Die Statik der Hochbau-Constructionen

Landsberg, Theodor

Stuttgart, 1899

4. Abschnitt: Dachstühle

urn:nbn:de:hbz:466:1-77733

4. Abfchnitt.

Dachftühle.

Der vorliegende Abfchnitt wird fich nur mit der Berechnung der Dachbinder befchäftigen. Die Dachbinder bilden den wefentlichften Theil der Dachftühle; fie find die Hauptträger der Dach-Conftructionen und haben die übrigen Theile derfelben, wie Pfetten, Sparren etc., zu tragen. Sie werden in beftimmten Abftänden von einander angeordnet. 203. Dachbinder.

Was die Querfchnittsermittelung der Pfetten, der Sparren, des Windverbandes etc. betrifft, fo ift einerfeits in den beiden vorhergehenden Abfchnitten bereits das Erforderliche vorgeführt worden; andererfeits wird im III. Theile diefes »Handbuches« (Band 2, Heft 4, Abfchn. 2, E: Dachftuhl-Conftructionen) nochmals auf diefen Gegenftand zurückgekommen werden.

Bei den meiften Dach-Conftructionen ift jeder Binder unter dem Einfluffe der äufseren Kräfte für fich ftabil, fo lange die letzteren nur in der Ebene des Binders wirken; eine Ausnahme machen die Flechtwerkdächer, welche als räumliches Fachwerk erft durch die Pfetten und die in der Dachfläche angeordneten Diagonalen ftabil werden. Hierher gehören fowohl die *Schwedler*'fchen Kuppeldächer und die ähnlich conftruirten Zeltdächer, als auch die von *Foeppl* vorgefchlagenen Tonnen-Flechtwerke. Die letzteren werden in Theil III, Band 2, Heft 4 (Abth. III, Abfchn. 2, E, Kap. 29, a, 7: *Foeppl*'fche Flechtwerkdächer) diefes »Handbuches« vom Verfaffer eingehend befprochen werden, und dafelbft ift auch die Berechnung derfelben vorgeführt; defshalb wird an diefer Stelle nicht auf folche Conftructionen näher eingegangen werden.

Für die Gröfse der Belaftungen, welche der Berechnung zu Grunde zu legen find, ift die Stellung der Binder zu einander von grofser Wichtigkeit. Die Binder find entweder einander im Grundrifs parallel oder fchliefsen von Null verfchiedene Winkel mit einander ein.

Nach der Art und Weife, wie die Dachbinder unterftützt find, laffen fich die Dächer unterfcheiden als:

1) Balkendächer oder Dächer, deren Binder bei lothrechten Belaftungen nur lothrechte Stützendrücke erleiden (Fig. 247);

2) Sprengwerksdächer oder Dächer, deren Binder felbft bei nur lothrechten Belaftungen fchiefe Stützendrücke erhalten (Fig. 248), und

Fig. 247.

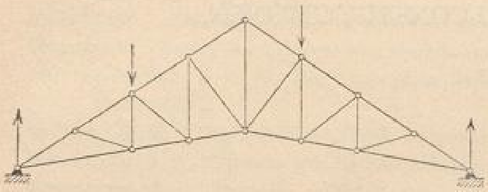
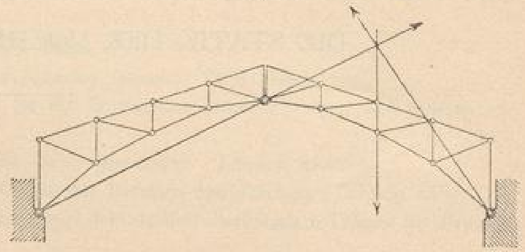


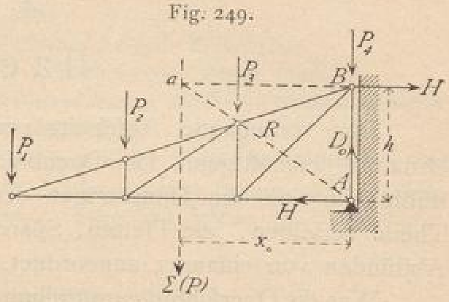
Fig. 248.



3) Ausleger- oder Kragdächer oder Dächer, auf deren Binder an den Unterſtützungsſtellen ein Stützendruck und ein Moment wirkt (Fig. 249).

Im Vorliegenden ſollen nur diejenigen Dachbinder behandelt werden, deren Conſtruction eine genaue Berechnung ohne Berückſichtigung der elaſtiſchen Formänderungen geſtattet, alſo einmal nur ſolche mit nicht mehr als zwei Auflagern, ſodann von dieſen nur jene, welche ohne Rückſicht auf den Biegungswiderſtand der Verbindungsſtellen auch für einſeitige und ſchiefe Belaſtungen ſtabil ſind. Nicht ſtabil ſind ohne Rückſicht auf den erwähnten Biegungswiderſtand die Dächer mit liegendem Dachſtuhle und die ſog. Hängewerksdächer mit zwei Hängeſäulen, falls, wie gewöhnlich, Diagonalen im Mittelfelde fehlen. Verzichtet man bei letzteren auf die Annahme verſchieden belaſteter Dachflächen, ſo kann die Berechnung genau ſo durchgeführt werden, wie in Art. 200 (S. 202) für den Trapezträger gezeigt iſt.

Fig. 249.



Solche Dachbinder kommen übrigens faſt nur in Holz und in ſolchen Spannweiten vor, für welche eine vielhundertjährige Erfahrung die Querſchnittsabmeſſungen feſt geſtellt hat. Auſsergewöhnliche Spannweiten mit ſolchen Dachbindern zu überſpannen, iſt nicht empfehlenswerth. Eine Berechnung iſt wohl unter gewiſſen Annahmen möglich; die Zuverläſſigkeit derſelben hängt aber in hohem Maſse davon ab, wie weit die Annahmen zutreffen. Da aber für groſse Dachweiten das Eiſen als vorzügliches und durchaus zuverläſſiges Material zur Verfügung ſteht, ſollte man daſſelbe für ſolche Dachweiten ſtets wählen und genau berechenbare Conſtructionen anordnen. Demnach iſt kein Bedürfniſs vorhanden, die Berechnung der oben als nicht ſtabil bezeichneten Dachbinder hier vorzuführen. Der Verfaſſer wird übrigens in dem eben erwähnten Heft dieſes »Handbuches« Vorſchläge machen, durch deren Befolgung auch die Holzbinder als ſtabile Conſtructionen hergeſtellt werden können.

---

1. Kapitel.

Belaſtungen und Auflagerdrücke.

a) Belaſtungen.

204. Knotenpunkts-belaſtungen.

Die Belaſtungen, welche auf die Dächer wirken und aus dem Eigengewichte, der Belaſtung durch Schneedruck und durch Winddruck beſtehen, ſind in Art. 25, 28, 29 u. 30 (S. 19 bis 23) angegeben und ausführlich beſprochen. Indem auf das dort Vorgeführte verwieſen wird, möge bemerkt werden, daſs die zufällige Belaſtung durch Arbeiter bei Berechnung der Binder und Pfetten auſser Acht gelaſſen werden kann; dagegen ist diese Belastung bei den schwachen Nebentheilen des Daches (z. B. den Sprossen der Glasdächer etc.) unter Umständen ausschlaggebend.

In Abschn. 1, Kap. 2 sind die Belastungen, bezogen auf das Quadr.-Meter schräger Dachfläche, bezw. die wagrechte Projection der Dachfläche angegeben; aus diesen erhält man nun leicht die auf das laufende Meter der Dachbinder wirkenden Lasten. Wird die Entfernung der parallel zu einander angeordneten Dachbinder gleich b gesetzt, so ergeben sich das Eigengewicht und die Schneelast für das laufende Meter Stützweite der Binder, wenn noch q' das Eigengewicht für 1 qm Grundfläche einschl. Bindergewicht bezeichnet, zu

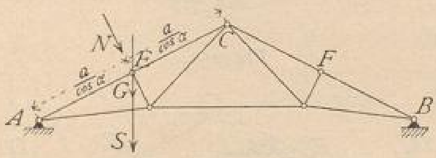
$$g = b q' \quad \text{und} \quad s = 75\, b, \qquad \ldots \ldots \quad 288.$$

ferner der Winddruck für das laufende Meter schräger Dachlinie zu

$$n = b \nu \qquad \ldots \ldots \quad 289.$$

Sind die Dachbinder einander nicht parallel, so ist die Belastung für das laufende Meter Binder veränderlich, entsprechend der Gröfse der Dachfläche, die auf die einzelnen Bindertheile kommt.

Fig. 250.



Die auf die einzelnen Knotenpunkte entfallenden Lasten werden erhalten, indem man die Belastung für das laufende Meter Stützweite, bezw. schräger Dachlinie mit derjenigen Länge multiplicirt, welche auf einen Knotenpunkt entfällt. Für den Knotenpunkt E (Fig. 250) wird demnach

$$G = a b q', \quad S = 75\, a b \quad \text{und} \quad N = \frac{a}{\cos \alpha}\, b \nu \qquad \ldots \quad 290.$$

Man könnte die Werthe für G, S und N auch nach der Theorie der continuirlichen Träger bestimmen, indem man $A E C$ als continuirlichen Träger auf drei Stützen auffasst; doch empfiehlt sich das angegebene einfachere Verfahren mehr, da die Annahmen, welche der Berechnung der continuirlichen Träger zu Grunde gelegt werden, hier doch nicht genau erfüllt sind und die verwickeltere Rechnung keine entsprechend genaueren Werthe giebt.

Sämmtliche Lasten werden in den Knotenpunkten der Binder wirkend angenommen. Die Eigengewichte wirken zum allergröfsten Theile in den Knotenpunkten derjenigen Gurtung, die in den Dachflächen liegt; nur ein ganz geringer Bruchtheil wirkt in den Knotenpunkten der anderen Gurtung. Meistens kann man annehmen, dafs die Eigenlasten ganz in den ersteren Knotenpunkten angreifen. 205. Belastungsannahmen.

Die Windbelastung kann nur einseitig wirken; denn da die Windrichtung nach der üblichen Annahme einen Winkel $\beta = 10$ Grad mit der wagrechten Ebene einschliefst, so kann der Wind beide Dachflächen nur dann treffen, wenn diese einen kleineren Winkel mit der Wagrechten bilden, als 10 Grad. Für derartig flache Dächer ist aber der Winddruck so gering, dafs er ungefährlich ist. Der Winddruck ist also stets einseitig zu rechnen.

Der Schnee endlich kann das ganze Dach oder einen Theil desselben belasten Wenn nun auch für manche Stäbe unter Umständen eine Schneebelastung über einen bestimmten Bruchtheil des Daches die ungünstigste Beanspruchung ergeben sollte, so werden wir doch diese der Berechnung nicht zu Grunde legen, weil dieselbe nur in den allerseltensten Fällen einmal vorkommen kann; vielmehr werden wir nur volle Belastung des Daches und Belastung der einen Dachhälfte durch Schnee in das Auge faffen. Wir werden fpäter zeigen, dafs die zweite Belaftungsart zu Ergebniffen führt, aus denen die Spannungen für volle Schneebelaftung ohne Schwierigkeit abgelefen werden können.

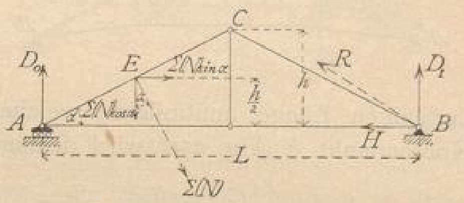
b) Auflagerdrücke bei Balkendächern.

206. Lothrechte Belaftungen. Die durch lothrechte Belaftungen (Eigengewicht und Schneedruck) erzeugten Stützendrücke find, da die Dachbinder genau wie Träger auf zwei Stützen wirken, eben fo zu ermitteln, wie bei den »Trägern« (Kap. 2 des vorhergehenden Abfchnittes) gezeigt worden ift.

207. Schiefe Belaftungen. Sind die Auflagerdrücke zu ermitteln, welche durch die fchiefen Winddruckbelaftungen erzeugt werden, fo find zwei Fälle zu unterfcheiden: entweder find alle Winddrücke einander parallel, welcher Fall eintritt, wenn die vom Winde getroffene Dachfläche eine Ebene ift, oder die Winddrücke find nicht parallel, welcher Fall eintritt, wenn die vom Winde getroffene Dachfläche fich aus mehreren Ebenen zufammenfetzt.

Für beide Fälle ift zunächft klar, dafs der Dachbinder nicht einfach frei auf die Stützpunkte gelagert werden darf. Denn ift $\Sigma(N)$ die Mittelkraft aller Winddrücke (Fig. 251), fo hat $\Sigma(N)$ eine wagrechte Seitenkraft $\Sigma(N) \sin \alpha$. Gleichgewicht ift alfo nur möglich, wenn Seitens des einen der beiden Auflager eine wagrechte Kraft $H = \Sigma(N) \sin \alpha$ auf den Binder wirkt; demnach mufs das Dach in A oder B unverfchieblich mit dem Auflager verbunden werden, um eine wagrechte Kraft übertragen zu können.

Fig. 251.



Wollte man ein eifernes Dach in beiden Punkten A und B feft mit dem Auflager verbinden, fo würde daffelbe bei Aenderung der Temperatur nicht im Stande fein, fich auszudehnen, bezw. zufammenzuziehen; demnach würden durch die Temperaturveränderungen wefentliche Spannungen im Dache entftehen, bezw. die ftützenden Wände würden gelockert werden. Man conftruirt defshalb bei eifernen Dachftühlen das eine Auflager fo, dafs daffelbe eine freie Ausdehnung und Zufammenziehung geftattet; das andere ftellt eine fefte Verbindung zwifchen Träger und ftützender Wand her. Wir wollen in der Folge ftets ein feftes und ein bewegliches Auflager, und zwar das Auflager bei A als das bewegliche, dasjenige bei B als das fefte annehmen. Nehmen wir ferner an, dafs das Auflager bei A eine Bewegung ohne Reibung geftatte, fo kann der Stützendruck bei A nur lothrecht wirken. Diefe Annahme ift nicht genau richtig, aber für die Praxis ausreichend. Der Auflagerdruck bei B dagegen kann beliebige Richtung annehmen. Es ift übrigens leicht, den Einflufs des gröfstmöglichen Reibungswiderftandes auf die Stabfpannungen zu ermitteln, indem man denfelben als äufsere auf den Binder wirkende Kraft einführt. In dem mehrfach erwähnten Heft diefes »Handbuches« wird die betreffende Unterfuchung durchgeführt werden.

Es ergeben fich verfchiedene Auflagerdrücke, je nachdem die Windbelaftung auf derjenigen Dachfeite ftattfindet, an welcher das bewegliche Auflager A ift, oder auf derjenigen, an welcher das fefte Auflager B liegt.

208. Parallele Winddrücke. 1) Die Winddrücke find parallel. α) Diejenige Dachhälfte ift belaftet, an welcher das bewegliche Auflager liegt (Fig. 251). Die Mittel-

kraft $\Sigma(N)$ ſämmtlicher Winddrücke greiſe in der Mitte von AC, etwa in E, an und ſei gleich der Summe aller Einzeldrücke. $\Sigma(N)$ zerlegt ſich im Punkte E in eine wagrechte und eine lothrechte Seitenkraft $\Sigma(N) \sin\alpha$ und $\Sigma(N) \cos\alpha$; in A wirkt der lothrechte Stützendruck D_0, in B der ſchiefe Auflagerdruck R, welcher gleichfalls in eine wagrechte Seitenkraft H und in eine lothrechte Seitenkraft D_1 zerlegt wird. Die drei Unbekannten D_0, D_1 und H erhält man durch die drei Gleichgewichtsbedingungen. Es iſt

$$0 = \Sigma(N) \sin\alpha - H, \quad \text{woraus} \quad H = \Sigma(N) \sin\alpha; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 291.$$

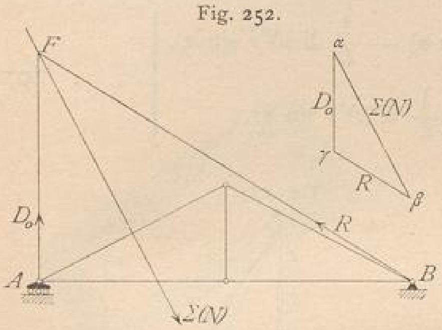
$$D_0 L + \Sigma(N) \sin\alpha \frac{h}{2} - \Sigma(N) \cos\alpha \frac{3}{4} L = 0, \quad \text{woraus, da} \quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{2h}{L},$$

$$D_0 = \frac{\Sigma(N) \cos\alpha}{4} (3 - \operatorname{tg}^2\alpha); \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 292.$$

$$D_1 L - \Sigma(N) \sin\alpha \frac{h}{2} - \Sigma(N) \cos\alpha \frac{L}{4} = 0, \quad \text{woraus} \quad D_1 = \frac{\Sigma(N)}{4 \cos\alpha} \quad . \quad 293.$$

Auf graphiſchem Wege geſchieht die Ermittelung der Auflagerdrücke in der durch Fig. 252 veranſchaulichten Weiſe.

Fig. 252.



Die drei auf das Dach wirkenden Kräfte D_0, R und $\Sigma(N)$ halten daſſelbe im Gleichgewicht, ſchneiden ſich alſo in einem Punkte; die Kraft R geht ſonach durch den Schnittpunkt F der Kräfte D_0 und $\Sigma(N)$. R geht auch durch B; alſo iſt BF die Richtung der Kraft R Aus dem Kräftedreieck für dieſe Kräfte ergiebt ſich, wenn $\alpha\beta = \Sigma(N)$ iſt, $R = \beta\gamma$ und $D_0 = \gamma\alpha$.

β) Diejenige Dachhälfte iſt belaſtet, an welcher das feſte Auflager liegt (Fig. 253). Die Mittelkraft $\Sigma(N)$ greift in der Mitte der rechtsſeitigen Dachfläche, in E', an und zerlegt ſich in eine lothrechte und eine wagrechte Seitenkraft. Wir erhalten durch Aufſtellung der Gleichgewichtsbedingungen:

$$0 = H' - \Sigma(N) \sin\alpha, \quad \text{woraus} \quad H' = \Sigma(N) \sin\alpha; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 294.$$

$$0 = D'_0 L - \Sigma(N) \sin\alpha \frac{h}{2} - \Sigma(N) \cos\alpha \frac{L}{4}, \quad \text{woraus} \quad D'_0 = \frac{\Sigma(N)}{4 \cos\alpha}; \quad 295.$$

$$0 = D'_1 L + \Sigma(N) \sin\alpha \frac{h}{2} - \Sigma(N) \cos\alpha \frac{3}{4} L,$$

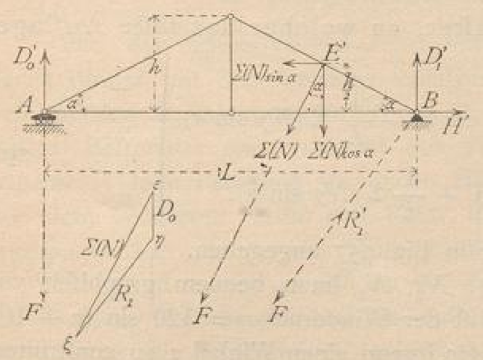
woraus

$$D'_1 = \frac{\Sigma(N) \cos\alpha}{4} (3 - \operatorname{tg}^2\alpha). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 296.$$

Man ſieht, es iſt $D_0 = D'_1$, $D_1 = D'_0$ und $H = H'$; nur iſt bei H' der Sinn demjenigen von H entgegengeſetzt.

Durch Conſtruction laſſen ſich die Auflagerdrücke im vorliegenden Falle, wie in Fig. 253 gezeigt, ermitteln.

Fig. 253.

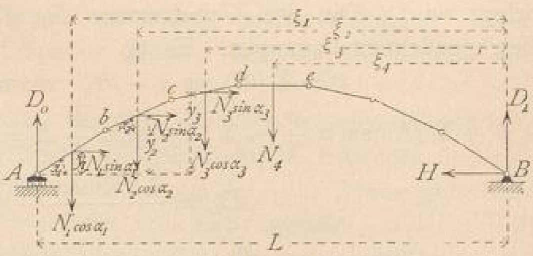


Die drei Kräfte D'_0, $\Sigma(N)$ und die Mittelkraft R'_1 von H' und D'_1 ſind im Gleichgewichte, ſchneiden ſich daher in einem Punkte, und zwar in demjenigen Punkte, in welchem die Richtungen von D'_0 und $\Sigma(N)$ ſich ſchneiden, alſo in F. Die Verbindungslinie der beiden Punkte B und F ergiebt demnach die Richtung der Kraft R'_1. Iſt $\Sigma(N) = \varepsilon\xi$, ſo wird $\xi\eta = R'_1$ und $\eta\varepsilon = D'_0$.

209. Nicht parallele Winddrücke.

2) Die Winddrücke haben nicht parallele Richtungen. α) Diejenige Dachhälfte ist belastet, an welcher das bewegliche Auflager liegt. Bei gebrochener Dachfläche werden die Winddrücke, welche auf die einzelnen Flächen wirken, nach den Angaben in Art. 30 (S. 23) ermittelt. Bei einer cylindrischen Dachfläche genügt es, einzelne Dachtheile zusammenzufassen und für jeden dieser Theile den Winddruck unter Zugrundelegung eines mittleren Neigungswinkels α zu bestimmen. Man erhält etwa N_1 für die Strecke Ab (Fig. 254), N_2 für bc etc. Die Zerlegung jeden Winddruckes in eine wagrechte und eine lothrechte Seitenkraft und die Aufstellung der Gleichgewichtsbedingungen ergeben die Unbekannten D_0, D_1 und H. Es wird

Fig. 254.



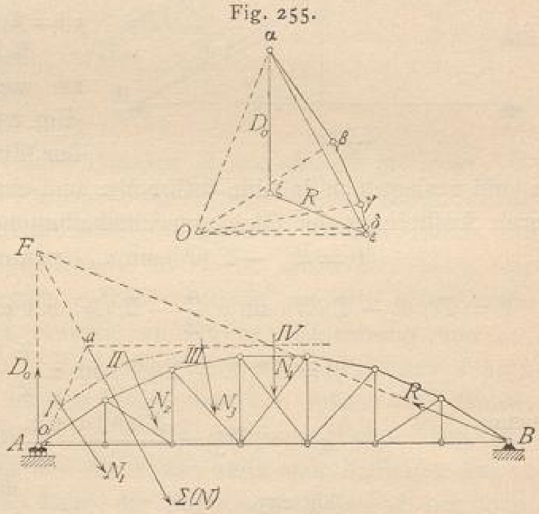
$$\left.\begin{aligned} H = \Sigma\,(N \sin\alpha),\quad D_0 = \frac{1}{L}\,\Sigma\,(N\xi \cos\alpha) - \frac{1}{L}\,\Sigma\,(Ny \sin\alpha), \\ D_1 = \frac{1}{L}\,\Sigma\,[N(L-\xi)\cos\alpha] + \frac{1}{L}\,\Sigma\,(Ny\sin\alpha). \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; 297.$$

Die graphische Ermittelung der Auflagerdrücke zeigt Fig. 255.

Die einzelnen Winddrücke (N_1, N_2, N_3 . . .) werden mittels eines Kraftpolygons $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon$ zu einer Mittelkraft vereinigt; hierauf wird für einen beliebigen Pol O das Seilpolygon $O\,I\,II\,III\,IV$ construirt. Alsdann geht die Mittelkraft durch den Schnittpunkt a der äussersten Seilpolygonseiten und ist parallel zu $\alpha\varepsilon$. Jetzt ersetzt $\Sigma\,(N)$ alle Winddrücke, und es wirken nur noch die drei Kräfte D_0, $\Sigma\,(N)$ und R, so dass die graphische Ermittelung von D_0 und R in der soeben gezeigten Weise erfolgen kann. Es ergiebt sich $\varepsilon\xi = R$ und $\xi\alpha = D_0$.

Wenn die Dachfläche aus einzelnen ebenen Dach- und Laternenflächen sich zusammensetzt, so ist das Verfahren genau so, wie eben angegeben.

Fig. 255.



β) Diejenige Dachhälfte ist belastet, an welcher das feste Auflager liegt (Fig. 256). Die Berechnung ergiebt

$$\left.\begin{aligned} H' = \Sigma\,(N \sin\alpha),\quad D'_1 = \frac{1}{L}\,\Sigma\,(N\xi' \cos\alpha) - \frac{1}{L}\,\Sigma\,(Ny \sin\alpha), \\ D'_0 = \frac{1}{L}\,\Sigma\,[N(L-\xi')\cos\alpha] + \frac{1}{L}\,\Sigma\,(Ny\sin\alpha). \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; 298.$$

Die Construction von D'_0 und R'_1 ist in Fig. 257 angegeben.

Die Ermittelung der Werthe für N_1, N_2, N_3 kann bequem graphisch vorgenommen werden. Nach Art. 30 (S. 23) ist der Winddruck $\nu = 120 \sin(\alpha + 10^0)$ für 1 qm. Dieses ν ist nach Fig. 258 leicht für irgend einen Winkel α zu construiren.

Fig. 256.

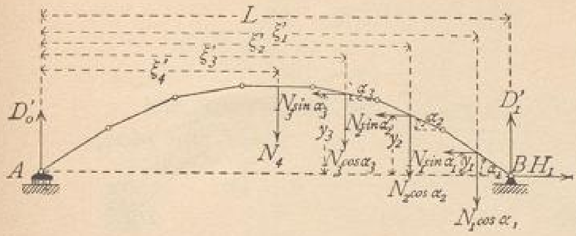
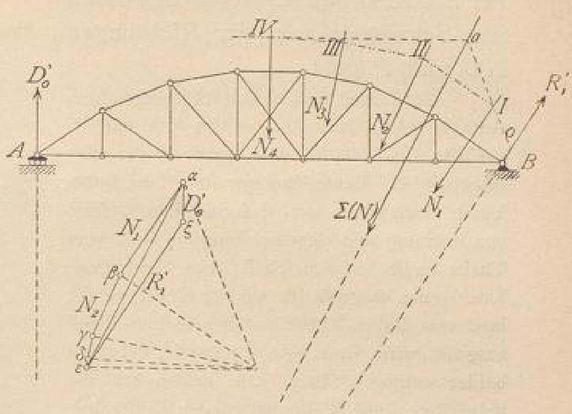


Fig. 257.



Man mache in der Dachfläche nach beliebigem Mafsftabe $\overline{ab} = 120^{kg}$, lege durch b eine Linie parallel zur Windrichtung und fälle auf diefelbe von a aus die Senkrechte ac; alsdann ift

$$\overline{ac} = \overline{ab} \sin(\alpha + 10^0).$$

Da $\overline{ab} = 120^{kg}$ ift, fo ift $\overline{ac} = 120 \sin(\alpha + 10^0) = \nu$, d. h. der gefuchte Winddruck. Trägt man ac fenkrecht zur Dachfläche ab, fo erhält man die in Fig. 258 fchraffirte Belaftungsfläche für Winddruck.

Fig. 258.

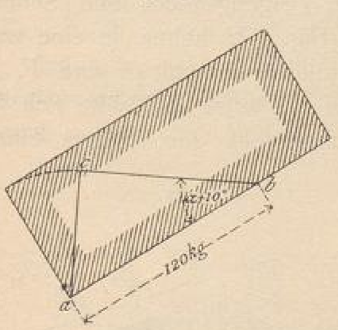


Fig. 259.

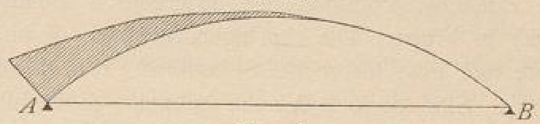
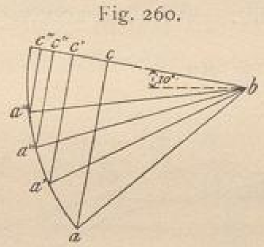


Fig. 260.



Bildet die Dachfläche eine Cylinderfläche, fo wähle man eine genügend grofse Anzahl von Punkten aus, für welche man die gezeigte Conftruction vornimmt. Man erhält die in Fig. 259 gezeichnete Belaftungsfläche und kann daraus leicht die Gröfse des Winddruckes ermitteln, welcher auf die einzelnen Knotenpunkte der Conftruction entfällt.

Bequemer macht man die Conftruction der Winddrücke in einer befonderen Zeichnung (Fig. 260) und erhält ac, bezw. $a'c'$, $a''c''$ ...

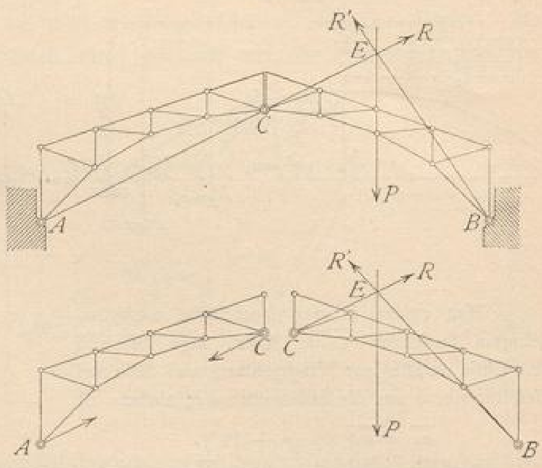
c) Auflagerdrücke bei Sprengwerksdächern.

Von den Sprengwerksdächern follen hier nur diejenigen behandelt werden, 210. Allgemeines.
deren Binder mit drei Gelenken conftruirt find (Fig. 261). Zwei Gelenke befinden fich an den Auflagerpunkten A und B, ein drittes C gewöhnlich in der Bindermitte. Betrachtet man zunächft den Träger felbft als gewichtslos, fo ergiebt fich allgemein: Jede Belaftung der einen Hälfte, etwa CB, erzeugt im Auflagerpunkt der nicht belafteten Hälfte eine Kraft, deren Richtung durch den betreffenden Auflagerpunkt, hier A, und das Mittelgelenk C beftimmt ift.

Eine Laft P auf der Hälfte BC erzeugt alfo in A einen Stützendruck R mit der Richtung AC, und da auf das Syftem nur drei Kräfte, nämlich die Laft P und die Drücke der Auflager A und B, wirken, fo müffen fich diefelben in einem

Punkte fchneiden. Daraus folgt, dafs der Stützendruck R' von B aus durch den Schnittpunkt E der Richtungen AC und P geht.

Fig. 261.



Der Beweis ergiebt fich folgendermafsen. Auf die rechte Hälfte BC wirken P, R und R', auf die linke Hälfte eine Kraft in A, eine zweite in C. Beide find vor der Hand unbekannt; doch wiffen wir, dafs nach dem Gefetze von Wirkung und Gegenwirkung die in C vom Theile rechts auf den Theil links übertragene Kraft genau fo grofs ift, wie die Kraft, welche in C vom linken Theile auf den rechten Theil ausgeübt wird, d. h. wie R; nur ift der Sinn beider entgegengefetzt. Die beiden auf die unbelaftete linke Hälfte wirkenden Kräfte halten diefen Theil im Gleichgewicht; dies ift aber nur möglich, wenn beide in diefelbe Richtung fallen, d. h. in diejenige, welche durch die beiden Angriffspunkte A und C gegeben ift, entgegengefetzten Sinn und gleiche Gröfse haben; der Stützendruck von A geht alfo durch C.

211. Lothrechte Belaftungen.

Zunächft kommen die lothrechten Belaftungen (Eigengewicht und Schneedruck) in Frage. Die Auflagerdrücke in A und B (Fig. 262) haben je eine wagrechte und eine lothrechte Seitenkraft. Wir bezeichnen diefelben mit H und V, H_1 und V_1. Sind diefe 4 Werthe bekannt, fo ift alles auf die äufseren Kräfte fich Beziehende bekannt. Wir betrachten zuerft das Gleichgewicht der rechten Hälfte

Fig. 262.

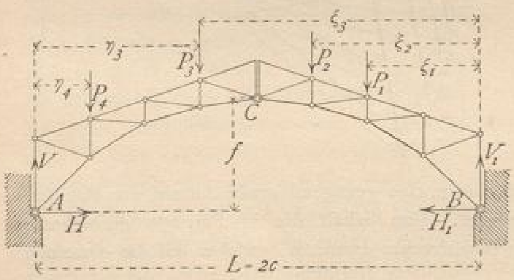
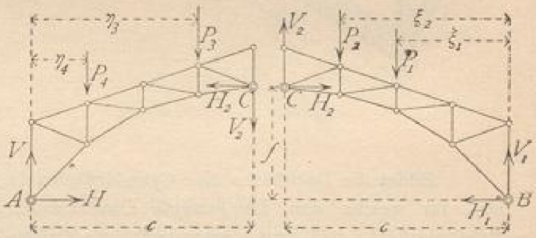


Fig. 263.



(Fig. 263). In C wirkt auf diefelbe eine Kraft, deren Seitenkräfte H_2 und V_2 fein mögen. Alsdann ift die Summe der ftatifchen Momente für B als Drehpunkt gleich Null, mithin

$$H_2 f + V_2 c - \Sigma (P \xi) = 0.$$

Betrachtet man nun die linke Hälfte (Fig. 263), fo wirkt auf diefe in C eine genau fo grofse Kraft, wie in C auf die rechte Hälfte wirkt; nur ift der Sinn entgegengefetzt. Demnach werden die Seitenkräfte derfelben wiederum H_2 und V_2, aber mit entgegengefetztem Sinne fein. Die Summe der ftatifchen Momente für A als Drehpunkt ift gleich Null; mithin, wenn ftets die Summen, welche fich auf die linke Hälfte beziehen, mit dem Zeiger 1 bezeichnet werden,

$$H_2 f - V_2 c - \Sigma_1 (P \eta) = 0.$$

Damit find für H_2 und V_2 die beiden Gleichungen gefunden:

$$H_2 f + V_2 c = \Sigma (P \xi) \quad \text{und} \quad H_2 f - V_2 c = \Sigma_1 (P \eta).$$

Aus diefen beiden Gleichungen erhält man

$$H_2 = \frac{\Sigma (P\xi) + \underset{1}{\Sigma} (P\eta)}{2f} \quad \text{und} \quad V_2 = \frac{\Sigma (P\xi) - \underset{1}{\Sigma} (P\eta)}{L} \quad . \; . \; . \quad 299.$$

Die Anwendung der übrigen Gleichgewichtsbedingungen auf die beiden Hälften ergiebt nun leicht

$$\left.\begin{aligned} H = H_2 = H_1 &= \frac{\Sigma (P\xi) + \underset{1}{\Sigma} (P\eta)}{2f}, \\ V = V_2 + \underset{1}{\Sigma} (P) &= \frac{\Sigma (P\xi) + \underset{1}{\Sigma} (P\xi)}{L}, \\ V_1 = \Sigma (P) - V_2 &= \frac{\Sigma [P(L-\xi)] + \underset{1}{\Sigma} [P(L-\xi)]}{L}. \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \quad 300.$$

Die lothrechten Seitenkräfte der Lagerdrücke find demnach genau fo grofs, wie bei gleicher Belaftung an einem Balkenträger von der Spannweite L. Jetzt find auch die Kräfte R und R_1, fo wie ihre Winkel α und α_1 mit der Wagrechten gefunden. Es werden

$$R = \sqrt{H^2 + V^2} \quad \text{und} \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{V}{H}; \quad R_1 = \sqrt{H_1{}^2 + V_1{}^2} \quad \text{und} \quad \operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{V_1}{H_1} \quad 301.$$

Beifpiel. 1) Die beiden Dachhälften feien gleich belaftet, je mit g auf die Längeneinheit der wagrechten Projection (Fig. 264). Dann ift

$$\Sigma (P) = \underset{1}{\Sigma} (P) = gc; \quad \Sigma (P\xi) = \underset{1}{\Sigma} (P\eta) = \frac{gc^2}{2};$$

$$H = \frac{gc^2}{2f}; \quad V_2 = 0; \quad V = V_2 + \underset{1}{\Sigma} (P) = gc; \quad V_1 = \Sigma (P) - V_2 = gc \quad . \; . \; . \quad 302.$$

Fig. 264.

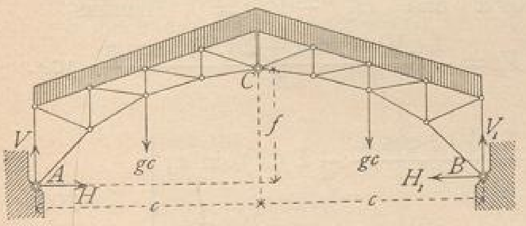
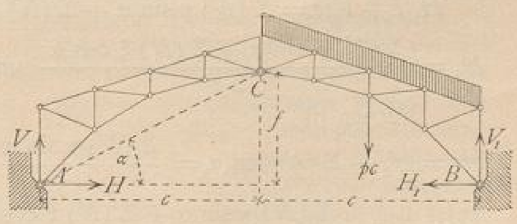


Fig. 265.



2) Die eine (rechte) Hälfte fei mit p für die Längeneinheit der wagrechten Projection belaftet, die andere (linke) Hälfte fei unbelaftet (Fig. 265). Alsdann ift

$$\Sigma (P) = pc; \quad \underset{1}{\Sigma} (P) = 0; \quad \Sigma (P\xi) = \frac{pc^2}{2}; \quad \underset{1}{\Sigma} (P\eta) = 0;$$

$$H_2 = H = H_1 = \frac{pc^2}{4f}; \quad V_2 = \frac{pc^2}{2 \cdot 2c} = \frac{pc}{4}; \quad V = \frac{pc}{4}; \quad V_1 = \frac{3pc}{4} \quad . \; . \; . \quad 303.$$

Hier ift nach Gleichung 301: $\operatorname{tg} \alpha = \frac{pc \cdot 4f}{4pc^2} = \frac{f}{c}$, d. h. die Richtung von R geht durch A und C (fiehe oben).

Die graphifche Ermittelung der in Rede ftehenden Auflagerdrücke ift in Fig. 266 dargeftellt.

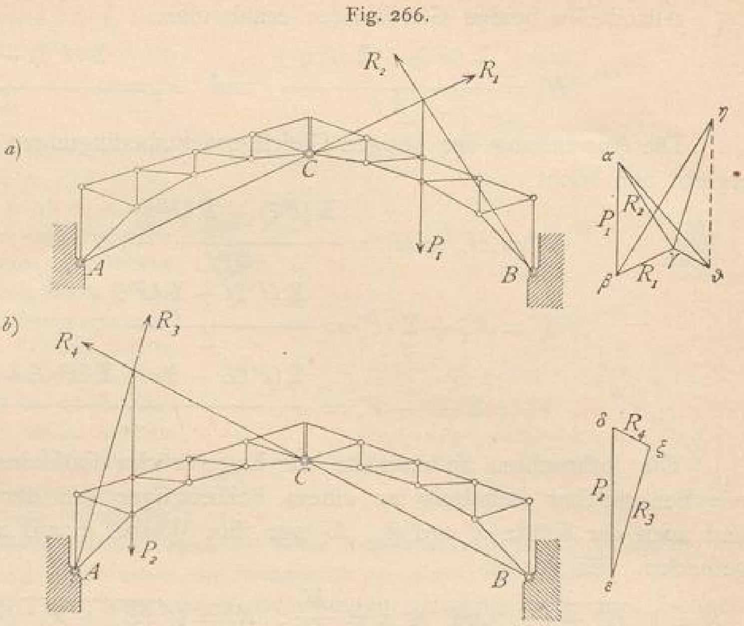
Es empfiehlt fich, für beliebige Belaftung zuerft nur die eine Hälfte belaftet anzunehmen und für diefe Belaftung die Auflagerdrücke zu ermitteln, darauf die Auflagerkräfte für die Belaftung nur der anderen Hälfte aufzufuchen. Die Zufammenfetzung der für die einzelnen Belaftungen gefundenen Kräfte ergiebt alsdann die wirklichen Auflagerdrücke.

Zunächst sei nur die rechte Hälfte belastet und die Mittelkraft dieser Lasten gleich P_1; alsdann haben R_1 und R_2 die in Fig. 266 *a* gezeichneten Richtungen, und die Gröfse beider ergiebt sich durch das Kraftpolygon zu $\beta\gamma = R_1$ und $\gamma\alpha = R_2$. In gleicher Weise erhält man für Belastung der linken Hälfte mit P_2:

$\varepsilon\xi = R_3$ und $\xi\delta = R_4$.

Wenn nun beide Hälften mit P_1, bezw. P_2 belastet sind, so wirken in A: R_1 und R_3, in B: R_2 und R_4. Die Gröfse und Richtung der gesammten Auflagerdrücke R und R' erhält man durch Construction der Kraftpolygone aus den bezüglichen Kräften. Ist $\gamma\eta = R_3$, so wird $\beta\eta = R$; ist $\vartheta\gamma \# \xi\delta = R_4$, so wird $\vartheta\alpha = R'$.

Fig. 266.



Als Controle diene, dafs die wagrechten Projectionen von R und R' gleich sein müssen, da ja H im ganzen Sprengwerksträger constant ist.

212. Schiefe Belastungen. Uebergehen wir nunmehr zu den vom Winddruck (durch schiefe Belastung) erzeugten Stützendrücken, so sei $\Sigma(N)$ die Mittelkraft aller Winddrücke (Fig. 267). Wir zerlegen diese Kraft in $\Sigma(N)\cos\alpha$ und $\Sigma(N)\sin\alpha$ und erhalten, wie im vorhergehenden Artikel, die Gleichgewichtsbedingungen:

$$H_2 f + V_2 c = \Sigma(N)\,y\sin\alpha + \Sigma(N)\,\xi\cos\alpha \quad \text{und} \quad H_2 f - V_2 c = 0, \quad \text{woraus}$$

$$H_2 = \frac{\Sigma(N)\,y\sin\alpha + \Sigma(N)\,\xi\cos\alpha}{2f} \quad \text{und} \quad V_2 = \frac{\Sigma(N)\,y\sin\alpha + \Sigma(N)\,\xi\cos\alpha}{2c} \qquad 304.$$

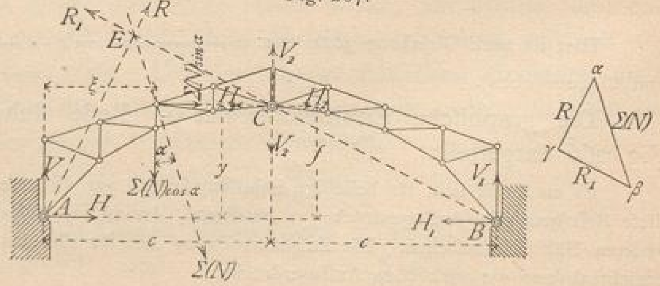
Ferner ist

$$\left.\begin{aligned} H_1 &= H_2 - \Sigma(N)\sin\alpha = \frac{\Sigma(N)\,y\sin\alpha + \Sigma(N)\,\xi\cos\alpha}{2f} - \Sigma(N)\sin\alpha, \\ H_1 &= H_2 = \frac{\Sigma(N)\,y\sin\alpha + \Sigma(N)\,\xi\cos\alpha}{2f}, \end{aligned}\right\} \qquad 305.$$

$$\left.\begin{aligned} V_1 &= \Sigma(N)\cos\alpha - V_2 = \Sigma(N)\cos\alpha - \frac{\Sigma(N)\,y\sin\alpha + \Sigma(N)\,\xi\cos\alpha}{2c}, \\ V_1 &= V_2 = \frac{\Sigma(N)\,y\sin\alpha + \Sigma(N)\,\xi\cos\alpha}{2c}. \end{aligned}\right\} \qquad 306.$$

Wenn die schiefen Belastungen einander nicht parallel sind, so bleibt das Verfahren das gleiche; nur sind statt $\Sigma(N)\,y\sin\alpha$ und $\Sigma(N)\,\xi\cos\alpha$ bezw. $\Sigma(N y\sin\alpha)$ und $\Sigma(N\xi\cos\alpha)$ in die Rechnung einzuführen.

Fig. 267.



Für die graphische Ermittelung der fraglichen Auflagerdrücke ift die in Fig. 267 angegebene Conftruction ohne Weiteres verftändlich, und es ergiebt fich $\beta\gamma = R_1$, $\gamma\alpha = R$.

Bei nicht parallelen Winddrücken ift für die graphifche Behandlung zunächft die Mittelkraft derfelben nach Gröfse, Richtung und Lage in bekannter Weife aufzufuchen und alsdann zu verfahren, wie in Fig. 267 dargeftellt ift.

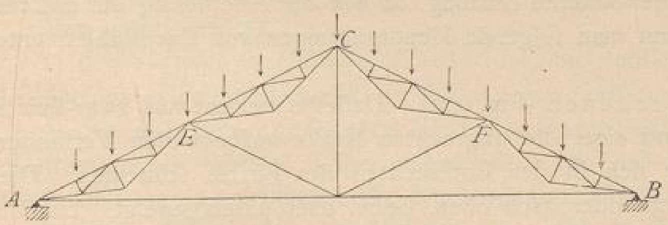
---

2. Kapitel.

Balkendächer.

Indem wir nunmehr zur Ermittelung der Spannungen in den wichtigften Dachftuhl-Conftructionen übergehen, werden wir bei den diesfälligen Unterfuchungen für jede Gattung von Dachbindern die verfchiedenen Belaftungsfälle gefondert betrachten. Wir beftimmen demnach die Spannungen, welche erzeugt werden: 1) durch das Eigengewicht, 2) durch einfeitige, bezw. volle Schneebelaftung, 3) durch Windbelaftung, fowohl von der Seite, an der das bewegliche, wie von der Seite, an welcher das fefte Auflager liegt. Indem dann diefe Spannungen in einer Tabelle zufammengeftellt werden, ift es leicht, für jeden Stab die ungünftigfte Belaftungsart und die ungünftigften Spannungen zu beftimmen, ferner für die Querfchnittsbeftimmung (fiehe Art. 84 u. 85, S. 60 bis 63) die Werthe P_0, P_1 und P_2 zu ermitteln. Da die Dachbinder meift Gitterträger find, fo werden die im Kapitel »Träger« gezeigten Verfahren für die Spannungsermittelung hier genau, wie dort, Anwendung finden. Auch hier machen wir die Annahmen: 1) dafs die Stäbe in den Knotenpunkten durch Gelenke mit einander verbunden find, 2) dafs die Laften nur in den Knotenpunkten der Conftruction wirken. Die berechneten Spannungen werden defto mehr mit den wirklichen übereinftimmen, je mehr die Conftruction diefen Annahmen entfpricht. Die zweite Annahme (Belaftung nur in den Knotenpunkten) ift häufig nicht erfüllt; in diefem Falle kann man dennoch die in den folgenden Artikeln zu zeigenden Methoden anwenden, indem man annimmt, dafs die zwifchen je zwei Knotenpunkten befindlichen Laften durch befondere Träger auf die Knotenpunkte übertragen werden. Die Berechnung diefer Träger hat, wie im Kapitel »Träger« gezeigt ift, zu erfolgen. Die Belaftung, welche im Hauptfyftem auf die Knotenpunkte übertragen wird, ift dann der Gröfse und Richtung nach gleich den auf die Zwifchenträger wirkenden Auflagerdrücken. Der Sinn ift entgegengefetzt. In Fig. 268 z. B. find zwifchen je zwei Knotenpunkten des Hauptfyftemes Pfetten, demnach Laftpunkte. Das Stück CE kann wie ein befonderer, in C und E frei aufliegender Träger aufgefafft und berechnet werden; eben fo verhält es fich mit dem Stück AE. Im Punkte E des Hauptfyftemes wirken dann der linke Auflagerdruck des Balkens CE und der rechte Auflagerdruck des Balkens AE nach unten, aufserdem noch die Belaftung der Pfette in E. Demnach find die Spannungen im Hauptfyftem auch hier zunächft genau fo zu berechnen, als wenn die Gefammtlaften nur in den Hauptknotenpunkten A, C, E, F und B angriffen; zu diefen Spannungen im Hauptfyftem kommen alsdann noch die in den kleinen Trägern AE, EC etc. ftattfindenden Spannungen hinzu. Die Spannungen derjenigen Stäbe der kleinen Träger, welche mit den Linien AE, EC etc. zufammenfallen, addiren fich einfach zu den Spannungen in diefen Stäben. 213. Allgemeines.

Fig. 268.

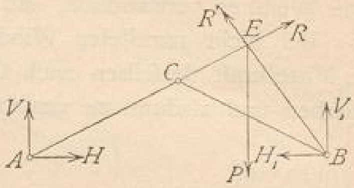


Die erfte Annahme (Anordnung von Gelenken in den Knotenpunkten) ift bei den hölzernen Dachbindern niemals, allein auch bei den eifernen Dachftühlen häufig nicht erfüllt; doch braucht bei den gewöhnlichen Dächern auf die hierdurch bedingten Unterfchiede der wirklich auftretenden Spannungen gegenüber den berechneten keine Rückficht genommen zu werden.

Das einfachfte Dach entfteht dadurch, dafs fich zwei Sparren AC und BC gegen einander lehnen (Fig. 269). Jede Belaftung deffelben, etwa des Sparrens BC, 214. Princip der Balkendächer.

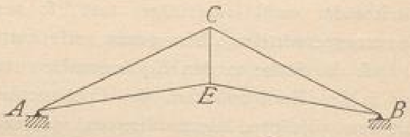
durch eine Laft P, erzeugt nach Art. 210 in A eine Kraft R, deren Richtung mit AC zufammenfällt, in B eine Kraft R' in der Richtung BE. Die Auflagerkräfte R und R' haben die wagrechten Seitenkräfte H und H_1, und da aufserdem hier keine wagrechten Kräfte auf das Syftem wirken, fo ift $H = H_1$. Diefe Kräfte H werden von den Seitenmauern des Gebäudes oder von den fonftigen ftützenden Conftructionen geleiftet; umgekehrt wirken Seitens des Daches die Kräfte H auf die Seitenmauern des Gebäudes oder auf die fonftigen Stützen nach aufsen.

Fig. 269.



Die Standficherheit der das Dach tragenden Wände, Stützen etc. macht es in den meiften Fällen wünfchenswerth, dafs diefe wagrechten Kräfte nicht auf diefelben übertragen werden; man verbindet defshalb die beiden Punkte A und B durch einen Stab oder eine Anzahl von Stangen, welche die Kräfte H und H_1 nach einem Punkte übertragen, in welchem fie alsdann einander aufheben. Dadurch erhält man, wenigftens für lothrechte Belaftungen des Daches, nur lothrechte Auflagerdrücke und lothrechten Druck auf die Wände, Stützen etc. Im einfachften Falle befteht die Stangenverbindung aus einem einfachen Holzbalken oder einer einfachen eifernen Zugftange AB; ftatt deffen werden auch zwei Stangen AE und EB (Fig. 270) angeordnet, die fowohl nach oben, wie nach unten von der wagrechten Linie abweichen können. Alsdann ift im Eckpunkte E eine weitere lothrechte Stange anzuordnen. Auch eine mehrfach gebrochene Stangenverbindung kann zur Verbindung der Punkte A und B gewählt werden. Beim Balkendach werden demnach ftets die wagrechten Seitenkräfte der Auflagerdrücke, welche durch die lothrechten Belaftungen entftehen, mittels der Stangenverbindung aufgehoben.

Fig. 270.



215. Eintheilung.

Je nach der Anordnung der eben erwähnten Stangenverbindung, bezw. je nach der Form der oberen und der unteren Gurtung, fo wie der Anordnung der zwifchen beiden gelegenen Stäbe kann man folgende Hauptgattungen von Dachftühlen unterfcheiden[34]):

a) Einfaches Dreieckdach (Fig. 270). Daffelbe befteht aus zwei fich im Firft ftützenden Sparren und einer die wagrechten Kräfte aufhebenden Verbindung von zwei Stangen, welche fich in der Lothrechten des Firftes fchneiden. Diefe beiden Stangen find wagrecht oder nach oben, bezw. nach unten geneigt. Zur Verbindung des Firftpunktes mit dem Schnittpunkte der Stangen, welche den wagrechten Schub aufnehmen, ift eine lothrechte Stange CE angeordnet.

b) Deutfcher Dachftuhl (Fig. 271). Die obere Gurtung hat jederfeits einen Knotenpunkt, welcher durch einen Stab mit E verbunden ift.

Fig. 271.

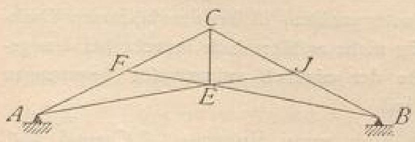
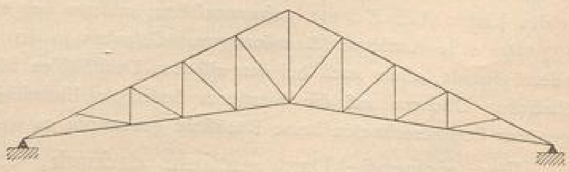


Fig. 272.



[34]) Vergl. auch Theil III, Band 2, Heft 4 (Art. 144 bis 149, S. 199 bis 207) diefes »Handbuches«.

c) Engliſcher Dachſtuhl (Fig. 272). Die obere Gurtung hat jederſeits eine Anzahl von Knotenpunkten; die obere Gurtung und die den wagrechten Schub aufhebende Stangenverbindung (die untere Gurtung) ſind durch Gitterwerk mit einander verbunden. Das Gitterwerk beſteht aus einer Schar Pfoſten und einer Schar Diagonalen oder aus zwei Scharen von Diagonalen, von denen die eine vortheilhaft ſenkrecht zur Dachneigung ſteht.

d) Franzöſiſcher oder belgiſcher Dachſtuhl, *Polonceau*-Dachſtuhl oder *Wiegmann*-Dachſtuhl (Fig. 273 bis 276). Er entſteht aus dem einfachen Dreieckdach, wenn in Fig. 269 die einfachen Sparren durch Dreieckträger erſetzt werden.

Fig. 273.

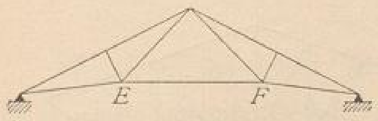


Fig. 274.

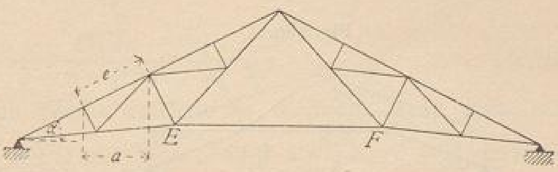


Fig. 275.

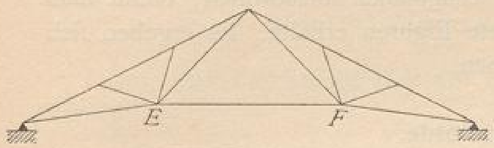
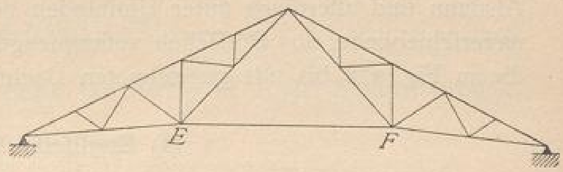


Fig. 276.



Die Form der letzteren richtet ſich nach der Anzahl von Stützpunkten (Knotenpunkten), welche jederſeits nöthig werden. Der wagrechte Schub wird durch eine Stange EF aufgehoben, welche die unteren Eckpunkte der beiden Dreieckträger verbindet. In Fig. 273 bis 276 ſind *Polonceau*-Dachſtühle für 1, 2, 3 und 4 Laſtpunkte an jeder Seite des Firſtes dargeſtellt.

Man unterſcheidet:

1) den einfachen *Polonceau*-Dachſtuhl; bei demſelben hat der Dreieckträger jederſeits nur einen Knotenpunkt in der unteren Gurtung (Fig. 273 u. 275);

2) den zuſammengeſetzten *Polonceau*-Dachſtuhl; bei dieſem ſind in den Hauptträger noch weitere Stäbe eingeſchaltet, ſo daſs der Dreieckträger in der unteren Gurtung jederſeits mehrere Knotenpunkte hat (Fig. 274 u. 276).

Die Anzahl der Laſtpunkte beſtimmt ſich nach der Tragweite, welche man den Sparren geben kann. Letztere heiſse e; ſomit iſt die wagrechte Projection derſelben $e \cos \alpha = a$, die Geſammtſtützweite des Daches L. Alsdann ergiebt ſich die Anzahl der Laſtpunkte zu $n = \frac{L}{e \cos \alpha} - 1 = \frac{L}{a} - 1$; e iſt nach der Stärke der Sparren verſchieden; n muſs eine ganze gerade Zahl ſein.

Fig. 277.

e) Sicheldach (Fig. 277). Die obere und die untere Gurtung ſind nach einer krummen Linie oder nach einem der krummen Linie eingeſchriebenen Vieleck gebildet; das Gitterwerk iſt verſchieden. Man kann hierher auch die Träger mit gekrümmter oberer und geradliniger unterer Gurtung rechnen.

Bei den vorſtehend angeführten Dächern iſt ſtets angenommen, daſs die beiden Gurtungen ſich über dem Auflager ſchneiden; die Formen ſind aber auch möglich, ohne daſs die Schnittpunkte der Gurtungen in den Auflager-Lothrechten liegen.

Fig. 278.

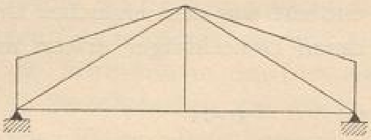


Fig. 279.

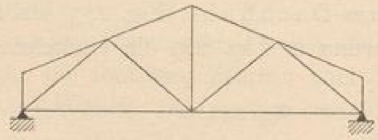


Fig. 280.

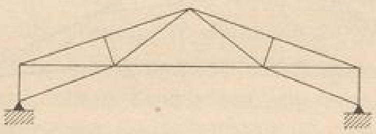
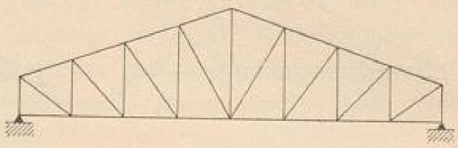


Fig. 281.



Alsdann ſind allerdings unter Umſtänden noch Diagonalen anzuordnen, damit man unverſchiebliche, aus Dreiecken zuſammengeſetzte Figuren erhalte. Es ergeben ſich die in Fig. 278 bis 281 gezeichneten Dachformen.

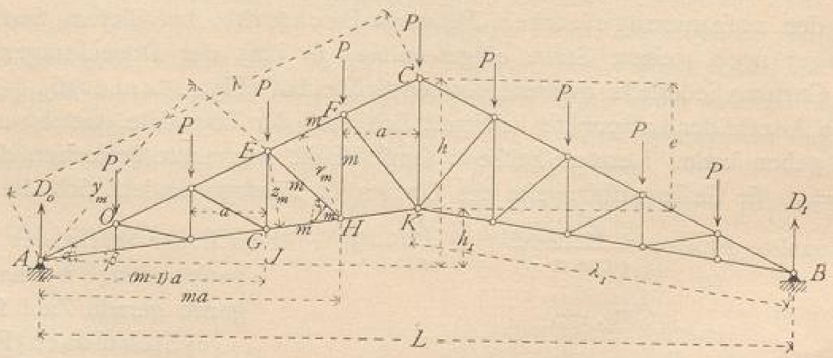
a) Engliſche Dachſtühle.

216. Berechnung der Spannungen durch lothrechte Belaſtung.

Die Belaſtungsgeſetze und Spannungsermittelungen ſollen für einen Dachſtuhl mit Pfoſten und nach der Mitte zu fallenden Diagonalen gezeigt werden; für andere Anordnungen des Gitterwerkes ergeben ſich aus dem Nachſtehenden die Aenderungen ohne Schwierigkeit.

1) Berechnung der Spannungen. α) Belaſtung durch das Eigengewicht, bezw. volle Schneebelaſtung (Fig. 282). Die Belaſtung für den Knotenpunkt ſei P, die Stützweite L, die Entfernung der Knotenpunkte, wagrecht

Fig. 282.



gemeſſen, a. Der Dachſtuhl habe $2n$ Felder; mithin iſt $L = 2na$. Die Winkel der oberen, bezw. unteren Gurtung mit der wagrechten Linie ſeien α und β. Die Auflagerdrücke ſind $D_0 = D_1 = \frac{(2n-1)P}{2}$.

Für die m-te Stange EF der oberen Gurtung ift H der Momentenpunkt, alfo 217. Spannungen in den Gurtungen.

$$0 = X_m r_m + D_0 m a - (m-1) P \frac{m a}{2},$$

woraus

$$X_m = \frac{-\frac{(2n-1)}{2} P m a + (m-1) P \frac{m a}{2}}{r_m}.$$

Nun ift $r_m = \overline{AH} \sin(\alpha - \beta)$ und $\overline{AH} = \frac{m a}{\cos \beta}$; fonach

$$r_m = m a \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos \beta} = m a \cos \alpha (\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta)$$

und

$$X_m = -\frac{P(2n-m)}{2 \cos \alpha (\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 307.$$

Oft ift es unbequem, mit den Winkelwerthen zu rechnen; dann giebt man der Formel folgende Geftalt. Es ift $\operatorname{tg} \alpha = \frac{2h}{L}$, $\operatorname{tg} \beta = \frac{2h_1}{L}$, $h - h_1 = e$ und $\cos \alpha = \frac{L}{2\lambda}$; durch Einfetzung diefer Werthe wird

$$X_m = -\frac{P\lambda(2n-m)}{2e} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 308.$$

Für die m-te Stange GH der unteren Gurtung ift E der Momentenpunkt, mithin

$$0 = D_0 (m-1) a - P (m-2) \frac{(m-1) a}{2} - Z_m z_m,$$

woraus

$$Z_m = \frac{\frac{(2n-1)}{2} P (m-1) a - P (m-2)(m-1) \frac{a}{2}}{z_m}.$$

Nun ift $z_m = \overline{AE} \sin(\alpha - \beta)$ und $\overline{AE} = \frac{(m-1) a}{\cos \alpha}$, demnach

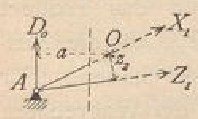
$$Z_m = \frac{P(2n-m+1)}{2 \cos \beta (\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 309.$$

Da $\cos \beta = \frac{L}{2\lambda_1}$ ift und $\operatorname{tg} \alpha$, fo wie $\operatorname{tg} \beta$ die oben angegebenen Werthe haben, fo wird auch

$$Z_m = \frac{P\lambda_1 (2n-m+1)}{2e} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 310.$$

Die Gleichungen 309 u. 310 gelten nicht für die erfte Stange der unteren Gurtung am Auflager; denn die Formel ift unter der Annahme entwickelt, dafs als Drehpunkt für die Gleichung der ftatifchen Momente derjenige Punkt der oberen Gurtung gewählt wird, welcher in die $(m-1)$-te Verticale fällt; dies würde für $m = 1$ der Punkt A fein, und für diefen Fall wäre die Gleichung der ftatifchen Momente für A als Drehpunkt nicht verwendbar, weil alle Kräfte am Bruchftück dann durch A gehen, alfo das ftatifche Moment Null haben. Man erhält Z_1 durch Aufftellung der Gleichung der ftatifchen Momente für irgend einen beliebigen Punkt, etwa O (Fig. 283). Es wird, wenn der Hebelsarm von Z_1 in Bezug auf den Drehpunkt O gleich z_2 ift,

Fig. 283.



$$Z_1 = \frac{D_0 a}{z_2} = \frac{(2n-1) P a}{2 a \cos \beta (\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta)} = \frac{(2n-1) P \lambda_1}{2e} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 311.$$

Derfelbe Werth ergiebt fich für $m = 2$, d. h. für den zweiten Stab der unteren Gurtung.

218. Spannungen in den Diagonalen.

Für die m-te Diagonale EH, wie für alle Diagonalen der linken Dachhälfte ift A der Momentenpunkt, mithin

$$0 = Y_m y_m + (m-1)\frac{P m a}{2}, \quad \text{woraus} \quad Y_m = -\frac{P m a (m-1)}{2 y_m}.$$

Da nun $y_m = \frac{m a \sin \gamma_m}{\cos \beta}$ ift, wird $Y_m = -\frac{P}{2}(m-1)\frac{\cos \beta}{\sin \gamma_m}$.

Durch einfache Umformungen erhält man

$$Y_m = -\frac{P\sqrt{1 + [(m-1)\operatorname{tg}\alpha - m \operatorname{tg}\beta]^2}}{2(\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta)} \quad \dots\dots \quad 312.$$

und durch Fortfchaffung der Winkelwerthe

$$Y_m = -\frac{P}{4e}\sqrt{L^2 + 4(me - h)^2} \quad \dots\dots \quad 313.$$

219. Spannungen in den Pfoften.

Für den m-ten Pfoften FH ift der Schnitt fchräg zu legen; als Momentenpunkt ergiebt fich A; mithin heifst die Gleichung der ftatifchen Momente für A als Drehpunkt

$$0 = V_m m a - (m-1)\frac{P m a}{2}, \quad \text{woraus} \quad V_m = \frac{P(m-1)}{2} \quad \dots \quad 314.$$

Für $m = 1$ ergiebt diefe Gleichung $V_m = 0$; der erfte Pfoften ift alfo überflüffig und kann fortbleiben.

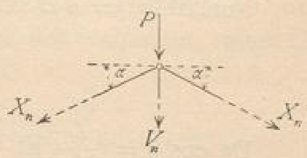
Die Gleichung gilt nicht für den mittelften Pfoften; denn wenn bei diefem der Schnitt eben fo gelegt wird, wie bei den anderen Pfoften, fo werden vier Stäbe getroffen; A ift alfo hier nicht der conjugirte Punkt. Man beftimmt die Spannung in diefem Mittelpfoften durch Aufftellung der Gleichgewichtsbedingungen für den Firftknotenpunkt (Fig. 284). Für diefen ift, wenn die Summe der lothrechten Kräfte gleich Null gefetzt wird,

$$0 = V_n + P + 2 X_n \sin\alpha, \quad \text{woraus} \quad V_n = -P - 2 X_n \sin\alpha,$$

und da nach Gleichung 307: $X_n = -\frac{P n}{2\cos\alpha(\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta)}$ ift, fo wird

$$V_n = P\left(\frac{n \operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta} - 1\right) \quad \dots\dots \quad 315.$$

Fig. 284.



Die Gleichungen 307 bis 314 gelten für die Stäbe links von der Mitte; die zur Mitte fymmetrifch liegenden Stäbe der anderen Dachhälfte werden in genau gleicher Weife beanfprucht; die Gleichungen können fofort auch für die rechte Dachhälfte angewendet werden, wenn die m von B aus gerechnet werden.

Die Betrachtung der Gleichungen 307 bis 314 ergiebt Folgendes:

a) Durch das Eigengewicht, bezw. durch gleichmäfsige Belaftung des ganzen Dachbinders erhalten alle Stäbe der oberen Gurtung Druck, alle Stäbe der unteren Gurtung Zug. Wenn die Diagonalen nach der Mitte zu fallen, erhalten diefelben bei der erwähnten Belaftung Druck, die Pfoften Zug. Man fieht leicht, dafs, wenn die Diagonalen nach der Mitte zu fteigen, diefelben bei der gleichen Belaftung gezogen, die Pfoften gedrückt werden.

b) Je gröfser β wird, defto kleiner wird $(\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta)$ und das Product $\cos\beta(\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta)$; defto gröfser werden daher fowohl X_m, wie Z_m, da die Ausdrücke, fowohl für X, wie für Z die erwähnten Werthe im Nenner haben. Für negative Werthe von β, d. h. wenn die Zuggurtung nach unten von der Wagrechten abweicht, wird

$$X'_m = -\frac{P(2n - m)}{2\cos\alpha(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta)} \quad \text{und} \quad Z'_m = \frac{P(2n - m + 1)}{2\cos\beta(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta)} \quad . \quad 316.$$

Je gröſser (abſolut genommen) die negativen Werthe von β werden, deſto gröſser werden die Nenner in den beiden Gleichungen 316, deſto kleiner alſo X'_m und Z'_m. Für den Materialaufwand zu den Gurtungen iſt es alſo günſtig, das poſitive β möglichſt klein, das negative β möglichſt groſs zu nehmen.

c) Für β = 0, d. h. wenn die untere Gurtung eine gerade Linie bildet, iſt

$$X_m = -\frac{P(2n-m)}{2 \sin \alpha} \quad \text{und} \quad Z_m = \frac{P(2n-m+1)}{2 \operatorname{tg} \alpha} \quad . \quad . \quad . \quad 317.$$

$$Y_m = -\frac{P\sqrt{1+(m-1)^2 \operatorname{tg}^2 \alpha}}{2 \operatorname{tg} \alpha}, \quad V_m = \frac{P(m-1)}{2} \quad \text{und} \quad V_n = P(n-1) \quad 318.$$

β) Ungünſtigſte lothrechte Belaſtung. — a) Gurtungsſtäbe. Jede loth- 220. Ungünſtigſte Belaſtung.
rechte Belaſtung des Trägers erzeugt (nach Art. 156, S. 150) ein poſitives Moment in allen Querſchnitten. Sind nun (Fig. 282) die in den Stäben EF, bezw. GH durch eine beliebige lothrechte Belaſtung erzeugten Spannungen X_m, bezw. Z_m und die Momente für die bezüglichen Momentenpunkte H und E gleich M_m und M_{m-1}, ſo wird

$$X_m = -\frac{M_m}{r_m} \quad \text{und} \quad Z_m = \frac{M_{m-1}}{z_m}.$$

X_m und Z_m erreichen ihre Gröſstwerthe gleichzeitig mit M_m, bezw. M_{m-1}, d. h. bei voller Belaſtung des Trägers. Die Belaſtung des ganzen Daches durch Schneedruck wird alſo für die Gurtungsſtäbe die ungünſtigſte ſein. Die dann ſich ergebenden Spannungen folgen aus den Gleichungen 307 bis 311, indem dort ſtatt P die Knotenpunktsbelaſtung durch Schnee- und Eigengewicht eingeſetzt wird.

Man erhält, wenn b der Binderabſtand iſt und q' die Bedeutung, wie in Art. 204 (S. 206) hat,

$$P = G + S = ab\,(q' + 75) \text{ Kilogr.}$$

und daraus leicht X_m und Z_m.

b) Diagonalen. Wenn die Diagonalen nach der Mitte zu fallen, ſo erzeugt eine Laſt P rechts von dem durch die Diagonale gelegten lothrechten Schnitte II

Fig. 285.

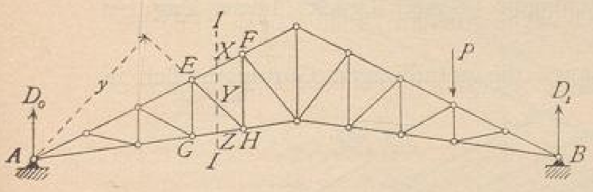
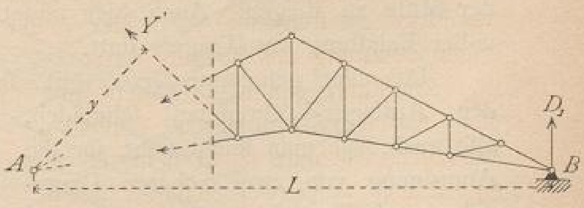


Fig. 286.



(Fig. 285) in A den Auflagerdruck D_0. Auf das Bruchſtück links vom Schnitt wirken jetzt D_0 und die drei Stabſpannungen X, Y und Z. Für Y iſt A der Momentenpunkt, und die Gleichung der ſtatiſchen Momente für A als Drehpunkt lautet $0 = Yy$, d. h. $Y = 0$.

Liegt eine Laſt P links vom Schnitte II und betrachtet man das Bruchſtück rechts vom Schnitte (Fig. 286), ſo heiſst die Gleichung der ſtatiſchen Momente in Bezug auf den Punkt A als Drehpunkt

$$0 = Y'y + D_1 L, \quad \text{woraus} \quad Y' = -\frac{D_1 L}{y}.$$

Steigen die Diagonalen nach der Mitte zu, fo ergiebt fich, wenn die Laft rechts vom Schnitte liegt, genau wie vorhin, dafs in den Diagonalen die Spannung Null entfteht. Liegt dagegen die Laft links vom Schnitt, fo folgt

$$Y'_1 = + \frac{D_1 L}{y'}.$$

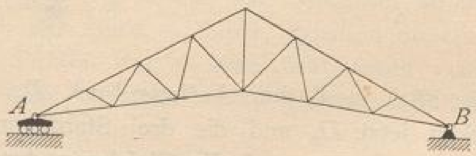
Die für die Diagonalen gefundenen Ergebniffe gelten, fo lange A der Momentenpunkt der Diagonalen ift, d. h. für alle Diagonalen links der Mitte. Für die Diagonalen rechts der Mitte ift B der Momentenpunkt, und es ergiebt fich in gleicher Weife, wie eben gezeigt, dafs in diefen jede Belaftung rechts vom Schnitte durch die betreffende Diagonale eine Druck-, bezw. Zugfpannung erzeugt, je nachdem fie nach der Mitte zu fallen oder fteigen; jede Belaftung links vom Schnitte ruft dagegen in denfelben die Spannung Null hervor.

Allgemein folgt hieraus: Jede Belaftung zwifchen dem durch die Diagonale gelegten lothrechten Schnitte und demjenigen Auflager, welches für die Diagonale nicht den Momentenpunkt bildet, hat auf die Spannung in der Diagonalen gar keinen Einflufs. Jede Belaftung zwifchen dem lothrechten Schnitt und dem Auflager, welches für die Diagonale den Momentenpunkt bildet, erzeugt in den nach der Mitte zu fallenden Diagonalen Druck, in den nach der Mitte zu fteigenden Diagonalen Zug. Die ungünftigften Belaftungsarten würden alfo diejenigen fein, bei denen die ganze Zug-, bezw. Druckabtheilung belaftet wäre. Da aber die Belaftung des übrigen Trägertheiles ohne Einflufs auf die Diagonalfpannung ift, fo kann man auch fagen: Die ungünftigfte Beanfpruchung aller Diagonalen durch lothrechte Laften findet bei voller Belaftung ftatt, und zwar werden die nach der Mitte zu fteigenden Diagonalen gezogen, die nach der Mitte zu fallenden Diagonalen gedrückt.

c) Pfoften. Für die ungünftigfte Belaftung der Pfoften ergiebt fich durch die gleiche Beweisführung, wie bei den Diagonalen, wenn die Schnitte fchräg gelegt werden: Jede Belaftung zwifchen dem durch einen Pfoften gelegten fchrägen Schnitt und dem Auflager, welches für den Pfoften nicht den Momentenpunkt bildet, erzeugt im Pfoften die Spannung Null; jede Belaftung zwifchen dem Schnitte und demjenigen Auflager, welches den conjugirten Punkt bildet, erzeugt in den Pfoften Zug, wenn die Diagonalen nach der Mitte zu fallen, Druck, wenn die Diagonalen nach der Mitte zu fteigen. Auch hier findet demnach gröfster Druck, bezw. Zug bei voller Belaftung des Trägers ftatt.

Das hier gefundene Gefetz gilt, fo lange die geradlinigen Gurtungen fich in den Auflager-Lothrechten fchneiden, alfo auch, wie man leicht fieht, für die Anordnung von zwei Scharen Diagonalen nach Fig. 287.

Fig. 287.



Demnach kann für alle Stäbe des englifchen Dachftuhles die volle Belaftung durch Schnee und Eigengewicht als ungünftigfte lothrechte Belaftung der Berechnung zu Grunde gelegt werden.

Die bezüglichen Gröfstwerthe find in Art. 217 bis 219 entwickelt.

221. Berechnung der Spannungen durch Winddruck.

γ) Belaftung durch Winddruck. Die fämmtlichen Stabfpannungen find fowohl für den Fall zu ermitteln, dafs der Winddruck jene Seite belaftet, an welcher das bewegliche Auflager liegt, als dafs er diejenige Seite belaftet, an welcher fich das fefte Auflager befindet.

Man ermittelt bei diefen beiden Belaftungsarten für jeden Stab den Momentenpunkt, das Biegungsmoment der äufseren Kräfte für diefen Punkt und daraus in bekannter Weife die Stabfpannungen. Es empfiehlt fich dabei, für die Auffuchung des Biegungsmomentes jede Knotenpunktsbelaftung in eine wagrechte und eine lothrechte Seitenkraft zu zerlegen; die Ermittelung der Hebelsarme wird dadurch wefentlich vereinfacht. In Fig. 294 u. 296 find die wagrechten und lothrechten Seitenkräfte der Winddrücke fowohl für den Fall, dafs der Wind von der Seite des beweglichen Auflagers, als auch für den Fall, dafs er von der Seite des feften Auflagers kommt, angegeben.

222. Graphifche Ermittelung der Spannungen.

2) Graphifche Ermittelung der Spannungen. Hier empfiehlt fich die *Cremona*'fche Methode am meiften, weil für die Spannungen aller Stäbe die gleichen Belaftungsarten zu Grunde gelegt werden.

α) Belaftung durch das Eigengewicht und Schneedruck. Man nimmt entweder die fämmtlichen Eigenlaften in den oberen Knotenpunkten vereinigt an oder berechnet die Eigengewichte, welche in den Knotenpunkten der unteren Gurtung angreifen, befonders. In beiden Fällen ift das Verfahren genau wie im Kapitel »Träger« (Art. 176, S. 172) gezeigt ift.

Fig. 288.

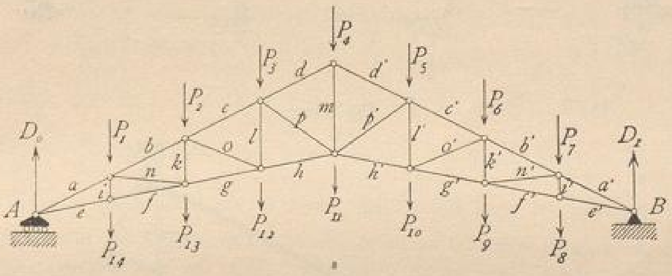
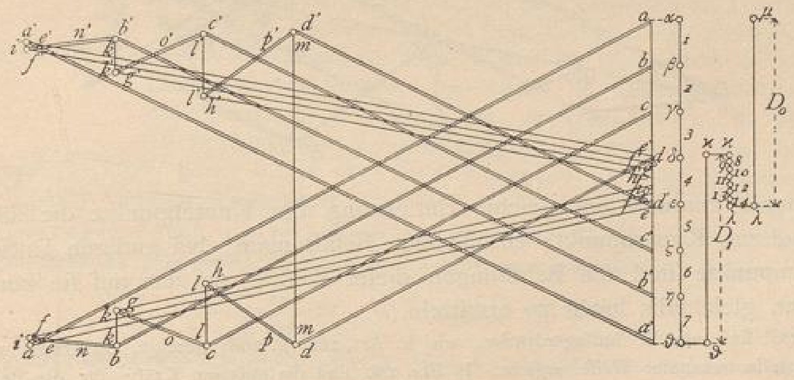


Fig. 289.



Bei der graphifchen Ermittelung in Fig. 288 u. 289 ift die zweite Annahme gemacht worden; die Eigengewichte, welche auf die Auflagerpunkte A und B kommen, find fortgelaffen, weil fie unmittelbar von den Auflagern aufgenommen werden, demnach das Syftem nicht belaften. Alsdann find die am Syftem wirkenden äufseren Kräfte in der Reihenfolge der Knotenpunkte aufgetragen: zuerft die Laften der oberen Gurtung $1, 2, 3 \ldots 7$; an den Endpunkt von 7 ift D_1 getragen; letzteres fällt mit der Kraftlinie $1, 2, 3 \ldots 7$ zufammen, wie überhaupt alle äufseren Kräfte hier in diefelbe Kraftlinie fallen. Der gröfseren Deutlichkeit halber find aber die Laften 1 bis 7, D_1, ferner die Laften der unteren Gurtung und D_0 je etwas feitwärts verfchoben aufgetragen. Wir erhalten $D_1 = \vartheta\varkappa$; *8* bis *14* $= \varkappa\lambda$; $D_0 = \lambda\mu$. μ fällt demnach eigentlich auf α, wonach fich alfo das Kraftpolygon fchliefst.

Für die Conftruction des Kräfteplanes find felbftverftändlich als Grenzpunkte der einzelnen äufseren Kräfte die Punkte auf der Linie $a\,a'$ einzuführen, welche mit den gezeichneten auf gleicher Höhe liegen. Der Kräfteplan ift nun genau, wie früher angegeben, in Fig. 289 conftruirt, worüber keine weiteren Bemerkungen nöthig find.

Die Conftruction der Spannungen durch volle Schneebelaftung ift in gleicher Weife vorzunehmen; dabei find natürlich die Belaftungen der unteren Knotenpunkte gleich Null.

β) Belaftung durch Winddruck. In Fig. 291 u. 292 find die Kräftepläne fowohl für den von der Seite des beweglichen, wie für den von der Seite des feften Auflagers kommenden Winddruck conftruirt. Auf den Auflagerpunkt und

Fig. 290.

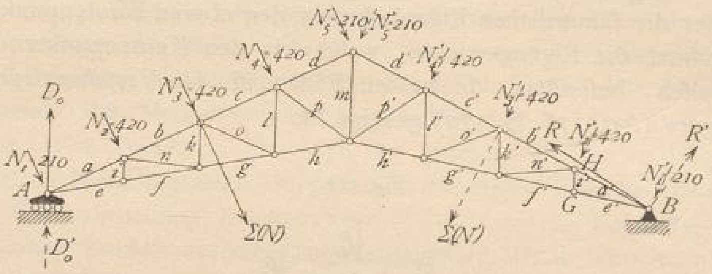
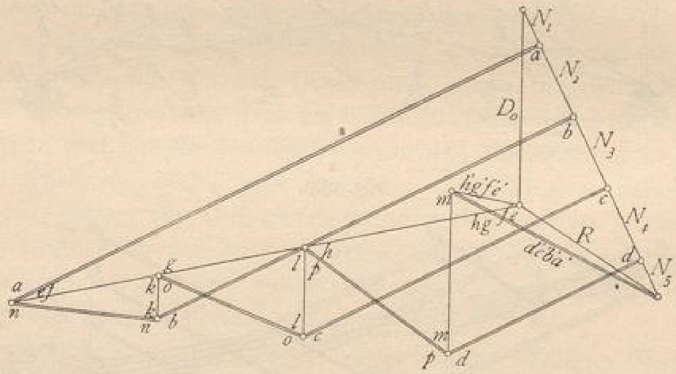


Fig. 291.



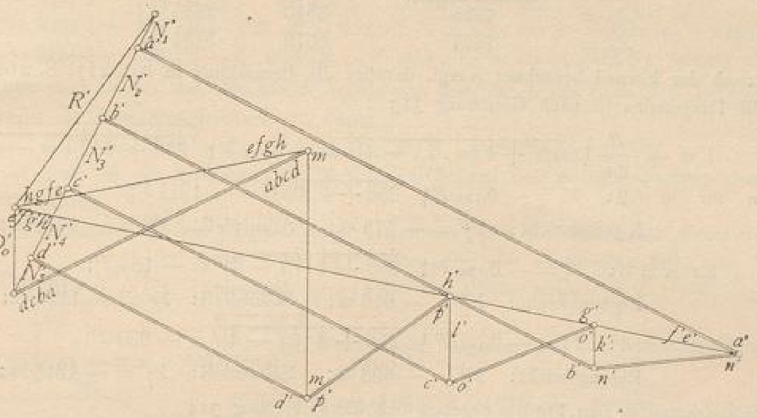
den Firftpunkt kommen bei gleicher Entfernung aller Knotenpunkte die Hälften der auf die anderen Knotenpunkte entfallenden Belaftungen; bei anderen Entfernungen der Knotenpunkte find die Belaftungen diefer Punkte aus den auf fie kommenden Dachflächen gleichfalls leicht zu ermitteln.

Zunächft find nun die Auflagerdrücke, wie in Art. 208 (S. 208) gezeigt, conftruirt, worauf fich der Kräfteplan in bekannter Weife ergiebt. In Fig. 290 find die äufseren Kräfte für die Belaftung der linken Dachhälfte ausgezogen, für die Belaftung der rechten Dachhälfte punktirt.

Es möge hier darauf aufmerkfam gemacht werden, dafs auf der nicht belafteten Seite fämmtliche Diagonalen die Spannung Null, die oberen, fo wie die unteren Gurtungsftäbe fämmtlich je gleiche Spannungen erhalten. Die Richtigkeit ergiebt fich aus folgender Betrachtung.

Wenn fich in einem unbelafteten Knotenpunkte (Fig. 293) drei Stäbe fchneiden, von denen zwei in eine gerade Linie fallen, fo ift, wenn Gleichgewicht ftattfindet, $X - X_1 + Y \cos \varphi = 0$ und $Y \sin \varphi = 0$, d. h. $Y = 0$, alfo auch $X - X_1 = 0$, d. h. $X = X_1$. Die Spannungen in den beiden in eine gerade Linie fallenden Stäben find alfo einander gleich; die Spannung im dritten Stabe ift gleich Null.

Fig. 292.

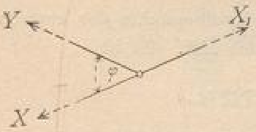


Falls der Wind, wie in Fig. 290 durch die ausgezogenen Pfeile angedeutet iſt, die linke Seite belaſtet, ſo wirkt auf den Knotenpunkt G keine äuſsere Kraft; mithin wird $e' = f'$ und $i' = 0$. Auch auf H wirkt keine äuſsere Kraft; da nun $i' = 0$ iſt, alſo als nicht vorhanden zu betrachten iſt, ſo folgt auch $n' = 0$ und $a' = b'$. Eben ſo ergiebt ſich weiter $a' = b' = c' = d'$; $e' = f' = g' = h'$; $i' = n' = k' = o' = l' = p' = 0$.

Beiſpiel. Berechnung eines engliſchen Dachſtuhles (Fig. 294) von nachfolgenden Hauptmaſsen: Stützweite $L = 16^{\text{m}}$; Firſthöhe $h = 4^{\text{m}}$; $\frac{h}{L} = \frac{1}{4}$; $a = 2^{\text{m}}$; $2n = 8$; $\operatorname{tg} \alpha = \frac{4}{8} = 0{,}5$; $h_1 = 1{,}6^{\text{m}}$; $\operatorname{tg} \beta = \frac{1{,}6}{8}$ $0{,}2$; $e = h - h_1 = 2{,}4^{\text{m}}$; $\lambda = \sqrt{4^2 + 8^2} = 8{,}94^{\text{m}}$; $\lambda_1 = \sqrt{1{,}6^2 + 8^2}$ $= 8{,}16^{\text{m}}$; $\sin \alpha = \frac{h}{\lambda} = \frac{4}{8{,}94} = 0{,}447^{\text{m}}$; $\cos \alpha = \frac{8}{\lambda} = \frac{8}{8{,}94} = 0{,}895$; $\sin \beta = \frac{h_1}{\lambda_1} = \frac{1{,}6}{8{,}16} = 0{,}196$; $\cos \beta = \frac{8}{\lambda_1} = \frac{8}{8{,}16} = 0{,}98$; die Binderweite iſt $4{,}3^{\text{m}}$; die Dachdeckung iſt Eiſenwellblech auf Winkeleiſen; das Gitterwerk beſteht aus Pfoſten und nach der Mitte zu fallenden Diagonalen. 223. Beiſpiel.

Die Belaſtungen ergeben ſich wie folgt. Auf einen Knotenpunkt kommt eine Grundfläche von $2 \cdot 4{,}3 = 8{,}6^{\text{qm}}$, eine ſchräge Dachfläche von $4{,}3 \frac{\lambda}{4} = \frac{4{,}3 \cdot 8{,}94}{4} = 9{,}61^{\text{qm}}$. Mithin iſt nach der Tabelle auf S. 20 das Eigengewicht für 1^{qm} Grundfläche, ausſchl. des Bindergewichtes, gleich 23^{kg}. Rechnet man das Gewicht des Binders für 1^{qm} Grundfläche mit 17^{kg}, ſo wird das Eigengewicht für 1^{qm} Grundfläche $= 23 + 17 = 40^{\text{kg}}$. Demnach iſt die Knotenpunktsbelaſtung durch das Eigengewicht $= 8{,}6 \cdot 40 = 344^{\text{kg}}$, durch Schneedruck $= 8{,}6 \cdot 75 = 645^{\text{kg}}$, die ſenkrechte Knotenpunktsbelaſtung durch Winddruck $= 9{,}61 \cdot 72 = 692^{\text{kg}}$, wofür abgerundet $N = 700^{\text{kg}}$ geſetzt werden ſoll. Der Firſtknotenpunkt und der Auflagerknotenpunkt erhalten nur je 350^{kg} ſenkrechte Windbelaſtung.

Fig. 293.



α) Spannungen durch die lothrechten Laſten. Für die obere Gurtung ergeben ſich die Spannungen durch das Eigengewicht, bezw. volle Schneebelaſtung aus Gleichung 308 zu

$$X_m = -\frac{P \cdot 8{,}94}{2 \cdot 2{,}4}(8 - m) = -1{,}8625\, P\,(8 - m).$$

Wir erhalten: für Eigengewicht $P = 344^{\text{kg}}$, ſonach $X_m^g = -1{,}8625 \cdot 344\,(8 - m) = -640\,(8 - m)$;

für Schneebelaſtung $P = 645^{\text{kg}}$, mithin $X_m^p = -1{,}8625 \cdot 645\,(8 - m) = -1200\,(8 - m)$.

Für $m =$	1	2	3	4
wird $X^g =$	-4480	-3840	-3200	-2560^{kg};
$X^p =$	-8400	-7200	-6000	-4800^{kg}.

Für die untere Gurtung iſt nach Gleichung 310: $Z_m = \frac{P \cdot 8{,}16}{2 \cdot 2{,}4}(9 - m) = 1{,}7\, P\,(9 - m)$.

Für Eigengewicht iſt $Z_m^g = 1{,}7 \cdot 344\,(9 - m) = 585\,(9 - m)$,

für Schneelaſt iſt $Z_m^p = 1{,}7 \cdot 645\,(9 - m) = 1096{,}5\,(9 - m)$.

Sonach wird für	$m =$	$\underbrace{1 \quad\quad 2}$	3	4
	$Z_g =$	4095	3510	2925 kg;
	$Z_p =$	7677	6579	5481 kg.

Z_1 ist nicht nach der Formel berechnet (vergl. darüber die Bemerkung in Art. 217, S. 219).

Für die Diagonalen ist nach Gleichung 313

$$Y = -\frac{P}{9{,}6}\sqrt{16^2 + 4\,(m\,.\,2{,}4 - 4)^2} = -\,0{,}104\,P\sqrt{256 + 4\,(2{,}4\,m - 4)^2}.$$

Wir erhalten für $m = 2$: $Y_2 = -\,0{,}104\,P\sqrt{256 + 4\,(0{,}8)^2} = -\,1{,}672\,P$;

Eigengewicht: $Y_2^g = -\,575$ kg; Schneelast: $Y_2^p = -\,1079$ kg;

für $m = 3$: $Y_3 = -\,0{,}104\,P\sqrt{256 + 4\,(7{,}2 - 4)^2} = -\,1{,}79\,P$;

Eigengewicht: $Y_3^g = -\,616$ kg; Schneelast: $Y_3^p = -\,1155$ kg;

für $m = 4$: $Y_4 = -\,0{,}104\,P\sqrt{256 + 4\,(9{,}6 - 4)^2} = -\,2{,}01\,P$;

Eigengewicht: $Y_4^g = -\,698$ kg; Schneelast: $Y_4^p = -\,1310$ kg;

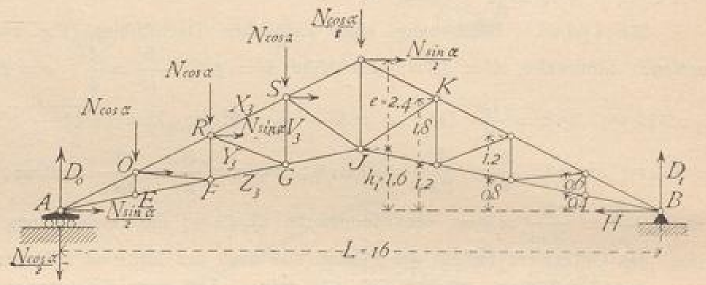
Die Spannungen in den Pfosten ergeben sich aus Gleichung 314

	Eigengewicht:	Schneelast:
für $m = 2$:	$V_2^g = 172$ kg;	$V_2^p = 323$ kg;
» $m = 3$:	$V_3^g = 344$ kg;	$V_3^p = 645$ kg.

Die Spannungen im Mittelpfosten (für $m = 4$) sind nach Gleichung 315 $V_4^g = 1950$ kg, $V_4^p = 3657$ kg.

β) Spannungen durch Windbelastung an der Seite des beweglichen Auflagers (Fig. 294). Die lothrechte Seitenkraft der Knotenpunktsbelastung ist bei den mittleren Knotenpunkten gleich $700 \cos\alpha = 700\,.\,0{,}895 = 626$ kg, beim First- und Auflagerknotenpunkt je gleich 313 kg; die wagrechten Seitenkräfte sind bezw. $700 \sin\alpha = 700\,.\,0{,}447 = 312$ kg und 156 kg. Die lothrechten Höhen der oberen Gurtungsknotenpunkte über AB sind bezw. 1 m, 2 m, 3 m und 4 m; die Knotenpunkte der unteren Gurtung liegen bezw. um 0,4 m, 0,8 m, 1,2 m und 1,6 m über der wagrechten Linie AB. Es ist

Fig. 294.



$$D_0 = \frac{(3\,.\,626 + 2\,.\,313)\,12 - (3\,.\,312 + 2\,.\,156)\,2}{16} = 1722 \text{ kg},$$

$$D_1 = \frac{(3\,.\,626 + 2\,.\,313)\,4 + (3\,.\,312 + 2\,.\,156)\,2}{16} = 782 \text{ kg},$$

$$H = 3\,.\,312 + 2\,.\,156 = 1248 \text{ kg}.$$

Für die Stäbe der oberen Gurtung ergeben sich die Gleichungen der statischen Momente: wenn E der Momentenpunkt ist,

$$0 = X_1\,.\,0{,}6 \cos\alpha + (D_0 - 313)\,.\,2 - 156\,.\,0{,}4, \text{ woraus } X_1 = -\,5132 \text{ kg};$$

für den Momentenpunkt F

$$0 = X_2\,.\,1{,}2 \cos\alpha + (D_0 - 313)\,.\,4 - 156\,.\,0{,}8 + 312\,.\,0{,}2 - 626\,.\,2, \text{ woraus } X_2 = -\,4023 \text{ kg};$$

weiters eben so für die Momentenpunkte G und J

$$0 = X_3\,.\,1{,}8 \cos\alpha + (D_0 - 313)\,.\,6 - 156\,.\,1{,}2 + 2\,.\,312\,.\,0{,}3 - 2\,.\,626\,.\,3, \text{ woraus } X_3 = -\,2916 \text{ kg};$$
$$0 = X_4\,.\,2{,}4 \cos\alpha + (D_0 - 313)\,.\,8 - 156\,.\,1{,}6 + 3\,.\,312\,.\,0{,}4 - 3\,.\,626\,.\,4, \text{ woraus } X_4 = -\,1806 \text{ kg}.$$

Die Momentengleichung für den Punkt J heisst, wenn das Bruchstück rechts von dem durch den Stab JK gelegten lothrechten Schnitte betrachtet wird,

$$0 = H\,.\,1{,}6 - D_1\,.\,8 - X_5\,.\,2{,}4 \cos\alpha, \text{ woraus } X_5 = -\,1982 \text{ kg}.$$

Dieselbe Spannung findet in sämmtlichen Stäben der oberen Gurtung rechts der Mitte statt (vergl Art. 222, S. 224).

In ähnlicher Weise erhält man für die untere Gurtung:

$$0 = (D_0 - 313)\,2 - 156 \cdot 1 - Z_1 \cdot 0{,}6 \cos\beta\,, \quad \text{woraus} \quad Z_1 = 4527\,\text{kg} = Z_2\,;$$

$$0 = (D_0 - 313)\,4 - 156 \cdot 2 - 626 \cdot 2 - 312 \cdot 1 - Z_3 \cdot 1{,}2 \cos\beta\,, \quad \text{woraus} \quad Z_3 = 3197\,\text{kg}\,;$$

$$0 = (D_0 - 313)\,6 - 156 \cdot 3 - 2 \cdot 626 \cdot 3 - 2 \cdot 312 \cdot 1{,}5 - Z_4 \cdot 1{,}8 \cos\beta\,, \quad \text{woraus} \quad Z_4 = 1857\,\text{kg}.$$

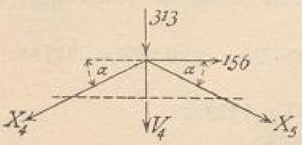
Betrachtet man wieder das Bruchstück rechts von dem durch den Stab JK gelegten lothrechten Schnitte, so heisst die Momentengleichung für Punkt K

$$0 = H \cdot 3 - D_1 \cdot 6 + Z_5 \cdot 1{,}8 \cos\beta\,, \quad \text{woraus} \quad Z_5 = 537\,\text{kg}.$$

Eben so grofs ist die Spannung in sämmtlichen Stäben der unteren Gurtung rechts der Mitte (vergl. Art. 222, S. 225).

Um die Spannungen in den Diagonalen zu bestimmen, sind die Hebelsarme dieser Spannungen für den Punkt A, welcher für alle Diagonalen links der Mitte Momentenpunkt ist, construirt. Man erhält $y_2 = 1{,}17\,\text{m}$, $y_3 = 3{,}3\,\text{m}$ und $y_4 = 5{,}8\,\text{m}$.

Fig. 295.



Die Spannungen ergeben sich aus den Momentengleichungen, wie folgt:

$$0 = Y_2 \cdot 1{,}17 + 626 \cdot 2 + 312 \cdot 1\,, \quad \text{woraus} \quad Y_2 = -1337\,\text{kg}\,;$$

$$0 = Y_3 \cdot 3{,}3 + 2 \cdot 626 \cdot 3 + 2 \cdot 312 \cdot 1{,}5\,, \quad \text{woraus} \quad Y_3 = -1422\,\text{kg}\,;$$

$$0 = Y_4 \cdot 5{,}8 + 626 \cdot 3 \cdot 4 + 3 \cdot 312 \cdot 2\,, \quad \text{woraus} \quad Y_4 = -1618\,\text{kg}.$$

Die Spannungen in den Diagonalen rechts der Mitte sind gleich Null (vergl. Art. 222, S. 225).

Für die Spannungen aller Pfosten links der Mitte ist A der Momentenpunkt; man erhält:

$$0 = 626 \cdot 2 + 312 \cdot 1 - V_2 \cdot 4\,, \quad \text{woraus} \quad V_2 = +391\,\text{kg}\,;$$

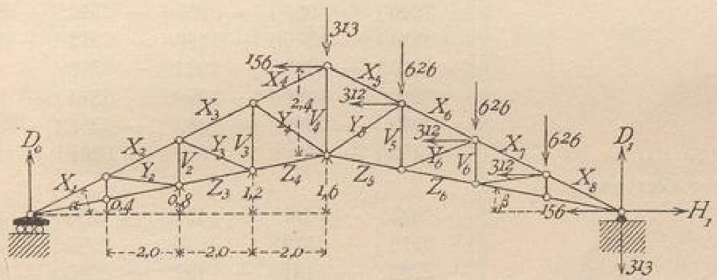
$$0 = 2 \cdot 626 \cdot 3 + 2 \cdot 312 \cdot 1{,}5 - V_3 \cdot 6\,, \quad \text{woraus} \quad V_3 = +782\,\text{kg}.$$

Für die Ermittelung der Spannung im Mittelpfosten (Fig. 295) ist die Summe der lothrechten Kräfte im Firstknotenpunkt gleich Null zu setzen; sonach

$$0 = V_4 + 313 + (X_4 + X_5) \sin\alpha = V_4 + 313 - (1806 + 1982)\,0{,}447\,, \quad \text{woraus} \quad V_4 = 1380\,\text{kg}.$$

Die Spannungen in den Pfosten rechts der Mitte sind gleich Null (vergl. Art. 222, S. 225).

Fig. 296.



γ) Spannungen durch Windbelastung von der Seite des festen Auflagers (Fig. 296). Die Belastungen der einzelnen Knotenpunkte der rechten Hälfte sind eben so grofs, wie diejenigen der linken Knotenpunkte unter β waren. Wir erhalten

$$D_0 = \frac{(3 \cdot 626 + 2 \cdot 313)\,4 + (3 \cdot 312 + 2 \cdot 156)\,2}{16} = 782\,\text{kg}\,,$$

$$D_1 = \frac{(3 \cdot 626 + 2 \cdot 313)\,12 - (3 \cdot 312 + 2 \cdot 156)\,2}{16} = 1722\,\text{kg}\,,$$

$$H_1 = 3 \cdot 312 + 2 \cdot 156 = 1248\,\text{kg}\,.$$

In der oberen Gurtung findet man

$$0 = X_1 \cdot 0{,}6 \cos\alpha + D_0 \cdot 2\,, \quad \text{woraus} \quad X_1 = -\frac{782 \cdot 2}{0{,}537} = -2912\,\text{kg}.$$

Derselbe Werth ergiebt sich nach Art. 222 (S. 225) für X_2, X_3 und X_4. Weiters ist

$$0 = X_5 \cdot 2{,}4 \cos\alpha + D_0 \cdot 8 - 156 \cdot 2{,}4\,, \quad \text{woraus} \quad X_5 = -2738\,\text{kg}\,;$$

$$0 = X_6 \cdot 1{,}8 \cos\alpha + (D_1 - 313)\,6 + (H_1 - 156)\,1{,}2 + 2 \cdot 312 \cdot 0{,}3 - 2 \cdot 626 \cdot 3, \quad \text{woraus} \quad X_6 = -3845\,\text{kg}\,;$$

$$0 = X_7 \cdot 1{,}2 \cos\alpha + (D_1 - 313)\,4 + (H_1 - 156)\,0{,}8 + 312 \cdot 0{,}2 - 626 \cdot 2, \quad \text{woraus} \quad X_7 = -4953\,\text{kg}\,;$$

$$0 = X_8 \cdot 0{,}6 \cos\alpha + (D_1 - 313)\,2 + (H_1 - 156)\,0{,}4, \quad \text{woraus} \quad X_8 = -6061\,\text{kg}.$$

In der unteren Gurtung ergiebt sich

$$0 = Z_1 \cdot 0{,}6 \cos\beta - D_0 \cdot 2\,, \quad \text{woraus} \quad Z_1 = 2660\,\text{kg}.$$

Diefelbe Gröfse haben Z_2, Z_3 und Z_4. Weiters findet man

$0 = (D_1 - 313)\,6 + (H_1 - 156)\,3 - 2 \,.\, 626 \,.\, 3 - 2 \,.\, 312 \,.\, 1{,}5 - Z_5 \,.\, 1{,}8 \cos\beta$, woraus $Z_5 = +\,3990^{\text{kg}}$;
$0 = (D_1 - 313)\,4 + (H_1 - 156)\,2 - 626 \,.\, 2 - 312 \,.\, 1 - Z_6 \,.\, 1{,}2 \cos\beta$, woraus $Z_6 = +\,5320^{\text{kg}}$;
$0 = (D_1 - 313)\,2 + (H_1 - 156)\,1 - Z_7 \,.\, 0{,}6 \cos\beta$, woraus $Z_7 = +\,6650^{\text{kg}}$.

Die Hebelsarme für die Ermittelung der Spannungen in den Diagonalen find oben angegeben; hiernach findet ftatt

$0 = Y_7 \,.\, y_2 + 312 \,.\, 1 + 626 \,.\, 2$, woraus $Y_7 = -\,1337^{\text{kg}}$;
$0 = Y_6 \,.\, y_3 + 2 \,.\, 312 \,.\, 1{,}5 + 2 \,.\, 626 \,.\, 3$, woraus $Y_6 = -\,1422^{\text{kg}}$;
$0 = Y_5 \,.\, y_4 + 3 \,.\, 312 \,.\, 2 + 3 \,.\, 626 \,.\, 4$, woraus $Y_5 = -\,1618^{\text{kg}}$.

Die Spannungen in den übrigen Diagonalen find gleich Null.

In den Pfoften find die Spannungen V_1, V_2 und V_3 gleich Null; V_4 wird durch die Auffteliung der Gleichgewichtsbedingung erhalten, welche befagt, dafs die algebraifche Summe der lothrechten, am Firftknotenpunkte wirkenden Kräfte gleich Null fein mufs, d. h. aus

$0 = V_4 + 313 + X_4 \sin\alpha + X_5 \sin\alpha = V_4 + 313 - (2912 + 2738) \,.\, 0{,}447$ wird $V_4 = 2212^{\text{kg}}$.

Ferner ift

$0 = V_5 \,.\, 6 - 2 \,.\, 626 \,.\, 3 - 2 \,.\, 312 \,.\, 1{,}5$, woraus $V_5 = 782^{\text{kg}}$;
$0 = V_6 \,.\, 4 - 626 \,.\, 2 - 312 \,.\, 1$, woraus $V_6 = 391^{\text{kg}}$.

δ) Zufammenftellung der Stabfpannungen. Für die Querfchnittsbeftimmungen find die gefundenen Spannungen in nachftehender Tabelle zufammengeftellt.

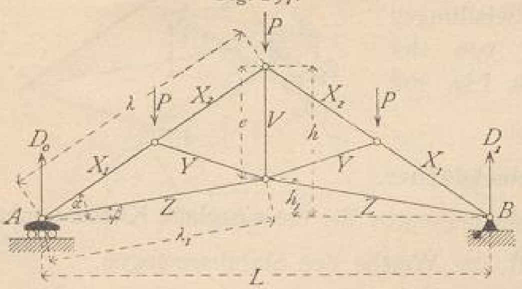
Bezeichnung des Stabes	Spannung durch					
	Eigengewicht	Schneelaft (voll belaftet)	Wind links	Wind rechts	P_0	P_1
Obere Gurtung:						
Stab Nr. 1	— 4480	— 8400	— 5132	— 2912	— 4480	— 13522
» » 2	— 3840	— 7200	— 4023	— 2912	— 3840	— 11223
» » 3	— 3200	— 6000	— 2916	— 2912	— 3200	— 8916
» » 4	— 2560	— 4800	— 1806	— 2912	— 2560	— 7712
» » 5	— 2560	— 4800	— 1982	— 2738	— 2560	— 7538
» » 6	— 3200	— 6000	— 1982	— 3845	— 3200	— 9845
» » 7	— 3840	— 7200	— 1982	— 4953	— 3840	— 12153
» » 8	— 4480	— 8400	— 1982	— 6061	— 4480	— 14461
Untere Gurtung:						
Stab Nr. 1 u. 2	+ 4095	+ 7677	+ 4527	+ 2660	+ 4095	+ 12204
» » 3	+ 3510	+ 6579	+ 3197	+ 2660	+ 3510	+ 9776
» » 4	+ 2925	+ 5481	+ 1857	+ 2660	+ 2925	+ 8141
» » 5	+ 2925	+ 5481	+ 537	+ 3990	+ 2925	+ 9471
» » 6	+ 3510	+ 6579	+ 537	+ 5320	+ 3510	+ 11899
» » 7 u. 8	+ 4095	+ 7677	+ 537	+ 6650	+ 4095	+ 14327
Diagonalen:						
im Felde 2	— 575	— 1079	— 1337	0	— 575	— 2416
» » 3	— 616	— 1155	— 1422	0	— 616	— 2577
» » 4	— 698	— 1310	— 1618	0	— 698	— 2928
» » 5	— 698	— 1310	0	— 1618	— 698	— 2928
» » 6	— 616	— 1155	0	— 1422	— 616	— 2577
» » 7	— 575	— 1079	0	— 1337	— 575	— 2416
Pfoften:						
zwifchen Feld 2 u. 3	+ 172	+ 323	+ 391	0	+ 172	+ 714
» » 3 u. 4	+ 344	+ 645	+ 782	0	+ 344	+ 1427
Mittelpfoften	+ 1950	+ 3657	+ 1380	+ 2212	+ 1950	+ 5869
zwifchen Feld 5 u. 6	+ 344	+ 645	0	+ 782	+ 344	+ 1427
» » 6 u. 7	+ 172	+ 323	0	+ 391	+ 172	+ 714

Kilogramm

b) Deutfche Dachftühle.

Der deutfche Dachftuhl kann als ein englifcher Dachftuhl mit nur einem Knotenpunkt in jeder Dachhälfte aufgefafft werden (Fig. 297); man wird demnach die in demfelben durch Eigenlaft und volle Schneelaft entftehenden Spannungen aus den Formeln für den englifchen Dachftuhl ableiten können. 224. Ermittelung der Spannungen.

Fig. 297.



Für die obere Gurtung ift in die Gleichungen 307 u. 308 ftatt $2n$ die Zahl 4 einzufetzen und für m der Reihe nach 1 und 2; alsdann erhält man

$$\left.\begin{aligned} X_1 &= -\frac{3\,P}{2\cos\alpha\,(\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta)} = -\frac{3\,P\lambda}{2\,e} \\ X_2 &= -\frac{P}{\cos\alpha\,(\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta)} = -\frac{P\lambda}{e} \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 319.$$

Die allgemeine Gleichung 309, bezw. 310 für die untere Gurtung gilt nicht für $m = 1$ (fiehe Art. 217, S. 219). Für $m = 2$ und $2n = 4$ übergeht Gleichung 309, bezw. 310 in

$$Z = \frac{3\,P}{2\cos\beta\,(\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta)} \quad \text{und} \quad Z = \frac{3\,P\lambda_1}{2\,e} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad 320.$$

Für die Diagonalen giebt die Gleichung 313 für $m = 2$

$$Y = -\frac{P}{4\,e}\sqrt{L^2 + 4\,(2\,e - h)^2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 321.$$

Für den Pfoften ift Gleichung 315 anzuwenden, und es ergiebt fich für $n = 2$

$$V = P\left(\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta} - 1\right) = P\left(2\,\frac{2\,h}{2\,h - 2\,h_1} - 1\right) = P\,\frac{h + h_1}{e} \quad . \quad 322.$$

Fig. 298.

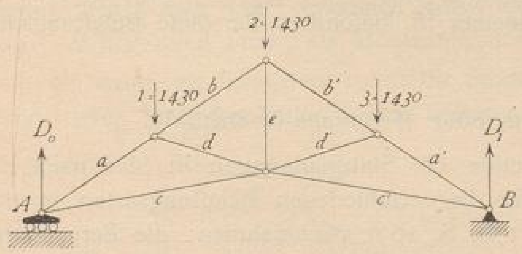


Fig. 299.

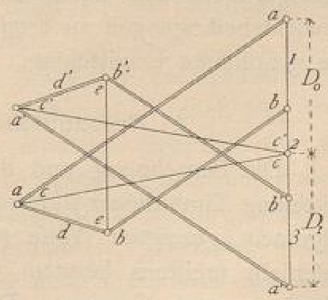


Fig. 300.

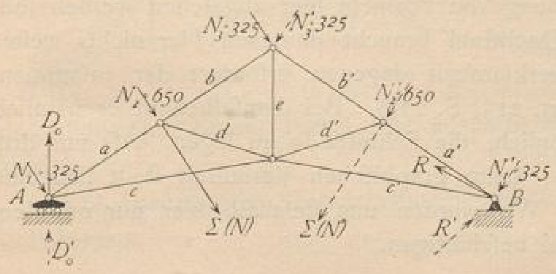
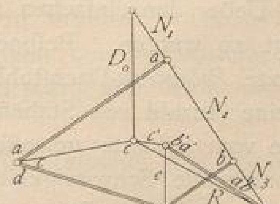
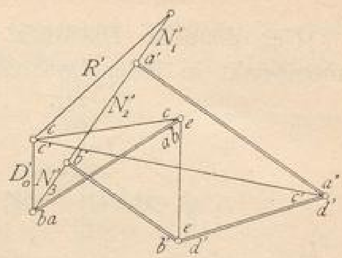


Fig. 301.



Für fchiefe Belaftungen durch Winddruck find die Spannungen, wie beim englifchen Dachftuhl gezeigt, zu ermitteln.

Fig. 302.



Die graphifche Ermittelung der Spannungen im deutfchen Dachftuhl für die Belaftungen durch Eigengewicht und Winddruck von der einen, bezw. der anderen Seite zeigen Fig. 298 bis 302.

c) Dreieckdächer.

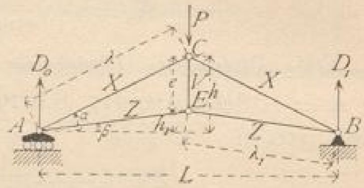
225. Ermittelung der Spannungen.

Die Aufftellung der Gleichgewichtsbedingungen für die einzelnen Knotenpunkte ergiebt (Fig. 303), da $D_0 = D_1 = \frac{P}{2}$ ift, die Werthe der Stabfpannungen.

Es ift $0 = X \cos \alpha + Z \cos \beta$ und $0 = D_0 + X \sin \alpha + Z \sin \beta$, woraus

$$\left. \begin{aligned} X &= -\frac{P}{2 \cos \alpha \, (\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta)} = -\frac{P\lambda}{2e} \\ Z &= +\frac{P}{2 \cos \beta \, (\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta)} = \frac{P\lambda_1}{2e} \end{aligned} \right\} \quad . \quad 323.$$

Fig. 303.



Sowohl X, wie Z nehmen mit wachfendem e ab; für den Materialverbrauch ift alfo ein möglichft grofses e günftig.

Ferner ift $P + V + 2\,X \sin \alpha = 0$, woraus

$$V = P \frac{\operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta} = \frac{P\,h_1}{h - h_1} = \frac{P\,h_1}{e} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 324.$$

So lange h_1 pofitiv ift, d. h. E über der Wagrechten AB liegt, ift auch V pofitiv, d. h. Zug; für $h_1 = 0$ ift auch $V = 0$, d. h. wenn AEB eine gerade Linie ift, hat die Stange CE keine Spannung; wird h_1 negativ, d. h. liegt E unter der Linie AB, fo ift V negativ, d. h. Druck.

Die Spannungen durch Windbelaftung find, wie beim englifchen Dachftuhl gezeigt, vermittels der *Ritter*'fchen Methode, bezw. durch Aufftellung der Gleichgewichtsbedingungen zu ermitteln. Bequemer ift, befonders für diefe Belaftungsart, die graphifche Ermittelung.

d) Franzöfifche, *Polonceau*- oder *Wiegmann*-Dachftühle.

226. Einfacher *Polonceau*-Dachftuhl.

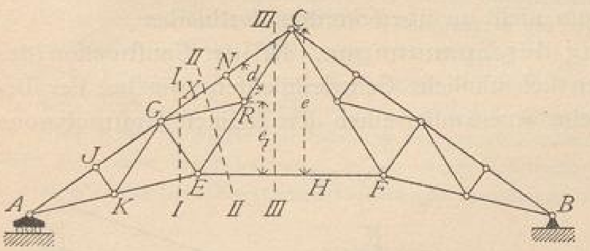
Die Berechnung und die Conftruction der Stabfpannungen ift hier nach Ermittelung fämmtlicher äufserer Kräfte für die verfchiedenen Belaftungsarten in der allgemein gezeigten Weife (fiehe Art. 170, S. 169) vorzunehmen; die Berechnung gefchieht meiftens bequem vermittels der Momentenmethode, die graphifche Ermittelung nach *Cremona*. Die Formeln für die einzelnen Stabfpannungen werden nicht einfach, fo dafs von der Aufftellung von Formeln hier abgefehen werden foll.

227. Zufammengefetzter *Polonceau*-Dachftuhl.

Ueber den einfachen *Polonceau*-Dachftuhl braucht demnach hier nichts weiter gefagt zu werden. Befondere Aufmerkfamkeit dagegen erfordert der zufammengefetzte *Polonceau*-Dachftuhl (fiehe Art. 215, S. 217). Bei demfelben ift es nämlich für eine Anzahl von Stäben nicht möglich, die Schnitte fo zu legen, dafs nur drei Stäbe vom Schnitte getroffen werden; beim graphifchen Verfahren ftellt fich eine entfprechende Schwierigkeit heraus. Wir werden uns defshalb hier nur mit dem zufammengefetzten *Polonceau*-Dachftuhl befchäftigen.

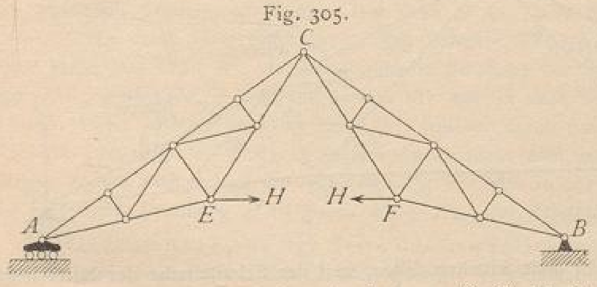
1) Berechnung der Spannungen. Bei der Momentenmethode ift der Momentenpunkt fo zu wählen, dafs für denfelben alle unbekannten Kräfte mit Ausnahme einer einzigen das Moment Null haben, mithin nur eine Unbekannte in der Gleichung verbleibt. Ift es möglich, den Schnitt fo zu legen, dafs mit Ausnahme einer einzigen fämmtliche Stabrichtungen fich in einem Punkte fchneiden, fo ift diefer Punkt als Momentenpunkt für die Ermittelung der Spannungen in demjenigen Stabe zu wählen, der nicht durch diefen Punkt geht. Trifft aber der Schnitt vier oder mehr Stäbe, von welchen fich nicht alle mit Ausnahme eines einzigen in einem Punkte fchneiden, fo mufs man eine Reihe von Stabfpannungen vorher beftimmen, um diefe nicht mehr als Unbekannte in der Momentengleichung zu haben. Man ermittele alfo zunächft die Spannungen jener Stäbe, bei denen Schnitte möglich find, die nur drei Stäbe treffen; diefe Spannungen werden dann als Bekannte eingeführt, und in den Momentengleichungen bleiben nur noch die gefuchten Unbekannten. Um z. B. die Spannungen in GN, GR, RE und EF, welche Stäbe durch den Schnitt $II\,II$ getroffen werden, zu finden, ermittele man zunächft diejenige in EF. Man fchneide nach $III\,III$; alsdann ift für EF der Firftpunkt C der Momentenpunkt und demnach die Spannung H in EF leicht zu finden. Es ift $H = \frac{M}{e}$, wenn M das Biegungsmoment der äufseren Kräfte für C ift. Nun find für den Schnitt $II\,II$ nur noch drei Unbekannte vorhanden. Um die Spannung X in GN zu beftimmen, dient die Momentengleichung für Punkt R, in welcher nur X als Unbekannte verbleibt; für die Spannung in GR ift C, für diejenige in RE ift G der conjugirte Punkt. Nachdem diefe Spannungen ermittelt find, ift für Schnitt $I\,I$ nur noch die Spannung in GE unbekannt, da auch diejenige in KE leicht gefunden wird; man kann demnach einen beliebigen, nicht auf der Richtungslinie von GE liegenden Punkt als Momentenpunkt annehmen.

Fig. 304.



Es empfiehlt fich, ftets zuerft die Spannung H im Stabe EF zu ermitteln und dann diefen Stab durch die beiden äufseren Kräfte H in E und F (nach Fig. 305) zu erfetzen. Natürlich find für jede geänderte Belaftung andere Werthe für H auszurechnen und einzuführen; alsdann werden nur noch drei Stäbe mit unbekannten Spannungen getroffen, fo dafs fich die Momentenpunkte leicht ergeben. Die Schnitte können beliebig krumm fein; das allgemeine Gefetz (vergl. Art. 4, S. 6) bleibt dabei giltig und damit auch das Verfahren.

Fig. 305.

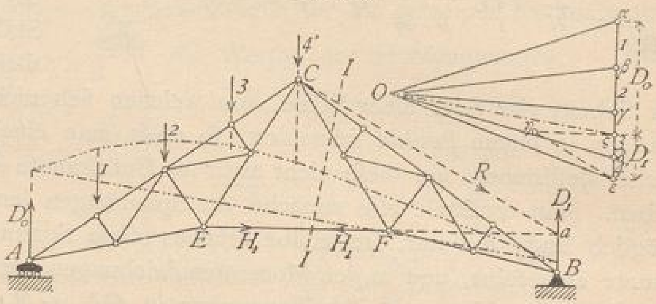


Die vorftehenden Entwickelungen gelten fowohl für lothrechte, wie für fchiefe Belaftungen.

Bei lothrechten Belaftungen ergeben fich ferner die vollen Belaftungen des ganzen Binders wiederum als die ungünftigften; für die Diagonalen allerdings in demfelben Sinne, wie oben beim englifchen Dache nachgewiefen, nämlich dafs bei voller Belaftung auch diejenigen Punkte belaftet find, deren Belaftuug in den Diagonalen die Spannung Null erzeugt. Der Nachweis ift leicht zu führen, foll aber hier, um den verfügbaren Raum nicht zu überfchreiten, fortbleiben.

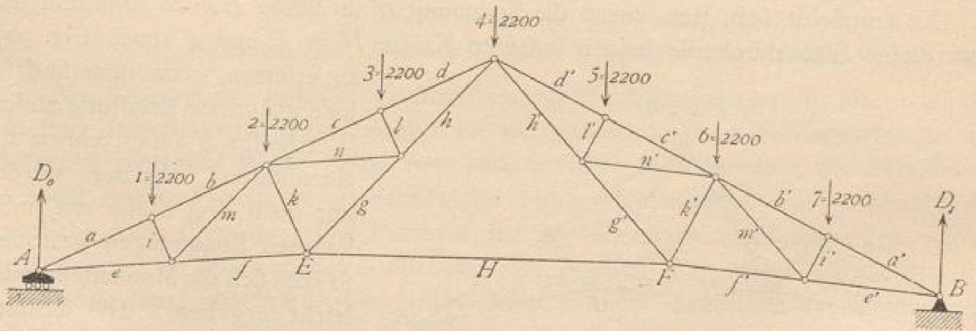
2) Graphifche Ermittelung der Spannungen. Bei der Conftruction des *Cremona*'fchen Kräfteplanes ergeben fich ähnliche Schwierigkeiten, wie bei der Berechnung. Wenn man nämlich beim Aneinanderreihen der kleinen Kraftpolygone bis zum Knotenpunkt E (Fig. 306) gekommen ift, fo find an diefem drei Stäbe mit nicht bekannten Spannungen; das Verfahren ift alfo nicht ohne Weiteres anwendbar. Die Schwierigkeit wird, ganz wie oben, dadurch befeitigt, dafs man zuerft die Spannung H des Stabes EF beftimmt und diefelbe als in E, bezw. F wirkende äufsere Kraft einführt. Dadurch erreicht man auch, dafs die Stäbe zwifchen E und C, fo wie zwifchen C und F zu Randftäben werden. Bevor demnach für den zufammengefetzten *Polonceau*-Dachftuhl der Kräfteplan gezeichnet werden kann, ift H zu ermitteln. Diefe Ermittelung erfolgt entweder auf dem Wege der Rechnung, wie foeben gezeigt, oder auch, wenn doch alles Uebrige conftruirt wird, mittels Zeichnung. Wir werden das einzufchlagende Verfahren für die verfchiedenen Belaftungsarten zeigen.

Fig. 306.



α) Belaftung durch das Eigengewicht, bezw. volle Schneelaft. Man kann H vermittels der Schnittmethode beftimmen, indem man das Seilpolygon der äufseren Kräfte für einen beliebigen Pol conftruirt, einen Schnitt fo durch den Träger legt, dafs aufser EF nur noch zwei Stäbe getroffen werden, den Angriffspunkt der Querkraft für diefen Schnitt fucht und nun, wie oben in Art. 175 (S. 171)

Fig. 307.

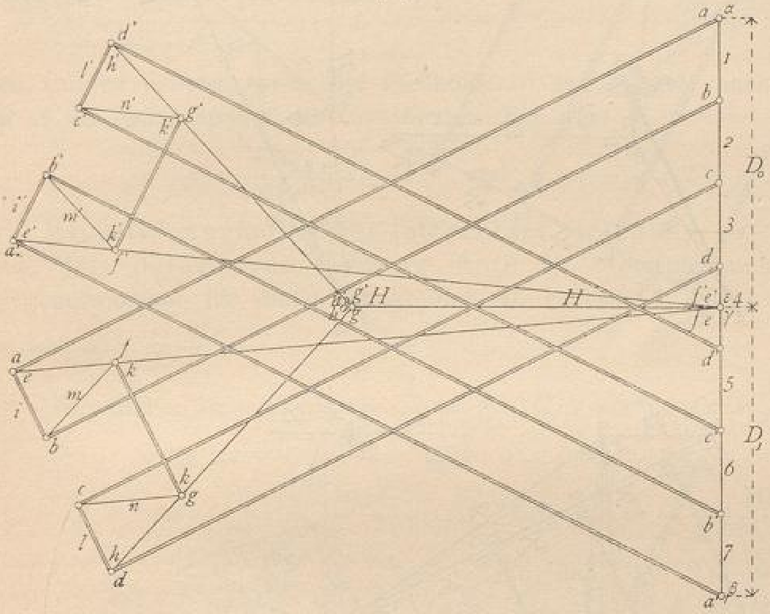


gezeigt, zerlegt. Die Kraft Q wird dann fehr weit feitwärts fallen, weil der Schnitt nahe der Mitte liegt, und wenn man fich auch durch Hilfsconftructionen helfen kann, fo dürfte doch die folgende Conftruction empfehlenswerther fein.

Die Spannung H im Stabe EF (Fig. 306) ift bei voller Belaftung (und der hier vorausgefetzten zur Mitte fymmetrifchen Dachform) offenbar genau doppelt fo grofs, als die Spannung H_1, welche in EF bei Belaftung nur der einen Dachhälfte ftattfindet. Die Gröfse diefer Spannung H_1 wird nun folgendermaſsen ermittelt. Man legt einen Schnitt II durch das Dach derart, daſs an der einen (hier der rechten) Seite deſſelben gar keine Laſten liegen; alsdann wirken auf den Theil rechts vom Schnitte nur die Spannungen der drei durchſchnittenen Stäbe und der Auflagerdruck D_1. Zwei von dieſen Stäben ſchneiden ſich im Firſtpunkte; die in ihnen wirkenden Spannungen können alſo durch eine Mittelkraft R erſetzt werden, welche durch den Firſtpunkt C geht; demnach halten die drei auf das Bruchſtück wirkenden Kräfte D_1, H_1 und die Mittelkraft R der beiden Stabſpannungen daſſelbe im Gleichgewicht, ſchneiden ſich alſo in einem Punkte. Durch den Schnittpunkt a von H_1 und D_1 geht alſo auch R; R geht aber auch durch C; die Kraft R hat demnach die Richtung Ca. Nun können wir D_1 nach den beiden bekannten Richtungen von H_1 und R zerlegen; D_1 wird mit Hilfe des Seilpolygons conſtruirt und iſt (Fig. 306) gleich $\varepsilon\zeta$. Man erhält $H_1 = \zeta\eta$ und $R = \eta\varepsilon$.

Die Kraft H, welche der Belaſtung des ganzen Daches entſpricht, iſt dann gleich $2 \times \zeta\eta$. Es bedarf wohl kaum der Erwähnung, daſs in obiger Conſtruction als Belaſtung des Firſtknotenpunktes nur die Hälfte der anderen Knotenpunktsbelaſtungen einzuführen iſt. Die Laſt im Firſtknotenpunkte iſt deſshalb hier mit 4' bezeichnet.

Fig. 308.



Der Kräfteplan iſt nun zu conſtruiren, indem ſtatt des Stabes EF die äuſseren Kräfte H in den Punkten E und F wirkend eingeführt werden. Man trage die Laſten *1*, *2* ... *6*, *7* an einander (Fig. 308); auf *7* folgt $D_1 = \beta\gamma$, dann die Kraft H im Punkte F gleich $\gamma\delta$ und H im Punkte E gleich $\delta\varepsilon$; ε fällt mit γ zuſammen. Endlich iſt an ε der Auflagerdruck $D_0 = \gamma\alpha$ anzutragen, womit ſich das Kraftpolygon ſchlieſst. Nun iſt der Kräfteplan nach dem in Art. 176 (S. 172) angegebenen Verfahren in Fig. 308 conſtruirt, wobei vom Knotenpunkt A ausgegangen iſt.

Für die Belaſtung nur der einen Dachhälfte mit Schnee iſt H_1, wie oben gezeigt, zu ermitteln und alsdann der Kräfteplan ohne Schwierigkeit zu verzeichnen.

Wenn der Dachbinder unſymmetriſch iſt, ſo kann das gezeigte Verfahren mit geringen Abänderungen gleichfalls Verwendung finden. Die Kraft H im Stabe EF iſt die Summe der Spannungen H_{I} und H_{II}, welche durch links bezw. rechts vom Schnitte II liegende Laſten hervorgerufen werden. Man ermittele zuerſt den Theil H_{I}, welcher durch die Belaſtung nur der Knotenpunkte links vom Schnitt II erzeugt wird, genau wie in Fig. 306 gezeigt iſt; nur iſt auch im Firſtknotenpunkte die volle Belaſtung einzuſetzen. Dann beſtimme man den Theil H_{II}, welcher durch die Belaſtung nur der Knotenpunkte rechts vom Schnitt hervorgerufen wird; zu dieſem Zweck ſuche man den durch dieſe Belaſtung erzeugten Auflagerdruck D_0 auf und zerlege ihn, wie oben D_1, hier alſo in H_{II} und eine durch C gehende Kraft. Die in EF auftretende Spannung H iſt gleich $H_{\mathrm{I}} + H_{\mathrm{II}}$; der Kräfteplan kann nun leicht gezeichnet werden.

β) Windbelaſtung von der Seite des beweglichen Auflagers. Die Ermittelung der Auflagerdrücke wird, wie in Art. 208 (S. 208) gezeigt, vorgenommen; die Gröſse der Kraft H (im Stabe EF, Fig. 309) ergiebt ſich wieder durch Betrachtung des Trägertheiles an derjenigen Seite des Schnittes II, an welcher die Winddrücke nicht wirken. Nachdem ſodann die H als äuſsere Kräfte eingeführt ſind, iſt der Kräfteplan in gewöhnlicher Weiſe zu zeichnen. Die Conſtruction iſt in Fig. 309 vorgenommen.

γ) Winddruck von der Seite des feſten Auflagers. Fig. 310 zeigt die Conſtruction des Kräfteplanes für dieſen Fall; nach dem Vorſtehenden iſt er ohne beſondere Erklärung verſtändlich.

Fig. 309.

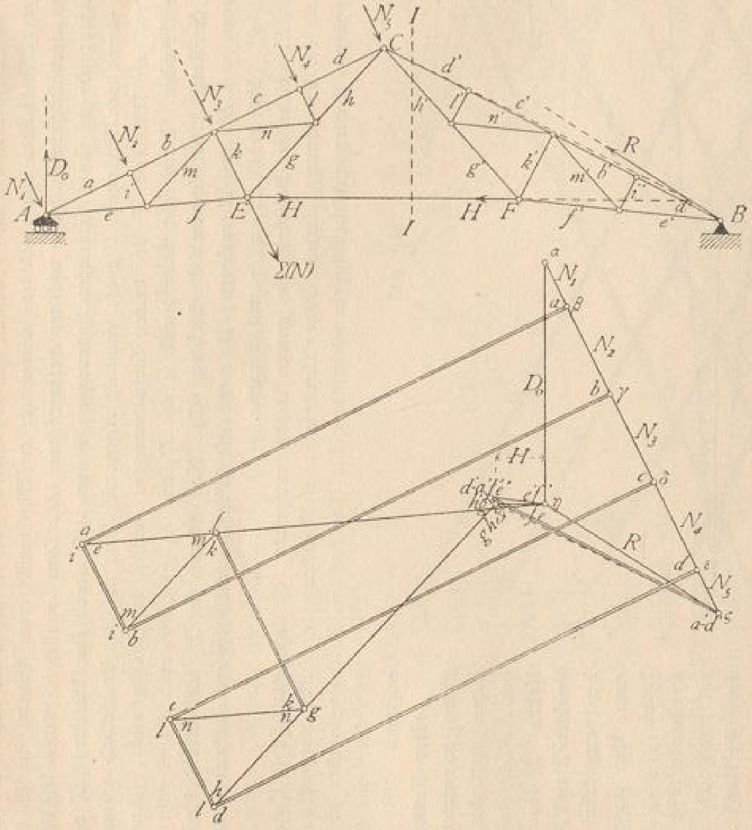
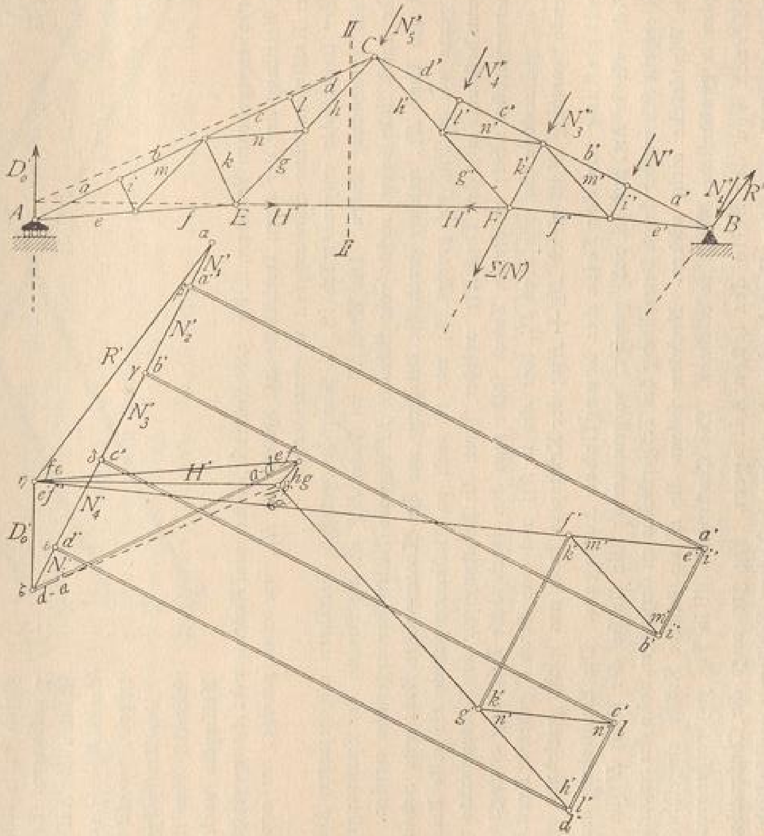


Fig. 310.

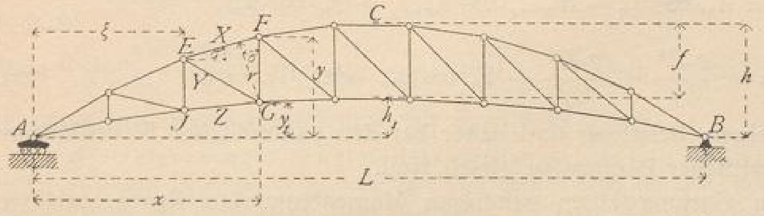


e) Sicheldächer.

Die Gurtungen können bei den Sicheldächern nach beliebigen krummen Linien geformt fein; gewöhnlich find beide Gurtungen Vielecke, welche Parabeln oder Kreifen eingefchrieben find. Die Beftimmung der Auflagerdrücke ift im Vorhergehenden gezeigt worden; die Stabfpannungen ergeben fich durch Rechnung oder Conftruction ohne Schwierigkeit. Hier foll nur die Gefetzmäfsigkeit der Spannungsänderungen für das parabolifche Sicheldach und für lothrechte Belaftungen gezeigt werden.

228. Form der Dachbinder.

Fig. 311.



Die Gleichungen der beiden Curven heifsen, wenn die Pfeilhöhen h und h_1 find, nach Art. 189 (S. 191) für A als Anfangspunkt der Coordinaten (Fig. 311)

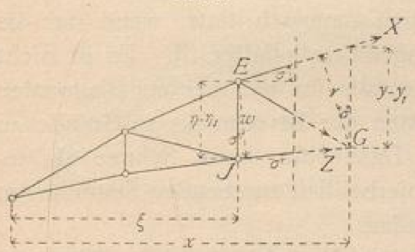
$$y = \frac{4\,h}{L^2}\,(L\,x - x^2) \quad \text{und} \quad y_1 = \frac{4\,h_1}{L^2}\,(L\,x - x^2) \quad . \quad . \quad . \quad 325.$$

1) Stabfpannungen bei lothrechter Belaftung. α) Für den Stab EF (Fig. 311) der oberen Gurtung ift G der Momentenpunkt, und wenn das Biegungsmoment für diefen Punkt mit M_x bezeichnet wird, ift $X\,r + M_x = 0$, woraus $X = -\frac{M_x}{r}$.

229. Ermittelung der Spannungen durch lothrechte Belaftung.

Nun ift $r = (y - y_1)\cos\sigma = \frac{4}{L^2}(h - h_1)(L\,x - x^2)\cos\sigma = \frac{4}{L^2}f\,(L\,x - x^2)\cos\sigma$;

Fig. 312.



alfo

$$X\cos\sigma = -\frac{M_x\,L^2}{4\,f\,(L\,x - x^2)} \quad . \quad 326.$$

Für den Stab JG der unteren Gurtung (Fig. 312) ift E der Momentenpunkt, und wenn das Biegungsmoment für diefen Punkt mit M_ξ bezeichnet wird, fo ift $Z = \frac{M_\xi}{w}$. Nun ift

$$w = (\eta - \eta_1)\cos\sigma' = \frac{4}{L^2}f\,(L\,\xi - \xi^2)\cos\sigma',$$

d. h.

$$Z\cos\sigma' = \frac{M_\xi\,L^2}{4\,f\,(L\,\xi - \xi^2)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 327.$$

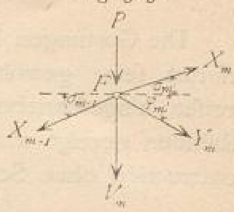
Aus den Gleichungen 326 u. 327 folgt:

a) Für volle, gleichmäfsig über die wagrechte Projection vertheilte Belaftung p auf die Längeneinheit ift $M_x = \frac{p}{2}(L\,x - x^2)$ und $M_\xi = \frac{p}{2}(L\,\xi - \xi^2)$, alfo

$$X\cos\sigma = -\frac{p\,L^2}{8\,f} \quad \text{und} \quad Z\cos\sigma' = \frac{p\,L^2}{8\,f}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 328.$$

d. h. die wagrechten Seitenkräfte der Gurtungsfpannungen find bei der angegebenen Belaftungsart in beiden Gurtungen conftant, und zwar gleich dem Gröfstmomente, dividirt durch die Mittenhöhe der Sichel. Bei der Parabel find innerhalb der Grenzen, welche bei den Dächern vorkommen, $\cos \sigma$ und $\cos \sigma'$ nahezu conftant. Das foeben gefundene Ergebnifs ftimmt mit dem in Art. 190 (S. 191) für die Parabelträger ermittelten überein. Durch Aufftellung der Gleichgewichtsbedingung für einen Knotenpunkt der oberen Gurtung, etwa F, ergiebt fich ferner (Fig. 313)

Fig. 313.



$$0 = X_m \cos \sigma_m - X_{m-1} \cos \sigma_{m-1} + Y_m \cos \varphi_m ,$$

d. h.

$$0 = -\frac{p\,L^2}{8f} + \frac{p\,L^2}{8f} + Y_m \cos \varphi_m \quad \text{oder} \quad Y_m = 0 \; . \quad . \quad . \quad . \qquad 329.$$

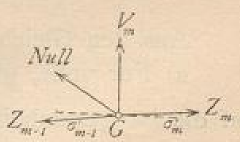
Für die angegebene Belaftung find daher bei den parabolifchen Sicheldächern die Spannungen fämmtlicher Diagonalen gleich Null.

b) Alle zu den Gurtungsftäben gehörigen Momentenpunkte liegen zwifchen den lothrechten Linien der Auflager A und B (Fig. 311); für alle diefe Punkte find die Biegungsmomente bei lothrechter Belaftung pofitiv (fiehe Art. 156, S. 150); mithin erzeugt jede lothrechte Belaftung in den Stäben der oberen Gurtung Druck, in denjenigen der unteren Gurtung Zug. Gröfster Druck, bezw. Zug für lothrechte Belaftung wird demnach in allen Stäben bei voller Belaftung des ganzen Dachbinders ftattfinden.

β) Für die Spannungen in den Diagonalen ergiebt fich nach demfelben Verfahren, welches in Art. 191 (S. 192) angewendet ift, um die Beanfpruchungsart der Diagonalen des Parabelträgers zu ermitteln: Jede Belaftung zwifchen dem durch eine Diagonale gelegten lothrechten Schnitte und jenem Auflager, nach welchem die Diagonale zu fällt, erzeugt Zug in derfelben; jede Belaftung zwifchen dem Schnitte und demjenigen Auflager, nach welchem die Diagonale fteigt, erzeugt in derfelben Druck. Gröfster Druck, bezw. Zug finden demnach ftatt, wenn nur die Druck-, bezw. Zugabtheilung der betreffenden Diagonalen belaftet ift. Es ift nicht nöthig, bei einem Dache diefe verfchiedenen, jedenfalls für die meiften Diagonalen überhaupt wohl nicht vorkommenden Belaftungsarten der Berechnung zu Grunde zu legen; es genügt eine Belaftung nur der einen Dachhälfte durch Schnee als ungünftigfte lothrechte Belaftung einzuführen. Die hierbei fich ergebenden Spannungen find mittels der *Ritter*'fchen Methode leicht zu finden.

γ) Bezüglich der Spannungen in den Pfoften ergiebt fich, wie oben, folgendes Gefetz: Gröfster Druck, bezw. Zug findet in einem Pfoften bei der Belaftung ftatt, welche in derjenigen Diagonalen den gröfsten Zug, bezw. Druck erzeugt, die mit dem Pfoften in einem Knotenpunkt der nicht belafteten Gurtung zufammentrifft. Auch hier genügt es, als zufällige lothrechte Belaftungen nur die Belaftung des ganzen Daches und diejenige der einen Dachhälfte anzunehmen.

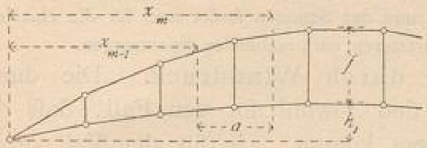
Fig. 314.



Bei Belaftung des ganzen Dachbinders mit der gleichmäfsig über die wagrechte Projection vertheilten Belaftung p ergiebt fich die Spannung aller Pfoften durch Aufftellung der Gleichgewichtsbedingung für einen Knotenpunkt der unteren Gurtung. Es ift (Fig. 314), da die Spannung in der Diagonalen alsdann gleich Null ift,

$$0 = V_m + Z_m \sin \sigma'_m - Z_{m-1} \sin \sigma'_{m-1} \quad \text{und} \quad 0 = V + \frac{p\,L^2}{8f} (\operatorname{tg} \sigma'_m - \operatorname{tg} \sigma'_{m-1}).$$

Fig. 315.



Wird (mit geringem Fehler) die Curve als ftetig gekrümmt angefehen und werden die Richtungen der Stäbe als parallel zu den in den Mitten der unteren Gurtungsftäbe an die Parabel gelegten Tangenten eingeführt, fo ift

$$\operatorname{tg} \sigma'_m = \frac{4 h_1}{L^2} (L - 2 x_m) \quad \text{und} \quad \operatorname{tg} \sigma'_{(m-1)} = \frac{4 h_1}{L^2} (L - 2 x_{m-1}),$$

fonach

$$0 = V + \frac{p L^2}{8 f} \frac{4 h_1}{L^2} 2 (x_{m-1} - x_m) = V - \frac{p h_1}{f} a, \text{ woraus } V = \frac{p h_1 a}{f}. \qquad 330.$$

V nimmt ab, wenn h_1 abnimmt; für $h_1 = 0$ ift $V = 0$.

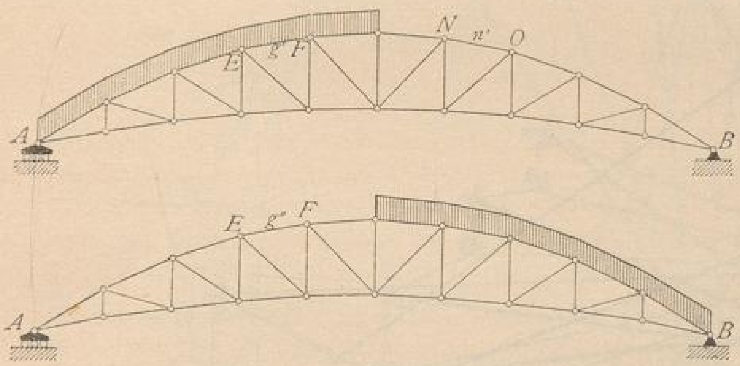
230. Ermittelung der Spannungen durch einfeitige Schneelaft.

2) Stabfpannungen bei einfeitiger Schneebelaftung. Bezüglich der Belaftung durch einfeitige Schneelaft ift Folgendes zu beachten. Man braucht nicht für beide Belaftungsarten, diejenige des ganzen Daches und diejenige der einen Dachhälfte, die Spannungen zu berechnen; vielmehr genügt für fymmetrifch zur mittleren Lothrechten angeordnete Conftruction die Kenntnifs der Spannungen bei einfeitiger Belaftung, um diejenigen zu erhalten, welche bei voller Belaftung ftattfinden, und gleichzeitig zu ermitteln, welche Belaftungsart die gefährlichere ift. Die Belaftung der linken Dachhälfte erzeugt etwa (Fig. 316) im Stabe EF die Spannung g'; die Belaftung der rechten Dachhälfte erzeugt in demfelben Stabe die Spannung g''. Die volle Belaftung hat offenbar im Stabe EF die Spannung $g' + g''$ zur Folge. Liegt nun NO genau fymmetrifch mit EF, fo wird die Spannung n' in NO bei der erfteren Belaftungsart genau fo grofs fein, wie g''. Es ift aber

$$g_{total} = g' + g'' = g' + n'.$$

Die durch die Belaftung des ganzen Daches in einem Stabe entftehende Spannung ift alfo gleich der Summe derjenigen Spannungen, die durch Belaftung der einen Dachhälfte in dem betrachteten Stabe und in dem fymmetrifch zur Mitte liegenden Stabe entftehen. Wenn die fymmetrifch zur Mitte liegenden Stäbe bei der Belaftung einer Dachhälfte in gleichem Sinne beanfprucht werden, alfo beide Zug oder beide Druck erhalten, fo ift die Summe diefer Spannungen gröfser, als jede einzelne, d. h. die volle Belaftung des Daches ift ungünftiger, als die einfeitige. Werden beide Stäbe in entgegengefetztem Sinne beanfprucht, fo ift die Summe beider kleiner, als die gröfsere von beiden, demnach die einfeitige Belaftung als ungünftigere einzuführen. Dabei ift zu beachten, dafs in letzterem Falle beide Stabfpannungen als ungünftige einzuführen find, da nicht nur die Maximal-, fondern auch die Minimalfpannungen von Wichtigkeit find. Wenn ein Mittelfeld mit zwei fich kreuzenden Zugdiagonalen vorhanden ift, fo gilt die vorftehende Entwickelung ebenfalls; jedoch ift ftets nur diejenige Diagonale des Mittelfeldes als vorhanden zu betrachten, welche bei der betreffenden Belaftung Zug erleidet.

Fig. 316.



Was foeben vom Sicheldach angegeben wurde, gilt felbftverftändlich von jedem aus zwei fymmetrifchen Hälften zufammengefetzten Dachftuhl.

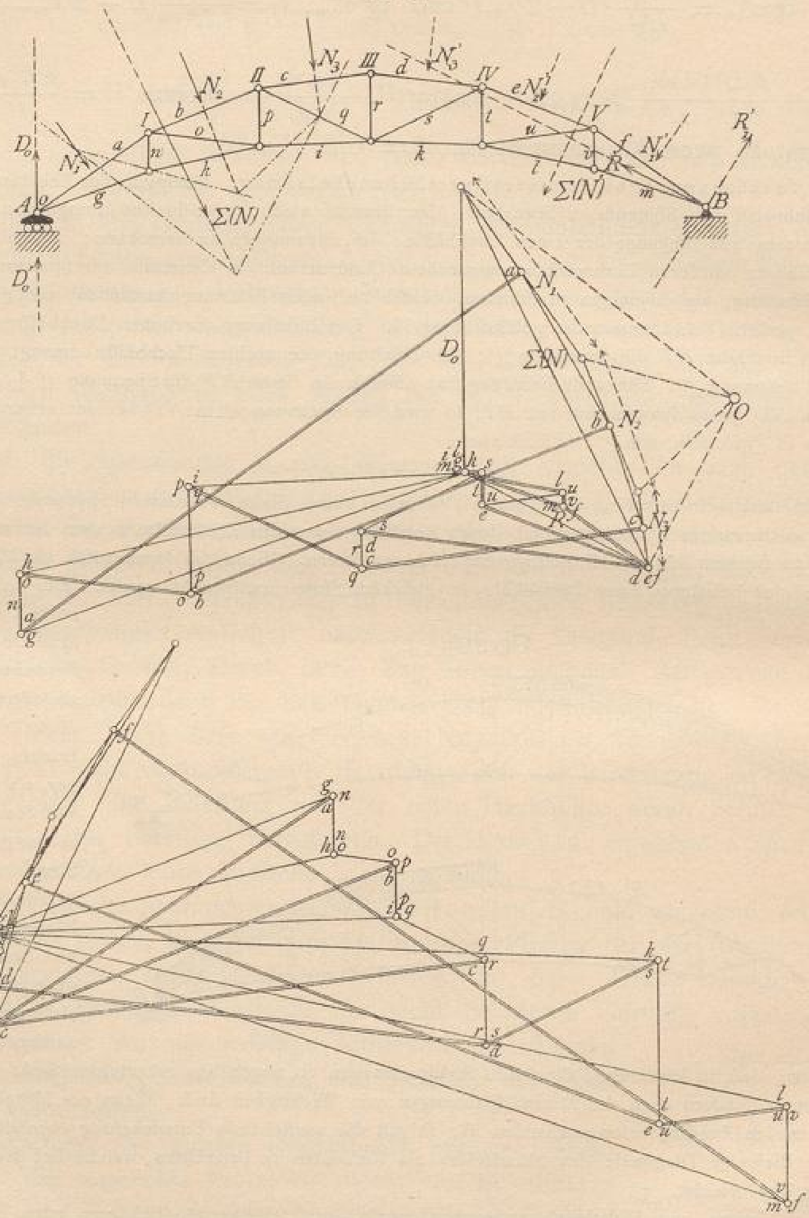
Falls der Binder nicht fymmetrifch zur lothrechten, durch den Firft gelegten Linie angeordnet ift, fo ermittele man nach einander die Spannungen, welche in fämmtlichen Stäben durch einfeitige Schneebelaftung der links vom Firft gelegenen Dachfeite hervorgerufen werden, fodann diejenigen, welche durch einfeitige Schneebelaftung der rechts vom Firft gelegenen Dachfeite erzeugt werden. Die durch volle

Schneebelaſtung des ganzen Daches hervorgerufenen Spannungen ſind gleich den Summen der bezüglichen Einzelſpannungen. Durch Vergleich der Einzelſpannungen und der Summen findet man für die einzelnen Stäbe leicht die ungünſtigſten Schneebelaſtungen und die letzteren entſprechenden Spannungen.

231. Ermittelung der Spannungen durch Winddruck.

3) Stabſpannungen bei Belaſtung durch Winddruck. Die durch Windbelaſtung entſtehenden Stabſpannungen ſind ſowohl für den Fall, daſs der Wind von der Seite des beweglichen Auflagers kommt, wie für den Fall zu er-

Fig. 317.



mitteln, daſs der Wind von der Seite kommt, an welcher das feſte Auflager liegt. Die Berechnung iſt nach Früherem leicht durchzuführen.

232. Gegendiagonalen.

4) Gegendiagonalen. Aus dem Belaſtungsgeſetz für die Diagonalen geht hervor, daſs jede Diagonale ſowohl Zug, wie Druck erhalten kann; will man dies

Fig. 318.

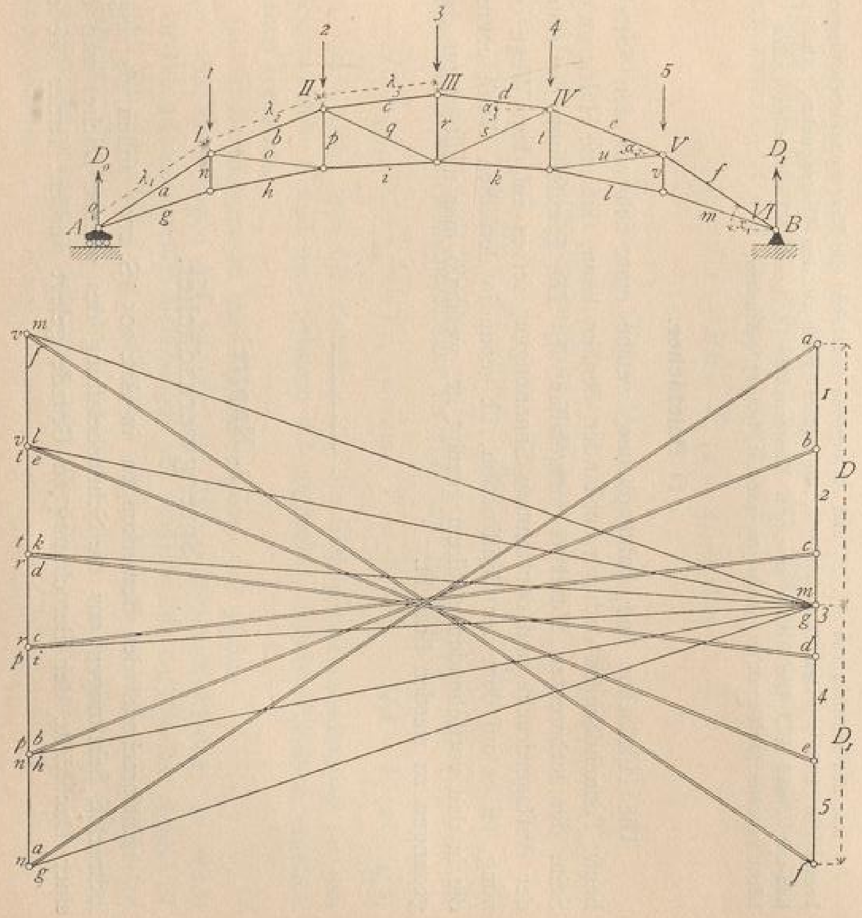
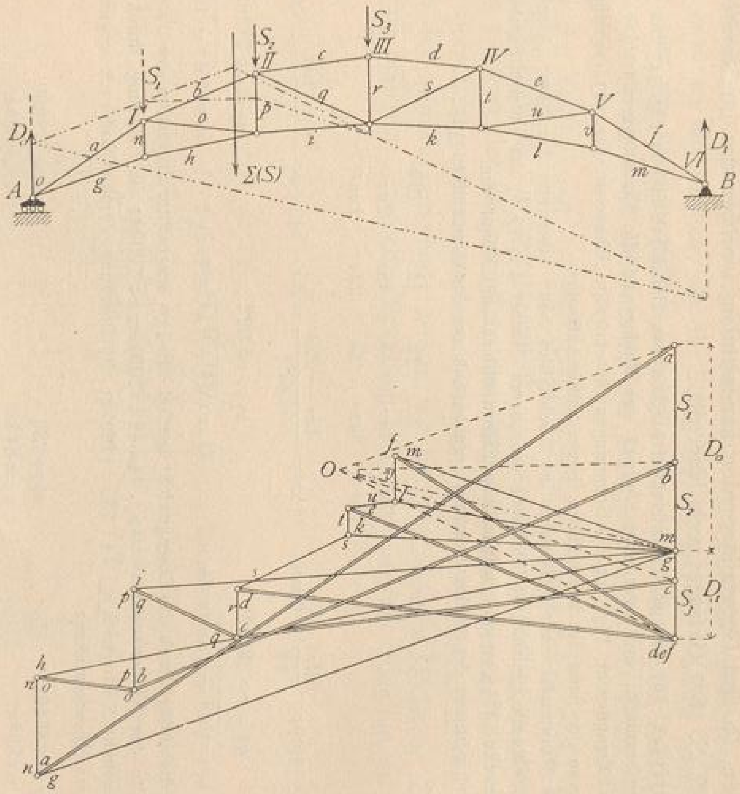


Fig. 319.



vermeiden, fo find Gegendiagonalen anzuwenden, worüber das im Kapitel »Träger« (Art. 186, S. 187) Gefagte auch hier gilt.

233. Beifpiel. Beifpiel. Für das nachftehend näher befchriebene Sicheldach find in Fig. 317 bis 319 die Stabfpannungen ermittelt, und zwar zeigt Fig. 318 den Binder und die Spannungsermittelung für Belaftung durch das Eigengewicht, Fig. 319 die Spannungen für einfeitige Schneelaft, Fig. 317 diejenigen für Windbelaftung von der Seite des beweglichen, bezw. feften Auflagers.

Die Hauptmafse und Belaftungen des Dachftuhles find: Stützweite $L = 24^{m}$; Anzahl der Felder gleich 6; Feldweite gleich 4^{m}; Pfeilhöhe der oberen Parabel $h = 4{,}8^{m}$, der unteren Parabel $h_1 = 2{,}4^{m}$; die Binderweite ift $4{,}2^{m}$; die Dachdeckung Eifenwellblech auf Eifenpfetten.

Die Ordinaten der beiden Parabeln ergeben fich aus den Gleichungen 325:

für x =	4	8	12	16	20^{m}
ift y =	2,67	4,27	4,8	4,27	$2{,}67^{m}$,
y_1 =	1,33	2,13	2,4	2,13	$1{,}33^{m}$.

Ferner ift $\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{2{,}67}{4} = 0{,}6675$, $\operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{4{,}27 - 2{,}67}{4} = 0{,}4$, $\operatorname{tg} \alpha_3 = \frac{4{,}8 - 4{,}27}{4} = 0{,}1325$;

$$\alpha_1 = \backsim 33^{\circ}40', \qquad \alpha_2 = \backsim 22^{\circ}, \qquad \alpha_3 = \backsim 7^{\circ}30';$$

$$\lambda_1 = \sqrt{4^2 + 2{,}67^2} = 4{,}81^{m}, \qquad \lambda_2 = \sqrt{4^2 + 1{,}6^2} = 4{,}31^{m}, \qquad \lambda_3 = \sqrt{4^2 + 0{,}53^2} = 4{,}04^{m}.$$

Die Belaftung durch das Eigengewicht beträgt für 1^{qm} wagrechter Projection der Dachfläche 42^{kg}, demnach für den Knotenpunkt $G = 4{,}0 \cdot 4{,}2 \cdot 42 = 705{,}6 = \backsim 700^{kg}$; die Belaftung durch Schnee für den Knotenpunkt S ift gleich $4 \cdot 4{,}2 \cdot 75 = 1260^{kg}$; die Belaftung durch Winddruck ergiebt fich nach Gleichung 7 folgendermafsen:

$$\text{für } \alpha_1 = 33^{\circ}40', \qquad \alpha_2 = 22^{\circ}, \qquad \alpha_3 = 7^{\circ}30'$$
$$\nu = 83^{kg}, \qquad \nu = 64^{kg}, \qquad \nu = 36^{kg},$$
$$N = 4{,}2\,\lambda_1 \cdot 83 = \backsim 1680^{kg}, \quad N_2 = 4{,}2\,\lambda_2 \cdot 64 = \backsim 1160^{kg}, \quad N_3 = 4{,}2\,\lambda_3 \cdot 36 = \backsim 610^{kg}.$$

Aus den Werthen von N_1, N_2 und N_3 ergeben fich leicht die Knotenpunktsbelaftungen. Von N_1 kommt die Hälfte auf den Knotenpunkt o, die andere Hälfte auf den Knotenpunkt I; ähnlich verhält es fich mit II und III. Die beiden in einem Knotenpunkte (I, bezw. II) wirkenden Laften find alsdann leicht zu einer Mittelkraft zu vereinigen, wie in Fig. 317 gefchehen.

f) Pultdächer.

234. Spannungen. Die Pultdächer find Balkendächer, welche man fich aus den Satteldächern, bezw. Tonnendächern dadurch entftanden denken kann, dafs die Hälfte an der einen Seite der lothrechten Mittelaxe fortgelaffen ift. Die Ermittelung der Belaftungen, der Auflagerdrücke und der inneren Spannungen, fei es auf dem Wege der Rechnung, fei es auf dem der Conftruction, ift genau in derfelben Weife vorzunehmen, die in den vorftehenden Artikeln gezeigt ift, wefshalb hier nicht weiter darauf eingegangen zu werden braucht.

3. Kapitel.

Sprengwerksdächer.

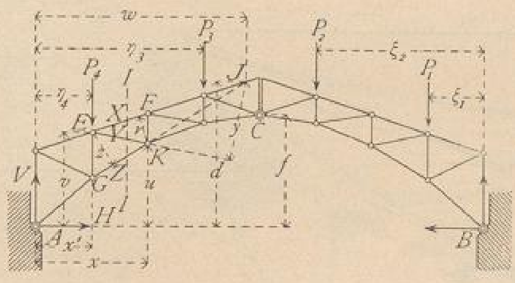
235. Ungünftigfte Belaftung. Entfprechend den Bemerkungen in Art. 205 (S. 207) follen als ungünftigfte lothrechte Belaftungen nur die Schneebelaftung des ganzen Daches und diejenige einer Dachhälfte der Berechnung zu Grunde gelegt werden, ferner die einfeitige

Windbelaftung als ungünftigfte fchiefe Belaftung. Bei der Schneebelaftung ift fodann für jeden Stab zu unterfuchen, ob die Belaftung des ganzen Daches oder diejenige der einen oder der anderen Hälfte die ungünftigere ift. Zu diefem Zwecke genügt nach Art. 230 (S. 237) die Beftimmung der Stabfpannungen bei einfeitiger Schneebelaftung.

Aus der Gröfse und Art der Beanfpruchungen fämmtlicher Stäbe bei diefer Belaftung find alsdann, wie dort gezeigt ift, die ungünftigften lothrechten Belaftungen, fo wie die Gröfsen der ungünftigften Spannungen leicht zu ermitteln.

Die Berechnung der Spannungen erfolgt, wenn die Auflagerkräfte ermittelt find, nach der Momentenmethode genau, wie bei den anderen Dächern. Es handle fich für eine beliebige lothrechte Belaftung (Fig. 320) um die Spannungen X, Y, Z 236. Berechnung der Spannungen.

Fig. 320.



in den Stäben EF, EK, GK. Für EF ift K der Momentenpunkt, und für das Trägerftück zwifchen A und dem Schnitte II wird

$$0 = Vx - Hu - P_4 (x - \eta_4) + Xr,$$

woraus

$$X = -\frac{1}{r} [Vx - Hu - P_4 (x - \eta_4)].$$

Für GK ift E der Momentenpunkt, und es wird

$$0 = Vx' - Hv - Zz, \quad \text{woraus} \quad Z = \frac{1}{z} (Vx' - Hv).$$

Endlich ift J der Momentenpunkt für EK, und es wird

$$0 = Vw - Hd - P_4 (w - \eta_4) - Yy, \quad \text{woraus} \quad Y = \frac{1}{y} [Vw - Hd - P_4 (w - \eta_4)].$$

Man kann auch, was oft einfacher ift, die Gleichgewichtsbedingung für das Trägerftück zwifchen C und dem Schnitte II aufftellen; felbftverftändlich ergeben fich diefelben Refultate.

Für fchiefe Belaftungen ift das Verfahren genau das gleiche.

Sollen die Spannungen auf graphifchem Wege ermittelt werden, fo wird, nachdem für die angenommenen Belaftungen die Lagerkräfte der Punkte A und B ermittelt find, für jede Hälfte der Kräfteplan nach *Cremona* in mehrfach erörterter Weife conftruirt. In Fig. 321, 322 u. 323 find diefe Kräftepläne für Belaftung durch Eigengewicht, einfeitige Schneelaft und Winddruck conftruirt. 237. Graphifche Ermittelung der Spannungen.

Fig. 321.

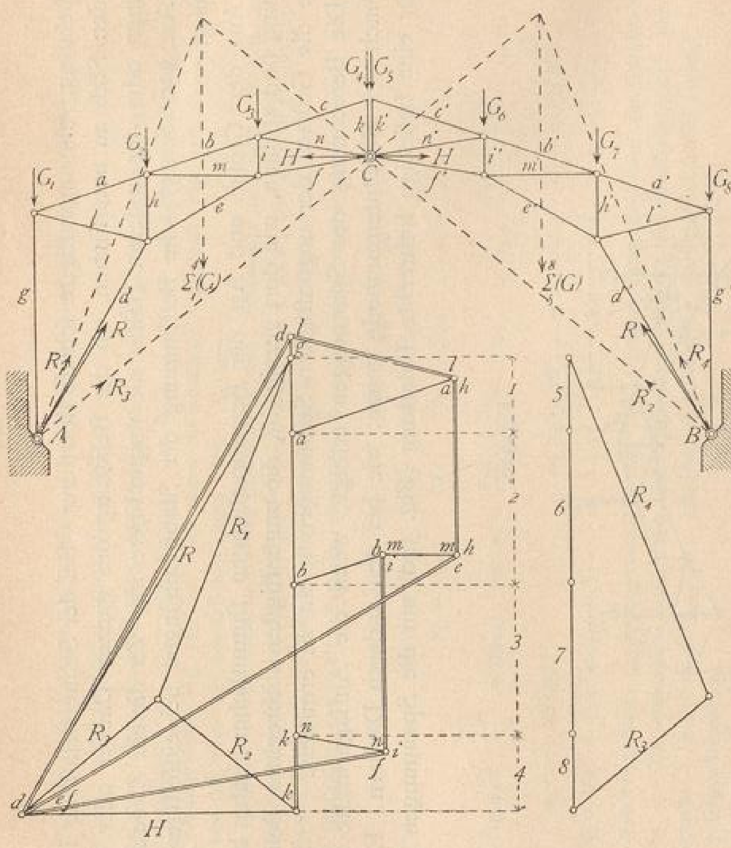
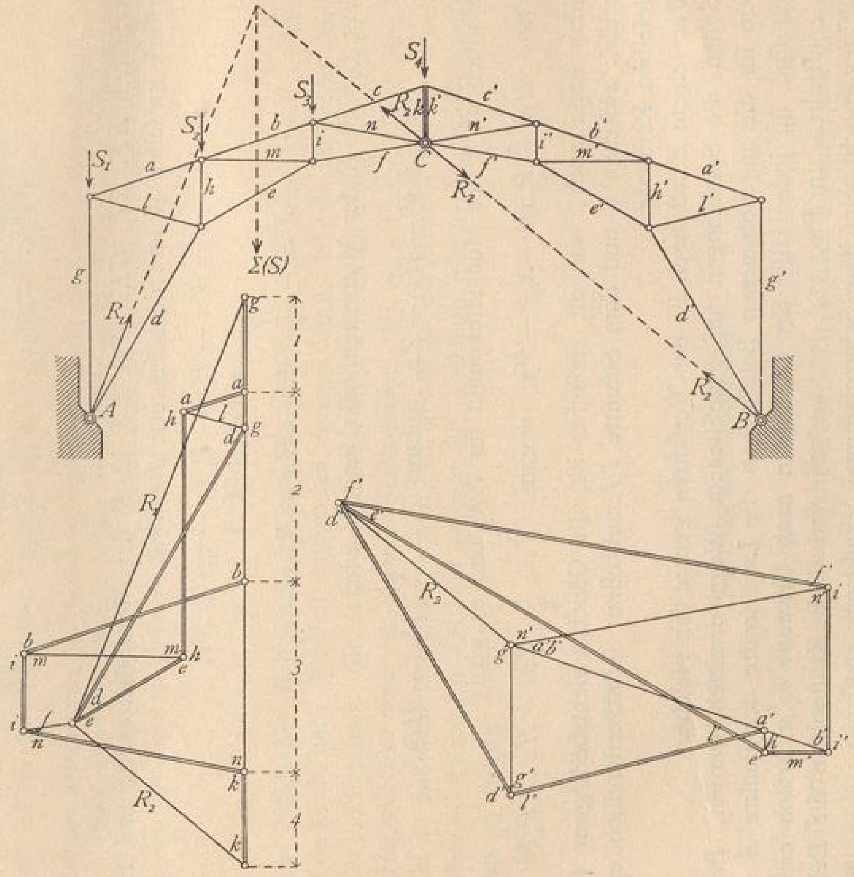


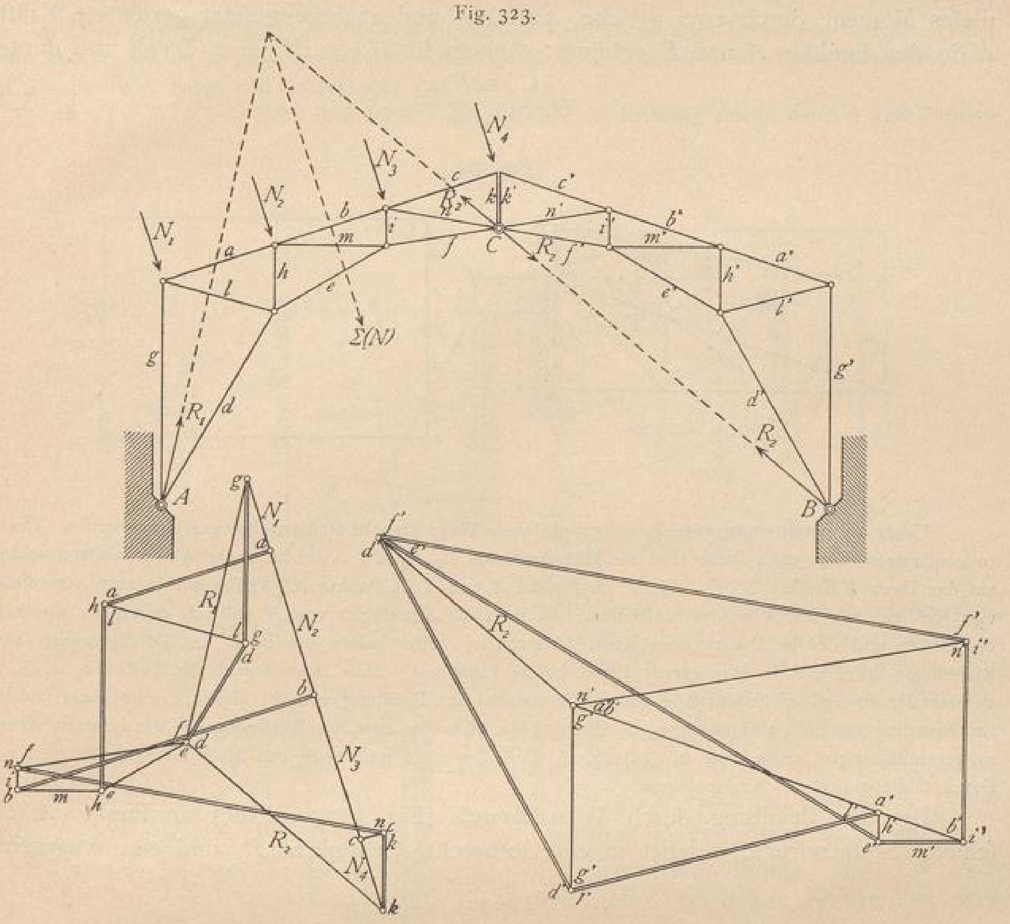
Fig. 322.



Linke Hälfte.

Rechte Hälfte.

Fig. 323.



Linke Hälfte. Rechte Hälfte.

4. Kapitel.

Ausleger- oder Kragdächer.

Die Ausleger- oder Kragdächer ſind Dächer, welche, wie die Ausleger- oder Kragträger (ſiehe Art. 158 bis 161, S. 151 bis 154), an ihrem einen Ende unterſtützt ſind, am anderen Ende frei ſchweben. Demnach muſs auch hier, falls Gleichgewicht ſtattfinden ſoll, Seitens der Wand, an welcher das Auslegerdach befeſtigt iſt, ein Auflagerdruck und ein Moment geleiſtet werden. 238. Auflagerdrücke.

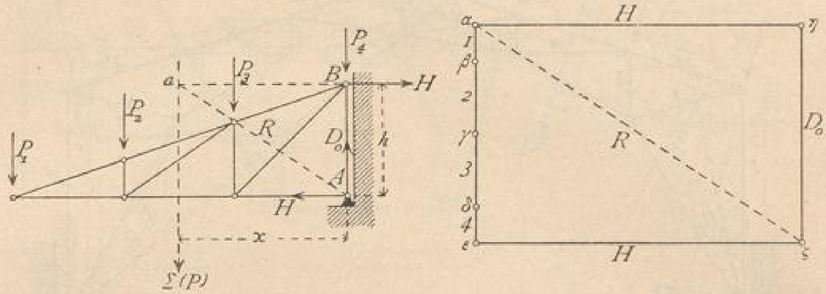
1) Auflagerdrücke. Für lothrechte Belaſtungen iſt der Auflagerdruck im Punkte A (Fig. 324)

$$D_0 = \Sigma (P) \quad \ldots \ldots \ldots \quad 331.$$

Das Seitens der Wand zu leiſtende Moment muſs dem reſultirenden Momente der äuſseren Kräfte, d. h. demjenigen von $\Sigma (P)$ und A genau gleich ſein und entgegengeſetzte Drehrichtung haben. Da $D_0 = \Sigma (P)$ iſt und beide Kräfte einander parallel ſind, ſo bilden ſie ein Kräftepaar mit dem Momente $M_0 = x \, \Sigma (P)$. Dieſelbe Gröſse hat alſo das von der Mauer zu leiſtende Moment. Wir denken uns diefes Moment durch zwei gleiche, parallele und entgegengefetzt gerichtete Kräfte H in den Punkten A und B gebildet; alsdann ift $Hh = M_0 = x_0 \, \Sigma(P)$ und daraus

$$H = \frac{\Sigma(P)\, x_0}{h} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 332.$$

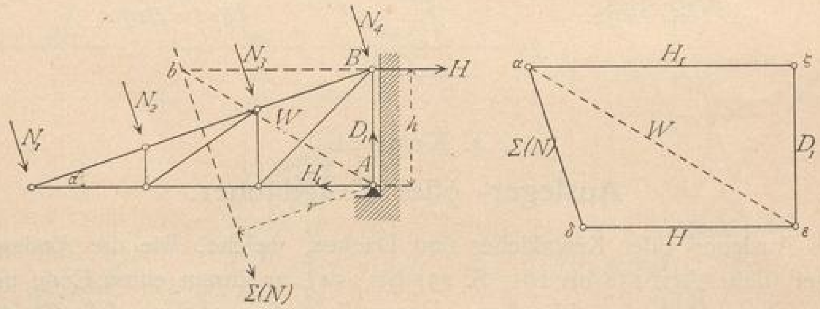
Fig. 324.



Ueber die Ermittelung von D_0 auf graphifchem Wege braucht nichts weiter gefagt zu werden. Um H zu conftruiren (Fig. 324), fuche man die Mittelkraft von P_1, P_2, P_3 ... auf bekannte Weife; alsdann wirken auf das Dach 4 Kräfte: $\Sigma(P)$, D_0, H im Punkte A und H im Punkte B. Faffen wir je zwei von diefen vier Kräften zu einer Mittelkraft zufammen, fo geht die Mittelkraft von H und D_0 durch A, diejenige von $\Sigma(P)$ und der in B wirkenden Kraft H durch a; beide halten das Dach im Gleichgewicht; ihre Richtungen fallen alfo in eine gerade Linie, in die Linie aA. Man trage fonach die Laften *1, 2, 3* ... an einander zu $\alpha\varepsilon$, ziehe durch α eine Linie parallel zur Richtung von R, durch ε eine Linie parallel zur Richtung von H; alsdann ift $\varepsilon\zeta = H$ und $\zeta\alpha = R$. Um nun das Kraftpolygon der äufseren Kräfte zu vervollftändigen, trage man an ζ die Kraft $D_0 = \zeta\eta = \alpha\varepsilon$ und an η das in A angreifende $H = \eta\alpha$. Damit fchliefst fich das Kraftpolygon.

Bei der Belaftung durch Winddruck (Fig. 325) entfteht im Punkte A ein fchiefer Stützendruck, welcher in eine lothrechte Seitenkraft D_1 und eine wagrechte

Fig. 325.



Seitenkraft H_1 zerlegt werden kann. Aufserdem mufs von der Wand ein Moment geleiftet werden, welches in Bezug auf A als Momentenpunkt demjenigen der Windlaften gleich, der Drehrichtung nach entgegengefetzt ift. Um diefes Moment zu erzeugen, bringen wir in B eine Kraft H an, welche fich aus der Bedingung beftimmt

$$\left.\begin{array}{l} 0 = Hh - \Sigma(N)\, r, \text{ woraus } H = \dfrac{r}{h}\, \Sigma(N). \\ \text{Ferner wird} \\ D_1 = \Sigma(N) \cos\alpha \text{ und } H_1 = H + \Sigma(N) \sin\alpha = \Sigma(N)\left(\dfrac{r}{h} + \sin\alpha\right) \end{array}\right\} \quad 333.$$

Die Conftruction der Kräfte H_1, D_1 und H erfolgt in ähnlicher Weife, wie bei lothrechter Belaftung. Man vereinigt $\Sigma\ (N)$ und die in B angreifende Kraft H zu einer Mittelkraft, welche durch b geht, und H_1 mit D_1 zu einer zweiten Mittelkraft, welche durch A geht. Beide Kräfte halten das Dach im Gleichgewicht, haben alfo die Richtung bA, bezw. Ab.

Ift $\alpha\delta = \Sigma\ (N)$, fo ziehe man durch δ eine Parallele zur Richtung von H, durch α eine Parallele

Fig. 326.

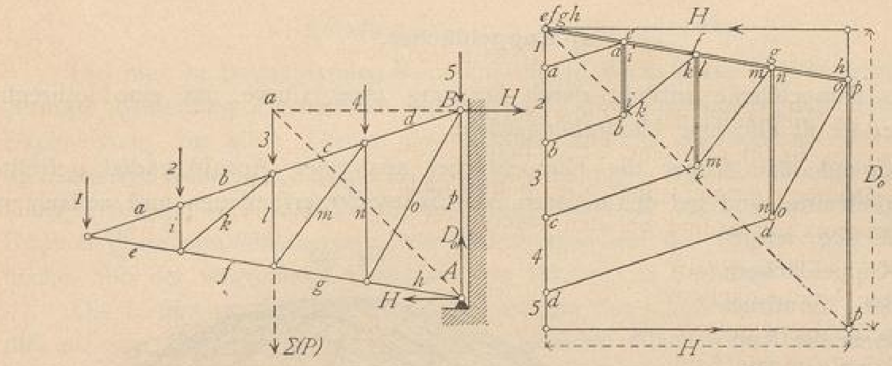
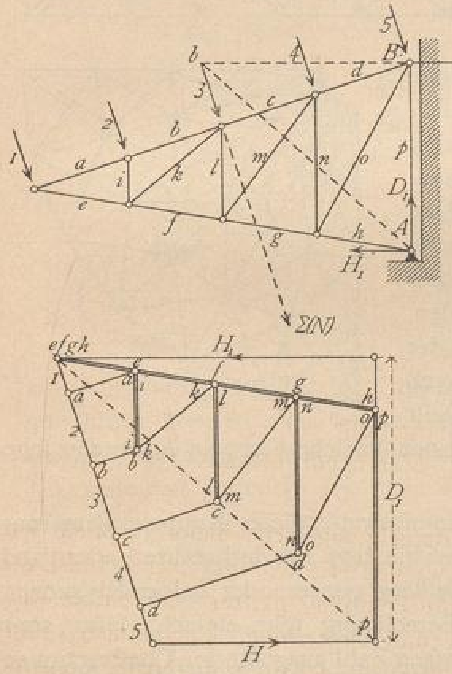


Fig. 327.



zur Richtung von W; man erhält als Schnittpunkt ε, und es ift $\delta\varepsilon = H$, $\varepsilon\alpha = W$. Nun zerlege man $\varepsilon\alpha$ in D_1 und H_1, fo wird $\varepsilon\zeta = D_1$, $\zeta\alpha = H_1$.

2) Stabfpannungen. Um die Stabfpannungen zu ermitteln, find hier nur Belaftung durch das Eigengewicht, durch volle Schnee- und volle Windbelaftung in das Auge zu faffen. 239. Stabfpannungen.

Die Berechnung für die verfchiedenen möglichen Formen ift nach der Momentenmethode ohne Schwierigkeit durchzuführen, und zwar fowohl wenn die Laften lothrecht, als wenn fie fenkrecht zur Dachfläche gerichtet find; es braucht darauf hier nicht weiter eingegangen zu werden.

Das graphifche Verfahren ift in Fig. 326 u. 327 für einen Ausleger-Dachftuhl, und zwar für Belaftung durch Eigengewicht und durch Winddruck, durchgeführt. Zuerft find die äufseren Kräfte, wie oben gezeigt, ermittelt, in der Reihenfolge der Knotenpunkte an einander getragen, und dann ift der Kräfteplan verzeichnet, der ohne Weiteres verftändlich ift.

5. Kapitel.

Kuppel-, Zelt- und Thurmdächer.

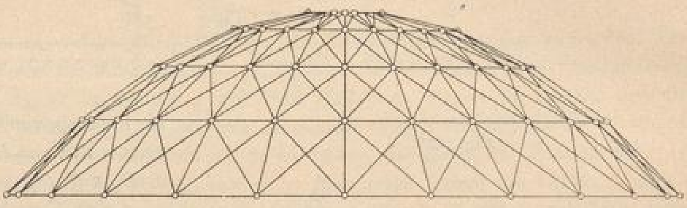
a) Kuppeldächer.

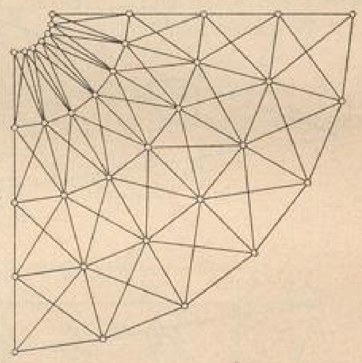
240. Allgemeines.

Die Kuppelfläche entſteht durch Drehung einer Curve um eine lothrechte Mittelaxe; ſie iſt alſo eine Umdrehungsfläche.

Während man früher die Kuppeldächer aus einer Anzahl radial geſtellter Binder conſtruirte, ſind bei den neueren, von *Schwedler* erfundenen und vielfach mit beſtem Erfolg ausgeführten Kuppeldächern ſämmtliche Conſtructionstheile in die Kuppelfläche verlegt. Eine Anzahl von Sparren wird in der Richtung der Meridiane der Kuppelfläche angeordnet und in verſchiedenen Höhen durch wagrechte Ringe mit einander verbunden; letztere ſind den Parallelkreiſen der Kuppelfläche eingeſchriebene Vielecke. In den ſo entſtehenden Vierecken ſind alsdann, wegen der ungleichmäſsigen Belaſtung, noch Diagonalen angeordnet, und zwar meiſtens gekreuzte Zugdiagonalen. Gewöhnlich iſt eine Belaſtung der Kuppelmitte durch eine ſog. Laterne vorhanden. Die ganze Conſtruction bildet demnach ein der Kuppelfläche eingeſchriebenes Polyeder; in Fig. 328 ſind Anſicht und Grundriſs derſelben dargeſtellt (letzterer nur für ein Viertel der Kuppel). Man nennt ſolche Kuppeln *Schwedler*'ſche oder Flechtwerkkuppeln.

Fig. 328.





Die von *Schwedler* [35]) angegebene Berechnungsweiſe dieſer Kuppeln kann nur als eine Annäherungsrechnung betrachtet werden: ſie legt nur lothrechte Laſten und der Hauptſache nach gleichförmig vertheilte Belaſtung ganzer oder halber Ringzonen zu Grunde. Bei dieſen Annahmen wird die Berechnung ſehr einfach, führt aber trotzdem zu Ergebniſſen, welche ſich in einer groſsen Zahl ausgeführter Conſtructionen ſeit einer längeren Reihe von Jahren vollauf bewährt und allen Kräfteangriffen gewachſen gezeigt haben. Deſshalb ſoll dieſe Berechnungsweiſe, welche in den allermeiſten Fällen für die Praxis genügt, nachſtehend vorgeführt werden (Art. 241 bis 245).

Eine neuere, auf der Theorie des Raumfachwerkes beruhende Berechnungs-

35) In: Die Conſtruction der Kuppeldächer. Zeitſchr. f. Bauw. 1866, S. 7.

weiſe der Flechtwerkkuppeln, und zwar für ganz beliebige Belaſtungen, iſt von *Müller-Breslau*[36]) aufgeſtellt worden.

Nach Vorführung der *Schwedler*'ſchen Berechnungsweiſe ſollen in Art. 246 bis 249 die Grundlagen derjenigen von *Müller-Breslau* angegeben werden.

1) Berechnungsweiſe von *Schwedler*.

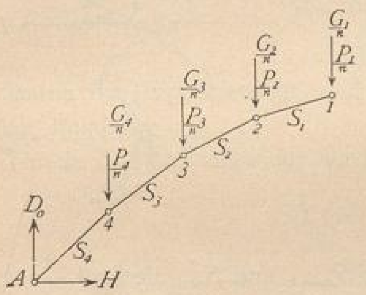
α) Belaſtungen und Auflagerdrücke.

Die hier zu betrachtenden Kuppeln ſind ſo flach, daſs der Winddruck nur von geringer Bedeutung iſt; derſelbe ſoll deſshalb, unter Zugrundelegung einer mittleren Dachneigung, in allen Theilen der Kuppel conſtant angenommen werden. Hier wird nur die lothrechte Seitenkraft 𝔳 (vergl. Art. 30, S. 23) des Winddruckes berückſichtigt; die in die Dachfläche fallende Seitenkraft kann vernachläſſigt werden. Endlich iſt es empfehlenswerth, alle Belaſtungen auf das Quadr.-Meter der Grundfläche, alſo der wagrechten Projection des Daches, zu beziehen. 241. Belaſtungen.

Die Laſten greifen in den Knotenpunkten der Conſtruction an; demnach ſind die auf die einzelnen Knotenpunkte entfallenden Flächen zu berechnen und mit dieſen die Belaſtungen für die Einheit der Grundfläche zu multipliciren.

Wären keine Ringe angeordnet, ſo würden die einzelnen Sparren ſchiefe Drücke auf die Auflager ausüben und von dieſen erleiden; durch einen Ring, gegen welchen ſich ſämmtliche Sparrenfüſse ſetzen, den ſog. Mauerring oder Fuſsring, werden die wagrechten Seitenkräfte der in den unterſten Sparrenſtäben (S_4 in Fig. 329) vorhandenen Spannungen aufgehoben, ſo daſs bei den angenommenen Belaſtungen als Auflagerdrücke nur lothrechte Kräfte wirken. Entſprechend den im folgenden Artikel vorzuführenden Annahmen braucht die Berechnung der Auflagerdrücke nur für Belaſtungen vorgenommen zu werden, bei welchen ganze Ringzonen belaſtet ſind. Wenn der Grundriſs der Kuppel ein regelmäſsiges n-Eck iſt, und demnach n Sparren vorhanden ſind, ſo kann angenommen werden, daſs bei den erwähnten Belaſtungen alle Sparren gleiche Laſten tragen. Die Kuppel trage eine Laterne, deren Gewicht im Eigengewicht der erſten Ringzone mit enthalten ſei. Die Eigengewichte der ganzen Ringzonen ſeien bezw. (Fig. 329) G_1, G_2, G_3, G_4 ... und die zufälligen Laſten der ganzen Ringzonen P_1, P_2, P_3, P_4 ...; alsdann iſt, wenn der Stützendruck auf jeden Sparren D_0 beträgt, für volle Belaſtung der ganzen Dachfläche 242. Auflagerdrücke.

Fig. 329.



$$n D_0 = G_1 + G_2 + G_3 + G_4 + \ldots + P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + \ldots = \Sigma\,(G) + \Sigma\,(P).$$

Wenn etwa nur die drei oberſten Zonen voll belaſtet ſind, ſo wird

$$n D_0' = G_1 + G_2 + G_3 + G_4 + \ldots + P_1 + P_2 + P_3$$

ſein. Auf dieſe Art ſind die Auflagerdrücke leicht zu ermitteln.

---

36) In: Beitrag zur Theorie des räumlichen Fachwerks. Centralbl. d. Bauverw. 1892, S. 201. (Auch als Sonderabdruck erſchienen.) — Vergl. auch:

KOFAHL. Beitrag zur Theorie der Kuppeldächer. Zeitſchr. d. Ver. deutſch. Ing. 1896, S. 1133; 1898, S. 713.

HÜBNER. Bemerkungen über das räumliche Fachwerk. Ebendaſ. 1897, S. 477, 632, 634.

MÜLLER-Breslau, H. Beitrag zur Theorie der Kuppel- und Thurmdächer etc. Ebendaſ. 1898, S. 1205, 1233.

β) Stabſpannungen.

243. Berechnung der Stabſpannungen.

𝔄) Ungünſtigſte Beanſpruchung der einzelnen Stäbe. Es ſollen, nach *Schwedler*, für die Grenzen der Spannungen die folgenden vereinfachenden Annahmen gemacht werden:

a) die Sparren erhalten den gröſsten Druck, wenn die ganze Kuppel voll belaſtet iſt;

b) ein Ring erhält ſeinen gröſsten Zug, wenn der innerhalb deſſelben befindliche Kuppeltheil voll belaſtet, der Ring ſelbſt mit ſeiner Zone aber unbelaſtet iſt; bei der entgegengeſetzten Belaſtungsart treten die entgegengeſetzten Grenzen ein;

c) die Diagonalen zwiſchen zwei Sparren erhalten ihren gröſsten Zug, wenn die halbe Kuppel auf einer Seite des durch die Mitte der Diagonalen gehenden Durchmeſſers voll, die andere halbe Kuppel nur durch das Eigengewicht belaſtet iſt.

𝔅) Spannungen in den Sparren. Wir betrachten nur zwei Belaſtungsarten, nämlich die Belaſtung der ganzen Kuppel durch zufällige Laſt und die Belaſtung der Kuppel durch Eigengewicht. Die zweite Belaſtungsart ergiebt die Minimalſpannungen. Die Maximalſpannungen der Sparren ſind die Summen der bei den beiden angeführten Belaſtungsarten ſich ergebenden Spannungen. Die Formeln für beide Belaſtungsarten unterſcheiden ſich nur durch die Gröſse der Laſten.

Fig. 330.

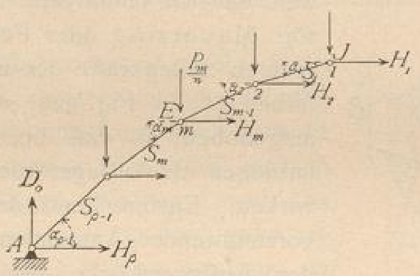
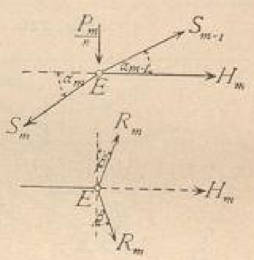


Fig. 331.



Was zunächſt die zufällige Belaſtung betrifft, ſo ſind im *m*-ten Knotenpunkte (vom Laternenringe an gerechnet) in *E* (Fig. 330 u. 331) folgende Kräfte im Gleichgewicht: die Spannungen der Sparren S_{m-1} und S_m, die Laſt $\frac{1}{n} P_m$, endlich die beiden Ringſpannungen R_m. Letztere ſind einander, der Symmetrie wegen, gleich und haben in der wagrechten Ebene des *m*-ten Ringes die Mittelkraft H_m. Die algebraiſche Summe der lothrechten Kräfte für den Punkt *E* iſt gleich Null; mithin

$$0 = \frac{1}{n} P_m + S_m \sin \alpha_m - S_{m-1} \sin \alpha_{m-1},$$

woraus

$$S_m = \frac{S_{m-1} \sin \alpha_{m-1}}{\sin \alpha_m} - \frac{1}{n} \frac{P_m}{\sin \alpha_m}.$$

Für den erſten Knotenpunkt, den Knotenpunkt am Laternenringe, für *J*, iſt $S_{m-1} = 0$; mithin folgt der Reihe nach für $m = 1, 2, 3 \dots$

$$S_1 = -\frac{1}{n} \frac{P_1}{\sin \alpha_1}; \quad S_2 = -\frac{1}{n} \frac{P_1 \sin \alpha_1}{\sin \alpha_1 \sin \alpha_2} - \frac{1}{n} \frac{P_2}{\sin \alpha_2} = -\frac{P_1 + P_2}{n \sin \alpha_2};$$

$$S_3 = -\frac{P_1 + P_2}{n \sin \alpha_2} \frac{\sin \alpha_2}{\sin \alpha_3} - \frac{1}{n} \frac{P_3}{\sin \alpha_3} = -\frac{P_1 + P_2 + P_3}{n \sin \alpha_3};$$

oder allgemein

$$S_m = -\frac{1}{n \sin \alpha_m} \sum_1^m (P) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 334.$$

Eben ſo ergiebt ſich die Spannung in den Sparren für eine Belaſtung durch das Eigengewicht zu

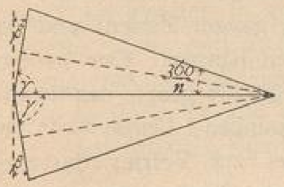
$$S_1' = -\frac{G_1}{n \sin \alpha_1}; \quad S_2' = -\frac{(G_1 + G_2)}{n \sin \alpha_2}; \ldots S_m' = -\frac{\sum_1^m (G)}{n \sin \alpha_m} \quad . \quad 335.$$

𝕮) Spannungen in den Ringen. Die Gleichgewichtsbedingung, nach welcher die algebraiſche Summe der wagrechten Kräfte im Punkte E gleich Null iſt, lautet (Fig. 331):

$$0 = H_m + S_{m-1} \cos \alpha_{m-1} - S_m \cos \alpha_m, \text{ woraus } H_m = S_m \cos \alpha_m - S_{m-1} \cos \alpha_{m-1}.$$

Da H_m die Mittelkraft der beiden Ringſpannungen R_m iſt, ſo ergiebt ſich $H_m = 2 R_m \sin \beta$, woraus $R_m = \frac{H_m}{2 \sin \beta}$. Nun iſt (Fig. 332) $\beta = \frac{360^0}{2n} = \frac{\pi}{n}$,

Fig. 332.



ſonach $R_m = \frac{H_m}{2 \sin \frac{\pi}{n}}$. Wird in dieſe Gleichung der für H_m gefundene Werth eingeſetzt, ſo folgt

$$R_m = \frac{S_m \cos \alpha_m - S_{m-1} \cos \alpha_{m-1}}{2 \sin \frac{\pi}{n}} \quad . \quad . \quad 336.$$

Wir beſtimmen nach Gleichung 336 die Ringſpannung durch das Eigengewicht und die Maximal- und Minimal-Ringſpannung durch zufällige Belaſtung.

Durch das Eigengewicht wird

$$R_m^g = \frac{-\frac{\sum_1^m (G) \cos \alpha_m}{n \sin \alpha_m} + \frac{\sum_1^{m-1} (G) \cos \alpha_{m-1}}{n \sin \alpha_{m-1}}}{2 \sin \frac{\pi}{n}},$$

$$R_m^g = -\frac{\sum_1^m (G) \operatorname{cotg} \alpha_m - \sum_1^{m-1} (G) \operatorname{cotg} \alpha_{m-1}}{2 n \sin \frac{\pi}{n}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 337.$$

Man erhält

$$\left.\begin{array}{l}
\text{für den Laternenring } (m = 1)\text{: } R_1^g = -\dfrac{G_1 \operatorname{cotg} \alpha_1}{2 n \sin \frac{\pi}{n}}; \\[2ex]
\text{für den Ring 2 } (m = 2)\text{: } R_2^g = -\dfrac{(G_1 + G_2) \operatorname{cotg} \alpha_2 - G_1 \operatorname{cotg} \alpha_1}{2 n \sin \frac{\pi}{n}}; \\[2ex]
\text{für den Ring 3 } (m = 3)\text{: } R_3^g = -\dfrac{(G_1 + G_2 + G_3) \operatorname{cotg} \alpha_3 - (G_1 + G_2) \operatorname{cotg} \alpha_2}{2 n \sin \frac{\pi}{n}},
\end{array}\right\} \quad 338.$$

etc.

Für den Mauerring ift S_m, alfo das erfte Glied im Zähler gleich Null; mithin, wenn für den Auflagerpunkt $m = \rho$ ift,

$$R_\rho^g = \frac{\sum_1^{\rho-1}(G) \operatorname{cotg} \alpha_{\rho-1}}{2\, n \sin \frac{\pi}{n}} = \frac{(G_1 + G_2 + \ldots + G_{\rho-1}) \operatorname{cotg} \alpha_{\rho-1}}{2\, n \sin \frac{\pi}{n}} \quad . \quad . \quad . \quad 339.$$

Um die durch zufällige Belaftung erzeugten Ringfpannungen zu ermitteln, fetzen wir in die Gleichung 336 die Werthe für S_m und S_{m-1} ein. Es foll $\mathfrak{S}_1^m\,(P)$ die zwifchen den Knotenpunkten 1 und m befindlichen zufälligen Laften bezeichnen, wobei $\mathfrak{S}$ ausdrückt, dafs nicht alle Knotenpunkte $1 - m$ belaftet zu fein brauchen; im Gegenfatz dazu foll $\sum_1^m (P)$ andeuten, dafs alle Knotenpunkte von 1 bis m belaftet find. Man erhält demnach allgemein für zufällige Belaftung aus Gleichung 336

$$R_m = - \frac{\mathfrak{S}_1^m\,(P) \operatorname{cotg} \alpha_m - \mathfrak{S}_1^{m-1}\,(P) \operatorname{cotg} \alpha_{m-1}}{2\, n \sin \frac{\pi}{n}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 340.$$

Diefe Gleichung ermöglicht die Feftftellung der für die einzelnen Ringe ungünftigften Belaftungen (unter Vorausfetzung der Belaftung ganzer Zonen) und die Ermittelung der gröfsten Druck- und Zugfpannungen in den Ringen. Der gröfste Druck wird ftattfinden, wenn im Zähler das erfte Glied möglichft grofs, das zweite Glied möglichft klein ift. Jede Belaftung eines der Knotenpunkte 1 bis $(m - 1)$ hat fowohl ein Wachfen des erften, wie des zweiten Gliedes zur Folge; da aber $\operatorname{cotg} \alpha_{m-1}$ ftets gröfser ift, als $\operatorname{cotg} \alpha_m$, fo wächst das zweite Glied mehr, als das erfte, d. h. jede Belaftung des Knotenpunktes 1 bis $(m - 1)$ verringert den Druck, vergröfsert alfo den Zug. Die Belaftung des Knotenpunktes m vergröfsert nur das erfte Glied, alfo den Druck. Die Belaftung der aufserhalb des m-ten Ringes liegenden Ringe ift nach der Gleichung ohne Einflufs auf die Spannung im m-ten Ringe. Daraus folgt, dafs in den Stäben eines Ringes (des m-ten) der gröfste Druck ftattfindet, wenn die Knotenpunkte 1 bis $(m - 1)$ unbelaftet, die zum Ringe gehörigen Knotenpunkte dagegen belaftet find. Da die Belaftung der äufseren Ringe ohne Einflufs ift, fo kann man fagen: Gröfster Druck findet ftatt, wenn der innere Kuppeltheil unbelaftet, der äufsere Kuppeltheil, einfchliefslich des betrachteten Ringes, belaftet ift. Daraus folgt dann weiter, dafs gröfster Zug in den Stäben des m-ten Ringes auftritt, wenn nur der innere Kuppeltheil, ausfchliefslich der Zone, zu welcher der m-te Ring gehört, belaftet ift. Die hier gefundenen Ergebniffe ftimmen demnach mit den in Art. 243 (S. 248) gemachten Annahmen über die ungünftigften Belaftungen überein.

Man erhält

$$R_m^{p\,min} = - \frac{P_m \operatorname{cotg} \alpha_m}{2 n \sin \frac{\pi}{n}} \quad \text{und} \quad R_m^{p\,max} = \frac{\sum_1^{m-1} (P)\,(\operatorname{cotg} \alpha_{m-1} - \operatorname{cotg} \alpha_m)}{2 n \sin \frac{\pi}{n}} \quad . \quad . \quad 341.$$

Es ergiebt fich

$$\left.\begin{array}{l}
\text{für den Laternenring } (m=1):\quad R_1^{p\,min} = -\dfrac{P_1 \operatorname{cotg} \alpha_1}{2n \sin \dfrac{\pi}{n}} \quad \text{und} \quad R_1^{p\,max} = 0; \\[2ex]
\text{für } m=2:\quad R_2^{p\,min} = -\dfrac{P_2 \operatorname{cotg} \alpha_2}{2n \sin \dfrac{\pi}{n}} \quad \text{und} \quad R_2^{p\,max} = \dfrac{P_1 (\operatorname{cotg} \alpha_1 - \operatorname{cotg} \alpha_2)}{2n \sin \dfrac{\pi}{n}}; \\[2ex]
\text{für } m=3:\quad R_3^{p\,min} = -\dfrac{P_3 \operatorname{cotg} \alpha_3}{2n \sin \dfrac{\pi}{n}} \quad \text{und} \quad R_3^{p\,max} = \dfrac{(P_1 + P_2)(\operatorname{cotg} \alpha_2 - \operatorname{cotg} \alpha_3)}{2n \sin \dfrac{\pi}{n}},
\end{array}\right\} \quad 342.$$

etc.

$$\text{für den Mauerring: } R_\rho^{p\,min} = 0 \text{ und } R_\rho^{p\,max} = \frac{(P_1 + P_2 + \ldots + P_{\rho-1}) \operatorname{cotg} \alpha_{\rho-1}}{2n \sin \dfrac{\pi}{n}}. \quad 343.$$

D) Spannungen in den Diagonalen. Neben dem Durchmeſſer, welcher für die ungünſtigſte Diagonalenbelaſtung die belaſtete und unbelaſtete Kuppelhälfte trennt, liegt ein belaſteter und ein unbelaſteter Sparren. Nehmen wir nun an, daſs die Spannung im erſteren ſo groſs iſt, als wenn die ganze Kuppel voll belaſtet wäre, im zweiten ſo groſs, als wenn die ganze Kuppel nur durch das Eigengewicht belaſtet wäre, und machen wir die im Knotenpunkte anſchlieſsende Diagonale ſtark genug, um den ganzen Spannungsunterſchied zu übertragen, ſo wird dieſelbe jedenfalls zu ſtark, iſt alſo als ausreichend zu betrachten.

Im oberſten Sparrenſtück ſind die gröſsten und kleinſten Druckſpannungen bezw.

$$S_{1max} = -\frac{P_1 + G_1}{n \sin \alpha_1} \quad \text{und} \quad S_{1min} = -\frac{G_1}{n \sin \alpha_1}.$$

Die Differenz beider Spannungen iſt $\Delta_1 = -\frac{P_1}{n \sin \alpha_1}$. Dieſelbe ſoll durch die Diagonale übertragen werden. Bezeichnet man die wirkliche Länge der Diagonale und des Sparrens bezw. mit d und s, ſo iſt allgemein

$$Y = -\Delta \frac{d}{s};$$

mithin

$$\left.\begin{array}{ll}
Y_1 = \dfrac{P_1}{n \sin \alpha_1} \cdot \dfrac{d_1}{s_1}, & Y_2 = \dfrac{P_1 + P_2}{n \sin \alpha_2} \cdot \dfrac{d_2}{s_2}, \\[2ex]
Y_3 = \dfrac{P_1 + P_2 + P_3}{n \sin \alpha_3} \cdot \dfrac{d_3}{s_3}, & Y_4 = \dfrac{P_1 + P_2 + P_3 + P_4}{n \sin \alpha_4} \cdot \dfrac{d_4}{s_4},
\end{array}\right| \quad . \quad . \quad 344.$$

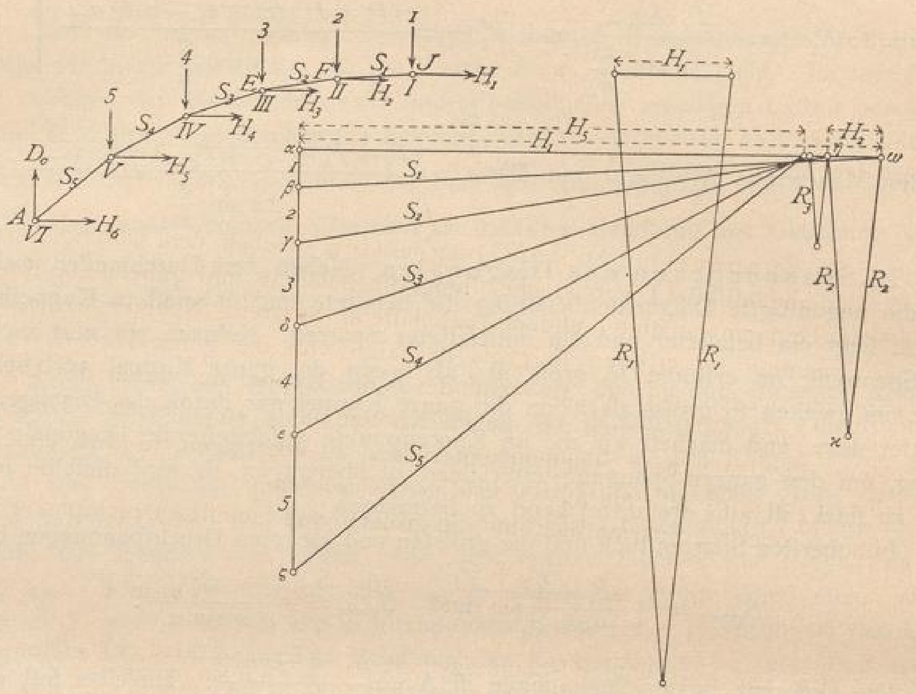
Auf graphiſchem Wege laſſen ſich die Spannungen in den einzelnen Stäben einer Kuppel in folgender Weiſe ermitteln. 244. Graphiſche Ermittelung der Stabſpannungen.

a) Sparrenſpannungen durch das Eigengewicht. Die Laſten in den einzelnen Knotenpunkten ſeien *1, 2, 3, 4, 5* (Fig. 333); man trage dieſelben zu einem Kraftpolygon $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon\zeta$ an einander. Im Knotenpunkte *J* wirken *1*, die Sparrenſpannung S_1 und die Mittelkraft H_1 der Ringſpannungen R_1. Die Zerlegung der Kraft *1* nach den beiden Richtungen von S_1 und H_1 ergiebt $\beta\omega = S_1$, $\omega\alpha = H_1$. Am Knotenpunkt *F* wirken nun *2*, S_1, S_2 und H_2; bekannt ſind jetzt *2* und S_1; man erhält $\gamma\eta = S_2$, $\eta\omega = H_2$. Eben ſo ergeben ſich die übrigen Sparrenſpannungen.

b) Spannungen in den Sparren durch zufällige Belaſtung. Die Conſtruction iſt in gleicher Weiſe, wie unter a vorzunehmen, nachdem die in den einzelnen Knotenpunkten wirkenden zufälligen Laſten genau wie oben aufgetragen und behandelt ſind.

c) Ringspannungen durch das Eigengewicht. Die Zerlegung der für diese Belastung gefundenen Werthe von H ergiebt ohne Schwierigkeit die Werthe für R_1^g, R_2^g ...., wie in Fig. 333 gezeichnet. Die Construction empfiehlt sich für die vorliegende Ermittelung nicht sehr, weil sie der spitzen Schnittwinkel wegen nur ungenaue Resultate giebt, die Schnittpunkte vielfach nicht mehr auf die Zeichen-

Fig. 333.



fläche fallen. So ist H_1 in Fig. 333 im fünffach verkleinerten Maßstabe aufgetragen, um R_1 zu construiren.

d) Ringspannungen durch zufällige Belastung. Maximalspannung im Ringe II findet statt, wenn nur die Ringzone I belastet ist. Es sei (Fig. 334 a) $ab = \frac{P_1}{n}$; alsdann wird $bf = S_1$, $= H_1$.

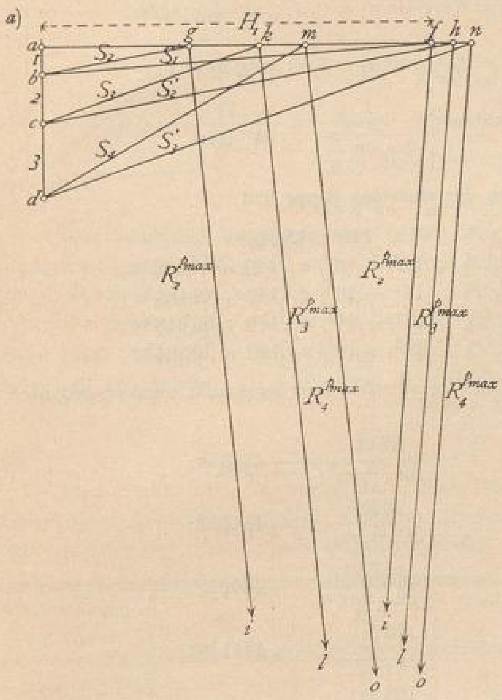
Im Knotenpunkt F (Fig. 335) sind S_1, S_2 und H_2 im Gleichgewicht, d. h. das Kräftedreieck für Punkt F wird bgf. Darin ist $H_2 = gf$ und $gi = if = R_{2\,max}^p$.

Im Ringe III ist Maximalspannung, wenn die Zonen zu den Ringen I und II belastet sind; alsdann wirken in F die Kräfte $S_1 = fb$, $2 = bc = \frac{P_2}{n}$, S_2' und H_2'. Man erhält leicht $H_2' = hf$, $S_2' = ch$. In E sind dann S_2', S_3 und H_3 im Gleichgewicht und $H_3 = kh$, woraus $R_{3\,max}^p = kl = lh$. Eben so wird $R_{4\,max}^p = on = mo$ etc.

Minimalspannung im Ringe I findet bei voller Kuppelbelastung statt; alsdann wirkt in J die Kraft $1 = \frac{P_1}{n}$, und es wird, wenn (Fig. 334 b) $ab = 1$ ist, $ia = H_1$. Die Zerlegung in die beiden Ringspannungen ist dann in gleicher Weise wie oben vorzunehmen. Für Ring II findet Minimalspannung bei einer Belastung der Zonen II, III, IV statt; I ist unbelastet; mithin ist S_1 alsdann gleich Null (siehe Gleichung 334). Ist $bc = \frac{P_2}{n} = 2$, so wird $hb = H_2$. Eben so wird weiter für die Minimalbelastungen der einzelnen Ringe $H_3 = kc$, $H_4 = md$, $H_5 = ne$.

e) Die Construction der Spannungen in den Diagonalen ist so einfach, dass dieselbe nicht weiter gezeigt zu werden braucht.

Fig. 334.



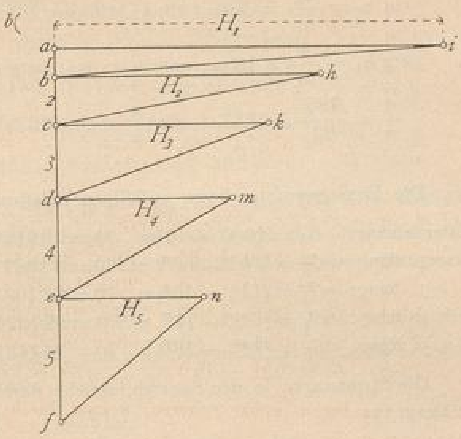
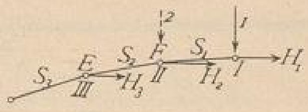
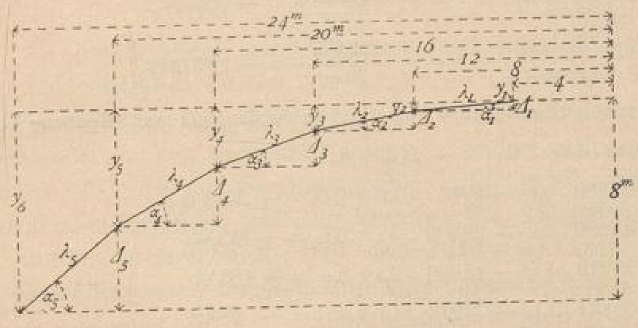


Fig. 335.



Beifpiel. Ein Kuppeldach von nachfolgenden Hauptmafsen und Belaftungen ift zu conftruiren: 245. Beifpiel.
Durchmeffer des zu überdachenden kreisförmigen Raumes gleich 47^{m}, demnach der Durchmeffer des dem Mauerring umfchriebenen Parallelkreifes $2\,L = 48^{m}$; Scheitelhöhe der Kuppel $h = 8^{m}$; es find 6 Ringe mit den Halbmeffern 4, 8, 12, 16, 20 und 24^{m} und $n = 32$ Sparren anzuordnen. Das Eigengewicht ift zu 70^{kg} für 1^{qm} Grundfläche anzunehmen; als mittlere Dachneigung ift $\frac{h}{2\,L} = \frac{8}{48} = \frac{1}{6}$ einzuführen, und es ergiebt fich hieraus nach Art. 28 (S. 21 ff.) als Belaftung durch Schnee für 1^{qm} Grundfläche 75^{kg}, als Belaftung durch Winddruck (fiehe Art. 30, S. 23) für 1^{qm} Grundfläche $\mathfrak{v} = 64^{kg}$, fo dafs die gefammte zufällige Belaftung für 1^{qm} Grundfläche abgerundet 140^{kg} beträgt; die Laterne wiegt 2000^{kg}.

Fig. 336.



Die Kuppelfläche fei durch Umdrehung einer cubifchen Parabel der Gleichung

$$y = \frac{h\,x^3}{r^3} = \frac{8}{24^3}\,x^3 = 0{,}00058\,x^3$$

entftanden. Man erhält für die verfchiedenen, durch die Ringe vorgefchriebenen Eckpunkte des Vieleckes (Fig. 336):

$x =$	4	8	12	16	20	24^{m}
$y =$	0,04	0,30	1,00	2,38	4,64	8,0
$h - y = z =$	7,96	7,70	7,00	5,62	3,36	0

Ferner ift

$$\Delta_1 = y_2 - y_1 = 0{,}26^{m};\ \Delta_2 = y_3 - y_2 = 0{,}7^{m};\ \Delta_3 = y_4 - y_3 = 1{,}38^{m};\ \Delta_4 = y_5 - y_4 = 2{,}26^{m};$$

$$\Delta_5 = y_6 - y_5 = 3{,}36^{m}.$$

$$\lambda_1 = \sqrt{4^2 + \Delta_1^{\,2}} = 4{,}01 \text{ m}; \; \lambda_2 = 4{,}06 \text{ m}; \; \lambda_3 = 4{,}23 \text{ m}; \; \lambda_4 = 4{,}59 \text{ m}; \; \lambda_5 = 5{,}22 \text{ m}.$$

$$\sin \alpha_1 = \frac{\Delta_1}{\lambda_1} = 0{,}0648; \; \sin \alpha_2 = 0{,}1724; \; \sin \alpha_3 = 0{,}32; \; \sin \alpha_4 = 0{,}492; \; \sin \alpha_5 = 0{,}644.$$

$$\operatorname{cotg} \alpha_1 = \frac{4}{\Delta_1} = 15{,}38; \; \operatorname{cotg} \alpha_2 = 5{,}7; \; \operatorname{cotg} \alpha_3 = 2{,}9; \; \operatorname{cotg} \alpha_4 = 1{,}77; \; \operatorname{cotg} \alpha_5 = 1{,}19.$$

$$\frac{\pi}{n} = \frac{180}{32} = 5^0 37{,}5'; \; \sin \frac{\pi}{n} = \sin 5^0 37{,}5' = 0{,}098; \; \frac{1}{2\, n \sin \frac{\pi}{n}} = \frac{1}{64 \cdot 0{,}098} = 0{,}16.$$

Die Eigengewichte, bezw. zufälligen Belaſtungen der einzelnen Ringe ſind:

Laternenring: $G_1 = 2000 + 6^2 \pi \cdot 70 = 9913^{\text{kg}}$, $P_1 = 6^2 \pi \cdot 140 = 15826^{\text{kg}}$;

2. Ring: $G_2 = (10^2 - 6^2)\, \pi \cdot 70 = 14067^{\text{kg}}$, $P_2 = (10^2 - 6^2)\, \pi \cdot 140 = 28122^{\text{kg}}$;

3. Ring: $G_3 = (14^2 - 10^2)\, \pi \cdot 70 = 21100^{\text{kg}}$, $P_3 = (14^2 - 10^2)\, \pi \cdot 140 = 42186^{\text{kg}}$;

4. Ring: $G_4 = (18^2 - 14^2)\, \pi \cdot 70 = 28133^{\text{kg}}$, $P_4 = (18^2 - 14^2)\, \pi \cdot 140 = 56243^{\text{kg}}$;

5. Ring: $G_5 = (22^2 - 18^2)\, \pi \cdot 70 = 35168^{\text{kg}}$, $P_5 = (22^2 - 18^2)\, \pi \cdot 140 = 70304^{\text{kg}}$.

Die Spannungen in den Sparren, welche durch das Eigengewicht hervorgebracht werden, ſind nach Gleichung 335:

$$S_1^g = -\frac{G_1}{n \sin \alpha_1} = -\frac{9913}{32 \cdot 0{,}065} = -4766^{\text{kg}};$$

$$S_2^g = -\frac{G_1 + G_2}{n \sin \alpha_2} = -\frac{23980}{32 \cdot 0{,}1724} = -4346^{\text{kg}};$$

$$S_3^g = -\frac{G_1 + G_2 + G_3}{n \sin \alpha_3} = -\frac{45080}{32 \cdot 0{,}32} = -4402^{\text{kg}};$$

$$S_4^g = -\frac{G_1 + G_2 + G_3 + G_4}{n \sin \alpha_4} = -\frac{73213}{32 \cdot 0{,}492} = -4651^{\text{kg}};$$

$$S_5^g = -\frac{G_1 + G_2 + G_3 + G_4 + G_5}{n \sin \alpha_5} = -\frac{108381}{32 \cdot 0{,}644} = -5258^{\text{kg}}.$$

Die durch zufällige Belaſtung erzeugten Sparrenſpannungen betragen:

$$S_1^p = -\frac{P_1}{n \sin \alpha_1} = -\frac{15826}{2{,}08} = -7608^{\text{kg}};$$

$$S_2^p = -\frac{P_1 + P_2}{n \sin \alpha_2} = -\frac{43948}{5{,}517} = -7966^{\text{kg}};$$

$$S_3^p = -\frac{P_1 + P_2 + P_3}{n \sin \alpha_3} = -\frac{86130}{10{,}24} = -8400^{\text{kg}};$$

$$S_4^p = -\frac{P_1 + P_2 + P_3 + P_4}{n \sin \alpha_4} = -\frac{142373}{15{,}74} = -9045^{\text{kg}};$$

$$S_5^p = -\frac{P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5}{n \sin \alpha_5} = -\frac{212677}{20{,}61} = -10319^{\text{kg}}.$$

Die Ringſpannungen, welche durch das Eigengewicht hervorgerufen werden, ſind nach Gleichung 338:

Laternenring: $R_1^g = -9913 \cdot 15{,}38 \cdot 0{,}16 = -24396^{\text{kg}}$;

2. Ring: $R_2^g = -(23980 \cdot 5{,}7 - 9913 \cdot 15{,}38)\; 0{,}16 = +2524^{\text{kg}}$;

3. Ring: $R_3^g = -(45080 \cdot 2{,}9 - 23980 \cdot 5{,}7)\; 0{,}16 = +953^{\text{kg}}$;

4. Ring: $R_4^g = -(73213 \cdot 1{,}77 - 45080 \cdot 2{,}9)\; 0{,}16 = +183^{\text{kg}}$;

5. Ring: $R_5^g = -(108381 \cdot 1{,}19 - 73213 \cdot 1{,}77)\; 0{,}16 = +98^{\text{kg}}$;

Mauerring: $R_6^g = 108381 \cdot 1{,}19 \cdot 0{,}16 = 20636^{\text{kg}}$.

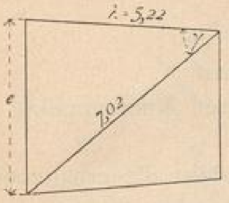
Die Maximal- und Minimalſpannungen in den Ringen, durch zufällige Belaſtung erzeugt, betragen nach Gleichung 342:

Laternenring: $R_1^p\,min = -15826 \cdot 15{,}38 \cdot 0{,}16 = -38932^{\text{kg}}$ und $R_1^p\,max = 0$;

2. Ring: $R_2^p\,min = -28122 \cdot 5{,}7 \cdot 0{,}16 = -25647^{\text{kg}}$,

$R_2^p\,max = 15826\;(15{,}38 - 5{,}7) \cdot 0{,}16 = +24514^{\text{kg}}$;

Fig. 337.



3. Ring: $R_3^p min = -42182 \cdot 2{,}9 \cdot 0{,}16 = -19572$ kg,

$R_3^p max = 43948 \cdot 2{,}8 \cdot 0{,}16 = +19689$ kg;

4. Ring: $R_4^p min = -56243 \cdot 1{,}77 \cdot 0{,}16 = -15926$ kg,

$R_4^p max = 86130 \cdot 1{,}13 \cdot 0{,}16 = +15589$ kg;

5. Ring: $R_5^p min = -70304 \cdot 1{,}19 \cdot 0{,}16 = -13386$ kg,

$R_5^p max = 142373 \cdot 0{,}58 \cdot 0{,}16 = +13212$ kg;

Mauerring: $R_6^p min = 0$ und $R_6^p max = 212677 \cdot 1{,}19 \cdot 0{,}16 = +40494$ kg.

Was fchliefslich die Spannungen in den Diagonalen betrifft, fo braucht nur die am ftärkften beanfpruchte Diagonale berechnet zu werden, weil felbft diefe noch fehr fchwach wird. Gewöhnlich macht man dann alle Diagonalen gleich ftark.

Die gröfste durch zufällige Belaftung erzeugte Sparrenfpannung ift durch die Diagonale zu übertragen (fiehe Art. 243, S. 251); diefelbe ift $S_5^p = -10319$ kg, und eine Diagonale hat demnach höchftens diefe Kraft aufzunehmen. Die Spannung in den Diagonalen wird daher

$$Y_5 = \frac{10319 \cdot 7{,}02}{5{,}22} = 13877 \text{ kg}$$

fein.

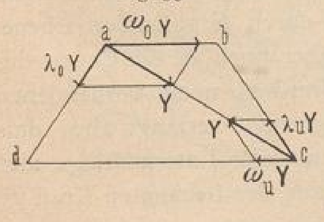
Man könnte noch für einige der oberen Diagonalen die Spannungen auffuchen, was nach dem Vorftehenden keine Schwierigkeit macht. Für die Querfchnittsbeftimmungen kann nun, wie bei den früheren Beifpielen, eine Tabelle aufgeftellt werden.

Bezeichnung des Stabes	P_0	P_1	Bezeichnung des Stabes	P_0	P_1	P_2
Sparren:			Ringe:			
S_1	− 4766	− 7608	R_1	− 24396	− 38932	0
S_2	− 4346	− 7966	R_2	+ 2524	+ 24514	− 25647
S_3	− 4402	− 8400	R_3	+ 953	+ 19689	− 19572
S_4	− 4651	− 9045	R_4	+ 183	+ 15589	− 15926
S_5	− 5258	− 10319	R_5	+ 98	+ 13212	− 13386
Diagonalen:			R_6	+ 20636	+ 40494	0
Y	0	13877				
	Kilogramm			Kilogramm		

2) Verfahren von *Müller-Breslau*.

In jedem durch zwei Sparren- und zwei Ringftäbe gebildeten Trapez des Kuppelflechtwerkes fei nur eine Diagonale vorhanden, welche fowohl Zug wie Druck aufnehmen kann. Handelt es fich um eine Conftruction mit gekreuzten Diagonalen, deren jede nur Zug aufnehmen kann, fo nimmt man genau, wie in Art. 186 (S. 187) bei den Trägern mit Gegendiagonalen gezeigt ift, zunächft nur eine, die bei der betreffenden Belaftung auf Zug beanfpruchte, Diagonale als vorhanden an. Ergiebt fich durch die Berechnung, dafs diefe Diagonale Druck erhält, fo tritt an ihre Stelle die Gegendiagonale, und das Ergebnifs kann durch eine Verbefferungsrechnung leicht richtig geftellt werden. 246. Vorbemerkungen.

Fig. 338.



Die in der Diagonale ac auftretende Spannung Y (Fig. 338) wird in der Ebene des betreffenden Feldes in jedem der beiden Knotenpunkte in zwei Seitenkräfte zerlegt, welche bezw. in die Richtung des anfchliefsenden Ringftabes und diejenige des anfchliefsenden Sparrenftabes fallen. Diefe Seitenkräfte ftehen in ganz beftimmtem, durch die Form des Trapezes vorgeſchriebenem Verhältniſs zu Y. Im oberen Knotenpunkte a zerlegt ſich Y in die Seitenkräfte:

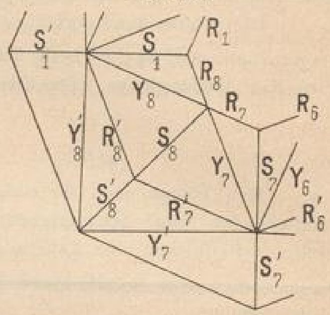
$\omega_0 Y$, welche in die Richtung des Ringſtabes ab, und

$\lambda_0 Y$, welche in die Richtung des Sparrenſtabes ad

fällt. Eben ſo bezeichnen wir die Seitenkräfte von Y am unteren Knotenpunkte c mit $\omega_u Y$, bezw. $\lambda_u Y$.

Verfährt man in dieſer Weiſe mit jeder Diagonale und addirt die erhaltenen Seitenkräfte zu den in den Ring-, bezw. Sparrenſtäben wirkenden Spannungen R_1, R_2 . . ., S_1, S_2 . . ., ſo hat man bei den Unterſuchungen, zunächſt wenigſtens, nur mit Kräften in den Ring- und Sparrenſtäben zu thun; die Diagonalen ſind vorläufig ausgeſchaltet. Die Summenſpannungen in den Sparrenſtäben ſollen mit $\mathfrak{S}$, diejenigen in den Ringſtäben mit $\mathfrak{R}$ bezeichnet werden, wobei die Zeiger die gleichen ſind, wie bei den mit lateiniſchen Buchſtaben bezeichneten Spannungen. Demnach iſt (Fig. 339)

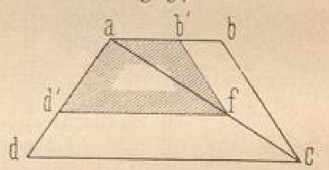
Fig. 339.



$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{S}_8 &= S_8 + \lambda_0 Y_8 + \lambda_0 Y_7 \\ \mathfrak{S}_8' &= S_8' + \lambda_u' Y_8' + \lambda_u' Y_7' \\ \mathfrak{R}_8 &= R_8 + \omega_0 Y_8 \\ \mathfrak{R}_8' &= R_8' + \omega_u Y_8 + \omega_0' Y_8' \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad 345.$$

Die Werthe von ω und λ kann man leicht durch Rechnung oder Zeichnung finden; graphiſch, indem man das Trapezfeld in wahrer Gröſse aufzeichnet, auf der Diagonale eine beliebige Länge für Y abträgt (etwa $\overline{af}$ in Fig. 340) und das dem Felde ähnliche Trapez $ad'fb'$ mit $\overline{af}$ als Diagonale conſtruirt; alsdann ſind ſeine Seiten:

Fig. 340.



$$ab' = \omega_u Y, \quad fd' = \omega_0 Y, \quad d'a = \lambda_0 Y$$

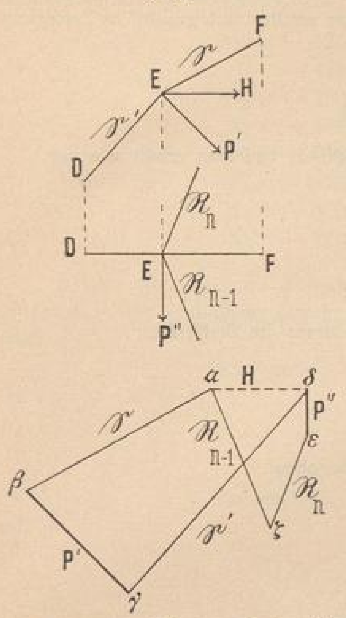
und $$b'f = \lambda_u Y,$$

ω und λ haben in den Feldern der verſchiedenen Zonen und allgemein auch in den Feldern derſelben Zone verſchiedene Werthe; dieſem Umſtande iſt in Gleichung 345 durch die Zeiger Rechnung getragen.

247. Ermittelung der Stabſpannungen.

Im Knotenpunkte E (Fig. 341) wirke eine äuſsere Kraft P in beliebiger Richtung. Man zerlegt P in eine Seitenkraft, welche in die lothrechte Ebene des betrachteten Sparrenzuges DEF . . . fällt, die Kraft P' und in eine zu dieſer Ebene ſenkrechte Seitenkraft P'' (in Fig. 341 im Grundriſs angegeben). Fig. 341 zeigt den Sparrenzug DEF im Grundriſs und Aufriſs. Die Aufriſsebene iſt durch DEF gelegt. Auch weiterhin, insbeſondere bei der Berechnung des Beiſpieles in Art. 248, ſoll jeder Sparrenzug vor der graphiſchen Zerlegung der Kräfte in die Zeichenebene gedreht werden, wodurch ſich die Arbeit weſentlich vereinfacht. Im Punkte E halten einander nunmehr die Kräfte $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{S}'$, P' und H im Gleichgewicht; H iſt die Mittelkraft der im Punkte E wirkenden Ringſtabſpannungen $\mathfrak{R}_n$ und $\mathfrak{R}_{n-1}$ und der Seitenkraft P''; dieſe drei Kräfte wirken in einer wagrechten, durch E gehenden Ebene, alſo auch ihre Mittelkraft H. Dieſe Mittelkraft H muſs aber auch in die Ebene des Sparrenzuges DEF fallen; denn die ſämmtlichen auſserdem noch vorhandenen Kräfte $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{S}'$ und P' fallen in dieſe Ebene; das Gleichgewicht verlangt alſo, daſs auch die letzte Kraft H in dieſe Ebene falle. Geht man nun vom Laternenringe aus, ſo iſt für den oberſten Punkt $\mathfrak{S}$ gleich Null; mithin ſind aus der bekannten Kraft P'

Fig. 341.

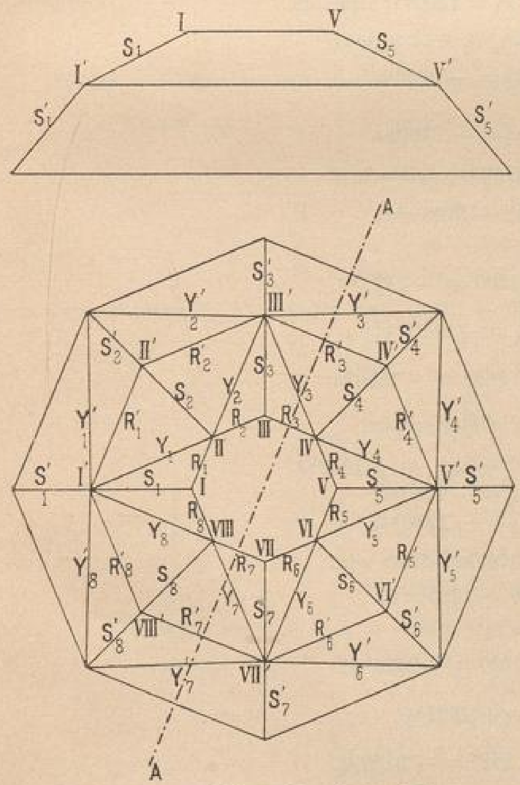


leicht durch Zerlegung H und $\mathfrak{S}'$ zu finden. Im Grundrifs kennt man jetzt H und P''; daher können auch hier die beiden fehlenden Kräfte ($\mathfrak{R}_n$ und $\mathfrak{R}_{n-1}$) durch Conftruction eines Kraftpolygons gefunden werden. Bei den weiter unten folgenden Knotenpunkten ift aber $\mathfrak{S}$ nach Vorftehendem bereits ermittelt, und man hat wiederum für jedes Kraftpolygon nur zwei Unbekannte.

In Fig. 341 ift $\overline{\alpha\beta} = \mathfrak{S}$ und $\overline{\beta\gamma} = P'$ durch vorherige Conftruction gefunden, bezw. gegeben; die zu $\mathfrak{S}'$ und H gezogenen Parallelen vervollftändigen das Kraftpolygon. Es ift $\gamma\delta = \mathfrak{S}'$ und $\delta\alpha = H$. An H ift nunmehr in δ die Kraft $P'' = \overline{\delta\varepsilon}$ gelegt und da die Mittelkraft von H und P'' gleich derjenigen von $\mathfrak{R}_{n-1}$ und $\mathfrak{R}_n$ ift, fo geben die durch α und ε gezogenen Parallelen zu $\mathfrak{R}_{n-1}$ und $\mathfrak{R}_n$ die Kräfte $\mathfrak{R}_n = \overline{\varepsilon\zeta}$ und $\mathfrak{R}_{n-1} = \overline{\zeta\alpha}$. Das Kraftpolygon $\overline{\alpha\zeta\varepsilon\delta\alpha}$ gehört zum Grundrifs; man kann aber beide Kraftpolygone, wie in Fig. 341 gefchehen ift, vereinen, wobei man das eine um die Linie $\alpha\delta$ in die Ebene des anderen gedreht denkt.

Aus den Werthen $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{R}$, λ und ω können nun die Werthe S, R und Y ermittelt werden, indem man zunächft für die Knotenpunkte ohne Diagonalen die Werthe für S und R auffucht und fo eine Reihe von bekannten Gröfsen erhält, durch deren Einführung in die Gleichungen 345 alle Unbekannten beftimmbar werden.

Fig. 342.



Das vorgeführte Verfahren foll an einem Beifpiele gezeigt werden.

Beifpiel. Die in Fig. 342 im Grundrifs und Aufrifs dargeftellte Kuppel über achteckiger Grundfläche, bei welcher der Durchmeffer des umfchriebenen Kreifes 20 m beträgt, fei links der lothrechten Schnittebene AA nur mit dem Eigengewicht, rechts von der Ebene AA voll belaftet. Die Knotenpunktslaften betragen 248. Beifpiel.

	durch Eigengewicht allein	insgefammt
im Laternenring:	$G_1 = 500$ kg,	$G_1 + P_1 = 1500$ kg;
im mittleren Ring:	$G_2 = 800$ kg,	$G_2 + P_2 = 2500$ kg.

Die Laften werden als lothrecht angenommen; die diefer Belaftung entfprechenden Stabfpannungen find zu ermitteln.

Zunächft find nach Fig. 340 die Zahlenwerthe für ω_0, λ_u, ω_u, λ_u der oberen Felder und ω_0', λ_0', ω_u', λ_u' der unteren Felder ermittelt. Man erhält

$$\omega_0 = 0{,}94, \qquad \lambda_0 = 0{,}8,$$
$$\omega_u = 0{,}39, \qquad \lambda_u = 0{,}8,$$
$$\omega_0' = 0{,}96, \qquad \lambda_0' = 6{,}6,$$
$$\omega_u' = 0{,}67, \qquad \lambda_u' = 0{,}6.$$

Stäbe der oberen Felder. In den Knotenpunkten I, III, V, VII des Laternenringes treffen nur je drei Stäbe zusammen; die Zerlegung wird ganz, wie in Art. 247 gezeigt ist, vorgenommen. In jedem der Knotenpunkte *I* und *III* wirkt die Last $G = 500^{kg}$, und man erhält durch graphische Zerlegung

$$S_1 = S_3 = -1050^{kg}$$

und

$$R_1 = R_8 = R_2 = R_3 = -1230^{kg}.$$

In den Knotenpunkten *V* und *VII* wirkt die Belastung $G_1 + P_1 = 1500^{kg}$, und man erhält wie vor

$$S_5 = S_7 = -3150^{kg}$$

und

$$R_4 = R_5 = R_6 = R_7 = -3700^{kg}.$$

Nunmehr sind die Knotenpunkte mit Diagonalen zu betrachten.

Knotenpunkt II. Es wirken: Knotenpunktlast $G_1 = 500^{kg}$; ferner die Stabkräfte

$$\mathfrak{S}_2 = S_2 + \lambda_0 Y_1 + \lambda_0 Y_2,$$
$$\mathfrak{R}_1 = R_1 + \omega_0 Y_1,$$
$$\mathfrak{R}_2 = R_2 + \omega_0 Y_2.$$

Die graphische Zerlegung von G_1 in $\mathfrak{S}_2$, $\mathfrak{R}_1$ und $\mathfrak{R}_2$ ergiebt wie oben

$$\mathfrak{S}_2 = -1050^{kg}$$

und

$$\mathfrak{R}_1 = \mathfrak{R}_2 = -1230^{kg}.$$

Hieraus folgt

$$\omega_0 Y_1 = \mathfrak{R}_1 - R_1 = 0, \qquad Y_1 = 0,$$
$$\omega_0 Y_2 = \mathfrak{R}_2 - R_2 = 0, \qquad Y_2 = 0.$$
$$S_2 = \mathfrak{S}_2 = -1050^{kg}.$$

Eben so ergiebt sich durch Betrachtung des Knotenpunktes VI:

$$Y_6 = Y_5 = 0 \quad \text{und} \quad S_6 = -3150^{kg}.$$

Knotenpunkt IV. Knotenpunktslast $G_1 + P_1 = 1500^{kg}$; demnach

$$\mathfrak{S}_4 = S_4 + \lambda_0 Y_4 + \lambda_0 Y_3 = -3150^{kg},$$
$$\mathfrak{R}_3 = R_3 + \omega_0 Y_3 = -3700^{kg}$$

und

$$\mathfrak{R}_4 = R_4 + \omega_0 Y_4 = -3700^{kg}.$$

Oben war gefunden: $R_3 = -1230^{kg}$ und $R_4 = -3700^{kg}$; demnach ist

$$\omega_0 Y_4 = -3700 + 3700 = 0,$$
$$Y_4 = 0;$$
$$\omega_0 Y_3 = -3700 + 1230 = -2470^{kg},$$
$$Y_3 = -\frac{2470}{0{,}94} = -2627^{kg};$$
$$S_4 = -3150 + 0{,}8 \,.\, 2627 = -1050^{kg}.$$

Knotenpunkt VIII. Knotenpunktslast $G_1 = 500^{kg}$; mithin

$$\mathfrak{S}_8 = S_8 + \lambda_0 Y_8 + \lambda_0 Y_7 = -1050^{kg},$$
$$\mathfrak{R}_8 = R_8 + \omega_0 Y_8 = -1230^{kg},$$
$$\mathfrak{R}_7 = R_7 + \omega_0 Y_7 = -1230^{kg}.$$

Oben ist gefunden: $R_8 = -1230^{kg}$ und $R_7 = -3700^{kg}$; daher wird

$$\omega_0 Y_8 = -1230 + 1230 = 0,$$
$$Y_8 = 0;$$
$$\omega_0 Y_7 = -1230 + 3700 = +2470^{kg},$$
$$Y_7 = \frac{2470}{0{,}94} = +2627^{kg};$$
$$S_8 = -1050 - 0{,}8 \,.\, 2627 = -3150^{kg}.$$

Demnach ist in den oberen Feldern

$$R_1 = -1230^{kg}, \quad S_1 = -1050^{kg}, \quad Y_1 = 0;$$
$$R_2 = -1230^{kg}, \quad S_2 = -1050^{kg}, \quad Y_2 = 0;$$
$$R_3 = -1230^{kg}, \quad S_3 = -1050^{kg}, \quad Y_3 = -2627^{kg};$$
$$R_4 = -3700^{kg}, \quad S_4 = -1050^{kg}, \quad Y_4 = 0;$$
$$R_5 = -3700^{kg}, \quad S_5 = -3150^{kg}, \quad Y_5 = 0;$$
$$R_6 = -3700^{kg}, \quad S_6 = -3150^{kg}, \quad Y_6 = 0;$$
$$R_7 = -3700^{kg}, \quad S_7 = -3150^{kg}, \quad Y_7 = +2627^{kg};$$
$$R_8 = -1230^{kg}, \quad S_8 = -3150^{kg}, \quad Y_8 = 0.$$

Stäbe der unteren Felder. In den Knotenpunkten *II'*, *IV'*, *VI'*, *VIII'* setzen keine Diagonalen an. Die graphische Zerlegung erfolgt hier, genau wie in Art. 247 (S. 256) gezeigt ist. Man erhält

$$\text{Knotenpunkt II'}: \; S_2 = -1050^{kg}, \quad G_2 = 800^{kg}$$

und

$$S_2' = -1700^{kg};$$
$$R_1' = -150^{kg} \text{ und } R_2' = -150^{kg}.$$

$$\text{Knotenpunkt VIII'}: \; S_8 = -3150^{kg}, \quad G_2 = 800^{kg}$$

und

$$S_8' = -2800^{kg};$$
$$R_7' = +1350^{kg} \text{ und } R_8' = +1350^{kg}.$$

$$\text{Knotenpunkt IV'}: \; S_4 = -1050^{kg}, \quad G_2 + P_2 = 2500^{kg}$$

und

$$S_4' = -3880^{kg};$$
$$R_3' = -1950^{kg} \text{ und } R_4' = -1950^{kg}.$$

$$\text{Knotenpunkt VI'}: \; S_6 = -3150^{kg}, \quad G_2 + P_2 = 2500^{kg}$$

und

$$S_6' = -5050^{kg};$$
$$R_5' = -550^{kg} \text{ und } R_6' = -550^{kg}.$$

In den Knotenpunkten mit Diagonalen ergiebt sich das Folgende.

$$\text{Knotenpunkt I'}: \; S_1 = -1050^{kg}, \quad Y_1 = 0, \quad Y_8 = 0$$

und

$$G_2 = 800^{kg};$$
$$\mathfrak{S}_1' = S'_1 + \lambda_0' Y_1' + \lambda_0' Y_8' = -1700^{kg},$$
$$\mathfrak{R}_1' = R_1' + \omega_0' Y_1' = -150^{kg},$$
$$\mathfrak{R}_8' = R_8' + \omega_0' R_2' = -150^{kg}.$$

Oben war gefunden: $R_1' = -150^{kg}$ und $R_8' = +1350^{kg}$; demnach ist

$$\omega_0' Y_1' = -150 + 150 = 0$$

und

$$Y_1' = 0;$$
$$\omega_0' Y_8' = -150 - 1350 = -1500^{kg},$$
$$Y_8' = -\frac{1500}{0{,}96} = -1560^{kg};$$
$$S_1' = -1700 + 0{,}6 \cdot 1560 = -760^{kg};$$

daher

$$Y_1' = 0 \text{ und } Y_8' = -1560^{kg}.$$

$$\text{Knotenpunkt V'}: \; S_5 = -3150^{kg}, \quad G_2 + P_2 = 2500^{kg}$$

und

$$Y_5 = Y_4 = 0;$$
$$\mathfrak{S}_5' = S_5' + \lambda_0' Y_4' + \lambda_0' Y_5' = -5050^{kg},$$
$$\mathfrak{R}_4' = R_4' + \omega_0' Y_4' = -550^{kg},$$
$$\mathfrak{R}_5' = R_5' + \omega_0' Y_5' = -550^{kg}.$$

Oben war gefunden: $R_5' = -550^{kg}$; demnach $Y_5' = 0$;

$$R_4' = -1950^{kg};$$

alfo

$$\omega_0' Y_4' = -550 + 1950 = +1400^{kg},$$

$$Y_4' = \frac{1400}{0{,}96} = +1460^{kg};$$

$$S_5' = -5050 - 0{,}6 \cdot 1460 = -5930^{kg}.$$

Knotenpunkt III': $\mathfrak{S}_3 = -1050^{kg} + \lambda_u Y_3 = -1050 - 0{,}8 \cdot 2627 = -3150^{kg}$,

$$G_2 = 800^{kg},$$

fomit

$$Y_2 = 0 \text{ und } Y_3 = -2627^{kg};$$

$$\mathfrak{S}_3' = S_3' + \lambda_0' Y_2' + \lambda_0' Y_3' = -2800^{kg},$$

$$\mathfrak{R}_2' = R_2' + \omega_u Y_2 + \omega_0' Y_2' = +1350^{kg},$$

$$\mathfrak{R}_3' = R_3' + \omega_u Y_3 + \omega_0' Y_3' = +1350^{kg}.$$

Es ift

$$\omega_u Y_2 = 0$$

und

$$\omega_u Y_3 = -0{,}39 \cdot 2627 = -1025^{kg}.$$

Oben war gefunden: $R_2' = -150^{kg}$ und $R_3' = -1950^{kg}$; daher ift

$$\omega_0' Y_2' = 1350 + 150 = +1500^{kg}$$

und

$$Y_2' = \frac{1500}{0{,}96} = +1560^{kg};$$

$$\omega_0' Y_3' = +1350 + 1950 + 1025 = +4325^{kg},$$

$$Y_3' = \frac{4325}{0{,}96} = +4510^{kg};$$

$$S_3' + 0{,}6 \cdot 1560 + 0{,}6 \cdot 4510 = -2800^{kg},$$

$$S_3' = -6410^{kg}.$$

Knotenpunkt VII': $Y_6 = 0$, $Y_7 = 2627^{kg}$

und

$$G_2 + P_2 = 2500^{kg};$$

demnach

$$\mathfrak{S}_7 = S_7 + \lambda_u Y_6 + \lambda_u Y_7 = -3150 + 0{,}8 \cdot 2627 = -1050^{kg},$$

$$\mathfrak{S}_7' = S_7' + \lambda_0' Y_7' + \lambda_0' Y_6' = -3880^{kg},$$

$$\mathfrak{R}_6' = R_6' + \omega_u Y_6 + \omega_0' Y_6' = -1950^{kg},$$

$$\mathfrak{R}_7' = R_7' + \omega_u Y_7 + \omega_0' Y_7' = -1950^{kg}.$$

Oben ift gefunden: $R_6' = -550^{kg}$, $R_7' = +1350^{kg}$ und $Y_7 = 2627^{kg}$; alfo

$$Y_7 = 0{,}39 \cdot 2627 = 1025^{kg};$$

fomit wird

$$\omega_0' Y_6' = -1950 + 550 = -1400^{kg}$$

und

$$Y_6' = -\frac{1400}{0{,}96} = -1460^{kg};$$

$$1350 + 1025 + \omega_0' Y_7' = -1950^{kg},$$

$$\omega_0 Y_7' = -1950 - 2375 = -4325^{kg},$$

$$Y_7' = -\frac{4325}{0{,}96} = -4510^{kg};$$

$$S_7' = -3880 + 0{,}6\,(4510 + 1460) = -300^{kg}.$$

Die Spannungen in den unteren Feldern find daher:

$R_1' = -150^{kg}$,	$S_1' = -760^{kg}$,	$Y_1' = 0$,
$R_2' = -150^{kg}$,	$S_2' = -1700^{kg}$,	$Y_2' = +1560^{kg}$,
$R_3' = -1950^{kg}$,	$S_3' = -6410^{kg}$,	$Y_3' = +4510^{kg}$,
$R_4' = -1950^{kg}$,	$S_4' = -3880^{kg}$,	$Y_4' = +1460^{kg}$,
$R_5' = -550^{kg}$,	$S_5' = -5930^{kg}$,	$Y_5' = 0$,
$R_6' = -550^{kg}$,	$S_6' = -5050^{kg}$,	$Y_6' = -1460^{kg}$,
$R_7' = +1350^{kg}$,	$S_7' = -300^{kg}$,	$Y_7' = -4510^{kg}$,
$R_8' = +1350^{kg}$,	$S_8' = -2800^{kg}$,	$Y_8' = -1560^{kg}$.

Die Spannungen im Fuſsring können auf den gefundenen Werthen leicht ermittelt werden. Es wird empfohlen, von den 8 Auflagern eines um das andere als feſtes Auflager zu conſtruiren.

249. Andere Anordnung der Diagonalen.

Wenn kein Knotenpunkt ohne Diagonalen vorhanden iſt, wenn z. B. die Anordnung nach Fig. 343 vorliegt, ſo iſt die Ermittelung der Diagonalen-Spannungen auf gleichem Wege leicht durchführbar. Man zerlege die Knotenlaſt im Knotenpunkte I in die Stabkräfte

$$\mathfrak{R}_8 = R_8 + \omega_0 Y_8,$$
$$\mathfrak{S}_1 = S_1 + \lambda_0 Y_8 \quad \text{und} \quad R_1;$$

ferner die im Knotenpunkte II wirkende Belaſtung in die Stabkräfte

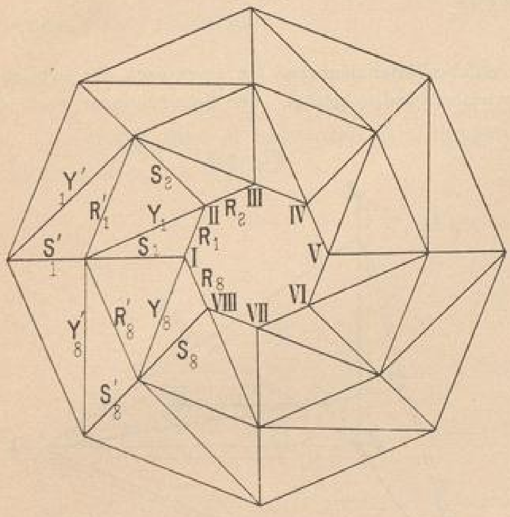
$$\mathfrak{R}_1 = R_1 + \omega_0 Y_1,$$
$$\mathfrak{S}_2 = S_2 + \lambda_0 Y_1 \quad \text{und} \quad R_2.$$

Man kennt alſo $\mathfrak{R}_1$ aus der Zerlegung am Knotenpunkt II, R_1 aus der Zerlegung am Knotenpunkte I; mithin kann man Y_1 aus der Gleichung

$$\omega_0 Y_1 = \mathfrak{R}_1 - R_1$$

finden. In gleicher Weiſe ergeben ſich alle Diagonalſpannungen.

Fig. 343.

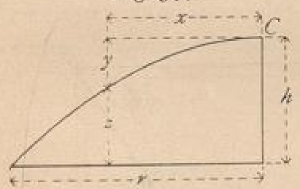


3) Erzeugende Kuppelcurve.

250. Parabel-Kuppel.

Die erzeugende Curve iſt in den meiſten Fällen eine Parabel (Fig. 344) der Gleichung $y = \frac{h x^2}{r^2}$, bei welcher der Anfangspunkt der Coordinaten im Scheitel C liegt, die halbe Spannweite gleich r, die Pfeilhöhe gleich h geſetzt iſt, oder eine cubiſche Parabel der Gleichung $y = \frac{h x^3}{r^3}$. Letztere Curvenform hat den Vortheil, dafs in den Zwiſchenringen bei gleichmäſsig vertheilter Belaſtung die Spannung Null herrſcht und dafs die Spannungen in den Sparren nahezu conſtant ſind, was ſich folgendermaſsen ergiebt.

Fig. 344.



Die Spannung im Sparrenſtab EF (Fig. 345) iſt durch Betrachtung des Theiles zwiſchen dem Scheitel C und dem durch die Sparrenmitte gelegten Schnitte II zu ermitteln. Die algebraiſche Summe der auf dieſes Stück wirkenden lothrechten Kräfte iſt gleich Null, daher, wenn die belaſtende Grundfläche mit F_1 und die Belaſtung für 1 qm der Grundfläche mit g bezeichnet wird, $S \sin \alpha = g F_1$. Nun iſt

$$F_1 = \frac{x^2 \pi}{n}, \quad \text{mithin} \quad S \sin \alpha = \frac{g x^2 \pi}{n} = S \cos \alpha \operatorname{tg} \alpha.$$

Wird ſtatt des Vieleckes die ſtetig gekrümmte Curve der Berechnung zu Grunde gelegt, ſo iſt

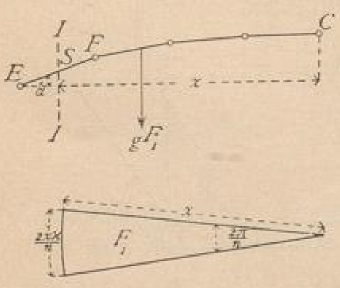
$$y = \frac{h x^3}{r^3} \quad \text{und} \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{dy}{dx} = \frac{3 h x^2}{r^3};$$

mithin

$$S \cos \alpha \, \frac{3 h x^2}{r^3} = \frac{g x^2 \pi}{n}, \quad \text{woraus} \quad S \cos \alpha = \frac{g \pi r^3}{3 n h}, \qquad 346.$$

d. h. $S \cos \alpha$ iſt conſtant. Da aber wegen der flachen Neigung der Kuppel der Winkel α ſehr klein iſt, ſo ändert ſich auch $\cos \alpha$ ſehr wenig; die Spannung iſt daher im ganzen Sparren nahezu conſtant.

Fig. 345.



Betrachtet man nun einen Knotenpunkt E (Fig. 331) und fetzt die algebraifche Summe der in ihm wirkenden wagrechten Kräfte gleich Null, fo wird

$$0 = S_m \cos \alpha_m - S_{m-1} \cos \alpha_{m-1} - H_m, \text{ woraus } H_m = S_m \cos \alpha_m - S_{m-1} \cos \alpha_{m-1} = 0,$$

da nach Gleichung 346 $S \cos \alpha$ conftant ift. Die Ringfpannung ift dann

$$R = \frac{H}{2 \sin \frac{\pi}{n}} = 0 \quad \ldots \ldots \quad 347.$$

Die obigen Angaben find damit bewiefen.

Noch möge bemerkt werden, dafs der theoretifche Materialaufwand bei einer nach der cubifchen Parabel gekrümmten Kuppel nur $^2/_3$ desjenigen Materialaufwandes beträgt, der fich bei einer nach der gemeinen Parabel gekrümmten Kuppel ergiebt.

4) Winddruck auf die Kuppel.

251. Winddruck auf die Kuppel.

Bei fteilen Kuppeln ift es nicht angängig, nur die lothrechte Componente $\mathfrak{v}$ des Winddruckes (vergl. Art. 30, S. 23) zu berückfichtigen; man mufs in folchen Fällen die wirklich auf die Kuppel übertragenen Windkräfte kennen.

Der Winddruck gegen eine beliebige Ebene (Tangentenebene an die Kuppel) ergiebt fich folgendermafsen (Fig. 346). Durch einen Punkt A im Raume werden drei Coordinatenaxen gelegt, welche fenkrecht zu einander ftehen; die X-Axe fei wagrecht und parallel zu der gleichfalls wagrecht angenommenen Windrichtung gelegt. Im Punkte P der Ebene wird die Normale $\overline{PN}$ errichtet, aufserdem die Linie PW parallel zur Windrichtung gezogen. Die durch $\overline{PN}$ und $\overline{PW}$ gelegte Ebene fchneide die gegebene Ebene in der Linie $\overline{TT}$; der Winkel WPT werde φ genannt. Alsdann ift nach Art. 29 (S. 22) der Winddruck auf die Flächeneinheit der Ebene

$$n = p \sin \varphi = p \cos \psi;$$

n ift normal zur Ebene gerichtet.

Die Coordinaten eines beliebigen Punktes P der Kuppelfläche feien x, y, z (Fig. 347); die X-Axe liege parallel zur Windrichtung. Der Normalfchnitt mit der Fläche, welcher im Punkte P durch die Normale PN und PW geht, habe den Krümmungshalbmeffer ρ und den Krümmungsmittelpunkt O mit den Coordinaten a, b, c. Die Coordinaten des

Fig. 346.

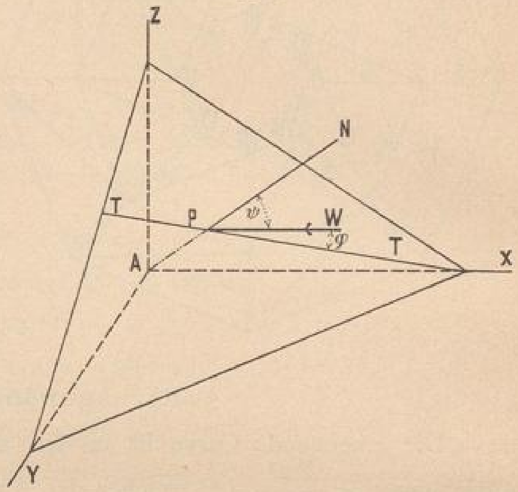
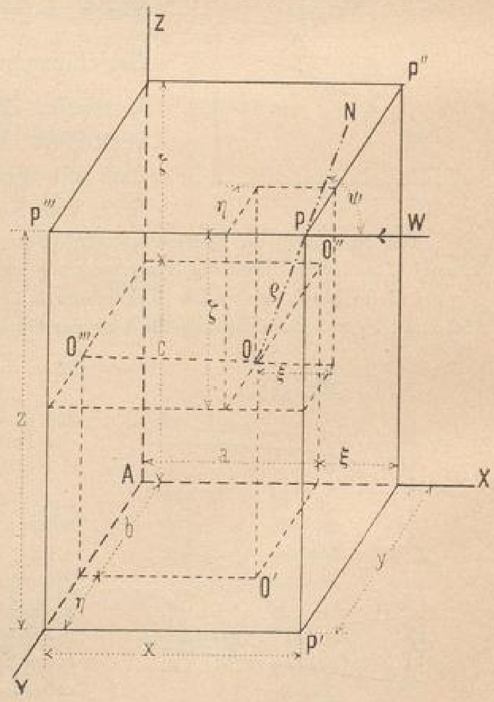


Fig. 347.



Punktes P, bezogen auf den Punkt O, ſeien ξ, η, ζ; endlich bilde die Normale und der Krümmungshalbmeſſer $\overline{OP}$ mit den Coordinaten-Axen die Winkel bezw. α, β, γ. Alsdann iſt nach Fig. 347

$$\cos\alpha = \frac{\xi}{\rho}, \qquad \cos\beta = \frac{\eta}{\rho}, \qquad \cos\gamma = \frac{\zeta}{\rho};$$

ferner $\psi = \alpha$, alſo hier

$$n = p \,.\, \cos\alpha = p\,\frac{\xi}{\rho}.$$

Zerlegt man n nach den Richtungen der Coordinaten-Axen, ſo erhält man als Seitenkräfte von n

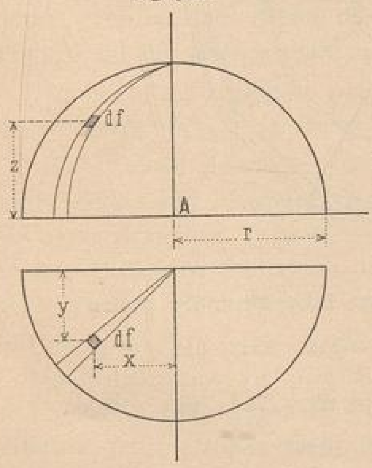
$$\left.\begin{aligned} n_x &= n\cos\alpha = p\,\frac{\xi^2}{\rho^2} \\ n_y &= n\cos\beta = p\,\frac{\xi\eta}{\rho^2} \\ n_z &= n\cos\gamma = p\,\frac{\xi\zeta}{\rho^2} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 348.$$

und, da $\qquad \xi = x - a, \quad \eta = y - b \quad$ und $\quad \zeta = z - c \qquad$ iſt,

$$\left.\begin{aligned} n_x &= \frac{p}{\rho^2}(x-a)^2 \\ n_y &= \frac{p}{\rho^2}(x-a)(y-b) \\ n_z &= \frac{p}{\rho^2}(x-a)(z-c) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 349.$$

Die Gleichungen 348 u. 349 geben die Seitenkräfte des Winddruckes an einem beliebigen Punkte P der Kuppelfläche, bezogen auf die Flächeneinheit, ausgedrückt in den Coordinaten des Punktes P und des Krümmungsmittelpunktes des in Betracht kommenden Normalſchnittes, ſo wie dem betreffenden Krümmungshalbmeſſer ρ. Durch Integration können die auftretenden Winddrücke ermittelt werden.

Fig. 348.



Um den auf einen Knotenpunkt des Kuppelfachwerkes entfallenden Winddruck zu ermitteln, genügt es, die Gröſse n deſſelben für die Flächeneinheit im Knotenpunkte ſelbſt zu ermitteln und dieſes n mit dem Inhalt der Kuppelfläche zu multipliciren, welche dieſem Knotenpunkte zugewieſen iſt. Iſt die Abſciſſe des betreffenden Knotenpunktes x, ſo iſt

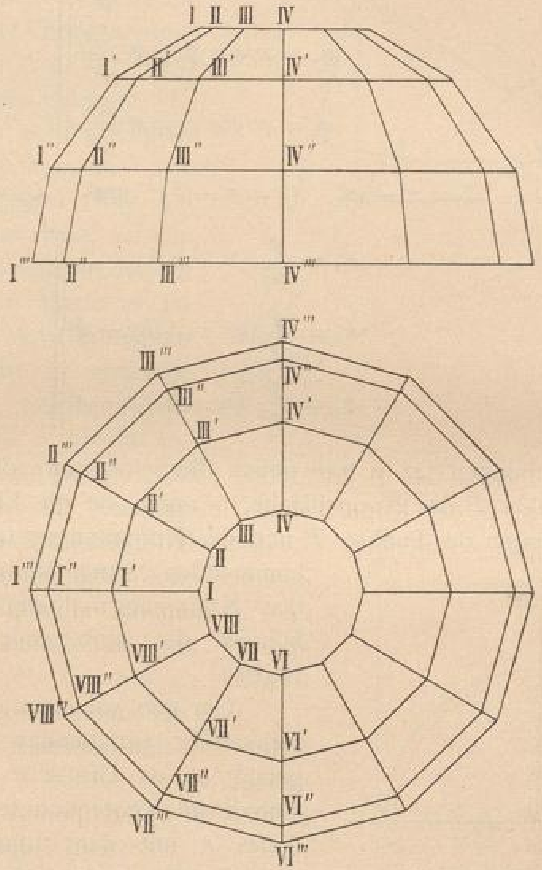
$$n = p\,\frac{(x-a)}{\rho}$$

Für die Kugelkuppel (Fig. 348) ſind alle Normalſchnitte gröſste Kreiſe der Kugel; alle ρ ſind gleich dem Kugelhalbmeſſer r. Wählt man den Mittelpunkt der Kuppel als Anfangspunkt der Coordinatenaxen, ſo werden $a = b = c = 0$, und es werden

$$\left.\begin{aligned} n &= p\,\frac{x}{r} \\ n_x &= \frac{p}{r^2}\,x^2 \\ n_y &= \frac{p}{r^2}\,(x y) \\ n_z &= \frac{p}{r^2}\,(x z) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 350.$$

Beifpiel. Für das in Fig. 349 dargeftellte, einer Halbkugelkuppel eingefchriebene Polyeder über einem Zwölfeck fei $r = 10$ m, der Wind komme von links. Dann find die Werthe von n für die bezeichneten Punkte wie in nachftehender Tabelle angegeben (für $p = 120$ kg für 1 qcm):

Fig. 349.



Punkt	I	I'	I''	I'''
$\frac{x}{r} =$	0,32	0,71	0,94	1
$n = \frac{p x}{r} =$	38	85	113	120 kg

Punkt	II	II'	II''	II'''
$\frac{x}{r} =$	0,29	0,62	0,82	0,88
$n = \frac{p x}{r} =$	35	74	98	106 kg.

Punkt	III	III'	III''	III'''
$\frac{x}{r} =$	0,17	0,36	0,47	0,5
$n = \frac{p x}{r} =$	20	43	56	60 kg.

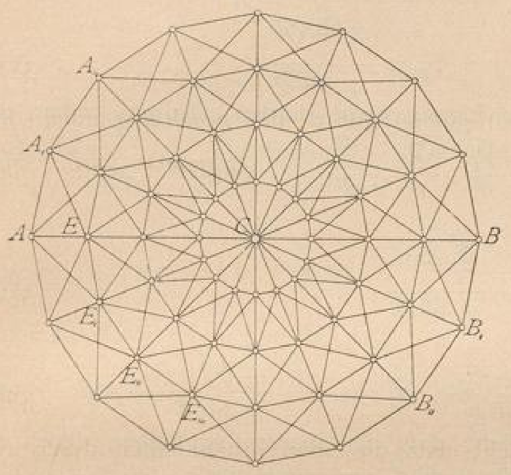
Danach kann man leicht die auf die einzelnen Knotenpunkte entfallenden, ſenkrecht zur Kuppeloberfläche gerichteten Winddrücke berechnen. Näher iſt auf dieſen Gegenſtand in der unten genannten Abhandlung des Verf.[37]) eingegangen.

b) Flache Zeltdächer.

252. Zeltdächer.

Die Zeltdächer bilden Pyramiden, in den meiſten Fällen regelmäſsige Pyramiden. Man kann ſie aus einer Anzahl radial geſtellter Binder, welche unter die ſog. Grate kommen, conſtruiren; alsdann wird die Berechnung eines jeden Binders unter Zugrundelegung der auf ihn entfallenden Belaſtungen ſo vorgenommen, wie bei den Balkendächern gezeigt iſt. Neuerdings legt man auch bei den Zeltdächern — zumal den flachen — alle Conſtructionstheile in die Dachflächen, wie bei den *Schwedler*'ſchen Kuppeln, ſo daſs ſich eine entſprechende Conſtruction ergiebt. In dieſem Falle (Fig. 350) werden eine Anzahl Binderſparren $AC, A_{,}C, A_{,,}C, BC, B_{,}C, B_{,,}C \ldots$ angeordnet; zwiſchen denſelben befinden ſich wagrechte Ringe E, $E_{,}$, $E_{,,}$, $E_{,,,} \ldots$ und in den viereckigen Feldern der Dachflächen, wegen der ungleichmäſsigen Belaſtungen, Diagonalen. Auch hier wird oft in der Dachmitte eine Laterne angeordnet, welche ſich auf einen Laternenring ſtützt, gegen den ſich die oberen Sparrenenden lehnen. Wir werden hier nur die der Kuppelconſtruction entſprechende Anordnung betrachten. Obgleich die gröſsere oder geringere Neigung der Dachflächen keinen grundlegenden Unterſchied bedingt, ſollen die Zeltdächer dennoch in flache und ſteile Zeltdächer eingetheilt werden, weil bei den erſteren die Belaſtung durch Schnee, bei den letzteren diejenige durch Wind die maſsgebende zufällige Belaſtung iſt.

Fig. 350.



Zu den flachen Zeltdächern gehören die Circus- und Theaterdächer, die Dächer über Panoramen, Locomotivſchuppen etc., zu den ſteilen hauptſächlich die Thurmdächer.

Die flachen Zeltdächer der vorbeſprochenen Anordnung ſind weiter nichts, als Kuppeldächer mit gleichem Neigungswinkel α in der ganzen Dachfläche. Man erhält alſo unter denſelben Vorausſetzungen für die Belaſtungen, wie in Art. 243 (S. 248) die hier geltenden Stabkräfte, indem man in die dort gefundenen Werthe ſtatt der veränderlichen Winkelwerthe α_{m-1}, α_m, $\alpha_{m+1} \ldots$ den conſtanten Winkelwerth α einſetzt.

253. Berechnung der Stabſpannungen.

Spannungen in den Sparren. Wiederum mögen G_1, $G_2 \ldots G_m \ldots$ die Eigengewichte der ganzen Ringzonen, P_1, $P_2 \ldots P_m \ldots$ die zufälligen Belaſtungen derſelben ſein; alsdann ſind, falls n Sparren vorhanden ſind, die Belaſtungen der einzelnen Knotenpunkte bezw. $\frac{G_1}{n}, \frac{G_2}{n} \ldots \frac{G_m}{n} \ldots$ und $\frac{P_1}{n}, \frac{P_2}{n} \ldots \frac{P_m}{n} \ldots$

37) Winddruck auf Kuppeln. Centralbl. d. Bauverw. 1898, S. 217.

Fig. 351.

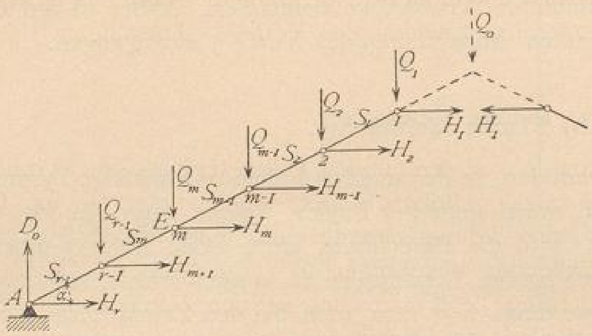
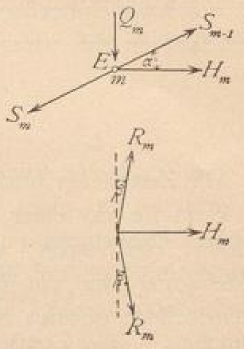
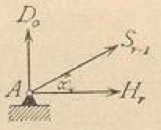


Fig. 352.





Allgemein wirke in einem Knotenpunkte m (Fig. 351) die Laft Q_m; alsdann wird allgemein

$$S_m = -\frac{\sum_1^m (Q)}{\sin \alpha} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 351.$$

Die Sparrenfpannungen durch das Eigengewicht werden erhalten, indem der Reihe nach für $Q_1, Q_2, Q_3 \ldots$ bezw. $\frac{G_1}{n}, \frac{G_2}{n}, \frac{G_3}{n} \ldots$ eingefetzt wird. Man erhält

$$S_m^g = -\frac{\sum_1^m (G)}{n \sin \alpha} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 352.$$

Für $m = 1, 2, 3 \ldots$ wird

$$S_1^g = -\frac{G_1}{n \sin \alpha}; \quad S_2^g = -\frac{G_1 + G_2}{n \sin \alpha}; \quad S_3^g = -\frac{G_1 + G_2 + G_3}{n \sin \alpha} \text{ etc.} \quad 353.$$

Aus der Gleichung 340 ergiebt fich, dafs die Sparrenfpannungen durch zufällige Laft am gröfsten bei voller Belaftung find, und zwar wird

$$S_m^{p\,max} = -\frac{\sum_1^m (P)}{n \sin \alpha} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 354.$$

und für $m = 1, 2, 3 \ldots$

$$S_1^{p\,max} = -\frac{P_1}{n \sin \alpha}; \quad S_2^{p\,max} = -\frac{P_1 + P_2}{n \sin \alpha}; \quad S_3^{p\,max} = -\frac{P_1 + P_2 + P_3}{n \sin \alpha} \text{ etc.} \quad 355.$$

Falls keine Laterne vorhanden ift, gelten die Gleichungen 351 bis 354 ebenfalls; nur ift überall in die Summen auch Q_0 aufzunehmen, d. h. der Theil der Firftbelaftung, welcher auf den Sparren entfällt. (Allerdings gilt dies nur für angenäherte Berechnung.)

Spannungen in den Ringen. Die algebraifche Summe der in E (Fig. 352) wirkenden wagrechten Kräfte ift gleich Null; bezeichnet H_m die Mittelkraft der beiden Ringfpannungen R_m, fo ift daher

$$0 = H_m + S_{m-1} \cos \alpha - S_m \cos \alpha,$$

woraus folgt:

$$H_m = (S_m - S_{m-1}) \cos \alpha = -\frac{\sum_1^m (Q) - \sum_1^{m-1} (Q)}{\sin \alpha} \cos \alpha = -Q_m \operatorname{cotg} \alpha.$$

Nun ist $H_m = 2 R_m \sin \beta$ und, da nach Art. 243 (S. 249) $\beta = \frac{\pi}{n}$ ist,

$$R_m = \frac{H_m}{2 \sin \frac{\pi}{n}} = - \frac{Q_m \operatorname{cotg} \alpha}{2 \sin \frac{\pi}{n}} \quad \ldots \ldots \ldots \quad 356.$$

Die Belastung durch das Eigengewicht erzeugt demnach eine Spannung

$$R_m^g = - \frac{G_m \operatorname{cotg} \alpha}{2 n \sin \frac{\pi}{n}} \quad \ldots \ldots \ldots \quad 357.$$

Falls ein Laternenring vorhanden ist, so gilt die Gleichung 357 auch für diesen. Für denselben ist $m = 1$ und $\sum_1^{m-1} (Q) = 0$, so wie $\sum_1^m (Q) = Q_1$. Wir erhalten demnach für $m = 1, 2, 3 \ldots$

$$R_1^g = - \frac{G_1 \operatorname{cotg} \alpha}{2 n \sin \frac{\pi}{n}}; \quad R_1^g = - \frac{G_2 \operatorname{cotg} \alpha}{2 n \sin \frac{\pi}{n}} \text{ etc.} \quad \ldots \quad 358.$$

Die Gleichungen 357 u. 358 ergeben, dass in sämmtlichen Ringen durch das Eigengewicht Druck erzeugt wird; die Gleichung 356 gilt aber nicht für den Mauerring. Am Knotenpunkt A (Fig. 351) wirken die Kräfte $D_0 = \Sigma (Q)$, H_r und S_{r-1}; mithin ist $S_{r-1} \cos \alpha + H_r = 0$, woraus $H_r = - S_{r-1} \cos \alpha$. Ferner ist

$D_0 + S_{r-1} \sin \alpha = 0$, woraus $S_{r-1} = - \frac{\sum_1^{r-1} (Q)}{\sin \alpha}$. Daher wird $H_r = \sum_1^{r-1} (Q) \operatorname{cotg} \alpha$

und da $R_r = \frac{H_r}{2 \sin \frac{\pi}{n}}$ ist, wird

$$R_r = \frac{\sum_1^{r-1} (Q) \operatorname{cotg} \alpha}{2 \sin \frac{\pi}{n}} \quad \ldots \ldots \ldots \quad 359.$$

Der Mauerring erhält also Zug.

Das Eigengewicht erzeugt in demselben die Spannung

$$R_r^g = \frac{(G_1 + G_2 + \ldots + G_{r-1}) \operatorname{cotg} \alpha}{2 n \sin \frac{\pi}{n}} \quad \ldots \ldots \quad 360.$$

Die gröfste durch zufällige Belastung erzeugte Spannung findet in einem Ringe nach Gleichung 356 statt, wenn Q_m seinen gröfsten Werth hat. Da Q, aufser beim Mauerring, nie negativ wird, so ist die Ringspannung durch zufällige Belastung, abgesehen vom Mauerring, stets Druck. Demnach wird

$$R_1^{p\,min} = - \frac{P_1 \operatorname{cotg} \alpha}{2 n \sin \frac{\pi}{n}}; \quad R_2^{p\,min} = - \frac{P_2 \operatorname{cotg} \alpha}{2 n \sin \frac{\pi}{n}} \text{ etc.};$$

allgemein

$$R_m^{p\,min} = - \frac{P_m \operatorname{cotg} \alpha}{2 n \sin \frac{\pi}{n}} \quad \ldots \ldots \ldots \quad 361.$$

Weiters iſt $R_1^{p\,max} = R_2^{p\,max} = R_m^{p\,max} = 0$. Die gröſste Druckſpannung in einem Ringe findet alſo ſchon ſtatt, wenn nur die betreffende Zone belaſtet iſt; die Belaſtung der übrigen Zonen iſt auf die Ringſpannung ohne Einfluſs. Man kann demnach auch ſagen, daſs die gröſste Ringſpannung in allen Ringen bei zufälliger Belaſtung des ganzen Daches ſtattfindet.

Im Mauerring findet der gröſste Zug durch zufällige Belaſtung bei voller Belaſtung ſtatt; derſelbe iſt

$$R_r^{p\,max} = \frac{(P_1 + P_2 \ldots + P_{r-1}) \operatorname{cotg} \alpha}{2\, n \sin \frac{\pi}{n}} \quad \ldots \ldots \ldots \quad 362.$$

Druck findet in demſelben nicht ſtatt.

Spannungen in den Diagonalen. Für dieſelbe Belaſtungsart, welche bei den Kuppeln zu Grunde gelegt iſt, ergiebt ſich der Spannungsunterſchied in zwei benachbarten Sparren, zwiſchen denen die Belaſtungsgrenze liegt, zu

$$\Delta = -\frac{\sum_1^m (P)}{n \sin \alpha}$$

und die Spannung in der Diagonalen, welche dieſelbe übertragen ſoll, zu

$$Y = \frac{\sum_1^m (P)}{n \sin \alpha} \cdot \frac{d}{s},$$

in welchem Ausdruck d, bezw. s die Längen der Diagonale und des Sparrens bezeichnen. Demnach wird

$$Y_1 = \frac{P_1}{n \,.\, \sin \alpha} \cdot \frac{d_1}{s_1}, \quad Y_2 = \frac{P_1 + P_2}{n \,.\, \sin \alpha} \cdot \frac{d_2}{s_2} \text{ etc.} \quad \ldots \quad 363.$$

Fig. 353.

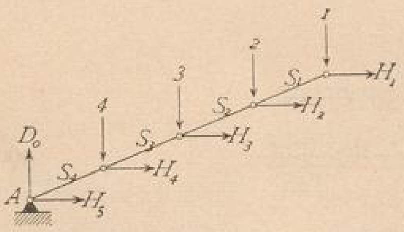
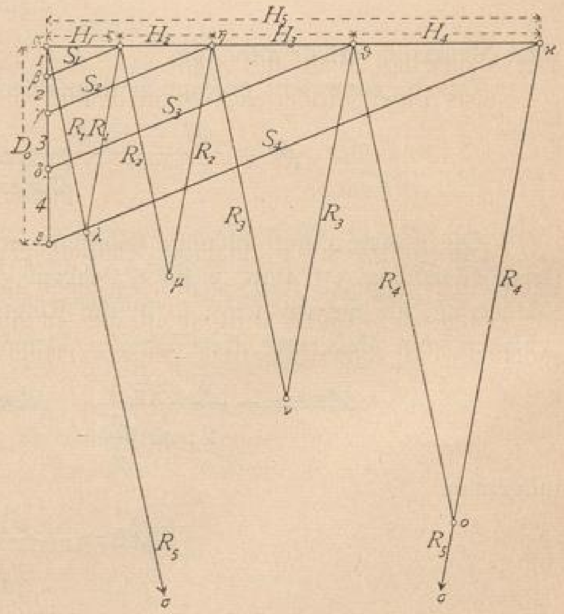


Fig. 354.



Die Berechnung kann auch nach dem Verfahren von *Müller-Breslau* vorgenommen werden, welches in Art. 246 bis 249 (S. 255) für die Kuppelflechtwerke vorgeführt iſt.

254. Graphiſche Ermittelung der Stabſpannungen.

Um die Stabſpannungen mittels Zeichnung (Fig. 353 u. 354) zu ermitteln, ſeien die Belaſtungen der einzelnen Knotenpunkte *1*, *2*, *3*, *4*; alsdann ergiebt ſich leicht, wenn $\alpha\beta = 1$, $\beta\gamma = 2$, $\gamma\delta = 3$, $\delta\varepsilon = 4$ gemacht wird, $\beta\zeta = S_1$, $\zeta\alpha = H_1$,

$\gamma\eta = S_2$, $\eta\zeta = H_2$, $\delta\vartheta = S_3$, $\vartheta\eta = H_3$, $\varepsilon\varkappa = S_4$, $\varkappa\vartheta = H_4$; ferner $\varepsilon\alpha = D_0$, $\alpha\varkappa = H_5$, $\zeta\lambda = \lambda\alpha = R_1$, $\eta\mu = \mu\zeta = R_2$, $\vartheta\nu = \nu\eta = R_3$, $\varkappa o = o\vartheta = R_4$ und $\alpha\sigma = \sigma\varkappa = R_5$ (= Mauerringfpannung).

Je nachdem nun die Kräfte *1, 2, 3, 4* die Eigengewichte oder die zufälligen Laften bedeuten, erhält man die durch die eine oder andere Belaftung erzeugten Spannungen. Die Spannungen in den Diagonalen find leicht zu conftruiren.

c) Steile Zeltdächer oder Thurmdächer.

Als lothrechte Belaftung ift hier nur das Eigengewicht einzuführen. Eine Belaftung durch Schnee findet nicht ftatt, weil wegen der grofsen Steilheit des Daches der Schnee nicht liegen bleibt. Diefe lothrechte Belaftung erzeugt, da die Conftruction eben fo, wie bei den flachen Zeltdächern, aus Sparren und Ringen zufammengefetzt wird, Spannungen, welche genau, wie dort gezeigt wurde, zu berechnen find. Auf diefe Berechnung foll defshalb hier nicht weiter eingegangen werden. Dagegen fpielt der Winddruck hier eine grofse Rolle, und die durch diefen erzeugten Spannungen follen berechnet werden. Zunächft foll die Berechnung für ein vierfeitiges Pyramidendach, alsdann für ein achtfeitiges Pyramidendach gezeigt werden.

1) Vierfeitiges Pyramidendach.

Der Winddruck auf eine Pyramidenfeite ift am gröfsten, wenn die Windrichtung im Grundrifs fenkrecht zur betreffenden Rechteckfeite fteht. Alsdann ift der Winddruck für 1 qm fchräger Dachfläche (Fig. 355 u. 356) nach Gleichung 7: 255. Belaftung.
$\nu = 120 \sin(\alpha + 10^0)$; die vom Winde getroffene fchräge Dachfläche ift

$$F = \frac{a\,\lambda}{2} = \frac{a\,h}{2 \sin\alpha},$$

mithin der Gefammtdruck gegen eine Pyramidenfeite

$$N = \frac{a\,h\,\nu}{2 \sin\alpha} \quad . \quad 364.$$

Fig. 355.

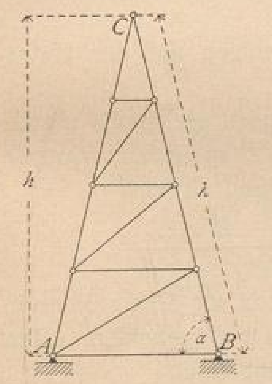


Fig. 356.

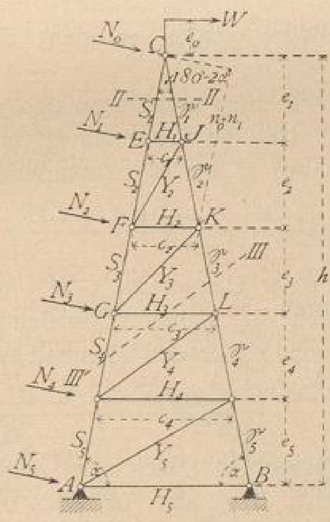
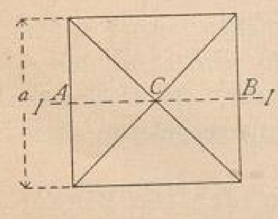


Fig. 357.

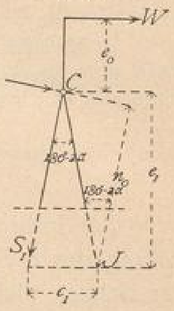


Wir denken uns nun in der Symmetrie-Ebene *I I* einen ideellen Binder *A B C* (Fig. 355) und beftimmen die darin durch den Winddruck entftehenden Spannungen; wir nehmen vorläufig die Wagrechten und Diagonalen, wie in Fig. 356 gezeichnet, an. Auf ein oben befindliches Kreuz wirke ein Winddruck W in der Höhe e_0 über dem Firftpunkt C; aufserdem wirken in den Knotenpunkten $C, E, F, G \ldots$ die Kräfte N_0, N_1, N_2, $N_3 \ldots$ fenkrecht zur Dachfläche; die Gröfse diefer Kräfte ift leicht aus den auf die bezüglichen Knotenpunkte entfallenden Dachflächen zu ermitteln.

256. Berechnung der Spannungen im ideellen Binder.

α) Berechnung der Spannungen im ideellen Binder. Um die Sparrenfpannung S_1 (Fig. 356) an der Windfeite zu erhalten, lege man einen beliebigen Schnitt durch CE, etwa nach $II\,II$, und betrachte das Bruchftück oberhalb des Schnittes. Wählt man $\mathfrak{J}$ als Momentenpunkt, fo heifst die Gleichung der ftatifchen Momente (Fig. 358):

Fig. 358.



$$0 = S_1\, e_1 \sin\alpha - W(e_0 + e_1) - N_0\, n_0 .$$

Nun ift

$$\overline{C\mathfrak{J}} = \frac{e_1}{\sin\alpha} \quad \text{und} \quad \cos(180 - 2\alpha) = \frac{n_0}{C\mathfrak{J}} = -\cos 2\alpha, \quad \text{daher}$$

$$n_0 = -\overline{C\mathfrak{J}} \cos 2\alpha = -\frac{e_1}{\sin\alpha}(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) = \frac{e_1(\sin^2\alpha - \cos^2\alpha)}{\sin\alpha} .$$

Man erhält hiernach

$$S_1 = \frac{W(e_0 + e_1)}{e_1 \sin\alpha} + \frac{N_0\, e_1(\sin^2\alpha - \cos^2\alpha)}{e_1 \sin^2\alpha} .$$

Für irgend einen Sparren FG ift K der Momentenpunkt, und für S_3 ergiebt fich der Werth

$$S_3 = \frac{1}{e_2 \sin\alpha}\Big[W(e_0 + e_1 + e_2) + N_0(n_0 + n_1) + N_1\, n_1\Big] - N_2 \operatorname{cotg}\alpha .$$

Für irgend einen Sparren KL auf der Unterwindfeite ift G der Momentenpunkt und

$$\mathfrak{S}_3 = -\frac{1}{e_3 \sin\alpha}\left[W(e_0 + e_1 + e_2 + e_3) + \frac{N_0(e_1 + e_2 + e_3) + N_1(e_2 + e_3) + N_2\, e_3}{\sin\alpha}\right].$$

Eben fo ergeben fich leicht alle Sparrenfpannungen, fowohl auf der Windfeite, wie auf der Unterwindfeite.

Die Sparren auf der Windfeite werden gezogen; diejenigen auf der Unterwindfeite werden gedrückt.

Die Spannungen in den Wagrechten und Diagonalen werden gleichfalls mittels der Momentenmethode ermittelt. Um die Spannung H_3 in GL zu finden, fchneide man fchräg nach $III\,III$; alsdann ift C der Momentenpunkt, und es wird

$$H_3 = -\frac{N_1\, e_1 + N_2(e_1 + e_2) + N_3(e_1 + e_2 + e_3)}{(e_1 + e_2 + e_3)\sin\alpha} + \frac{W e_0}{e_1 + e_2 + e_3} .$$

Die Spannung Y_3 endlich in der Diagonalen GK wird, da für GK wiederum C der conjugirte Punkt ift, durch die Momentengleichung für C gefunden. Man erhält, wenn y_3 der Hebelsarm von Y_3 für den Momentenpunkt C ift,

$$Y_3 = \frac{1}{y_3}\,\frac{N_1\, e_1 + N_2(e_1 + e_2)}{\sin\alpha} - \frac{W e_0}{y_3} .$$

Ob die Diagonalen und Wagrechten Druck oder Zug erhalten, hängt wefentlich von der Gröfse des Moments $W e_0$ ab. Ift $W = 0$, fo werden bei der gezeichneten Richtung der Diagonalen die Wagrechten gedrückt, die Diagonalen gezogen. Bei der entgegengefetzten Windrichtung findet entgegengefetzte Beanfpruchung ftatt.

257. Graphifche Ermittelung der Spannungen im ideellen Binder.

β) Graphifche Ermittelung der Spannungen im ideellen Binder. Wird zunächft von der Kraft W abgefehen, fo ergiebt fich ohne Schwierigkeit der in Fig. 359 gezeichnete Kräfteplan, worin alle Stabfpannungen, welche durch Winddruck erzeugt werden, enthalten find.

Fig. 359.

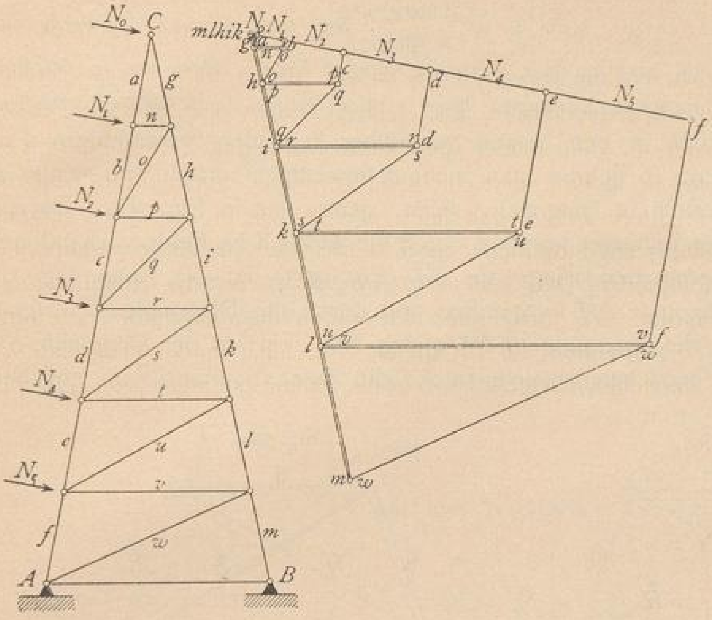
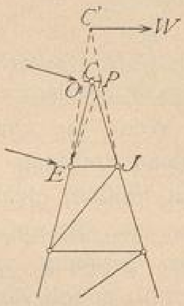


Fig. 360.



Falls noch ein Winddruck W vorhanden ist, so empfiehlt es sich, für die graphische Bestimmung der Spannungen statt der wirklich vorhandenen Stäbe $E\,C$ und $J\,C$ zwei Stäbe $E\,C'$ und $J\,C'$ einzuführen, wobei C' der Schnittpunkt der Kraft W mit der Mittel-Lothrechten (Fig. 360) ist; die Ermittelung kann dann für den Thurm mit der Spitze $E\,O\,C'\,P\,J$ nach der *Cremona*'schen Methode erfolgen. Die Spannungen in $E\,C$ und $J\,C$ können mit geringem Fehler denjenigen, welche sich für $E\,O$ und $P\,J$ ergeben haben, gleich gesetzt werden.

γ) Zurückführung der Spannungen im ideellen Binder auf die wirklichen Stabspannungen. Die bisher berechneten Spannungen finden im ideellen Binder $A\,C\,B$ (Fig. 361) statt. Jede Spannung in einem Stabe des ideellen Binders wird nun durch zwei Stabspannungen der beiden wirklichen Binder geleistet, deren Ebenen mit derjenigen des ideellen Binders den Winkel $(90 - \alpha)$ einschliessen. 258. Wirkliche Stabspannungen.

Fig. 361.

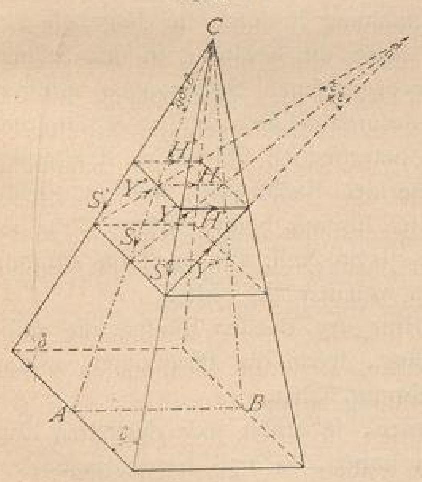
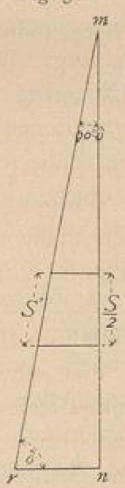


Fig. 362.



Die Spannung S in irgend einem Sparren des ideellen Binders wird durch zwei Spannungen S' ersetzt; demnach ist

$$S = 2\,S' \cos(90 - \delta) = 2\,S' \sin\delta,$$

woraus

$$S' = \frac{S}{2 \sin \delta}; \quad . \quad 365.$$

eben so

$$\mathfrak{S}' = \frac{\mathfrak{S}}{2 \sin \delta} \quad . \quad . \quad 366.$$

Ferner wird $H = 2\,H'$, woraus

$$H' = \frac{H}{2}; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 367.$$

$$Y = 2\,Y' \cos \varepsilon,$$

woraus

$$Y' = \frac{Y}{2 \cos \varepsilon} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 368.$$

Auch auf graphifchem Wege ift die Zurückführung leicht. Man conftruire (Fig. 362) den Winkel $(90 - \delta)$, bezw. ε. Ift $\sphericalangle\, r\,m\,n = 90 - \delta$, fo ift $\overline{m\,r} = \frac{\overline{m\,n}}{\sin \delta}$. Man trage demnach die Werthe für $\frac{S}{2}$ und $\frac{\mathfrak{S}}{2}$ auf der Linie $m\,n$ ab, projicire diefe Abfchnitte auf $m\,r$; alsdann erhält man in den Projectionen die gefuchten wirklichen Sparrenfpannungen. Eben fo ift die Divifion durch $\cos \varepsilon$ vorzunehmen.

Wenn die Diagonalen in den beiden gegenüber liegenden Seitenfeldern verfchiedene Richtung haben, fo nehme man nichtsdeftoweniger zunächft an, dafs in beiden Feldern gleich gerichtete Diagonalen feien, genau wie in Fig. 361. Darauf erfetze man die nur vorläufig angenommene durch die wirklich im Felde vorhandene. In der vorläufig angenommenen Diagonale $\overline{b\,d}$ (Fig. 363) fei die Spannung zu Y' ermittelt; foll die Diagonale $\overline{b\,d}$ fortgelaffen und durch die Diagonale $\overline{a\,c}$ erfetzt werden können, fo mufs die Spannung in $\overline{b\,d}$ gleich Null fein; in der Diagonale $\overline{a\,c}$ mufs alfo eine Kraft Z herrfchen, welche in $\overline{b\,d}$ die Zufatzfpannung von gleicher

Fig. 363.

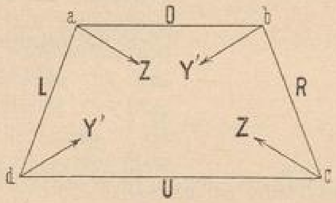
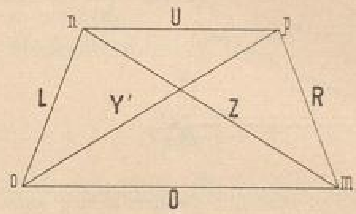


Fig. 364.



Gröfse Y', aber entgegengefetztem Sinne mit der bereits in $\overline{b\,d}$ herrfchenden Spannung erzeugt. Bringt man in a und c je die Kraft $Z = \overline{m\,n}$ an (Fig. 364), fo erhält man die Gröfse der in den Stäben des Trapezes wirkenden Spannungen aus dem Kräfteplan. Es ift $L = \overline{o\,n}$, $O = \overline{m\,o}$, $U = \overline{n\,p}$ und $R = \overline{p\,m}$, und wegen der Gleichheit der Diagonalen des Trapezes ift $Z = Y'$ (abfolut genommen). Erfetzt man alfo die Diagonale $\overline{b\,d}$ mit der berechneten Spannung Y' durch die Diagonale $a\,c$, fo herrfcht in letzterer der gleiche Zug. Die durch die Kräfte Z in den Stäben des Trapezes und des übrigen Fachwerkes hervorgerufenen Spannungen addiren fich zu den bereits in denfelben vorhandenen und durch die Berechnung ermittelten. Diefe Zufatzfpannungen find für die Stäbe des betreffenden Feldes im Kräfteplan der Fig. 364 verzeichnet, für alle übrigen Stäbe des Fachwerkes find fie gleich Null. Denn für jeden diefer übrigen Stäbe ift der Einflufs beider Kräfte Z zu berückfichtigen. Die Refultirende beider Z ift aber gleich Null, alfo auch ihr Einflufs auf die Stabfpannungen aufserhalb des Feldes, in welchem fie wirken.

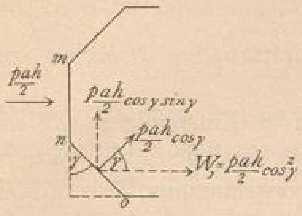
Das vorftehend angegebene Verfahren, mit Hilfe des ideellen Binders die Stabfpannungen zu ermitteln, ift alfo auch anwendbar, wenn die Diagonalen zweier gegenüber liegender Felder entgegengefetzte Richtung haben.

Wenn einfache Diagonalen angeordnet werden, fo erhält jede derfelben Zug und Druck; will man nur gezogene Diagonalen haben, fo find Gegendiagonalen anzuordnen, worüber das Erforderliche bereits mehrfach gefagt ift.

2) Achtfeitiges Pyramidendach.

259. Belaftung. Wir nehmen hier die Windrichtung, der einfachen Rechnung halber, wagrecht an und berechnen aus demfelben Grunde den Winddruck fo, als wenn die Seitenflächen lothrecht ftänden. Der dabei gemachte Fehler ift gering. Wenn die Wind-

Fig. 365.

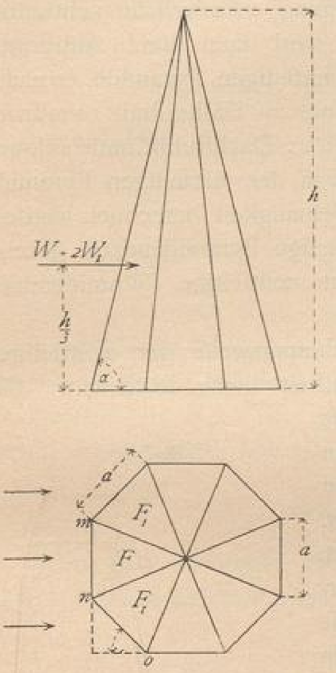


richtung im Grundriſs ſenkrecht zur Seite mn (Fig. 365) angenommen wird, die Seitenlänge des regelmäſsigen Achteckes an der Unterkante der Pyramide mit a, die Höhe der Pyramide mit h und der Druck für die Flächeneinheit mit p bezeichnet wird, ſo iſt der Druck gegen die Fläche F demnach

$$W = \frac{p\,a\,h}{2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 369.$$

Der Winddruck auf die Fläche F_1 (Fig. 366) ergiebt ſich unter obigen vereinfachenden Annahmen folgendermaſsen. Die (lothrecht gedachte) Fläche ſchlieſst mit der angenommenen Windrichtung (Fig. 365) einen Winkel $(90 - \gamma)$ ein; mithin iſt der ſenkrechte Winddruck auf die Fläche für die Flächeneinheit nach Art. 31 (S. 24)

Fig. 366.



$$n = p \sin (90 - \gamma)$$

oder

$$n = p \cos \gamma ,$$

und der Winddruck auf die ganze Fläche

$$\frac{p\,a\,h}{2} \cos \gamma .$$

Dieſe Kraft zerlegt ſich nun in eine Seitenkraft, welche dieſelbe Richtung hat, wie W, und in eine ſenkrecht hierzu ſtehende. Die erſtere iſt (Fig. 365)

$$W_1 = \frac{p\,a\,h \cos^2 \gamma}{2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 370.$$

Ein genau gleicher Winddruck wirkt (Fig. 366) auf die andere Fläche F_1; mithin iſt der geſammte auf Umkanten der Pyramide wirkende Winddruck

$$W + 2\,W_1 = \frac{p\,a\,h}{2}\,(1 + 2 \cos^2 45^0)$$

$$= \frac{p\,a\,h}{2}\left(1 + \frac{2}{2}\right) = p\,a\,h . \quad . \quad . \quad 371.$$

Der Angriffspunkt dieſer Kraft liegt in der Höhe $\frac{h}{3}$ über der Grundfläche der Pyramide.

Für irgend einen Pyramidentheil (Fig. 367) von der Höhe z erhält man, wenn die Seite des Achteckes, welches für dieſen Theil die Grundfläche bildet, mit x und die ganze Breite der Grundfläche mit y bezeichnet wird,

$$W_z = p\,x\,z \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 372.$$

W_z greift in der Höhe $\frac{z}{3}$ über dieſer Grundfläche an.

Nun iſt $\frac{x}{z} = \frac{a}{h}$, alſo $x = \frac{a}{h} z$ und

$$W_z = p\,\frac{a}{h}\,z^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 373.$$

Der Zuwachs der Kraft W_z, welcher auf einen Streifen von der Höhe dz entfällt, iſt demnach $d\,W_z = 2\,p\,\frac{a}{h}\,z\,dz$, und die Windbelaſtung für die Höheneinheit wird

$$\frac{d\,W_z}{d\,z} = 2\,p\,\frac{a}{h}\,z \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 374.$$

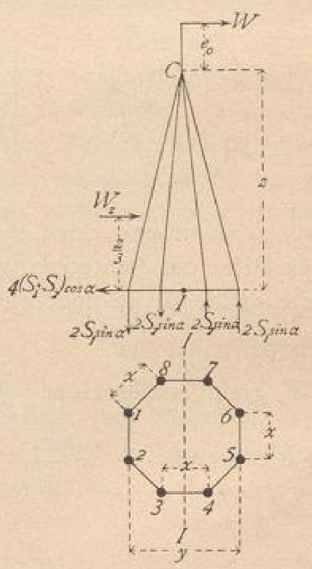
Daraus folgt, dafs die Laftvertheilung nach dem Gefetze des Dreieckes von der Spitze bis zur Bafis des Thurmes ftattfindet.

260. Thurm-Fachwerk.

Das achtfeitige Pyramidendach mit 8 Sparren auf 8 Fufspunkten ift ein ftatifch unbeftimmtes Fachwerk. Könnte man die Spitze fortlaffen, fo wäre es ftatifch beftimmt; die Berechnung würde dann genau fo vorgenommen, wie dies in Art. 246 bis 248 (S. 255 bis 257) für die Kuppel gezeigt ift. Durch das Aufbringen der Spitze mit 8 Sparren wird das Fachwerk fünffach ftatifch unbeftimmt (es erhält 5 überzählige Unbekannte). Diefe vielfache ftatifche Unbeftimmtheit kann man dadurch vermindern, dafs man die Spitze nur aus 4 Sparren conftruirt, indem man alfo im oberften Theile des Thurmes nur immer einen um den anderen Sparren bis zur Spitze reichen läfft. Der oberfte Theil des Thurmfachwerkes bildet dann eine vierfeitige Pyramide. Die für die äufsere Erfcheinung erforderliche achtfeitige Pyramide auch in dem oberften Theile des Thurmes wird dann durch Anbringen entfprechend geformter Holzfutter auf die Ringe der vierfeitigen Pyramide erreicht. Eine folche Conftruction ift bei den Thürmen des Domes zu Halberftadt (conftruirt von *Cramer*) ausgeführt und in Theil III, Band 2, Heft 4: Dachftuhl-Conftructionen (Art. 234, S. 315) diefes »Handbuches« zu finden. Die in der vierfeitigen Pyramide wirkenden Spannungen können dann mit genügender Genauigkeit berechnet werden, wie in Art. 255 bis 258 (S. 269 bis 271) für das vierfeitige Pyramidendach gezeigt ift; diefe Spannungen werden darauf als äufsere, das achtfeitige Pyramidendach belaftende Kräfte eingeführt.

Die in nachftehenden Artikeln vorgeführte Berechnungsweife der achtfeitigen Thurmpyramide nimmt auf die ftatifche Unbeftimmtheit keine Rückficht. Die Sparrenberechnung ift möglich, wenn man annimmt, dafs in einem wagrecht genommenen Querfchnitt durch den Thurm (Fig. 367) in den einzelnen Querfchnittspunkten die Spannungen auf die Flächeneinheit fich verhalten, wie die Abftände der betreffenden Querfchnittspunkte von der Null-Linie des Querfchnittes. Da die Querfchnittsflächen aller 8 Sparren naturgemäfs gleich grofs gemacht werden, fo kann man auch fagen: Es wird die Annahme gemacht, dafs die Sparrenfpannungen fich verhalten, wie die Abftände der Schwerpunkte der Sparrenquerfchnitte von der Null-Linie des ganzen Thurmquerfchnittes.

Fig. 367.



261. Spannungen in den Sparren.

Stabfpannungen. Aufser W_z wirke auf das Thurmkreuz (Fig. 367) noch ein Winddruck W in der Höhe e_0 über der Spitze; alsdann ift das Moment des Windes, bezogen auf die wagrechte, in der Grundfläche des betreffenden Thurmftückes gelegene Schwerpunktsaxe II des Querfchnittes (in der Höhe z unter der Spitze)

$$M_z = W_z \frac{z}{3} + W(e_0 + z) \quad . \quad . \quad . \quad 375.$$

Diefes Moment mufs durch die Spannung der Sparren an der betrachteten Stelle aufgehoben werden.

Sind die Spannungen in den vier Sparren *1*, *2*, *5*, *6*, welche um $\frac{y}{2}$ von der Axe II abſtehen, S_1, diejenigen in den vier um $\frac{x}{2}$ von der Axe II abſtehenden Sparren *3*, *4*, *7*, *8* gleich S_2, ſo iſt, wenn mit geringem Fehler der Sparrenwinkel gegen die wagrechte Ebene gleich α geſetzt wird, das Moment der Sparrenſpannungen für die Axe II (die Null-Linie des Geſammtquerſchnittes) $2\, S_1\, y \sin \alpha + 2\, S_2\, x \sin \alpha$. Demnach muſs

$$M_z = 2\, S_1\, y \sin \alpha + 2\, S_2\, x \sin \alpha$$

ſein. Nach Art. 260 wird angenommen, daſs ſtattfindet:

$$\frac{S_2}{S_1} = \frac{\frac{x}{2}}{\frac{y}{2}} = \frac{x}{y}, \quad \text{d. h.} \quad S_2 = S_1 \frac{x}{y};$$

daher wird

$$M_z = 2\, S_1 \sin \alpha \left[y + \frac{x^2}{y} \right] = \frac{2\, S_1 \sin \alpha}{y} (x^2 + y^2)$$

ſein, woraus folgt:

$$S_1 = \frac{M_z\, y}{2\,(x^2 + y^2) \sin \alpha} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 376.$$

$$S_2 = \frac{M_z\, x}{2\,(x^2 + y^2) \sin \alpha} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 377.$$

Für M_z ſind der Reihe nach die Werthe einzuführen, welche ſich bei den verſchiedenen Höhen z ergeben. Dieſe Spannung kann in jedem Sparren ſowohl als Zug, wie als Druck ſtattfinden, da der Wind von allen Seiten kommen kann. S_1 iſt ſtets gröſser als S_2. Die gröſste Spannung, welche durch Winddruck in allen Sparren erzeugt wird, hat alſo den Werth

$$S_{p\,max} = \pm \frac{M_z\, y}{2\,(x^2 + y^2) \sin \alpha} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 378.$$

Wenn die Pyramide über einem regelmäſsigen Achteck errichtet iſt, ſo iſt $y = x + 2\, x \cos 45^0 = x \,.\, 2{,}414$, und es wird dann

$$\left.\begin{aligned} S_{p\,max} &= \pm \frac{M_z \,.\, 0{,}177}{x \sin \alpha} \\ \text{bezw.}\qquad S_{p\,max} &= \pm \frac{M_z \,.\, 0{,}427}{y \sin \alpha} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 379.$$

262. Spannungen in den Ringen und Diagonalen.

Auf einen beliebigen Theil der vom Winde voll getroffenen Pyramidenſeite $O B' C'$ (Fig. 368*a*) entfalle der Winddruck N; auf die entſprechenden Theile der angrenzenden Seitenfläche $O A' B'$ und $O C' D'$ entfalle je der Winddruck N'. Nach Früherem iſt $N' = N \cos 45^0 = \frac{N}{\sqrt{2}}$. In B wirkt dann $\frac{N}{2}$, bezw. $\frac{N'}{2}$, wie in Fig. 368*b* gezeichnet iſt; desgleichen in C.

Die Laſten $\frac{N}{2}$ und $\frac{N'}{2}$ zerlegen ſich in B, bezw. in C in Seitenkräfte, welche in die Ebenen $O B' A'$, $O B' C'$ und $O C' D'$ fallen. Aus Fig. 368*c* ergiebt ſich im Punkte B, wenn $\alpha\beta = \frac{N}{2}$ und $\beta\delta = \frac{N'}{2}$ iſt, die Gröſse der Seitenkräfte T, bezw. T' und T'':

$$T_0' = \overline{\varepsilon\beta} + \overline{\beta\gamma} = \frac{N'}{2} + \frac{N}{2\cos 45^0} = \frac{N}{2\sqrt{2}} + \frac{N\sqrt{2}}{2} = \frac{N}{2\sqrt{2}}\left[1+2\right] = 1{,}06\,N$$

$$T = \overline{\gamma\alpha} + \overline{\delta\varepsilon} = \frac{N}{2} + \frac{N'}{2\cos 45^0} = \frac{N}{2} + \frac{N\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = N.$$

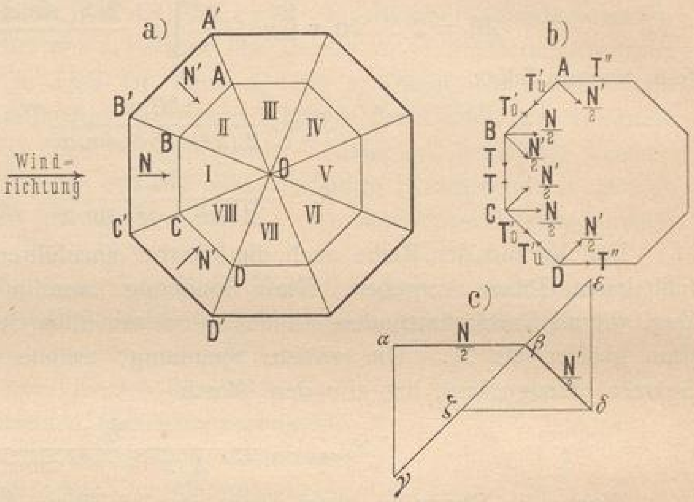
Für Punkt A erhält man: 380.

$$T_u' = \overline{\zeta\beta} = \frac{N'}{2} = \frac{N}{2\sqrt{2}} = 0{,}354\,N,$$

$$T'' = \overline{\delta\zeta} = \frac{N'}{2\cos 45^0} = \frac{N'\sqrt{2}}{2} = \frac{N}{2}.$$

In der Seitenfläche $OB'C'$, welche vom Winde voll getroffen wird, find die Spannungen der Ringftäbe von B und C aus je gleich T. Die Gröfse von T hängt von der Gröfse der Kraft N, d. h. von der Gröfse der auf den betreffenden Stab entfallenden, vom Winde getroffenen Fläche ab. Die Diagonalen in diefer Seitenfläche werden bei diefer Belaftung nicht beanfprucht.

Fig. 368.



In der Seitenfläche $OA'B'$ wirkt von der Seite des Grates OB' (des Windgrates) aus die Belaftung T_0', von der Seite des Grates OA' (des Unterwindgrates) aus die negative Belaftung T_u' auf das Fachwerk. Diefe Belaftungen müffen durch das in der Seitenfläche $OB'A'$ liegende Fachwerk auf die feften Auflagerpunkte $A'B'$ gebracht werden. Das Fachwerk diefer Seitenfläche wirkt dabei wie ein Freiträger (fiehe Art. 158, S. 151[38]). Die Belaftungen, fowohl von der Seite des Grates OB' (des Windgrates), wie des Grates OA' (des Unterwindgrates), nehmen von der Spitze nach dem Auflager entfprechend dem Gefetze des Dreieckes (linear) zu (fiehe Art. 259, S. 273). Der Winddruck gegen die Fläche I von der Spitze bis zu einer Höhe z unter derfelben ift mit den Bezeichnungen in Fig. 367: $N_z = p\,\frac{xz}{2}$ und, da $x = \frac{a}{h}\,z$ ift,

$$N_z = \frac{pa}{2h}\,z^2.$$

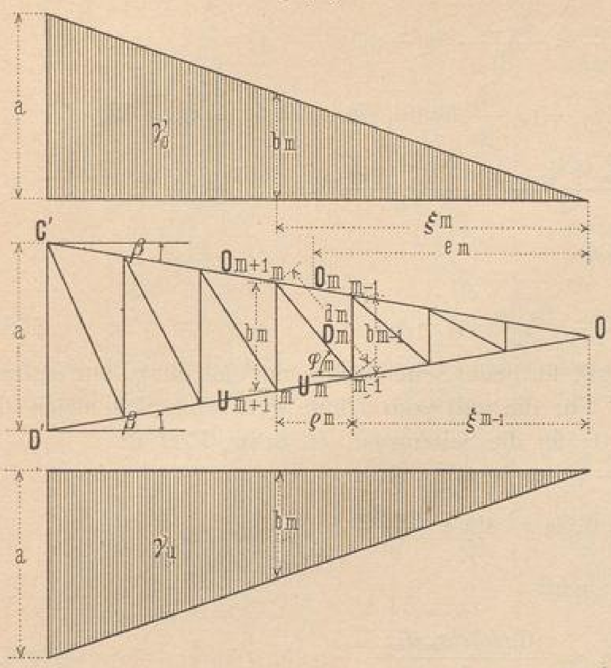
Sonach ift die pofitive Belaftung des Fachwerkes in der Seitenfläche II, bezw. $VIII$ auf die Höhe z unter der Spitze mit Rückficht auf Gleichung 380

$$T_{0_z}' = 1{,}06\,\frac{pa}{2h}\,z^2, \qquad \ldots \ldots \ldots \ldots \qquad 381.$$

---

38) Siehe bezüglich nachftehender Ableitung: MÜLLER-Breslau, H. Beitrag zur Theorie des räumlichen Fachwerks. Centralbl. d. Bauverw. 1892, S. 257. — Auch als Sonderabdruck erfchienen: Berlin 1892.

Fig. 369.



die negative Belaftung deffelben Fachwerkes

$$T_{u_z}{}' = 0{,}354 \frac{p\,a}{2\,h} z^2 \quad . \quad 382.$$

In Fig. 369 ift das Fachwerk der Seitenfläche *VIII* (*O C' D'*) des leichteren Verftändniffes halber mit wagrechter Axe als Freiträger gezeichnet. Die Belaftungen find nach Gröfse und Vertheilung darüber, bezw. darunter angegeben; dabei ift die auf die Einheit der fchraffirten Flächen entfallende Belaftung (γ_0, bezw. γ_u) fo gewählt, dafs die Abmeffungen b und ξ der Belaftungsdreiecke diefelben find, wie diejenigen des Freiträgers. Die gefammte Belaftung von der Seite des Windgrates folgt aus Gleichung 381 für $z = h$; fie ift $T_{0_h}{}' = 1{,}06 \frac{p\,a\,h}{2}$. Die Einheitsbelaftung γ_0 folgt dann aus der Bedingungsgleichung:

$$\gamma_0 \frac{a\,h}{2 \sin \alpha} = 1{,}06 \frac{p\,a\,h}{2},$$

$$\gamma_0 = 1{,}06\, p \sin \alpha; \quad \ldots\ldots\ldots \quad 383.$$

eben fo ergiebt fich die Einheitsbelaftung der unteren Fläche zu

$$\gamma_u = 0{,}354\, p \sin \alpha \quad \ldots\ldots\ldots \quad 384.$$

Das Gleichgewicht am m-ten Knotenpunkte der oberen Gurtung bedingt:

$$D_m \cos \varphi_m = O_{m+1} \cos \beta - O_m \cos \beta .$$

Bedeuten M_m, bezw. M_{m-1} die Momente der äufseren Kräfte für die Knotenpunkte m, bezw. $m-1$, fo ift nach Fig. 369

$$O_{m+1} \cos \beta = \frac{M_m}{b_m} \quad \text{und} \quad O_m \cos \beta = \frac{M_{m-1}}{b_{m-1}};$$

mithin

$$D_m \cos \varphi_m = \frac{M_m}{b_m} - \frac{M_{m-1}}{b_{m-1}} .$$

Bezeichnet d_m die Länge der Diagonale, ρ_m die Höhe des betreffenden Feldes in der Dachfchräge gemeffen, fo ift $\cos \varphi_m = \frac{\rho_m}{d_m}$, alfo

$$D_m = \frac{d_m}{\rho_m} \left(\frac{M_m}{b_m} - \frac{M_{m-1}}{b_{m-1}} \right).$$

Ferner ift

$$M_m = \frac{b_m\, \xi_m}{2} \cdot \frac{\xi_m}{3} (\gamma_0 - \gamma_u), \quad \text{alfo} \quad \frac{M_m}{b_m} = \frac{\xi_m{}^2}{6} (\gamma_0 - \gamma_u),$$

und eben fo

$$\frac{M_{m-1}}{b_{m-1}} = \frac{\xi_{m-1}^2}{6} (\gamma_0 - \gamma_u);$$

mithin $D_m = \frac{(\xi_m^2 - \xi_{m-1}^2)}{6} (\gamma_0 - \gamma_u) \frac{d_m}{\rho_m}$ und, da $\rho_m = \xi_m - \xi_{m-1}$ ift,

$$D_m = \frac{(\xi_m + \xi_{m-1})}{2} \cdot \frac{(\gamma_0 - \gamma_u)}{3} d_m .$$

Mit $e_m = \frac{\xi_m + \xi_{m-1}}{2}$ wird

$$D_m = \frac{e_m d_m}{3} (\gamma_0 - \gamma_u) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 385.$$

Vorftehende Entwickelung gilt für jede Seitenfläche; nur find für γ_0 und γ_u die bezüglichen Werthe einzufetzen. Für die voll vom Winde getroffene Seitenfläche *I* ift $\gamma_0 - \gamma_u =$ Null, alfo alle $D = 0$; für die Seitenwand *II*, bezw. *VIII* ift

$$(\gamma_0 - \gamma_u) = 0{,}706\, p \, . \sin \alpha ;$$

alfo

$$D_m = 0{,}706\, p \, . \sin \alpha \frac{e_m d_m}{3} .$$

Setzt man $e_m = \frac{z_m}{\sin \alpha}$, fo wird

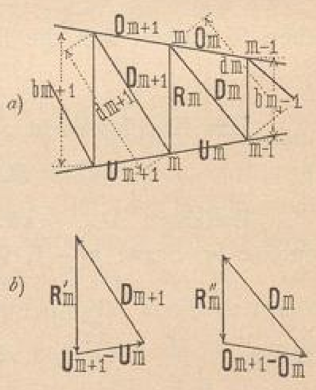
$$D_m = \frac{0{,}706\, p\, z_m d_m}{3} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 386.$$

Ringfpannungen. Um die Ringfpannungen (d. h. die Spannungen der Pfoften im Freiträger der Fig. 369) zu beftimmen, ermittelt man zweckmäfsig getrennt die Beiträge, welche durch die Belaftungen γ_0 und diejenigen, welche durch die Laften γ_u erzeugt werden. Für $\gamma_u = 0$ fei im m-ten Ringftabe die Spannung R_m'; das Gleichgewicht am m-ten Knotenpunkte der unteren Gurtung führt zum Kraftpolygon in Fig. 370*b*. Es ergiebt fich $-\frac{R_m}{D_{m+1}} = \frac{b_{m+1}}{d_{m+1}}$. Nach Gleichung 385 ift für $\gamma_u = 0$: $D_{m+1} = \frac{e_{m+1} d_{m+1}}{3} \gamma_0$;

alfo

$$R_m' = - \frac{e_{m+1} b_{m+1} \gamma_0}{3} .$$

Fig. 370.



Für $\gamma_0 = 0$ ergiebt die Betrachtung des m-ten Knotenpunktes der oberen Gurtung aus dem Kraftpolygon in Fig. 370*b* $\frac{R_m''}{-D_m} = \frac{b_{m-1}}{d_m}$. Nach Gleichung 385 ift für $\gamma_0 = 0$: $D_m = - \frac{e_m d_m \gamma_u}{3}$; fomit

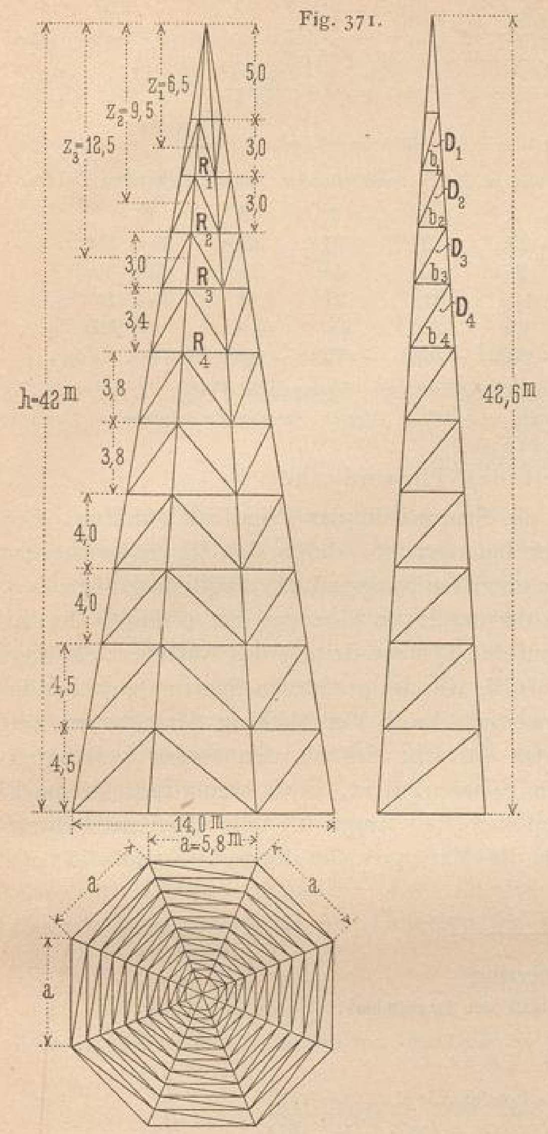
$$R_m'' = \frac{e_m b_{m-1} \gamma_u}{3} .$$

Somit wird die Ringfpannung durch die gemeinfame Belaftung γ_0 und γ_u

$$R_m = - \frac{1}{3} \left[b_{m+1} e_{m+1} \gamma_0 - e_m b_{m-1} \gamma_u \right] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 387.$$

Da der Wind von allen Seiten kommen kann, fo ift zu unterfuchen, in welcher Seitenfläche die Diagonal- und Ringfpannungen am gröfsten werden können; die erhaltenen Werthe find der Conftruction der Diagonalen und Ringftäbe in allen Seitenflächen zu Grunde zu legen.

Fig. 371.



Zu den vorftehend ermittelten, durch den Wind hervorgerufenen Stabfpannungen kommen noch diejenigen durch das Eigengewicht; diefe find nach Art. 253 u. 254 (S. 265) leicht zu finden.

Beifpiel. Der in Fig. 371 im Grundrifs und Aufrifs dargeftellte Thurm über einem regelmäfsigen Achteck hat eine Höhe $h = 42$ m; die Seite der achteckigen Grundfläche ift $a = 5{,}8$ m. Die Spannungen der Sparren, der Ring- und Diagonalftäbe find bei einem Winddruck $p = 120$ kg auf das Quadr.-Meter normal getroffener Fläche zu ermitteln. 263. Beifpiel.

α) Sparrenfpannungen. Die Felder werden von der Spitze nach der Grundfläche hin mit *1, 2, 3 . . . 9, 10* bezeichnet, die zu den einzelnen Feldern gehörigen Werthe z bis zur Mitte der Höhe des betreffenden Feldes gerechnet. Man erhält nach Gleichung 375 die Gröfse des Windmoments, welches die Sparrenfpannungen erzeugt, zu

$$M_z = W_z \frac{z}{3} + W(e_0 + z).$$

Nach Gleichung 373 ift aber:

$$W_z = \frac{p\,a\,z^2}{h};$$

der Winddruck auf das Thurmkreuz wird zu $W = 250$ kg und die Höhe deffelben über der Spitze zu $e_0 = 4{,}0$ m angenommen. Alsdann ift

$$M_z = \frac{p\,a}{h} \frac{z^3}{3} + 1000 + 250\,z$$

und mit $\frac{p\,a}{3\,h} = \frac{120}{3} \cdot \frac{5{,}8}{42} = 5{,}52$

$$M_z = (5{,}52\,z^3 + 250\,z + 1000) \text{ kgm.}$$

Die Berechnung ergiebt folgende Tabelle:

$z =$	6,5	9,5	12,5	15,7	19,3	23,1	27	31	35,25	39,75	Met.;
$M_z =$	4140	8100	14900	26300	45500	74800	116400	173200	251700	357620	Kilogr.-Met.;
$x =$	0,90	1,31	1,73	2,17	2,7	3,19	3,73	4,28	4,86	5,5	Met.;
$S =$	828	1113	1548	2178	3032	4212	5616	7284	9320	11700	Kilogr.

Diefe Werthe können fämmtlich fowohl Zug wie Druck bedeuten.

β) Diagonalen. Gröfste Beanfpruchung der Diagonalen findet in den Seitenflächen *II* und *VIII* (Fig. 368) ftatt. Nach Gleichung 386 ift

$$D_m = \frac{0{,}706\,p}{3} z_m\,d_m = \frac{0{,}706 \cdot 120}{3} z_m\,d_m,$$

fomit

$$D_m = \sim 28\,z_m\,d_m.$$

Das Verzeichnen der Seitenfläche ergab folgende Werthe für d_m, woraus dann die ebenfalls in der Tabelle verzeichneten Werthe von D fich ergaben:

$z_m =$	6,5	9,5	12,5	15,7	19,3	23,1	27	31	35,25	39,75	Met.;
$d_m =$	3,2	3,4	3,5	4,1	4,8	5,0	5,5	5,95	6,2	7,1	Met.;
$D =$	588	912	1230	1815	2610	3240	4190	5200	6170	7960	Kilogr.

Auch diefe Werthe können, falls nicht Gegendiagonalen angeordnet find, Zug und Druck bedeuten.

γ) Ringſpannungen. Nach Gleichung 387 iſt $R_m = -\frac{1}{3}\,(b_{m+1}\,e_{m+1}\,\gamma_0 - e_m\,b_{m-1}\,\gamma_u)$.

In der Seitenfläche *VIII* iſt $\gamma_0 = 1{,}06\,p \sin\alpha$, $\gamma_u = 0{,}354\,p \sin\alpha$, $e_{m+1} = \frac{z_{m+1}}{\sin\alpha}$ und $e_m = \frac{z_m}{\sin\alpha}$; alſo

$$R_m = -\frac{p}{3}\,(1{,}06\,b_{m+1}\,z_{m+1} - 0{,}354\,b_{m-1}\,z_m).$$

Man erhält für die verſchiedenen Werthe von m die in nachſtehender Tabelle ſtehenden Zahlen:

$m =$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
$z_{m+1} =$	9,5	12,5	15,7	19,3	23,1	27	31	35,25	39,75	Met.;
$b_{m+1} =$	1,55	1,95	2,4	3,0	3,5	4,05	4,6	5,2	5,8	Met.;
$z_m =$	6,5	9,5	12,5	15,7	19,3	23,1	27	31	35,25	Met.;
$b_{m-1} =$	0,72	1,1	1,55	1,95	2,4	3,0	3,5	4,05	4,6	Met.;
$R_m =$	−558	−888	−1327	−2026	−2780	−3666	−4723	−6036	−7484	Kilogr.

Die Ringſpannungen in Fläche *I* ſind weſentlich kleiner, als diejenigen in Fläche *II*, bezw. *VIII*; mithin ſind dieſe, d. h. die in vorſtehender Tabelle ermittelten Werthe für die Berechnung zu Grunde zu legen.

3) Standfeſtigkeit der Thurmdächer.

264. Verankerung.

Durch die Windbelaſtung werden die Sparren an der Windſeite auf Zug, diejenigen an der Unterwindſeite auf Druck beanſprucht; durch das Eigengewicht erhalten alle Sparren Druck. Wenn der im unterſten Sparrenſtück mögliche gröſste Zug in Folge des Winddruckes gröſser iſt, als der durch das Eigengewicht erzeugte Druck, ſo iſt Gleichgewicht nur möglich, wenn auf den Sparren Seitens des Auflagers ein Zug ausgeübt wird, welcher wenigſtens ſo groſs iſt, wie der gröſste im Sparren herrſchende Zug. Dieſer Zug Seitens des Auflagers wird durch Verankerung der Sparren mit dem Thurmmauerwerk erzeugt, und das Gewicht des an den Anker gehängten Mauerwerkes, welches als Zug auf den Sparren wirkt, muſs wenigſtens ſo groſs ſein, wie der gröſstmögliche Zug in demſelben. Es empfiehlt ſich, die Verankerung weiter hinabzuführen, etwa ſo weit, daſs das Mauergewicht doppelt ſo groſs iſt, als der gröſste Zug im Sparren.

Literatur.

Bücher über »Statik der Dachſtühle«.

RITTER, A. Elementare Theorie und Berechnung eiſerner Dach- und Brücken-Conſtructionen. Hannover 1863. — 5. Aufl. 1894.

UNWIN, W. *Wrought-iron bridges and roofs etc.* London 1870.

CORDIER, E. *Equilibre ſtabile des charpentes en fer, bois et fonte.* Paris 1872.

FABRÉ, V. *Théorie des charpentes, donnant des règles pratiques pour la conſtruction des fermes et autres appareils en bois et en fonte.* Paris 1873.

CARGILL, TH. *The ſtrains upon bridge girders and roof truſſes etc.* London 1873.

SCHREVE, S. *A treatiſe on the ſtrength of bridges and roofs etc.* New-York 1873.

TETMAJER, L. Die äuſseren und inneren Kräfte an ſtatiſch beſtimmten Brücken- und Dachſtuhl-Conſtructionen. Zürich 1875.

NICOUR, CH. *Calcul d'un comble en fer du ſyſtème Polonceau.* Paris 1875.

SCHWEDLER, W. Die Conſtruction der Kuppeldächer. 2. Aufl. Berlin 1878.

TRÉLAT, E. *La rigidité dans les combles.* Paris 1878.

Deutſche bautechniſche Taſchenbibliothek. Heft 10: Berechnung der Dachwerke. Von W. JEEP. Leipzig 1876.

WEYRAUCH, J. J. Beiſpiele und Aufgaben zur Berechnung der ſtatiſch beſtimmten Träger für Brücken und Dächer. Leipzig 1888.

MÜLLER-Breslau, H. Beitrag zur Theorie des räumlichen Fachwerks. Berlin 1892.

FOEPPL, A. Das Fachwerk im Raume. Leipzig 1892.