3}{12 b h} = \frac{h^2}{12}$$

zu finden. Hier iſt $s = \frac{h}{2}$, alſo das gefuchte

$$\xi = \frac{h^2 \cdot 2}{12 h} = \frac{h}{6}$$

Zu beachten iſt, daſs Kernpunkt und Null-Linie nach der Entwicklung obiger Formel auf verſchiedenen Seiten der Schwerpunktsaxe XX liegen müſſen. Eben ſo

108.
Kern des
Querschnittes.

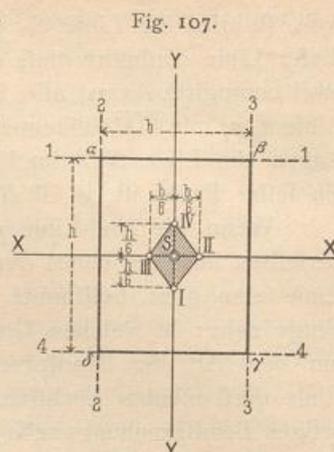
109.
Kern des
Rechteckes.

findet man für die Null-Linie 44 den Punkt *IV*, welcher um $\frac{h}{6}$ über *XX* liegt. Für die Null-Linien 22 und 33 müssen die Kernpunkte auf der Hauptaxe *XX* liegen; die Abstände ξ' sind, weil hier $s' = \frac{b}{2}$ ist,

$$\xi' \frac{b}{2} = \frac{B}{F} = \frac{h b^3}{12 b h} = \frac{b^2}{12} \quad \text{oder} \quad \xi' = \frac{b}{6}.$$

Damit sind die Punkte *II* und *III* gefunden.

Außer den vier betrachteten Lagen der Null-Linie sind noch andere Grenzlagen möglich, indem sich die Null-Linie aus der Lage *11* in die Lage *22* bewegt und dabei um den Punkt α dreht. Bei dieser Drehung gleitet der Kernpunkt auf einer Geraden, für welche bereits zwei Punkte *I* und *II* gefunden sind, nämlich für die Lagen *11* und *22* dieser Linie. Die Verbindungslinie *III* ist demnach diese Gerade. Eben so gleitet der Kernpunkt auf *III*, während die Null-Linie sich aus Lage *11* in *33* um den Punkt β dreht und so weiter. Man erhält in dieser Weise die in Fig. 107 schraffierte Kernfläche.



110.
Kern des
Kreises.

Beim Kreis sind alle Axen Hauptaxen. Die Null-Linien sind Tangenten an den Kreis; demnach sind in der Gleichung $s \xi = \frac{\mathcal{F}}{F}$ die Größen $s = \frac{d}{2}$, $\mathcal{F} = \frac{d^4 \pi}{64}$, $F = \frac{d^2 \pi}{4}$ und der Abstand des Kernpunktes vom Mittelpunkt des Kreises für alle Tangenten $\xi = \frac{d^2 \pi}{16} \frac{2}{d} = \frac{d}{8}$. Die Kernfläche ist also ein Kreis mit dem Halbmesser $\frac{d}{8}$, bzw. dem Durchmesser $\frac{d}{4}$.

111.
Kern des
Kreisringes.

Beim Kreisring mit dem äußeren Durchmesser D und dem inneren Durchmesser d ist $s = \frac{D}{2}$, $\mathcal{F} = \frac{(D^4 - d^4) \pi}{64}$, $F = (D^2 - d^2) \frac{\pi}{4}$,

$$\xi = \frac{\mathcal{F}}{F s} = \frac{(D^4 - d^4) 2}{(D^2 - d^2) 16 D} = \frac{(D^2 + d^2)}{8 D} = \frac{D}{8} \left[1 + \frac{d^2}{D^2} \right].$$

Der Halbmesser der kreisförmigen Kernfläche ist also

$$k = \frac{D}{8} \left[1 + \frac{d^2}{D^2} \right].$$

112.
Kern des
I-Eisens.

Beim I-Eisen liegen auf der *YY*-Axe die Kernpunkte von der *XX*-Axe um

$$k_1 = \pm \frac{2 A}{F h}$$

entfernt; auf der *XX*-Axe liegen die Kernpunkte von der *YY*-Axe, bzw. um

$$k_2 = \pm \frac{2 B}{F b}$$

entfernt. Die Eckpunkte sind wie beim Rechteck durch Gerade zu verbinden.

113.
Graphische
Ermittlung
des Kernes.

Bei unregelmäßigen Querschnitten bestimmt man zweckmäßig die Kernfläche mit Hilfe des Trägheitskreises. Dabei handelt es sich hauptsächlich um die wiederholte Lösung der in Art. 106 (S. 89) behandelten Aufgabe, aus der vorgeschriebenen Lage der Null-Linie den zugehörigen Angriffspunkt *E* der Kraft zu ermitteln. Man läßt die Null-Linie den Querschnitt umhüllen; bei der Drehung der Null-Linie um

Fig. 108.

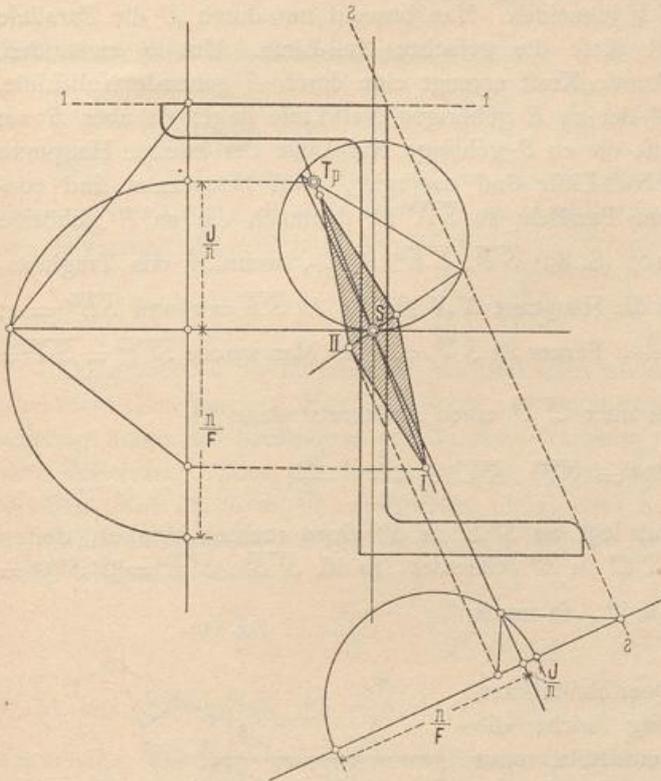
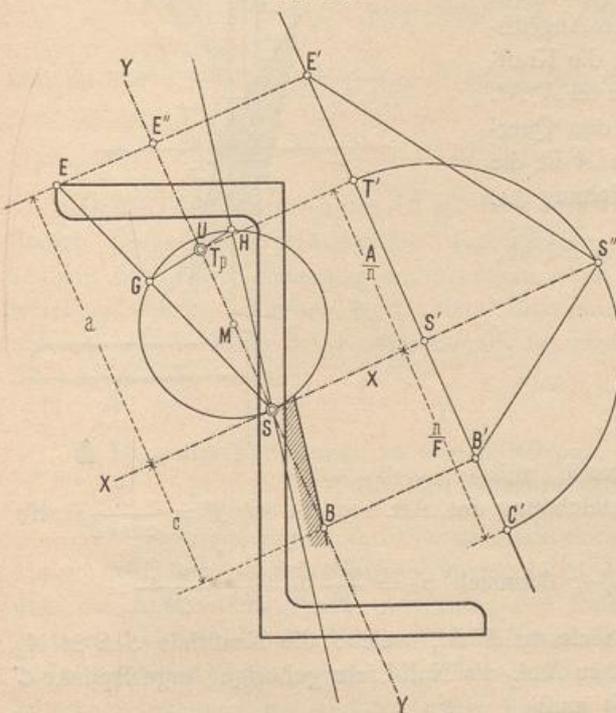


Fig. 109.



einen Punkt aus der einen Lage in eine benachbarte Lage beschreibt der zugehörige Kernpunkt die Verbindungslinie der beiden Kernpunkte, welche zu den entsprechenden Nachbarlagen der Null-Linie gehören. Fig. 108 zeigt die Construction des Kernes für ein Z-Eisen.

Man kann auch die Eckpunkte des Querschnittes nach dem Satz in Art. 108 (S. 91) als Angriffspunkte der Kraft annehmen und für diese die zugehörigen Null-Linien construiren; denn während die Null-Linie sich um den Eckpunkt dreht, beschreibt der Kernpunkt eine Gerade, welche als Null-Linie dem Eckpunkt als Angriffspunkt der Kraft zugeordnet ist. Diese Construction zeigt Fig. 109.

Es empfiehlt sich, zuvor die Haupttaxen des Querschnittes zu ermitteln, was ja nach Verzeichnung eines Trägheitskreises leicht ist. Nunmehr verzeichne man einen neuen Trägheitskreis so, daß T_p auf seinem Durchmesser liegt; dann sind SX und SY die Haupttaxen; ferner ist

$$\overline{ST_p} = \frac{A}{n} \quad \text{und} \quad \overline{T_p U} = \frac{B}{n}.$$

Ist E einer der Angriffspunkte der Kraft, für welchen die zugehörige Null-Linie gesucht wird, so ziehe man \overline{SE} ; der Schnittpunkt dieser Linie mit dem Trägheitskreise sei G ; man ziehe $\overline{GT_p H}$; H ist der zweite Schnittpunkt der Linie $\overline{GT_p}$ mit dem Trägheitskreise. Dann ist \overline{SH} die Richtung der Null-Linie; letztere ist bekannt, sobald man

noch einen Punkt kennt, durch welchen sie gehen muß, z. B. den Punkt B , in welchem sie die Hauptaxe \overline{SY} schneidet. Man braucht nur durch B die Parallele zu \overline{SH} zu ziehen; dann ist diese die gefuchte Null-Linie. Um B zu finden, beachte man: Eine in B wirkende Kraft erzeugt eine durch E gehende Null-Linie, da B nach der Annahme auf der zu E gehörigen Null-Linie liegt; da aber B auf der einen Hauptaxe liegt, muß die zu B gehörige Null-Linie der zweiten Hauptaxe parallel sein (Kraftlinie und Null-Linie sind conjugirt, zwei Hauptaxen sind conjugirt). Die durch E gezogene Parallele zu \overline{SX} ist demnach die zu B gehörige Null-Linie, mithin nach Art. 107 (S. 89) $\overline{SB} \cdot \overline{SE''} = \frac{A}{F}$, wenn A das Trägheitsmoment des Querschnittes für die Hauptaxe XX ist. Es sei $\overline{SB} = c$ und $\overline{SE''} = a$; dann ist $ac = \frac{A}{F} = \frac{A}{n} \cdot \frac{n}{F}$. Ferner ist $\overline{ST_f} = \frac{A}{n}$. Man mache $\overline{S'T'} = \overline{ST} = \frac{A}{n}$, $\overline{S'C'} = \frac{n}{F}$ und schlage über $\overline{C'T'}$ einen Halbkreis; dann ist

$$(S'S'')^2 = \overline{S'T'} \cdot \overline{S'C'} = \frac{A}{n} \cdot \frac{n}{F}$$

Verbindet man S'' mit E' und legt an $S''E'$ in S'' einen rechten Winkel, dessen zweiter Schenkel die Linie $E'C'$ in B' schneidet, so ist $\overline{S'B'} \cdot \overline{S'E'} = (S'S'')^2 = \frac{A}{n} \cdot \frac{n}{F}$, und da $\overline{S'E'} = a$ ist, so muß $\overline{S'B'} = c$ sein.

114.
Spannung in einem Umfangspunkte des Querschnittes, ausgedrückt mit Hilfe des Kernes.

Für einen beliebigen Querschnitt kann man bei beliebiger Belastung leicht die größte auftretende Spannung ermitteln, wenn man den Kern kennt. In Fig. 110 sei der Kern des Querschnittes gefunden (schraffirt); S sei der Schwerpunkt und E der Angriffspunkt der Kraft; \overline{SE} ist demnach die Kraftlinie; die zugehörige conjugirte Axe sei $N'N'$. Größte Beanspruchung findet in den Querschnittspunkten A oder B statt. In A ist die Beanspruchung nach Art. 105 (Gleichung 74)

$$\sigma_A = \frac{P}{F} + \frac{Ma}{\mathcal{F}}, \text{ und da } M = P\xi \text{ ist,}$$

$$\sigma_A = \frac{P}{F} + \frac{P\xi a}{\mathcal{F}};$$

dafür

$$\sigma_A = \frac{P}{F} + \frac{P}{F} \frac{F\xi a}{\mathcal{F}}$$

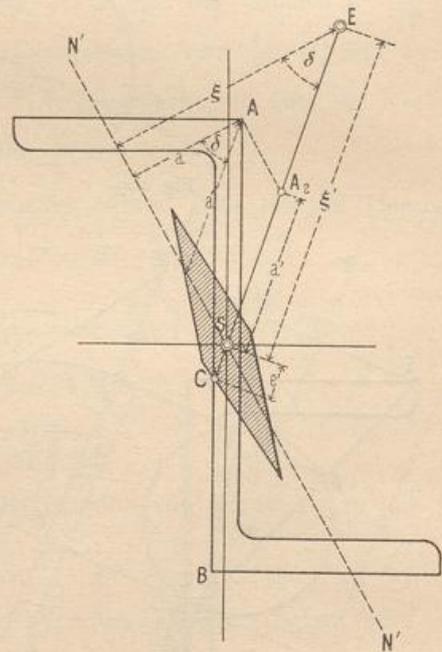
Nun ist $a = a' \cos \delta$ und $\xi = \xi' \cos \delta$, also

$a\xi = a'\xi' \cdot \cos^2 \delta$ und mit der Bezeichnung aus Art. 107 (S. 89) $\mathcal{F}' = \frac{\mathcal{F}}{\cos^2 \delta}$; also

$$\frac{a\xi}{\mathcal{F}} = \frac{a'\xi' \cos^2 \delta}{\mathcal{F} \cos^2 \delta} = \frac{a'\xi'}{\mathcal{F}'}, \text{ demnach } \sigma_A = \frac{P}{F} + \frac{P}{F} \frac{Fa'\xi'}{\mathcal{F}'}$$

Zieht man durch A die Parallele zu $N'N'$, welche die Kraftlinie SE in A_2 schneidet, so ist $\overline{SA_2} = a'$, und der zu AA_2 als Null-Linie gehörige Angriffspunkt C ist der Kernpunkt. Ist $SC = e'$, so muß

Fig. 110.



$$e' a' = \frac{\mathcal{F}'}{F}, \text{ also } e' = \frac{\mathcal{F}'}{F a'}$$

fein. Mit diesem Werth erhält man

$$\sigma_A = \frac{P}{F} + \frac{P \xi'}{F e'} = \frac{P}{F e'} (e' + \xi').$$

$P(e' + \xi')$ bezeichnet man als das Kernmoment; dasselbe ist das Product aus der Axialkraft P in den Abstand des Angriffspunktes vom Kernpunkt. Setzt man abkürzend $M_K = P(e' + \xi')$, so ist

$$\sigma_A = \frac{M_K}{F e'} \dots \dots \dots 76.$$

Der Ausdruck 76 ist sehr bequem und ganz nach der einfachen Form des Ausdruckes in Gleichung 55 (S. 75) gebildet. e' nennt man die Kernweite. Für eine beliebige Lage der Kraftebene ergibt die Gleichung 76 die grösste Beanspruchung ohne Weiteres. Wenn die Kernweite auf beiden Seiten des Schwerpunktes verschieden gross ist, so ist zu untersuchen, ob σ_A oder σ_B grösser ist.

Falls die Axialkraft P gleich Null ist, also nur Kräfte parallel zur Querschnittsebene wirken, so wird

$$\sigma_A = \frac{M a}{\mathcal{F}} = \frac{M a' \cos \delta}{\mathcal{F}' \cdot \cos^2 \delta} = \frac{M}{\cos \delta} \frac{a'}{\mathcal{F}'}$$

M ist das Moment für die Axe $N'N'$; $\frac{M}{\cos \delta}$ ist das resultirende Moment in der Kraftebene, bezogen auf den Schwerpunkt als Drehpunkt; setzt man $\frac{M}{\cos \delta} = M_r$, so wird

$$\sigma_A = \frac{M_r a'}{\mathcal{F}'} = \frac{M_r a' F}{\mathcal{F}' F},$$

und da $e' a' = \frac{\mathcal{F}'}{F}$, so ist $\frac{\mathcal{F}'}{F a'} = e'$, also gleich der Kernweite; mithin

$$\sigma_A = \frac{M_r}{F e'} \dots \dots \dots 77.$$

Die grösste Spannung ist gleich dem resultirenden Moment, dividirt durch Querschnittsfläche mal Kernweite. Dasselbe Moment wird demnach alsdann die grösste Spannung σ_A erzeugen, wenn es in derjenigen Ebene wirkt, für welche e' seinen kleinsten Werth hat. Man kann demnach sofort aus der Figur ablesen, welche Lage des Kraftmomentes für eine gegebene Lage des Querschnittes die ungünstigste ist.

d) Biegungsspannungen in einem Körper, der aus zwei verschiedenen Baustoffen zusammengesetzt ist.

Die nachstehenden Untersuchungen sind durch die neuerdings in ausgedehntem Masse ausgeführten Beton-Eisen-Constructionen veranlasst. Man kann annehmen, dass die Ausdehnung beider Baustoffe, des Betons und des in den Beton eingebetteten Eisens, bei der Formänderung gleich gross ist; die Längenänderung der entsprechenden Punkte zweier unendlich naher Querschnitte sei λ ; alsdann wird bei unserer Annahme λ die gleiche Grösse haben, ob an dieser Stelle der eine oder

115.
Spannungen
in Beton-Eisen-
Constructionen.

der andere Baustoff liegt. Um aber die (\pm) Ausdehnung λ zu erzeugen, ist bei Eifen eine andere Beanspruchung erforderlich, als bei Beton. Es bezeichne σ die Spannung für die Flächeneinheit im Beton, σ_1 die Spannung für die Flächeneinheit im Eifen, l den Abstand zweier nahe liegender Querschnitte vor der Formänderung, λ die (\pm) Vergrößerung dieses Abstandes bei der Formänderung, E die Elastizitätsziffer für Beton und E_1 die Elastizitätsziffer für Eifen; alsdann ist

$$\frac{\sigma}{E} = \frac{\lambda}{l} \text{ für Beton, } \frac{\sigma_1}{E_1} = \frac{\lambda}{l} \text{ für Eifen;}$$

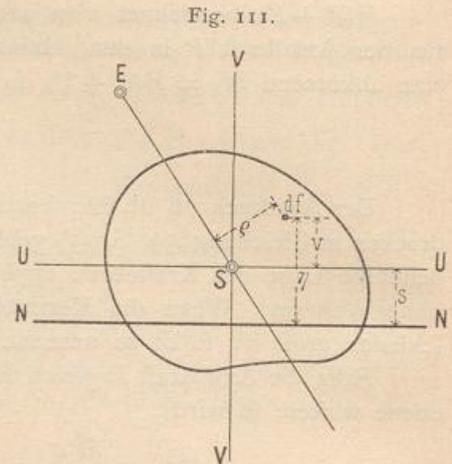
demnach ist

$$\frac{\sigma}{E} = \frac{\sigma_1}{E_1} \text{ und } \sigma_1 = \frac{E_1}{E} \sigma.$$

Setzt man $\frac{E_1}{E} = m$, so ist

$$\sigma_1 = m \sigma \dots \dots \dots 78.$$

Ein aus Eifen und Beton zusammengesetzter Balken werde auf Biegung beansprucht; auf den betrachteten Querschnitt wirken das Moment M und die Axialkraft P ; \overline{SE} (Fig. 111) sei die Kraftlinie und NN die Null-Linie. Durch den Schwerpunkt S des Querschnittes werde parallel zur Null-Linie die Axe UU , senkrecht zu dieser durch S die Axe VV gelegt. Alsdann ergeben die Gleichgewichtsbedingungen die erforderlichen Gleichungen in derselben Weise, wie in Art. 105 (S. 86) gezeigt ist. Die mit dem Zeiger 1 versehenen Werthe beziehen sich auf den Eifenheil und die Werthe ohne Zeiger auf den Betonheil des Querschnittes. Nun lassen sich folgende drei Gleichungen aufstellen:



I) $P = \int \sigma df + \int \sigma_1 df_1$ (algebraische Summe der in die Richtung der Balkenaxe fallenden Kräfte muß gleich Null sein).

II) $M_u = \int \sigma v df + \int \sigma_1 v_1 df_1$ (algebraische Summe der Momente für die Axe UU muß gleich Null sein).

III) $0 = \int \sigma \rho df + \int \sigma_1 \rho_1 df_1$ (algebraische Summe der Momente für die Axe \overline{SE} muß gleich Null sein).

Für einen beliebigen Punkt des Querschnittes ist $\sigma = a \eta$, wenn a ein noch zu bestimmender Festwerth, η der Abstand des Punktes, senkrecht gemessen, von der Null-Linie NN ist. Es ist $\eta = v + s$, mithin

$$\sigma = a(v + s), \quad \sigma_1 = m \sigma \quad \text{und} \quad \sigma_1 = a m (v_1 + s).$$

Gleichung I wird mit diesen Werthen:

$$P = a \left(\int v df + \int s df + m \int v_1 df_1 + m \int s df_1 \right),$$

$$P = a \left(\int v df + m \int v_1 df_1 \right) + a s (F + m F_1).$$

Bestimmt man den Schwerpunkt S unter der Annahme, daß die aus Eifen bestehenden Querschnittstheile in m -facher Größe eingeführt werden, so ist für jede

durch diesen Schwerpunkt gehende Axe das entsprechende statische Moment des Querschnittes gleich Null, d. h. es findet statt:

$$\int v df + m \int v_1 df_1 = 0, \text{ und es ist alsdann}$$

$$P = a s (F + m F_1) \dots \dots \dots 79.$$

Aus Gleichung II ergibt sich in ähnlicher Weise

$$M_u = a \int (v + s) v df + a m \int (v_1 + s) v_1 df_1,$$

$$M_u = a \int v^2 df + a s \int v df + m a \int v_1^2 df_1 + a m s \int v_1 df_1,$$

$$M_u = a \int v^2 df + m a \int v_1^2 df_1 + a s \left[\int v df + m \int v_1 df_1 \right].$$

Da $\int v df + m \int v_1 df_1 = 0$ ist, so wird

$$M_u = a (\mathcal{F} + m \mathcal{F}_1) \dots \dots \dots 80.$$

\mathcal{F} ist das Trägheitsmoment des Betontheiles und \mathcal{F}_1 das Trägheitsmoment des Eifentheiles des Querschnittes bezogen auf die Axe UU .

Aus Gleichung III folgt, da $\sigma = a \eta$ ist,

$$0 = \int a \eta \rho df + \int a m \eta_1 \rho_1 df_1 = a \left(\int \eta \rho df + m \int \eta_1 \rho_1 df_1 \right),$$

$$0 = Z + m Z_1 \dots \dots \dots 81.$$

Z , bzw. Z_1 bedeuten die Centrifugalmomente der Querschnittstheile für die Axen NN und SE . Construirt man also unter Zugrundelegung m -facher Querschnittsgröße der Eifentheile das Centrifugalmoment für die Kraftlinie und die Null-Linie, so ist dasselbe gleich Null. Kraftlinie und Null-Linie sind conjugirte Axen.

Aus Gleichung 80 folgt

$$a = \frac{M_u}{\mathcal{F} + m \mathcal{F}_1};$$

aus Gleichung 79 folgt

$$s = \frac{P}{a (F + m F_1)} = \frac{P (\mathcal{F} + m \mathcal{F}_1)}{(F + m F_1) M_u},$$

und

$$\sigma = a (v + s) = \frac{P}{F + m F_1} + \frac{M_u}{\mathcal{F} + m \mathcal{F}_1} v \dots \dots \dots 82.$$

$$\sigma_1 = m \sigma = \frac{m P}{F + m F_1} + \frac{m M_u v}{\mathcal{F} + m \mathcal{F}_1} \dots \dots \dots 83.$$

Falls die Axialkraft P gleich Null ist, wird

$$\left. \begin{aligned} \sigma &= \frac{M_u v}{\mathcal{F} + m \mathcal{F}_1} \\ \sigma_1 &= m \frac{M_u v}{\mathcal{F} + m \mathcal{F}_1} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 84.$$

Die Ausdrücke 82 bis 84 ergeben folgendes für die Berechnung wichtige Gesetz: Die Beanspruchung kann bei einem Eisen-Betonbalken eben so wie bei einem einheitlich aus Beton hergestellten Balken berechnet werden, wenn man sowohl für die Ermittlung des Schwerpunktes, wie für diejenige der Querschnittsfläche und des Trägheitsmomentes die Eisenquerschnitte in $m \left(= \frac{E_1}{E} \right)$ -facher Größe einführt.



Man müßte bei der Berechnung nun vom Gesamtquerschnitt denjenigen der Eifentheile abziehen und den Rest als Betonquerschnitt einführen; bei der großen Unbestimmtheit jedoch, welche bezüglich der Größe von m herrscht, kann man unbedenklich den Gesamtquerschnitt als Betonquerschnitt einführen.

116.
Querschnitts-
ermittlung
für
Beton-Balken.

Bei Beton-Eisenbalken ist der Gesamtquerschnitt ein Rechteck, dessen Breite mit b und dessen Höhe mit h bezeichnet werden mag; die Eiseneinlage bestehe aus einer Anzahl Rundeisen, nahe der unteren Begrenzung des Rechteckes. Nach Melan²⁵⁾ kann man als zulässige Beanspruchung des Betons einführen:

- größte Druckbeanspruchung des Betons . . . 25 bis 30 kg für 1 qcm,
- größte Zugbeanspruchung des Betons 10 kg für 1 qcm.

Wir führen ferner

$$m = \frac{E_1}{E} = \frac{E_{Eisen}}{E_{Beton}} = 30$$

ein. Stellt man die Bedingung, daß gleichzeitig die größte Druckbeanspruchung gleich 20 kg und die größte Zugbeanspruchung gleich 10 kg sei, bzw. daß allgemein die Beanspruchung auf Druck, absolut gerechnet, doppelt so groß sei, als diejenige auf Zug, so ergibt sich, daß unter Einführung des m -fachen Eisenquerschnittes in die Rechnung die Null-Linie in $\frac{1}{3}$ der Balkenhöhe liegen muß (Fig. 112). Der Abstand s der Null-Linie von der Trägermitte ist also

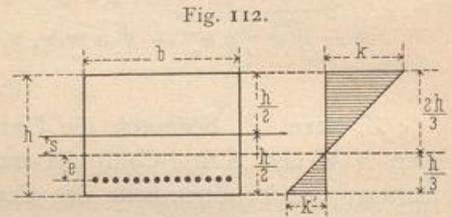


Fig. 112.

$$s = \frac{h}{6}.$$

Weiter muß auch $0 = b h s - m F_1 e$ sein, d. h.

$$s = \frac{m F_1 e}{b h}.$$

Beide Werthe für s einander gleich gesetzt, giebt

$$\frac{m F_1 e}{b h} = \frac{h}{6}, \text{ d. h. } F_1 e = \frac{b h^2}{6 m}.$$

Ferner ist das Trägheitsmoment des Betonquerschnittes für die Null-Linie

$$\mathcal{I} = \frac{b h^3}{12} + \frac{b h \cdot h^2}{36} = \frac{b h^3}{9} \text{ und } m \mathcal{I}_1 = m F_1 e^2,$$

also die größte Druckbeanspruchung im Querschnitt, falls die Axialkraft $P = 0$ ist, nach Gleichung 84

$$\sigma_{max} = \frac{M \frac{2}{3} h}{\frac{b h^3}{9} + m F_1 e^2} = \frac{2 M h}{\frac{b h^3}{3} + 3 m F_1 e^2}.$$

Wird für $F_1 e$ der oben gefundene Werth eingeführt, so erhält man

$$\sigma_{max} = \frac{2 M}{\frac{b h^2}{6} \left(2 + \frac{3 e}{h} \right)} \dots \dots \dots 85.$$

²⁵⁾ In: Oest. Monatschr. f. d. öff. Baudienst 1896, S. 465. — Auch als Sonderabdruck erschienen: Wien 1896.

Diese Gleichung gilt allgemein und giebt die grösste Druckbeanspruchung im Beton doppelt so groß, absolut genommen, als die Zugbeanspruchung. Indem man

$$\sigma_{max} = K$$

setzt, erhält man als Bedingungsgleichung für den Querschnitt:

$$\frac{b h^2}{6} = \frac{M}{K \left(1 + \frac{3e}{2h}\right)} \dots \dots \dots 86.$$

Beispiel: Es sei $M = 12500 \text{ kgcm}$ und $K = 15 \text{ kg}$ für 1 qcm ; alsdann wird

$$\frac{b h^2}{6} = \frac{12500}{15 \left(1 + \frac{3e}{2h}\right)} \quad \text{und} \quad b h^2 = \frac{5000}{1 + \frac{3e}{2h}}.$$

Damit die Eifen ganz im Beton eingebettet werden können, muß man e entsprechend kleiner als $\frac{h}{3}$ wählen; nimmt man $e = \frac{h}{4}$ an, so ergibt sich

$$b h^2 = \frac{5000}{1 + \frac{3}{8}} = \frac{8 \cdot 5000}{11}.$$

Das der Untersuchung zu Grunde gelegte Stück des Balkens habe 1 m Breite; dann ist $b = 100 \text{ cm}$, also

$$h^2 = \frac{8 \cdot 5000}{11 \cdot 100} = 36,36 \quad \text{und} \quad h = 6 \text{ cm (abgerundet);}$$

es wird also $e = \frac{h}{4} = 1,5 \text{ cm}$ und $f_1 e = \frac{b h^2}{6 m}$, und mit $m = 30$

$$f_1 e = \frac{100 \cdot 36}{6 \cdot 30} = 20 \quad \text{oder} \quad f_1 = \frac{20}{1,5} = 13,33 \text{ qcm}.$$

Ordnet man auf 1 m Breite 20 Einlagen aus Rundeifen an, so muß jede derselben $0,67 \text{ qcm}$ Querschnitt erhalten, also einen Durchmesser $d = 0,82 \text{ cm}$.

Hätte man $\sigma_{max} = K = 20 \text{ kg}$ für 1 qcm eingeführt, so hätte man erhalten:

$$\frac{b h^2}{6} = \frac{12500}{20 \left(1 + \frac{3e}{2h}\right)} = \frac{12500}{20 \left(1 + \frac{3}{8}\right)} = \frac{625 \cdot 8}{11},$$

$$h^2 = \frac{6 \cdot 8 \cdot 625}{11 \cdot 100} = 27, \quad h = 5,2 \text{ cm}, \quad f_1 e = \frac{b h^2}{6 m} = \frac{100 \cdot 27}{6 \cdot 30} = 15 \quad \text{und} \quad f_1 = \frac{15 \cdot 4}{5,2} = 11,5 \text{ qcm}.$$

Bei 20 Einlagen bekommt jede einen Durchmesser

$$d = \sqrt{\frac{11,5 \cdot 4}{20 \cdot 3,14}} = 0,85 \text{ cm}.$$

Die grösste Beanspruchung in Eifen ist alsdann:

$$\sigma_{Emax} = \frac{12500 \cdot 1,725 \cdot 30}{\frac{100 \cdot 5,2^3}{9} + 30 \cdot 11,5 \cdot 1,3^2} = \frac{646875}{2149} = 301 \text{ kg für } 1 \text{ qcm}.$$

Für die Berechnung der Betongewölbe mit Eiseneinlagen kann man die Formeln 82 und 83 verwenden²⁶⁾.

²⁶⁾ Bezüglich der Berechnung von Beton-Eifen-Constructionen sei auf nachstehende Aufsätze verwiesen:

- KOENEN, M. Berechnung der Stärke der *Monier*'schen Cementplatten mit Eiseneinlagen. Centralbl. d. Bauverw. 1886, S. 462.
 NEUMANN, P. Ueber die Berechnung der *Monier*-Constructionen. Wochschr. d. öst. Ing.- u. Arch.-Ver. 1890, S. 209.
 MELAN, J. Gewölbe aus Beton mit Verbindung mit eisernen Bogen. Zeitschr. d. öst. Ing.- u. Arch.-Ver. 1893, S. 166.
 SPITZER, J. A. Berechnung der *Monier*-Gewölbe. Zeitschr. d. öst. Ing.- u. Arch.-Ver. 1896, S. 305.
 THULLIE, M. R. v. Ueber die Berechnung der Biegungsspannungen in den Beton- und *Monier*-Constructionen. Zeitschr. d. öst. Ing.- u. Arch.-Ver. 1896, S. 365.
 MELAN, J. Ueber die Berechnung der Beton-Eifenconstructionen. Oest. Monatschr. f. d. öst. Baudienst 1896, S. 465. — Auch als Sonderabdruck erschienen: Wien 1896.
 THULLIE, M. R. v. Ueber die Berechnung der *Monier*-Platten. Zeitschr. d. öst. Ing.- u. Arch.-Ver. 1897, S. 103.
 GRÜNING, M. & H. REISSNER. Eine neue Fahrplananordnung für eiserne Strafenbrücken. Centralbl. d. Bauverw. 1897, S. 190.

Falls man den Zugwiderstand des Betons gar nicht berücksichtigt (was nur für angenäherte Rechnung zulässig ist), so sind in den Ausdrücken für F und \mathcal{F} , welche sich auf den Beton beziehen, nur die Querschnittsteile auf der Druckseite als vorhanden einzuführen. Dann ist für den hauptsächlich hier in Betracht kommenden rechteckigen Querschnitt, welchen die Kraftebene in einer Hauptaxe schneidet, einzuführen:

$$F = b h, \quad \mathcal{F} = \frac{b h^3}{3} \quad \text{und} \quad \mathcal{F}_1 = F_1 e^2.$$

In diesen Formeln bedeutet h den Abstand der Null-Linie von der oberen Rechteckseite und b die Breite des Rechteckes. Das statische Moment des Querschnittes für die Null-Linie soll gleich Null sein, wenn die Eisenteile in m -facher Grösse eingeführt werden, d. h. es soll

$$0 = \frac{b h^3}{2} - m F_1 e \quad \text{oder} \quad h^2 = \frac{2 m e F_1}{b}$$

sein. Die grösste Druckspannung im Beton ist dann

$$\sigma_{max} = \frac{M h}{\frac{b h^3}{3} + m F_1 e^2}$$

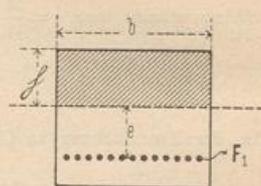
und die grösste Zugspannung im Eisen

$$\frac{\sigma_{1max}}{\sigma_{max}} = m \frac{e}{h}; \quad \text{sonach} \quad \sigma_{1max} = \frac{m e M}{\frac{b h^3}{3} + m F_1 e^2}$$

$$\sigma_{1max} = \frac{M}{\frac{b h^3}{3 e m} + F_1 e} \quad \text{für das Eisen}$$

$$\sigma_{max} = \frac{M}{\frac{b h^2}{3} + \frac{m F_1 e^2}{h}} \quad \text{für den Beton}$$

Fig. 113.



87.

e) Schubspannungen.

117.
Wagrechte
Schub-
spannungen.

Außer den oben ermittelten Biegungsspannungen treten bei den verschiedenen Belastungen der Balken auch noch Schubspannungen auf, von denen hier zunächst die wagrechten Schubspannungen betrachtet werden sollen.

Denkt man sich eine Anzahl Lagen dünner Bretter über einander gelegt, an den Enden unterstützt und in der Mitte belastet, so werden sich dieselben gegen einander etwa in der Weise verschieben, welche in Fig. 114 angedeutet ist. Diese Verschiebung ist eine Folge der in den Fugen aa , bb auftretenden Schubkräfte; werden dieselben nicht durch künstliche Mittel (Zähne, Dübel u. dergl.) oder den Abscherungswiderstand des Baustoffes aufgehoben, so verursachen sie eine Verschiebung.

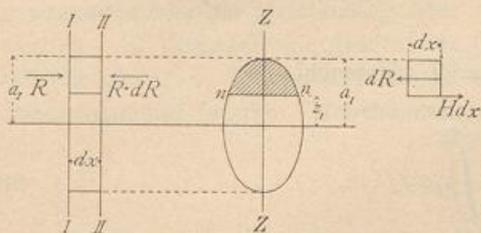
Fig. 114.



Für die rechnermässige Ermittlung dieser Schubspannungen möge, wie oben, angenommen werden, dass nur senkrecht zur Balkenaxe gerichtete Kräfte

wirken; es sollen die wagrechten Schubspannungen aufgefucht werden, welche in der Schicht nn (Fig. 115) zwischen zwei unendlich nahe an einander gelegenen Querschnitten II und III wirken, wenn die Schicht nn um z_1 über der Balkenaxe liegt. Dabei sollen die vereinfachenden Annahmen gemacht werden, dass die Querschnitte II und III einander gleich seien, dass die wagrechte Schubspannung für die Flächeneinheit in der ganzen Breite der Schicht nn gleich groß sei und dass die Kraftebene sämtliche Querschnitte in Symmetrieachsen schneide.

Fig. 115.



Auf den Theil des Balkenstückes zwischen II und III , welcher oberhalb der Faserschicht nn liegt, wirkt senkrecht zur Ebene II die Summe R der axialen Biegungsspannungen und senkrecht zur Ebene III die Kraft $R + dR$. Nun ist

$$R = \int_{z_1}^{a_1} \sigma \, df,$$

und da nach Gleichung 56 (S. 75): $\sigma = \frac{M}{\mathcal{F}} z$ ist,

$$R = \int_{z_1}^{a_1} \frac{M}{\mathcal{F}} z \, df \quad \text{und} \quad R + dR = \int_{z_1}^{a_1} \frac{M + dM}{\mathcal{F}} z \, df.$$

Die Mittelkraft von R und $R + dR$ ist, da beide gleiche Richtung, aber entgegengesetzten Sinn haben und in dieselbe Linie fallen, gleich dR , d. h. auf das betrachtete Balkenstück wirkt als Mittelkraft aller axialen Biegungsspannungen

$$dR = \int_{z_1}^{a_1} \frac{M + dM}{\mathcal{F}} z \, df - \int_{z_1}^{a_1} \frac{M}{\mathcal{F}} z \, df.$$

Für die Integration zwischen z_1 und a_1 sind M , dM und \mathcal{F} constant; diese Werthe können also vor das Integralzeichen gesetzt werden, d. h. es ist

$$dR = \frac{M + dM}{\mathcal{F}} \int_{z_1}^{a_1} z \, df - \frac{M}{\mathcal{F}} \int_{z_1}^{a_1} z \, df = \frac{dM}{\mathcal{F}} \int_{z_1}^{a_1} z \, df.$$

Damit das Balkenstück im Gleichgewicht sei, muss die algebraische Summe der auf dasselbe wirkenden wagrechten Kräfte gleich Null sein; also muss noch eine wagrechte Kraft auf das Balkenstück wirken, welche der Größe nach genau gleich der obigen Kraft dR , der Richtung nach derselben entgegengesetzt ist. Diese Kraft kann nur in der wagrechten Schicht wirken, mittels deren dieses Stück mit dem anderen Balkentheile zusammenhängt, d. h. in der um z_1 über der Null-Linie liegenden Schicht. Längs derselben entsteht demnach eine Schubspannung. Wird die Größe derselben für die Längeneinheit des Balkens mit H bezeichnet, so be-

trägt sie für dx Längeneinheiten $H dx$, und für die Ermittlung von H ergibt sich die Bedingungsgleichung

$$H dx = dR = \frac{dM}{\mathcal{F}} \int_{z_1}^{a_1} z df \quad \text{und} \quad H = \frac{dM}{dx} \frac{1}{\mathcal{F}} \int_{z_1}^{a_1} z df.$$

Nach Gleichung 53 (S. 72) ist $\frac{dM}{dx} = Q$; demnach

$$H = \frac{Q}{\mathcal{F}} \int_{z_1}^{a_1} z df \dots \dots \dots 88.$$

$\int_{z_1}^{a_1} z df$ ist das statische Moment des Flächentheiles zwischen den Ordinaten

z_1 und a_1 bezogen auf die Schweraxe. Setzt man nun

$$\int_{z_1}^{a_1} z df = S_{z_1}^{a_1},$$

so wird

$$H = \frac{Q S_{z_1}^{a_1}}{\mathcal{F}} \dots \dots \dots 89.$$

Die wagrechte Schubspannung für die Längeneinheit des Balkens und irgend eine Schicht (nn) wird demnach erhalten, indem man die Querkraft für den betreffenden Querschnitt mit dem auf die Null-Linie bezogenen statischen Moment des Querschnittstheiles oberhalb der betreffenden Schicht multiplicirt und dieses Product durch das Trägheitsmoment des für die Null-Linie genommenen ganzen Querschnittes dividirt.

Hieraus folgt:

1) Da Q und \mathcal{F} für denselben Querschnitt bei bestimmter Belastung ganz bestimmte Zahlenwerthe sind, so ist die wagrechte Schubspannung für die Längeneinheit des Balkens an den verschiedenen Stellen eines Querschnittes mit S veränderlich. H wird für diejenigen Schichten am größten, für welche S seinen größten Werth hat. S ist aber für die wagrechte Schweraxe am größten; dort ist es gleich $S_0^{a_1}$. S ist für die äußersten Schichten am kleinsten; daselbst ist $S = 0$.

Demnach nimmt H in demselben Querschnitt bei derselben Belastung von der Null-Linie — der wagrechten Schweraxe — nach den beiden am weitesten entfernten Fasern bis auf Null ab.

2) In denselben Schichten verschiedener Querschnitte ist nach obiger Gleichung H mit Q veränderlich, ist demnach in demjenigen Querschnitte am größten, in welchem die Querkraft ihren größten Werth hat. Sind verschiedene Belastungszustände möglich, so ruft derjenige das größte H hervor, welcher die größte Querkraft Q erzeugt.

3) Werden, wie üblich und zweckmäÙig, sowohl S , wie \mathcal{F} auf Centimeter bezogen, also S in cm^3 , \mathcal{F} in cm^4 ausgedrückt, so erhält man H an irgend einer Balkenstelle als die wagrechte Schubspannung für das laufende Centimeter.

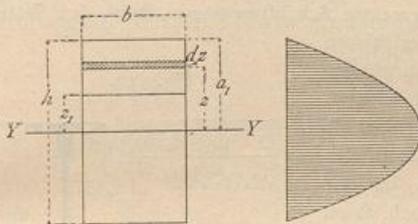
4) Der in Gleichung 89 gefundene Ausdruck giebt die Schubspannung für die Längeneinheit des Balkens an; diese Schubspannung kann für die Fälle der Praxis genügend genau als gleichmäÙig über die Breite der Schicht vertheilt angenommen werden. Ist demnach die Breite des Querschnittes in der Höhe der betrachteten Schicht gleich w , so vertheilt sich H über $w \cdot 1$ Flächeneinheiten, so daÙ sich als Schubspannung für die Flächeneinheit ergibt

$$\mathfrak{S} = \frac{Q S_{z_1}^{\alpha_1}}{w \mathcal{F}} \dots \dots \dots 90.$$

Im Nachstehenden sollen für einige im Hochbauwesen häufig vorkommende Querschnittsformen die wagrechten Schubspannungen bestimmt werden.

118.
Rechteckiger
Querschnitt.

Fig. 116.



1) Für den rechteckigen Querschnitt (Fig. 116) liegt die wagrechte Schwerpunktsaxe in halber Höhe. Die wagrechte Schubspannung in der Höhe z_1 über der Null-Linie ist nach Gleichung 89 zu bestimmen.

Für den vorliegenden Querschnitt ist

$$S_{z_1}^{\alpha_1} = S_{z_1}^{\frac{h}{2}} = \int_{z_1}^{\frac{h}{2}} z df \text{ und, da } df = b dz,$$

$$S_{z_1}^{\alpha_1} = \int_{z_1}^{\frac{h}{2}} b dz \cdot z = \left(\frac{b z^2}{2} \right)_{z_1}^{\frac{h}{2}} = \frac{b}{2} \left(\frac{h^2}{4} - z_1^2 \right).$$

Da ferner $\mathcal{F} = \frac{b h^3}{12}$, wird nach Gleichung 89

$$H = \frac{Q \frac{b}{2} \left(\frac{h^2}{4} - z_1^2 \right)}{\frac{b h^3}{12}} = \frac{6 Q}{h^3} \left(\frac{h^2}{4} - z_1^2 \right) = \frac{6 Q}{h} \left[\frac{1}{4} - \left(\frac{z_1}{h} \right)^2 \right] \dots \dots \dots 91.$$

In diesem Ausdruck ist auf der rechten Seite nur eine Veränderliche, nämlich z_1 ; alle anderen Größen haben für sämtliche Schichten gleiche Werthe. Das Gesetz der Veränderlichkeit wird besonders anschaulich, wenn man in den verschiedenen Abständen z_1 über und unter YY die in den betreffenden Schichten herrschenden Werthe von H nach Gleichung 91 wagrecht nach einem beliebigen Maßstabe aufträgt und die Endpunkte verbindet; man erhält die in Fig. 116 schraffierte Fläche; die begrenzende Verbindungslinie der Endpunkte ist offenbar die Linie der Gleichung 91. Die Form der Gleichung zeigt, daÙ diese Linie eine Parabel ist.

Für $z_1 = 0$ ist $H_0 = H_{max} = \frac{6 Q}{4 h} = \frac{3 Q}{2 h}$, und für $z_1 = \frac{h}{2}$ ist $H_{\frac{h}{2}} = \frac{6 Q}{h} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4} \right) = 0$.

Die wagrechte Spannung für die Flächeneinheit längs der einzelnen Schichten ist $\mathfrak{S} = \frac{H}{b}$, d. h.

$$\mathfrak{S} = \frac{6 Q}{b h} \left[\frac{1}{4} - \left(\frac{z_1}{h} \right)^2 \right], \text{ ferner } \mathfrak{S}_0 = \frac{3 Q}{2 b h} \text{ und } \mathfrak{S}_{\frac{h}{2}} = 0.$$

Die in Fig. 116 gezeichnete Linie giebt also auch die graphische Darstellung der für die Flächeneinheit stattfindenden wagrechten Schubspannungen, natürlich in anderem Maßstabe, als die wagrechten Schubspannungen für die Längeneinheit.

2) Für den symmetrischen I-förmigen Querschnitt liegt die wagrechte Schwerpunktsaxe gleichfalls in halber Höhe. Q und \mathcal{F} sind wieder für alle Schichten desselben Querschnittes gleich groß,

119.
I-förmiger
Querschnitt.

mithin H mit S veränderlich (natürlich nur in demselben Trägerquerschnitt und bei bestimmter Belastung). Die größte wagrechte Schubspannung findet wieder in der Null-Linie statt, und nach Gleichung 89 ist

$$H = \frac{QS}{\mathcal{F}},$$

worin S und \mathcal{F} auf die Null-Linie bezogen sind.

Bezeichnet man mit f die Querschnittsfläche des oberen, bezw. unteren Flansches des Trägers, mit h den Abstand der Schwerpunkte der Flansche, mit d die Stegstärke, so ist bei kleinem d nahezu

$$S = \frac{f h}{2} \text{ und nach Gleichung 20 (S. 36): } \mathcal{F} = \left(f + \frac{d h}{6}\right) \frac{h^2}{2};$$

mithin

$$H = \frac{Q f}{\left(f + \frac{d h}{6}\right) h}$$

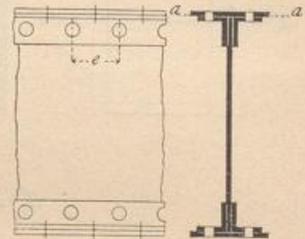
Ist $\frac{d h}{6}$ gegen f klein, so ist nahezu

$$H = \frac{Q}{h} \dots \dots \dots 92.$$

120.
Blechträger-
Querschnitt.

3) Querschnitt der Blechträger. Bei den aus einem einzigen Stücke bestehenden Querschnitten werden die in den einzelnen Fasern wirkenden wagrechten Schubspannungen durch den Widerstand aufgehoben, den der Zusammenhang der Fasern dem Verschieben entgegen stellt; die Querschnittsabmessungen sind demnach so zu wählen, daß die erlaubte Beanspruchung auf Schub nicht überschritten wird. Ist dagegen der Querschnitt aus mehreren Theilen zusammengesetzt, so müssen die in den Fugen zwischen den einzelnen Theilen entstehenden Schubspannungen durch künstliche Mittel aufgehoben werden. Bei den Blechträgern dienen dazu die Niete. Die Niete sind demnach so zu bestimmen, daß ihr Schubwiderstand die auftretenden Schubspannungen aufhebt, ohne daß die zulässige Grenze überschritten wird. Um den Abstand der Niete zu ermitteln, welche zur Verbindung der Lamellen mit den Winkeleisen dienen, suche man demnach die für die Längeneinheit in der Fuge aa (Fig. 117) stattfindende Schubspannung auf die oben gezeigte Weise.

Fig. 117.



Wieder ist $H = \frac{QS}{\mathcal{F}}$, worin S das statische Moment der Lamellenfläche bezogen auf die Null-Linie bezeichnet. Nennt man den Abstand der Nietbolzen e , so ist die Gesamtschubspannung auf die Länge e gleich

$$D = \frac{QS}{\mathcal{F}} e.$$

Allerdings ist die Querkraft Q auf die Länge e allgemein nicht constant; es genügt aber stets, für Q irgend einen der auf der Strecke e sich ergebenden Werthe einzuführen; zweckmäÙig wird man den größten wählen.

Diese Schubspannung erstrebt eine wagrechte Verschiebung der Lamelle in der Richtung der Trägeraxe; dieselbe soll durch die Niete verhindert werden. Werden zwei einschnittige Niete vom Durchmesser d verwendet, so darf ihr Widerstand gegen Abfcheren nach Art. 92 (S. 68)

$$W = \frac{2 d^2 \pi}{4} T$$

sein, wenn T die zulässige Schubbeanspruchung für die Flächeneinheit der abzufcherenden Fläche ist. Durch Gleichsetzung beider Werthe, derjenigen für D und für W , erhält man folgende Gleichung für e :

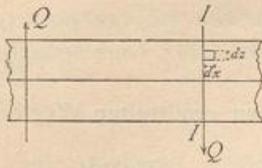
$$\frac{QS e}{\mathcal{F}} = \frac{2 d^2 \pi}{4} T, \text{ woraus } e = \frac{d^2 \pi T \mathcal{F}}{2 QS}.$$

Je größer Q ist, desto kleiner wird e , desto näher sind also die Niete zu setzen.

Die angegebene Berechnung kann auch für die Ermittlung der in den lothrechten Fugen auftretenden wagrechten Schubkraft, also zur Bestimmung derjenigen Niete dienen, welche die lothrechten Schenkel der Winkeleisen mit der Blechwand verbinden. Alsdann ist unter S das statische Moment desjenigen Theiles der Querschnittsfläche zu verstehen, welcher durch diese Niete mit der Blechwand vereinigt wird, d. h. die Querschnittsfläche der Winkeleisen und Lamellen.

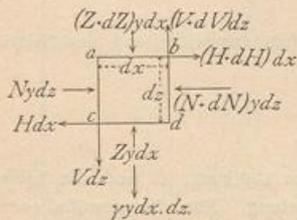
Außer den betrachteten wagrechten wirken auch lothrechte Schubspannungen. Für die Ermittlung derselben soll die gleiche Annahme, wie oben, gemacht werden, daß nur senkrecht zur Balkenaxe gerichtete äußere Kräfte vorhanden seien, die Balkenaxe aber wagrecht sei (Fig. 118). Die Mittelkraft aller links vom beliebigen Querschnitte II wirkenden Kräfte sei gleich Q ; alsdann verlangt das Gleichgewicht des Balkenstückes, daß an demselben noch eine lothrechte Kraft Q wirke, welche der ersten an GröÙe genau gleich, der Richtung nach entgegengesetzt ist. Eine solche Kraft kann aber nur längs des Querschnittes II wirken, da nur in diesem das linksseitige Balkenstück mit dem anderen Balken zusammenhängt. Diese Kraft ist der lothrechte Abfederungswiderstand, welcher dem Verschieben des Balkenstückes längs des Querschnittes II entgegenwirkt.

Fig. 118.



Hieraus folgt: In jedem lothrechten Querschnitte wirken lothrechte Schubspannungen, deren Summe genau gleich der Querkraft ist, welche sich für diesen Querschnitt ergibt.

Fig. 119.



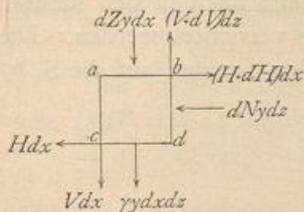
Die Vertheilung dieser Schubspannungen über den Querschnitt findet nach folgendem Gesetze statt: Die an irgend einer Stelle für die Längeneinheit wirkende lothrechte Schubspannung ist gleich der an derselben Stelle für die Längeneinheit wirkenden wagrechten Schubspannung.

Um dieses Gesetz nachzuweisen, betrachten wir ein im Abstände z (Fig. 119) über der Null-Linie liegendes Balkenstück von der Länge dx , der Höhe dz und der Dicke y (senkrecht zur Bildfläche gemessen). Auf dieses Balkenstück wirken im Allgemeinen folgende Kräfte:

- | | |
|--|-------------------------------------|
| senkrecht zur Fläche ac wirkt $Nydz$; | längs der Fläche ac wirkt Vdz ; |
| " " " bd " $(N+dN)ydz$; | " " " bd " $(V+dV)dz$; |
| " " " cd " $Zydx$; | " " " cd " Hdx ; |
| " " " ab " $(Z+dZ)ydx$; | " " " ab " $(H+dH)dx$. |

Hierin bedeuten Z und $Z+dZ$ die auf die wagrechten Flächen ab und cd wirkenden lothrechten Spannungen, V , bzw. $V+dV$ die lothrechten Schubspannungen für die Längeneinheit in den Flächen ac , bzw. bd . Endlich wirkt noch das Eigengewicht des Stückes, nämlich $\gamma y \cdot dz \cdot dx$.

Fig. 120.



Läßt man diejenigen Kräfte, welche einander gegenfeitig aufheben, fort, so bleiben die in Fig. 120 angegebenen übrig. Dieselben halten das Balkenstück im Gleichgewicht; demnach müssen die Summen der statischen Momente, bezogen auf einen beliebigen Punkt der Bildebene, gleich Null sein.

Dieser Punkt sei b ; alsdann ist

$$0 = Vdz dx - Hdx dz + \gamma \frac{dx \cdot dz \cdot dx}{2} + dZydx \frac{dx}{2} - dNydz \frac{dz}{2}.$$

Die unendlich kleinen GröÙen dritter Ordnung fallen gegen die unendlich kleinen GröÙen zweiter Ordnung fort; fonach bleibt

$$0 = V dz dx - H dx dz,$$

woraus

$$V = H \dots \dots \dots 93.$$

Dies gilt für jede Stelle des Balkens, womit der obige Satz bewiesen ist. Es ist mithin nach Gleichung 89

$$V = \frac{Q S_{z_1}^{a_1}}{f} \dots \dots \dots 94.$$

Die in Art. 118 bis 120 für verschiedene Querschnittsformen ermittelten Werthe und graphischen Darstellungen für H gelten also auch für V .

Das Gesetz, nach welchem sich die lothrechten Schubspannungen im Querschnitt vertheilen, wird angewendet, wenn es sich darum handelt, die auf die einzelnen Niete in neben stehender Verbindung (Fig. 121) entfallenden Beanspruchungen zu ermitteln. Der I-förmige Walzträger wird durch Winkel Eisen mit dem Blechträger vereinigt. Die im Querschnitt aa des I-Trägers entstehende Querkraft Q ist durch die Niete auf den Blechträger zu übertragen. Die einzelnen Niete sind nun so zu vertheilen, daß ihre Entfernung der Größe der durch den betreffenden Niet zu übertragenden Schubspannung entspricht. Ist an einer Stelle die Entfernung der Nietmitten e und die lothrechte Schubspannung für die Längeneinheit im Mittel in dieser Höhe gleich V , so kommt auf einen Niet die Schubkraft $V e$.

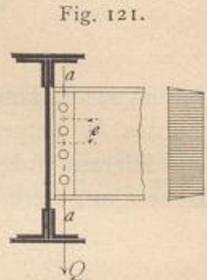


Fig. 121.

Der Niet wird in zwei Querschnitten abgesehert; mithin ist der Abseherungswiderstand des Nietes $\frac{2 d^2 \pi}{4} T$; es ergibt sich also für e die Gleichung:

$$V e = \frac{2 d^2 \pi}{4} T, \text{ woraus } e = \frac{\pi d^2 T}{2 V}.$$

Da V von der Null-Linie nach der oberen und unteren Gurtung zu abnimmt, so sind die Niete in der Nähe der Neutralen näher zu setzen, als in der Nähe der Gurtung. Für die gewöhnlichen I-förmigen Walzbalken kann man die oben stehende Fig. 121 als graphische Darstellung der Veränderlichkeit der lothrechten Schubspannung annehmen, d. h. mit genügender Annäherung V als gleich groß über die ganze Trägerfthöhe annehmen, worin nach Gleichung 92: $V = \frac{Q}{h}$.

122.
Spannungen
für ein
beliebiges
Flächen-
element.

In den bisherigen Betrachtungen sind nur die Normalspannungen, welche in den lothrechten Balkenquerschnitten, und die Schubspannungen, welche in den wagrechten und lothrechten Balkenquerschnitten entstehen, ermittelt worden. Um die Frage der im Inneren der Balken auftretenden Beanspruchungen eingehend zu lösen, wären noch die Normal- und Schubspannungen in einem Querschnitte aufzufuchen, welcher einen beliebigen Winkel mit der Wagrechten macht. Auf diese Untersuchungen einzugehen, mangelt hier der Raum, und es kann auch in den meisten Fällen des Hochbaues auf eine dahin gehende Berechnung verzichtet werden. Die Leser, welche sich über diesen Gegenstand unterrichten wollen, werden auf die S. 57 genannten Werke verwiesen.

f) Elastische Linie.

123.
Axiale
Biegungs-
spannung.

Wenn ein Balken dem Einflusse biegender Kräfte unterworfen ist, so wird eine Formänderung desselben eintreten. Die Axe des ursprünglich geraden Balkens wird eine krumme Linie (Fig. 122), welche man die elastische Linie nennt.

Die Gleichung der elastischen Linie wird für eine große Zahl von Aufgaben gebraucht; bei vielen derselben wirken nicht nur Kräfte senkrecht zur ursprünglichen Balkenaxe, sondern auch solche, welche in die Axe fallen, fog. Axialkräfte. Des-

halb soll dieser allgemeinere Fall für die Entwicklung der Gleichung zu Grunde gelegt, im Uebrigen aber angenommen werden, daß die Kraftebene alle Querschnitte in Hauptaxen schneide.

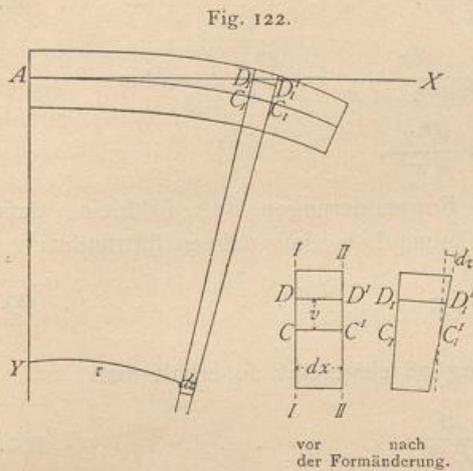
Auf irgend einen Querschnitt wirke das Biegemoment M und die Axialkraft P ; in einem Punkte des Querschnittes, welcher von der wagrechten Schwerpunktsaxe (der zweiten Hauptaxe des Querschnittes) den Abstand v hat, ist unter Bezugnahme auf Gleichung 54 (S. 75) die axiale Biegungsspannung

$$\sigma = \frac{P}{F} + \frac{Mv}{\mathcal{I}}; \dots \dots \dots 95.$$

hierin bedeutet F die Querschnittsfläche und \mathcal{I} das Trägheitsmoment der Querschnittsfläche für die genannte Schwerpunktsaxe.

Man lege durch einen Punkt A der Balkenaxe drei Coordinatenaxen, von denen die X -Axe mit der ursprünglichen Balkenaxe zusammenfalle, die Y -Axe senkrecht zu derselben in der Kraftebene, die Z -Axe senkrecht zur Kraftebene steht, und betrachte ein Balkenstück zwischen den Ebenen II und III , dessen Länge vor der Formänderung dx war. Die Ebenen II und III waren vor der Formänderung parallel und senkrecht zur Balkenaxe und hatten die Abscissen x und $x + dx$; die Länge einer Faser DD' in der Höhe v über der Axe war dx .

124.
Gleichung
der elastischen
Linie.



Wir bestimmen nunmehr die Formänderung dieser Faser DD' . Durch die beiden Punkte der gebogenen Axe C_1 und C_1' legen wir Ebenen senkrecht zur gebogenen Axe; der Winkel beider sei $d\tau$, der Winkel der durch C_1 gelegten Ebene mit der Y -Axe sei τ . Man nimmt an (übereinstimmend mit der Voraussetzung in Art. 95, S. 73), daß der Abstand zweier Punkte in der Höhe v über der Axe alsdann eben so groß sei, wie der Abstand der Normalebene in der Höhe v über der Axe, d. h. daß stattfindet

$$D_1 D_1' = C_1 C_1' + v d\tau.$$

Nennt man die Verlängerung des Stückes CC' bei der Formänderung $d\xi$, so ist

$$C_1 C_1' = dx + d\xi \quad \text{und} \quad D_1 D_1' = dx + d\xi + v d\tau.$$

Dies ist die Länge der gebogenen Faser. Die ursprüngliche Länge derselben war $DD' = dx$; folglich ist die Verlängerung

$$D_1 D_1' - DD' = dx + d\xi + v d\tau - dx = d\xi + v d\tau$$

und das Verlängerungsverhältniß $\frac{d\xi + v d\tau}{dx}$.

Nun ist σ die axiale Faserspannung in dieser Faser, mithin

$$\frac{\sigma}{E} = \frac{d\xi + v d\tau}{dx} = \frac{d\xi}{dx} + \frac{v d\tau}{dx},$$

$$\sigma = E \frac{d\xi}{dx} + \frac{E d\tau}{dx} v \dots \dots \dots 96.$$

Nach Gleichung 95 ist aber auch

$$\sigma = \frac{P}{F} + \frac{M}{\mathcal{J}} v.$$

Die Gleichsetzung beider für σ gefundener Werthe ergibt

$$\frac{P}{F} + \frac{M}{\mathcal{J}} v = E \frac{d\xi}{dx} + \frac{E d\tau}{dx} v,$$

woraus die beiden Gleichungen folgen:

$$\left. \begin{aligned} E \frac{d\xi}{dx} &= \frac{P}{F} \\ E \frac{d\tau}{dx} &= \frac{M}{\mathcal{J}} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 97.$$

Demnach wird

$$\frac{d\tau}{dx} = \frac{M}{E \mathcal{J}} \dots \dots \dots 98.$$

Nun ist $\operatorname{tg} \tau = \frac{dy}{dx}$, folglich $\frac{d \operatorname{tg} \tau}{dx} = \frac{d\tau}{\cos^2 \tau \cdot dx} = \frac{d^2 y}{dx^2}$; mithin

$$\frac{d\tau}{dx} = \cos^2 \tau \frac{d^2 y}{dx^2}.$$

Bei den hier in Betracht kommenden Formänderungen ist τ so klein, daß $\cos^2 \tau$ unbedenklich gleich 1 gesetzt werden kann, d. h. daß nahezu stattfindet:

$$\frac{d\tau}{dx} = \frac{d^2 y}{dx^2} \dots \dots \dots 99.$$

Wird dieser Werth für $\frac{d\tau}{dx}$ in Gleichung 98 eingesetzt, so erhält man

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{M}{E \mathcal{J}} \dots \dots \dots 100.$$

Gleichung 100 ist die Differentialgleichung der elastischen Linie. In derselben bedeutet M das Moment an einer Stelle mit der Abscisse x , im Allgemeinen also etwas Veränderliches; \mathcal{J} ist das Trägheitsmoment für die wagrechte Schwerpunktsaxe des Querschnittes an derselben Stelle.

Die Gleichung der elastischen Linie wird durch zweimalige Integration der Gleichung 100 erhalten; bei der Integration ist E constant. Es wird

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{E} \int \frac{M}{\mathcal{J}} dx + C_1$$

und

$$y = \frac{1}{E} \iint \frac{M}{\mathcal{J}} (dx)^2 + C_1 x + C_2.$$

Bekanntlich ist der Krümmungshalbmesser für eine ebene Curve

$$\rho = \frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right]^{3/2}}{\frac{d^2 y}{dx^2}}$$

oder, wenn $\operatorname{tg} \tau = \frac{dy}{dx}$ nur klein ist, angenähert

$$\rho = \frac{1}{\frac{d^2 y}{dx^2}}$$

Danach wird die Gleichung der elastischen Linie auch geschrieben werden können:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{E \mathcal{F}} \dots \dots \dots 101.$$

Für $M = 0$ wird $\rho = \infty$, d. h. die elastische Linie eine Gerade. Das Moment M ist Null an demjenigen Punkte des Balkens, bei welchem es aus dem positiven in den negativen Werth übergeht, also das Vorzeichen wechselt; an diesen Punkten hat ferner die elastische Linie sog. Wendepunkte.