



UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Die Statik der Hochbau-Constructionen

Landsberg, Theodor

Stuttgart, 1899

5. Abschnitt: Gewölbe

[urn:nbn:de:hbz:466:1-77733](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466:1-77733)

5. Abschnitt.
Gewölbe.

Die Gewölbe sind aus einzelnen Theilen mit Hilfe von Verbindungsmaterialien zusammengesetzte Bau-Constructions, welche bei lothrechten Belastungen schiefe Drücke auf die stützenden Constructionstheile ausüben. Indem wir die verschiedenen Gewölbearten³⁹⁾ hier als bekannt voraussetzen, bemerken wir, daß wir uns im vorliegenden Abschnitt hauptsächlich mit den Tonnen-, bezw. Kappengewölben, den Kreuzgewölben und den Kuppelgewölben beschäftigen werden, auf welche alle anderen Gewölbearten leicht zurückgeführt werden können.

265.
Allgemeines.

Der allgemeinen Untersuchung soll das Tonnen-, bezw. Kappengewölbe zu Grunde gelegt werden; dabei wird stets, falls nichts Anderes bemerkt wird, ein Gewölbestück betrachtet werden, dessen Abmessung senkrecht zur Bildfläche gleich der Einheit, also gleich 1^m ist. Alsdann fällt die Kräfteebene mit der mittleren lothrechten Ebene zusammen. Das Tonnen-, bezw. Kappengewölbe wirkt wie ein krummer Balken, welcher den Gesetzen der Elasticitätslehre unterworfen ist.

1. Kapitel.
Stützlinie und Mittelkraftlinie.

a) Allgemeines.

Für die Ermittlung der im Gewölbe auftretenden inneren Kräfte ist zunächst — genau wie bei den früher behandelten Bau-Constructions — die Kenntniß der äußeren auf das Gewölbe wirkenden Kräfte nöthig, also der Belastungen und der Auflagerkräfte. Die Belastungen sind in den meisten Fällen gegeben, bezw. aus den Tabellen in Art. 21 bis 27 leicht zu bestimmen. Schwieriger ist die Ermittlung der Auflagerkräfte oder, wie sie hier heißen, der Kämpferdrücke. Bei den bisherigen Constructions genügen zu ihrer Bestimmung die allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen; hier ist dies nicht der Fall. Wird ein beliebiges Gewölbe (Fig. 372) betrachtet, so wird bei jedem Auflager — hier Kämpfer genannt — auf das Gewölbe eine Anzahl von Kräften übertragen, deren Mittelkraft eben der gesuchte Kämpferdruck ist; von jedem dieser Kämpferdrücke ist aber weder Größe, noch

266.
Kämpfer-
drücke.

³⁹⁾ Siehe hierüber Theil III, Band 2, Heft 3 (Abth. III, Abschn. 2, B, Kap. 8) dieses »Handbuchs«.

Richtung, noch Angriffspunkt (*A*, bzw. *B*) bekannt. Wir haben demnach in den Kämpferdrücken 6 Unbekannte: *D*, *D*₁, *α*, *α*₁, *c*, *c*₁ (wenn *c* und *c*₁ die Abstände der Punkte *A* und *B* von den inneren Laibungspunkten der Widerlager bezeichnen). Da die Statik vermittels der Gleichgewichtsbedingungen fester Körper nur 3 Gleichungen zur Verfügung stellt, so ist die Ermittlung der Kämpferdrücke auf rein statischem Wege nicht möglich. Die Aufgabe wird gelöst, indem man das Gewölbe als elastischen Bogen auffaßt und annimmt, daß bei den durch die Belastungen erfolgenden Formänderungen die Widerlager und die anschließenden Bogenenden genau unveränderte Lage behalten. Diese mit der Wirklichkeit nahezu übereinstimmende Annahme giebt weitere 3 Gleichungen, so daß jetzt für die 6 Unbekannten 6 Gleichungen vorhanden sind.

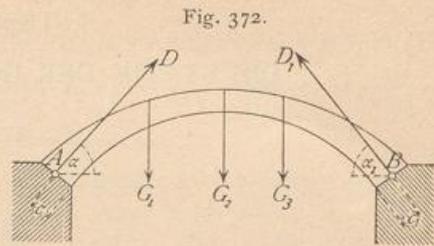


Fig. 372.

Für die einfachen Fälle des Hochbaues, bei denen fast stets eine ruhende Belastung in Frage kommt, brauchen die Elastizitätsgleichungen nicht aufgestellt zu werden. Vorläufig werde angenommen, daß die Kämpferdrücke nach Größe, Richtung und Lage auf irgend welche Art gefunden und bekannt seien.

267.
Stützlinie.

Ist letzteres der Fall, so sind alle äußeren, auf das Gewölbe wirkenden Kräfte bekannt; demnach können die sämtlichen äußeren Kräfte, welche an der einen Seite eines beliebigen, senkrecht zur Bildebene genommenen Querschnittes *II* des Gewölbes (Fig. 373) wirken, zu einer Mittelkraft vereinigt werden.

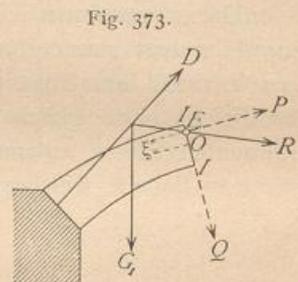


Fig. 373.

Betrachtet man etwa denjenigen Gewölbeheil, welcher links vom Querschnitte *II*, also zwischen dem linken Widerlager und dem Querschnitte *II* liegt, so sei *R* diese Mittelkraft. Damit Gleichgewicht vorhanden sei, muß im Querschnitt *II* eine Anzahl innerer Kräfte wirken, deren Mittelkraft gleiche Größe, gleiche Richtung, gleichen Angriffspunkt und entgegengesetzten Sinn hat, wie die Kraft *R*. Mit der Kraft *R* kennt man also auch die Resultierende der hier thätigen inneren Kräfte. Zerlegt man *R* in eine Seitenkraft *P*, welche parallel ist zu der an die Bogenaxe im betrachteten Querschnitte gezogenen Tangente, und in eine zu ersterer senkrechte Seitenkraft *Q*, so heißt die erstere die Axialkraft, die zweite die Transversalkraft oder Querkraft. Die Querkraft ist für die hier zu betrachtenden Fälle von geringer Wichtigkeit; von wesentlicher Bedeutung dagegen ist Größe und Lage von *P*. Die durch die Axialkraft in den einzelnen Punkten des Querschnittes *II* erzeugten Druck, bzw. Zugspannungen können ohne merklichen Fehler nach den in Art. 126 (S. 111) für Stützen berechneten Gleichungen bestimmt werden. Man erhält demnach die Spannung σ in einem um *s* von der Mittellinie entfernten Punkte nach Gleichung 102

$$\sigma = \frac{P}{F} + \frac{Ms}{\mathcal{J}} = \frac{P}{F} \left(1 + \frac{F\xi s}{\mathcal{J}} \right) \dots \dots \dots 388.$$

M ist das Moment der äußeren Kräfte für den Punkt *O*, d. h. für denjenigen Punkt, in welchem die Mittellinie des Gewölbes den Querschnitt *II* schneidet; hier also ist $M = P\xi$, da *Q* in Bezug auf *O* kein Moment hat. Die positiven Werthe für σ sind hier Druckbeanspruchungen; die negativen Werthe bedeuten Zug.

Von hervorragender Bedeutung für den Werth von σ ist die Gröfse von ξ oder, was dasselbe ist, die Lage des Punktes E , des Schnittpunktes der Mittelkraft R mit dem von ihr beanspruchten Querschnitte. Man hat deshalb für die Punkte E eine besondere Bezeichnung eingeführt: die Stützlinie. Die Stützlinie ist die Gesamtheit aller derjenigen Punkte, in denen die Gewölbequerchnitte von den auf sie wirkenden Mittelkräften geschnitten werden.

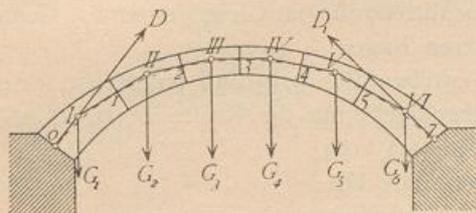
Den verschiedenen Belastungsarten entsprechen verschiedene Mittelkräfte für die einzelnen Querschnitte; daraus folgt, daß bei demselben Gewölbe jeder Belastungsart auch eine besondere Stützlinie entspricht.

Zerlegt man das Gewölbe in eine Anzahl von Theilen (Fig. 374), ermittelt die Kämpferdrücke (D und D_1), so wie die Belastungen der einzelnen Theile ($G_1, G_2, G_3 \dots G_6$) und setzt zunächst D mit der ersten Last G_1 zu einer Mittelkraft zusammen, diese letztere mit G_2 und fährt so bis zum rechten Kämpfer fort, so erhält

man ein Vieleck $o I II III IV V VI 7$, welches man die Mittelkraftslinie oder das Resultanten-Polygon nennt. Aus der Mittelkraftslinie ergeben sich sofort einzelne Punkte der Stützlinie, nämlich die Schnittpunkte der einzelnen Mittelkräfte mit den bezüglichen Querschnitten, hier die Punkte $o, 1, 2, 3, 4, 5$ und 7 . Je kleiner die einzelnen

268.
Mittelkraftslinie
oder
Resultanten-
Polygon.

Fig. 374.



den, desto mehr nähert sich die Mittelkraftslinie einer stetig verlaufenden Curve, der sog. Seilcurve.

Die Ermittlung der Form und Lage der Stützlinie auf statischem Wege setzt nach Obigem die Kenntniß der Kämpferdrücke oder wenigstens dreier von den sechs Unbekannten voraus, welche die Kämpferdrücke nach Gröfse, Richtung und Lage bestimmen; denn alsdann sind nur noch drei Unbekannte vorhanden, welche mit Hilfe der Statik ermittelt werden können. Mit Hilfe der Elasticitätstheorie der Gewölbe hat *Winkler* folgenden wichtigen Satz gefunden, den wir hier nur angeben wollen, wegen des Beweises auf unten stehende Quellen⁴⁰⁾ verweisend.

269.
Ergebnisse
der
Elasticitäts-
theorie.

Bei constantem Querschnitt ist unter allen statisch möglichen Stützlinien nahezu diejenige die richtige, welche sich der Bogenaxe durchschnittlich am meisten nähert, wenn man das Wort »durchschnittlich« im Sinne der Methode der kleinsten Quadratsummen deutet. Somit ist diejenige Stützlinie nahezu die richtige, für welche die Summe der Quadrate der Abweichungen von der Bogenaxe ein Minimum ist. Läßt sich demnach eine Stützlinie construiren, welche mit der Mittellinie des Gewölbes zusammenfällt, so wird diese die richtige sein.

Construirt man also die Mittellinie des Bogens derart, daß sie für die gegebene Belastung mit der unter gewissen Annahmen construirt (demnach möglichen) Stützlinie übereinstimmt, so ist diese Mittellinie die richtige Stützlinie — natürlich nur für die angenommene Belastung. Da es sich aber im Hochbau meistens um constante Belastungen handelt, so ist diese Ermittlung in der Regel genügend.

⁴⁰⁾ WINKLER, F. Beitrag zur Theorie der Bogenträger. Zeitschr. d. Arch.- u. Ing.-Ver. zu Hannover. 1879, S. 199. Lage der Stützlinie im Gewölbe. Deutsche Bauz. 1879, S. 117 u. 127.

Wir werden weiter unten sehen, daß es in vielen Fällen, in denen die Aufsuchung der genauen Stützlinie schwierig ist, genügt, gewisse Grenzlagen der Stützlinie zu ermitteln; da aber die Stützlinie leicht aus dem Resultanten-Polygon construirt werden kann, so wird für alle diese Fälle zunächst das Resultanten-Polygon oder die Mittelkraftslinie aufgesucht.

b) Mittelkraftslinie und Seilcurve.

270.
Horizontal Schub
im Gewölbe.

Jede Verbindungslinie zweier Eckpunkte der Mittelkraftslinie (*I II*, *II III*, *III IV* . . . in Fig. 374) giebt nach der Erklärung in Art. 268 (S. 283) Lage und Richtung der Mittelkraft aller an der einen Seite der betreffenden Fuge wirkenden äußeren Kräfte. Es giebt also z. B. *III IV* die Richtung und Lage der Mittelkraft aller rechts von der Fuge 3 wirkenden Kräfte, d. h. der Kräfte D_1 , G_4 , G_5 , G_6 ; da sämtliche äußere Kräfte einander im Gleichgewichte halten, so fällt die Mittelkraft aller links von der Fuge 3 wirkenden Kräfte gleichfalls in die Linie *III IV*; in derselben halten sich demnach die beiden Mittelkräfte im Gleichgewichte. Genau eben so verhält es sich auch mit jeder anderen Fuge.

Betrachtet man nun einen Theil des Gewölbes (Fig. 375) und untersucht seinen Gleichgewichtszustand, so wirken auf denselben nicht nur die Kräfte D , G_1 , G_2 , G_3 , sondern auch die Kräfte, welche in der Fuge 33 vom anderen Theile des Gewölbes übertragen werden. Die Mittelkraft der letzteren ist aber nach dem Vorstehenden gleich der Mittelkraft aller auf den anderen Theil wirkenden äußeren Kräfte, d. h. hier von D_1 , G_4 , G_5 , G_6 . Diese fällt in die Linie *III IV* (Fig. 374). Wenn also die Mittelkraftslinie bekannt ist, so sind stets auch Lage, Richtung und (wie weiter unten nachgewiesen wird, auch) Gröfse derjenigen Kraft bekannt, bezw. leicht zu finden, welche in der betreffenden Fuge auf das Gewölbe-Bruchstück übertragen wird. Alles Vorstehende gilt selbstverständlich auch, wenn die einzelnen Gewölbe theile unendlich schmal werden und die Mittelkraftslinie zur Seilcurve wird; dann fällt die Mittelkraft an jeder Stelle in die Richtung der Tangente an die Curve.

Die Kämpferdrücke D und D_1 haben lothrechte und wagrechte Seitenkräfte; in dieser Beziehung kann man die Gewölbe als Sprengwerksträger ansehen. Diese wagrechten Seitenkräfte, welche auf das Gewölbe nach innen, auf die stützenden Seitenmauern nach außen, also schiebend wirken, gefährden das Bauwerk. Wenn die Belastungen nur lothrecht wirken, so haben diese wagrechten Seitenkräfte im ganzen Bogen bei derselben Belastung gleiche Gröfse. Denn das Gleichgewicht eines beliebigen Bruchstückes (Fig. 376) verlangt, daß die algebraische Summe aller wagrechten Kräfte gleich Null sei. Die beiden einzigen wagrechten Kräfte am Bruchstück sind aber die Seitenkräfte H und H_1 von D und R . Daher muß stattfinden:

$$0 = H - H_1, \text{ woraus } H = H_1.$$

Da Schnitt mn beliebig gewählt war, so gilt das Vorstehende ganz allgemein.

Man nennt diese wagrechte Seitenkraft den Horizontal Schub des Bogens, bezw. des Gewölbes. Die

Fig. 375.

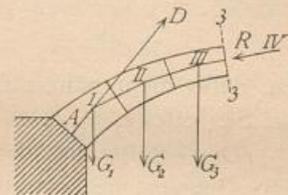
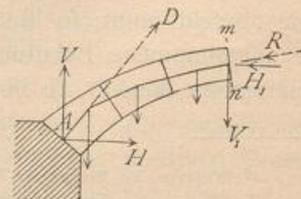
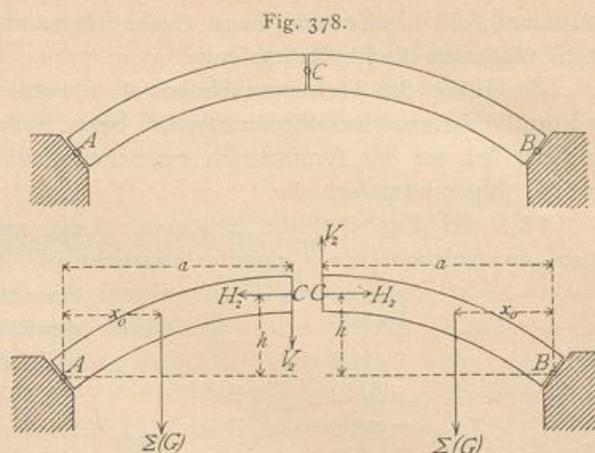


Fig. 376.



Fugen (Fig. 378). Wenn also drei Punkte vorgeschrieben sind, durch welche die Seilcurve verlaufen muß, so ist der ganze Lauf der Seilcurve und damit auch die Größe des Horizontal-schubes gegeben. Auch wenn zwei Punkte der Seilcurve und außerdem in einem dieser Punkte die Richtung bestimmt ist, welche die Tangente an die Curve haben soll, ist Alles bekannt. Wird die Seilcurve in dieser Weise fest gelegt, so wirken die beiden



Theile des Gewölbes auf einander genau eben so, wie die beiden Theile eines Sprengwerkdaches (siehe Art. 210, S. 211⁴¹).

Wenn bei einem Gewölbe zwei Kämpferpunkte und ein Scheitelpunkt für den Verlauf der Seilcurve vorgeschrieben sind und sowohl die Kämpferpunkte wie die Lasten symmetrisch zur Scheitel-Lothrechten sind, so verläuft die ganze Seilcurve, bezw. Mittellkraftlinie symmetrisch zu dieser Linie, so ist also auch die Tangente an die Seilcurve im Scheitel wagrecht. Es genügt demnach, für ein solches Gewölbe eine Hälfte zu untersuchen.

Betrachtet man nämlich zunächst (Fig. 378) die linke Gewölbehälfte und nimmt dabei allgemein an, daß die von der rechten Hälfte im Scheitel übertragene Kraft die Seitenkräfte H_2 und V_2 habe, so muß, weil die Mittellkraft von $\Sigma(G)$, H_2 und V_2 durch A verläuft,

$$0 = V_2 a - H_2 h + x_0 \Sigma(G)$$

sein. Wird die rechte Gewölbehälfte betrachtet, so wirken auf dieselbe im Scheitel H_2 und V_2 in gleicher Größe, aber in entgegengesetztem Sinne, wie auf die linke Hälfte; der Symmetrie wegen ist die Belastung dieser Hälfte ebenfalls $\Sigma(G)$ im Abstände x_0 vom Kämpfer B; mithin findet statt:

$$0 = V_2 a + H_2 h - x_0 \Sigma(G).$$

Die Addition beider Gleichungen giebt: $0 = V_2 \cdot 2a$, woraus

$$V_2 = 0$$

folgt. Demnach ist die Kraft, welche die beiden Gewölbehälften im Scheitel auf einander übertragen, in der That wagrecht, also ist auch die Tangente an die Mittellkraftlinie im Scheitel wagrecht.

Man findet die Größe von $H_2 = H$ leicht, wie Gleichung 389:

$$H = \frac{x_0 \Sigma(G)}{h}.$$

Wenn für die Seilcurve drei Punkte oder zwei Punkte und eine Richtung vorgeschrieben sind, so ist nach Vorstehendem der Verlauf der Seilcurve bestimmt; alsdann muß also auch eine graphische Construction dieser Linie möglich sein. Es ist

⁴¹) Neuerdings ist die Anordnung dreier Gelenke, zweier Gelenke an den Kämpfern und eines Gelenkes im Scheitel, bei den großen Brückengewölben vielfach ausgeführt worden, insbesondere von Köpcke und Leibbrand. — Man vergl. hierüber: Fortschritte der Ingenieurwissenschaften. 2. Gruppe, Heft 7: Gewölbte Brücken. Von K. v. LEIBRAND. Leipzig 1897.

Man erhält nun die Mittelkraftslinie, indem man die in C angreifende Kraft H zunächst im Schnittpunkte VI mit G_6 zu einer Resultirenden zusammensetzt; GröÙe und Richtung derselben sind durch $O\beta$ im Kraftpolygon gegeben; die durch VI parallel zu $O\beta$ gezogene Linie giebt ihre Lage. Wo die Mittelkraft sich mit G_5 schneidet, d. h. in Punkt V , setzt man sie mit dieser Kraft zusammen. GröÙe und Richtung dieser neuen Mittelkraft giebt $O\gamma$ im Kraftpolygon; die Lage wird erhalten, indem man durch V die Parallele zu $O\gamma$ zieht. Indem man so weiter construirt, erhält man im Kraftpolygon GröÙe und Richtung aller Mittelkräfte, im Seilpolygon $C, VI, V, IV, III, II, I, A$ die Mittelkraftslinie. Als Controle dient, daß die Mittelkraftslinie durch A geht.

273.
Mittelkrafts-
linie für
unsymmetrische
Bogen.

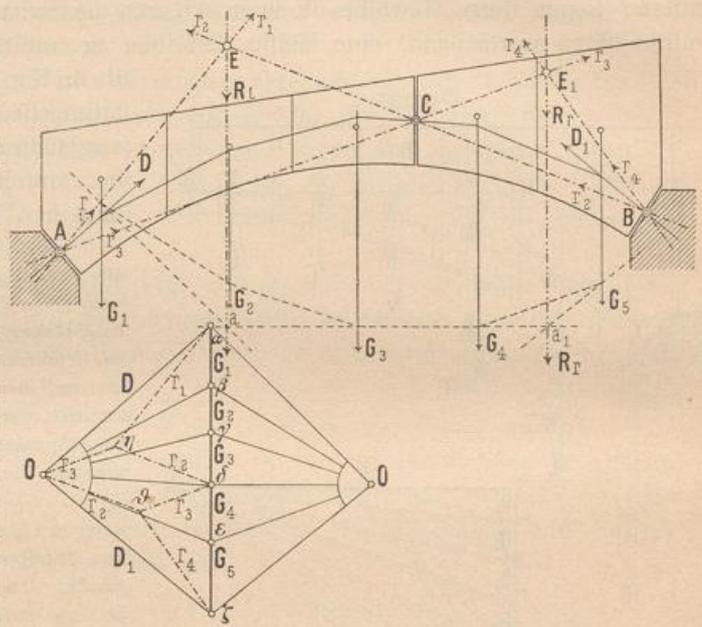
Bei einem beliebig gefalteten Bogen mit beliebiger Belastung (Fig. 381) er giebt sich die durch drei vorgeschriebene Punkte A, C, B verlaufende Mittelkrafts-
linie, wie folgt.

Man kann die Construction als aus zwei ungleichen Hälften bestehend auffassen, welche einander im Scheitelpunkte C stützen. Der Kämpferdruck in A besteht aus zwei Theilen: demjenigen, welcher durch die Belastung nur der linken Hälfte erzeugt wird, und demjenigen, welcher durch die Belastung nur der rechten Hälfte hervor-

gerufen wird. Eben so verhält es sich mit dem Kämpferdruck in B . Nimmt man zunächst nur die linke Hälfte belastet, also die rechte Hälfte gewichtslos an, so hat wie beim Dreigelenkdach (siehe Art. 210, S. 211) der Kämpferdruck von B die Richtung BC . Eine gleich große und gleich gerichtete Kraft wird von der rechts liegenden Hälfte in C auf die linke Hälfte übertragen; auf diese Hälfte wirken außerdem noch die Resultirende der Lasten G_1, G_2, G_3 und der Kämpferdruck von A . Die GröÙe und Lage der Resultirenden von G_1, G_2 und G_3 findet man leicht durch Auftragen der Lasten zu einem Kraftpolygon und Verzeichnen eines Seilpolygons für einen beliebigen Pol. Der Schnittpunkt a der vor G_1 vorhergehenden und der auf G_3 folgenden Seilpolygonseite giebt einen Punkt der Resultirenden R_l . Da letztere lothrecht ist, ziehe man eine lothrechte Linie durch a ; alsdann ist diese die Resultirende R_l . Die in C wirkende Kraft mit der Richtung BC schneidet die Resultirende in Punkt E ; durch diesen Punkt muß auch die dritte auf die linke Hälfte wirkende Kraft, der Kämpferdruck von A gehen. Man ziehe AE ; alsdann wird R_l im Punkt E durch die beiden dieser Belastung entsprechenden Kämpferdrücke r_1 und r_2 aufgehoben. Die Zerlegung im Kraftpolygon ergibt $r_1 = \eta\alpha$ und $r_2 = \delta\eta$.

In gleicher Weise bestimmt man weiter die Kämpferdrücke r_3 und r_4 , welche in A , bzw. B durch die Belastung nur der rechten Hälfte erzeugt werden. Da für diese Belastungsweise die linke Hälfte gewichtslos ist, so fällt r_3 in die Linie AC ; R_r geht durch a_1 ; r_3 schneidet sich mit R_r in E_1 , und durch E_1 muß auch die dritte auf die rechte Hälfte wirkende Kraft, der Kämpferdruck r_4 von B gehen. Es ist $\delta\zeta = R_r$, und die Zerlegung von R_r ergibt $\zeta\vartheta = r_4$ und $\vartheta\delta = r_3$. In Wirklichkeit sind beide Hälften belastet; demnach wirken im linken Kämpferpunkt A sowohl r_1 wie r_3 , im rechten Kämpferpunkt B sowohl r_2 wie r_4 . Die Zusammenfassung von r_3 und r_1 giebt als Kämpferdruck bei A die Kraft $A_1 = O\alpha$, diejenige von r_2 und r_4 als Kämpferdruck bei B die Kraft $B_1 = \zeta O$. Um eine einfache Figur zu erhalten, ist an η : $O\eta = r_3$ und an ϑ : $\vartheta O = r_2$ gelegt und so das Parallelogramm $O\eta\delta\vartheta$ gezeichnet. Die Mittelkraftslinie ergibt sich nun leicht, indem man der Reihe nach A_1 mit G_1, G_2, \dots eben so zu-

Fig. 381.



fammenfetzt, wie für das fymmetrifche Gewölbe in Art. 272 (S. 287) gezeigt worden ift. Die Mittelkraftslinie ift das Seilpolygon für den Pol O . Als Controle diene, dafs die Mittelkraftslinie durch C und B verlaufen mufs.

Beim Verzeichnen der Mittelkraftslinie handelt es fich meiftens darum, aus diefer Linie die Stützlinie zu conftruiren, d. h. die Punkte zu finden, in denen die einzelnen Gewölbequerfchnitte von den auf fie wirkenden Mittelkräften gefchnitten werden (fiche Art. 268, S. 283). Da aber die Gewölbequerfchnitte nicht, wie in Fig. 380 u. 381 angenommen war, lothrecht find, fondern radial verlaufen, fo ift eine Verbefferung nöthig. Man kann zunächft auf die wirkliche Querschnittslage dadurch leicht Rückficht nehmen, dafs man die Lamellengrenzen entfprechend der

274.
Verbefferungen.

Fig. 382.

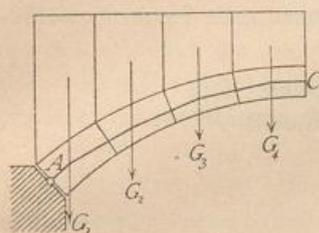


Fig. 383.

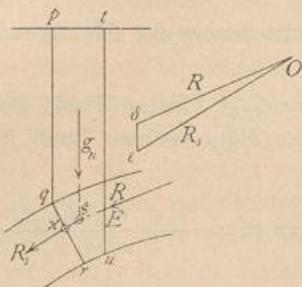
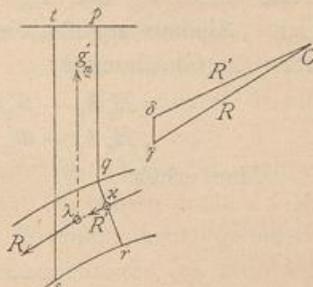


Fig. 384.



Lage der Querschnitte wählt (Fig. 382). Das Verfahren zur Ermittlung der Gleichgewichtslinie bleibt genau, wie oben gezeigt; nur ift die Ermittlung der Schwerpunkte für die einzelnen Lamellen etwas umständlicher als dort.

Es können aber auch die Constructions in Fig. 380 u. 381 benutzt werden, wenn nur die nachstehend beschriebenen Verbefferungen vorgenommen werden.

Die der richtigen Querschnittslage entfprechende Lamellengrenze fei pqr (Fig. 383); bei der lothrechten Theilung fei tu als Grenze angenommen und dabei fei die Kraft R , welche tu in E fchneidet, als Mittelkraft aller rechts von tu wirkenden äußeren Kräfte gefunden. Um nun den Punkt der Stützlinie zu finden, welcher in qr liegt, braucht man nur die Mittelkraft aller rechts von qr wirkenden Kräfte aufzufuchen und ihren Schnittpunkt mit qr zu ermitteln. Diefte gefuchte Kraft ift offenbar die Mittelkraft von R und dem Gewichte g_n des Gewölbeheiles $pqrut$. Es fei $R = O\delta$ und $g_n = \delta\varepsilon$; alsdann ift die gefuchte Mittelkraft $R_1 = O\varepsilon$, geht durch q und ift parallel zu $O\varepsilon$. Diefte Kraft R_1 ift in Fig. 383 gezeichnet; fie fchneidet die Fuge qr in z ; fonach ift z ein Punkt der richtigen Stützlinie.

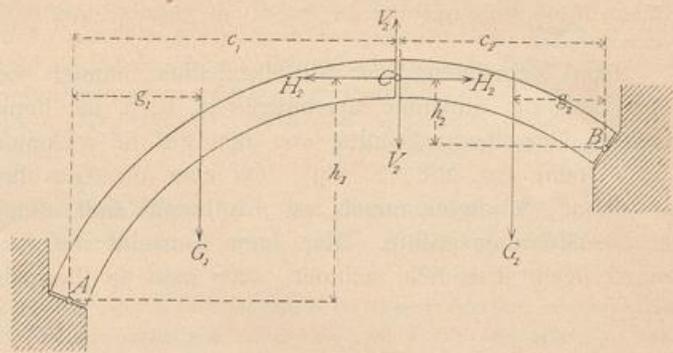
Ganz ähnlich ift zu verfahren, wenn die lothrechte Lamellengrenze an der anderen Seite der wirklichen Fuge liegt (Fig. 384).

Die Mittelkraft aller an der einen Seite von ts wirkenden Kräfte, R , enthält das Gewicht des Stückes $tsrqp$ bereits; um alfo die Mittelkraft R' , welche auf die Fuge qr wirkt, zu erhalten, mufs man R mit dem negativ genommenen, alfo nach oben gerichteten Gewichte g_n' zufammenfetzen. Es fei $R = O\gamma$ und $g_n' = \gamma\delta$; alsdann wird $R' = O\delta$, geht durch den Punkt λ , in welchem fich R und g_n' fchneiden, und ift parallel zu $O\delta$. Der richtige Punkt der Stützlinie ift z .

In Art. 270 (S. 285) ift gezeigt worden, wie der Horizontalfchub in einem fymmetrifch zur Scheitelfuge geformten und belasteten Gewölbe durch Rechnung gefunden werden kann. Auch beim unfymmetrifchen Gewölbe macht, wenn drei Punkte für den Verlauf der Mittelkraftslinie vorgefchrieben find, die Berechnung des Horizontalfchubes keine Schwierigkeit. Das Verfahren entfpricht genau demjenigen, welches für die Ermittlung der Auflagerdrücke beim Sprengwerksdach mit drei Gelenken in Art. 210 (S. 211) vorgeführt worden ift.

275.
Horizontalfchub
im unfymmetrifchen
Gewölbe.

Fig. 385.



Die Mittelkräfte der Lasten auf dem linken, bzw. rechten Gewölbetheile seien G_1 , bzw. G_2 ; die Entfernungen dieser Lasten von den Kämpferpunkten seien bzw. g_1 und g_2 (Fig. 385). Die beiden Theile übertragen im Punkte C auf einander eine Kraft, deren Seitenkräfte bzw. V_2 und H_2 seien. Alsdann ergibt die Betrachtung der Gleichgewichtszustände beider Gewölbetheile die Gleichungen:

$$\begin{aligned} H_2 h_1 + V_2 c_1 &= G_1 g_1 \text{ (linker Theil, Drehpunkt } A); \\ H_2 h_2 - V_2 c_2 &= G_2 g_2 \text{ (rechter Theil, Drehpunkt } B). \end{aligned}$$

Man erhält

$$H_2 = H = \frac{G_1 g_1 c_2 + G_2 g_2 c_1}{h_1 c_2 + h_2 c_1} \dots \dots \dots 390.$$

2. Kapitel.

Tonnen- und Kappengewölbe.

276.
Stabilität.

Die Zerstörung des Gewölbes kann erfolgen:

- 1) durch Umkanten eines Gewölbetheiles um eine innere oder äußere Kante,
- 2) durch Gleiten einzelner Gewölbetheile längs der Fugen und
- 3) durch Zerdrücken der Wölbsteine.

Wenn die Lage der Stützlinie bekannt ist, so können alle auf die Standicherheit des Gewölbes bezügliche Fragen leicht beantwortet werden. Dabei ist zu beachten, daß, falls für den Verlauf der Mittelkraftslinie drei Punkte vorgeschrieben sind, welche in Fugen liegen, dieselben entsprechend der für die Stützlinie gegebenen Erklärung auch Punkte der Stützlinie sind.

Im Hochbau handelt es sich fast stets nur um die Ermittlung des im Gewölbe wirkenden Horizontalschubes, weil diese Kraft hauptsächlich die Mauern, welche das Gewölbe, bzw. den Bogen stützen, gefährdet. Wäre die Stützlinie bekannt, so wäre auch der Horizontalschub bekannt. Die Ermittlung der genauen Lage derselben ist aber nach Art. 266 (S. 281) nur mittels der Elasticitäts-Theorie der Gewölbe möglich, und diese Ermittlung ist sehr umständlich. Es ist aber auch ausreichend, gewisse Grenzlagen für die Stützlinie und damit gewisse Grenzwerte für den Horizontalschub fest zu legen.

277.
Stabilität
gegen
Kanten.

Soll das Gewölbe stabil sein, so muß die Stützlinie ganz im Gewölbe liegen.

Wenn die Resultirende R aller an der einen Seite des Querschnittes NO wirkenden Kräfte (Fig. 386) die Verlängerung des Querschnittes etwa im Punkte b schneidet, so hat diese Kraft in Bezug auf O ein Moment $M = R e$, welches eine

Drehung des oberhalb NO liegenden Gewölbetheiles um O erstrebt. Diese Drehung kann nur durch eine andere, entgegengesetzt drehende Kraft W (in Fig. 386 punktiert) aufgehoben werden, d. h. durch einen Zugwiderstand der Gewölbefasern. Die

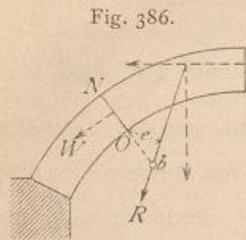


Fig. 386.

Wölbsteine können aber einen solchen, wenn von der Zugfestigkeit des Mörtels abgesehen wird, nicht leisten, so daß also keine Kraft vorhanden ist, welche das Gleichgewicht herstellen könnte. Der oberhalb der Fuge befindliche Gewölbetheil würde demnach um O kanten und einstürzen. Eine Aufhebung der Kraft R ist erst möglich, wenn dieselbe den Querschnitt NO schneidet; alsdann erzeugt sie in einzelnen Theilen des Querschnittes Druckspannungen, welche R aufheben. Soll also das Gewölbe nicht um O

kanten, so muß der Schnittpunkt der Mittelkraft R mit dem Querschnitte, d. h. der Schnittpunkt der Stützzlinie mit dem Querschnitte, in das Gewölbe fallen. Was aber vom Querschnitt NO gilt, gilt von allen Querschnitten. Das Gewölbe ist also nur dann gegen Kanten stabil, wenn die Stützzlinie ganz im Gewölbe liegt.

In Art. 126 bis 132 (S. 111 bis 120) ist gezeigt worden, wie sich die Spannungen für Stützen ergeben, falls auf dieselben Axialkräfte und Momente wirken. Mit hinreichender Genauigkeit können die dort gefundenen Formeln auch gebraucht werden, um die Spannungsvertheilung in den Gewölbequerschnitten zu ermitteln. Die Spannung in einem Punkte, welcher um z von der senkrecht zur Bildebene errichteten Schwerpunktsaxe des Querschnittes absteht, ist demnach nach Gleichung 102

$$\sigma = \frac{P}{F} \left(1 + \frac{F \xi z}{\mathcal{I}} \right).$$

Hier handelt es sich nur um rechteckige Querschnitte von der Höhe d und der Breite 1 (senkrecht zur Bildebene); mithin ist $F = d \cdot 1$ und $\mathcal{I} = \frac{d^3}{12}$; daher

$$\sigma = \frac{P}{d} \left(1 + \frac{12 \xi z}{d^2} \right) \dots \dots \dots 391.$$

Da P hier stets Druck ist und wir P als positiv einführen, so bedeuten die positiven Werthe von σ Druck, die negativen Werthe Zug. Der größte Druck σ_{max} findet für die in Fig. 387 gezeichnete Lage der Kraft P in den Punkten U statt, für welche z seinen größten Werth $\frac{d}{2}$ hat; der kleinste Druck σ_{min} in den

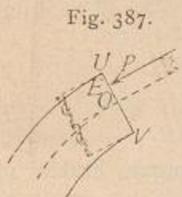


Fig. 387.

Punkten V , für welche z seinen kleinsten Werth $-\frac{d}{2}$ hat; demnach wird

$$\sigma_{max} = \frac{P}{d} \left(1 + \frac{12 \xi d}{2 d^2} \right) = \frac{P}{d} \left(1 + \frac{6 \xi}{d} \right) \quad \text{und} \quad \sigma_{min} = \frac{P}{d} \left(1 - \frac{6 \xi}{d} \right) \dots \dots 392.$$

σ_{min} wird zu Null, wenn $1 - \frac{6 \xi}{d} = 0$, d. h. wenn $\xi = \frac{d}{6}$ ist.

In den am wenigsten gedrückten Punkten V findet also die Spannung Null statt, wenn die Mittelkraft den Querschnitt in der Höhe $\frac{d}{6}$ über der Mittellinie des Gewölbes schneidet. Schneidet die Kraft P , also die Stützzlinie, den Querschnitt unterhalb O , so ergibt sich leicht aus Gleichung 391 (indem man $-\xi$ statt $+\xi$ einführt), daß der größte Druck in den Punkten V , der größte Zug in den Punkten U

278.
Stabilität
gegen
Zerdrücken.

stattfindet. In U findet demnach die Spannung Null statt, wenn die Stützlinie den Querschnitt in dem Abstände $\frac{d}{6}$ unterhalb der Schwerpunktsaxe schneidet.

σ_{max} und σ_{min} haben gleiches Vorzeichen für diejenigen Werthe von ξ , für welche gleichzeitig stattfindet

$$1 + \frac{6\xi}{d} > 0 \quad \text{und} \quad 1 - \frac{6\xi}{d} > 0, \quad \text{d. h. für } \xi > -\frac{d}{6} \quad \text{und} \quad \xi < +\frac{d}{6}.$$

So lange also der Schnittpunkt der Mittelkraft nicht weiter von der Gewölbemittellinie entfernt ist, als $\frac{d}{6}$, d. h. so lange der Schnittpunkt im inneren Gewölbemittellinie liegt, haben σ_{max} und σ_{min} gleiches Vorzeichen, sind demnach σ_{max} und σ_{min} Druck; dann findet aber im ganzen Querschnitte nur Druck statt. (Vergl. Art. 128, S. 114.)

Ist dagegen ξ größer als $\frac{d}{6}$, so findet in der am meisten gezogenen Fafer Zugbeanspruchung statt; dann gilt die Gleichung 391 für die Druckvertheilung nicht mehr, weil diese unter der Annahme einer Beanspruchung aller Querschnittspunkte entwickelt worden ist; falls aber hier einzelne Punkte des Querschnittes auf Zug beansprucht werden, so kann man auf Beanspruchung aller Querschnittspunkte nicht mit Sicherheit rechnen. Die dann geltenden Gleichungen sind in Art. 129 (S. 116) entwickelt. Falls ξ größer als $\frac{d}{6}$ ist, mit anderen Worten, falls die Stützlinie einen Querschnitt außerhalb des inneren Drittels schneidet, etwa im Abstände c von den zunächst gelegenen äußeren Punkten, so vertheilt sich nach Gleichung 110 (S. 117) der Druck P auf eine Breite $3c$, wobei der Maximaldruck doppelt so groß ist, als wenn sich der Druck über die gedrückte Fläche gleichmäßig vertheilt. Wir erhalten also (Alles auf Centimeter bezogen)

$$\sigma_{max} = \frac{2P}{3 \cdot 100 \cdot c} \quad \dots \quad 393.$$

Wird die größte, im Wölbmaterial zulässige Druckbeanspruchung für die Flächeneinheit mit K bezeichnet, so kann Gleichung 393 benutzt werden, um zu ermitteln, wie weit sich die Stützlinie der inneren oder äußeren Gewölbelaubung nähern darf. Man erhält als Bedingungsgleichung:

$$K = \frac{2P}{300c}, \quad \text{woraus} \quad c = \frac{2P}{300K} \quad \dots \quad 394.$$

Damit ist als Bedingung für die Stabilität des Gewölbes gegen Druck gefunden: Soll das Gewölbe genügende Sicherheit gegen Druck bieten, so darf der Abstand der Stützlinie von den Gewölbelaubungen an keiner Stelle kleiner werden, als $\frac{2P}{300K}$.

Da P für die verschiedenen Gewölbestellen verschiedene Werthe hat, so ergeben sich für dieselben auch verschiedene Größen von c . Meistens wird es jedoch genügen, den Größtwerth von P , der sich an den Kämpfern ergibt, einzusetzen und dann den für c erhaltenen Werth im ganzen Gewölbe gleich groß anzunehmen. Man kann in dieser Weise leicht die beiden Linien construiren, zwischen denen die Stützlinie verlaufen soll.

Die Forderung, dass in allen Punkten sämmtlicher Querschnitte nur Druck-

beanspruchung stattfinden soll, ist erfüllt, wenn sämtliche Querschnitte von ihren zugehörigen Mittelkräften im inneren Gewölbedrittel geschnitten werden, d. h. wenn die ganze Stützlinie im inneren Drittel verläuft.

Der Einsturz des Gewölbes kann endlich auch dadurch verursacht werden, daß ein Theil desselben längs des anderen gleitet. Die Mittelkraft aller auf den Gewölbetheil oberhalb der Fuge UV (Fig. 388) wirkenden Kräfte sei gleich R ; alsdann ist Gleichgewicht nur möglich, wenn Seitens der Fuge eine genau gleich große und gleich gerichtete Kraft mit entgegengesetztem Sinne auf den betreffenden Gewölbetheil wirkt.

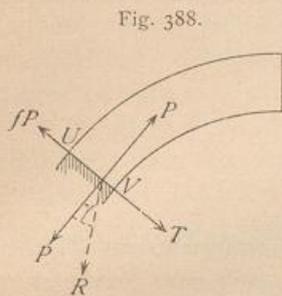


Fig. 388.

Wir zerlegen R in eine Axialkraft $P = R \cos \gamma$ und eine Querkraft $T = R \sin \gamma$. Die Axialkraft P wird, wenn ihr Schnittpunkt mit der Fuge nicht zu nahe an die Laibungen fällt, durch die senkrecht zum Querschnitt gerichteten axialen Spannungen, die Querkraft T wird durch den Reibungswiderstand an der Berührungsfläche UV aufgehoben. Nennt man den Reibungs-Coefficienten f , so ist der Reibungswiderstand $W = f P = f R \cos \gamma$. Größer kann W nicht werden; Gleichgewicht gegen Verschieben ist also nur möglich,

wenn stattfindet: $T \leq f R \cos \gamma$, d. h. $R \sin \gamma \leq f R \cos \gamma$ und $\text{tg } \gamma \leq f$.

Wird der Reibungswinkel mit φ bezeichnet, so ist $f = \text{tg } \varphi$, und alsdann heißt die Bedingungsgleichung für das Gleichgewicht:

$$\text{tg } \gamma \leq \text{tg } \varphi \text{ oder } \gamma \leq \varphi \dots \dots \dots 395.$$

Sobald γ größer wird, als der Reibungswinkel, kann T nicht aufgehoben werden, und dann findet ein Abgleiten des betrachteten Gewölbetheiles statt.

Dieselbe Schlussfolgerung gilt auch, falls R nach oben um den Winkel γ von der Senkrechten zur Fuge abweicht; nur ist dann das Bestreben vorhanden, den oberen Gewölbetheil nach außen zu verschieben. Was für die Fuge UV gilt, gilt für alle Fugen, so daß folgendes Gesetz ermittelt ist: Soll das Gewölbe gegen Gleiten stabil sein, so darf an keiner Stelle der Winkel, welchen die Mittelkraftslinie mit der betreffenden Fugen senkrechten bildet, größer sein, als der Reibungswinkel für die betreffenden Materialien.

In den meisten Fällen kann man ohne großen Fehler statt der Mittelkraftslinie die Stützlinie einführen und als Bedingung für die Stabilität des Gewölbes angeben, daß die Tangente an die Stützlinie nirgends einen Winkel mit der Fugen senkrechten einschließt, welcher größer ist, als der Reibungswinkel.

Man kann den Reibungs-Coefficienten f zwischen 0,6 und 0,75 liegend annehmen, welchen Werthen die Winkel $\varphi = 31$ bis 37 Grad entsprechen. Bei frischem Mörtel kann der Winkel φ bis auf 27 Grad hinabgehen (f bis auf 0,51). Die Tangenten an die Stützlinie bilden aber nur selten so große Winkel mit den Fugen senkrechten, so daß, wenigstens im eigentlichen Gewölbe, die Stabilität gegen Gleiten selten in Frage kommt.

Betrachtet man die eine Hälfte eines symmetrisch gestalteten und symmetrisch belasteten Gewölbes (Fig. 389), auf welche außer der Belastung G noch der Horizontalschub H im Scheitel wirkt, nimmt zunächst als Angriffspunkt von H den Punkt C beliebig und außerdem an, daß die Stützlinie die Kämpferfuge in A schneide, so geht die Mittelkraft von G und H durch A , und nach Art. 270 (S. 285) ist

279.
Stabilität
gegen
Gleiten.

280.
Grenzlagen der
Stützlinie und
Grenzwerte
des Horizontal-
schubes.

$$H = \frac{G g}{h}$$

Diesen Annahmen, bezw. diesem Werthe des Horizontalschubes entspricht eine ganz bestimmte Stützlinie, etwa CEA , die in Fig. 389 voll ausgezogen ist.

Construirt man ein zweites Mal unter Beibehaltung des Punktes C die Stützlinie für einen anderen Kämpferpunkt, etwa A' , so ergibt sich etwa die punktirte Stützlinie $CE'A'$, und der zugehörige Horizontalschub wird

$$H' = G \frac{g'}{h'}$$

Da $\frac{g'}{h'} > \frac{g}{h}$, so ist auch $H' > H$.

Man sieht, einer Vergrößerung des Horizontalschubes entspricht ein Flacherwerden der Stützlinie, und es ergibt sich in gleicher Weise, daß einer Verringerung von H ein Steilerwerden der Stützlinie entspricht. Offenbar sind nun sehr viele Stützlinien möglich, welche sämtlich durch C gehen und ganz im Gewölbe verlaufen, demnach mit der Stabilität desselben vereinbar sind. Dem kleinsten Werthe

Fig. 389.

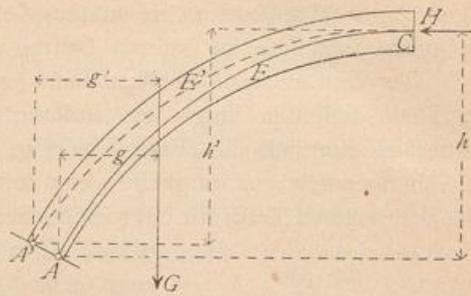


Fig. 390.

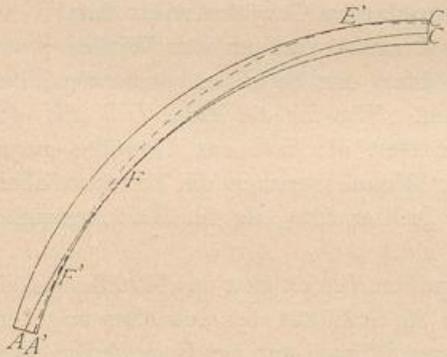
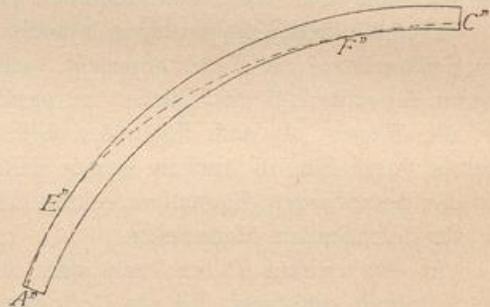


Fig. 391.



von H mit dem Angriffspunkt C entspricht diejenige dieser Stützlinien, welche an irgend einer Stelle die innere Gewölbelaibung berührt (CFA in Fig. 390); denn eine weitere Verringerung von H würde zur Folge haben, daß die Stützlinie bei F aus dem Gewölbe nach innen herausfiel. Nun kann aber jeder Punkt der Scheitelfuge Angriffspunkt der Kraft H sein; es steht also nichts im Wege, einen anderen, höheren Punkt der Scheitelfuge als Angriffspunkt von H anzunehmen, mithin die ganze Stützlinie um das entsprechende Stück parallel sich selbst nach oben zu verschieben. Jetzt kann der Horizontalschub weiter verringert werden, und man kann damit so weit fortfahren, bis die Stützlinie gleichzeitig die äußere und die innere Laibung berührt. Diese Stützlinie sei (Fig. 390) etwa $C'E'F'A'$. Eine weitere Verringerung von H hat die Folge, daß die Stützlinie bei F' das Gewölbe verläßt; ein weiteres Hinauffchieben der Stützlinie ist auch nicht möglich, weil bei einem

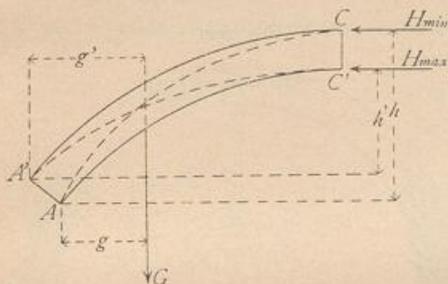
folchen — sollte es so weit fortgesetzt werden, daß bei F' die Stützlinie wieder in das Gewölbe fällt — bereits vorher die Stützlinie bei E' außerhalb des Gewölbes gefallen wäre.

Die gezeichnete Stützlinie $C'E'F'A'$ entspricht also dem Minimum von H und heißt deshalb die Minimalstützlinie. Es ergibt sich demnach: Die Minimalstützlinie hat jederseits mit den Gewölbelaibungen zwei Punkte gemeinam, und zwar liegen die Berührungspunkte mit der äußeren Laibung über denjenigen mit der inneren Laibung.

Bei flachen Bogen fällt gewöhnlich der Berührungspunkt mit der äußeren Laibung in die Scheitelfuge, derjenige mit der inneren Laibung jederseits in die Kämpferfuge; die beiden Berührungspunkte E' mit der äußeren Laibung können zusammenfallen.

In gleicher Weise erhält man die Stützlinie, welche dem Maximum von H entspricht, die Maximalstützlinie ($C''F''E''A''$ in Fig. 391). Die Maximalstützlinie hat jederseits des Scheitels mit den Gewölbelaibungen zwei Punkte gemeinam, und zwar liegen die Berührungspunkte mit der inneren Laibung über denjenigen mit der äußeren Laibung; die beiden ersteren können zusammenfallen.

Fig. 392.



Bei flachen Bogen fallen die beiden Berührungspunkte mit der inneren Laibung in die Scheitelfuge, die Berührungspunkte mit der äußeren Laibung in die Kämpferfugen.

In Fig. 392 ist CA die Minimal- und $C'A'$ die Maximalstützlinie. Die entsprechenden Werthe von H sind

$$H_{min} = \frac{Gg}{h} \quad \text{und} \quad H_{max} = \frac{Gg'}{h'} \quad . \quad 396.$$

Wenn wir demnach auch die wirkliche Lage der Stützlinie und die wirkliche Größe von H durch die Gleichgewichtsbedingungen allein nicht ermitteln können, so haben wir doch jetzt Grenzen sowohl für die Lage der Stützlinie, als auch für die Größe des Horizontalschubes gefunden. Der Horizontalschub kann nicht größer sein, als H_{max} , und nicht kleiner, als H_{min} .

Fallen Maximal- und Minimalstützlinie nicht zusammen, so ist eine Anzahl von Stützlinien möglich, welche solchen Werthen des Horizontalschubes entsprechen, die zwischen H_{max} und H_{min} liegen. Je größer der Unterschied dieser beiden Werthe ist, desto mehr Stützlinien sind möglich, desto größere Aenderung darf H erleiden, ehe das Gewölbe einstürzt, desto stabiler ist also das Gewölbe. Man kann demnach schließen: Ein Gewölbe ist stabil, wenn eine Maximal- und eine Minimalstützlinie möglich ist und beide nicht zusammenfallen. Die Stabilität ist um so größer, je größer die Unterschiede dieser beiden Stützlinien sind, bzw. je größer der Unterschied $H_{max} - H_{min}$ ist.

Im vorhergehenden Artikel war absolut festes Material angenommen, und es konnte deshalb eine Berührung der Stützlinie und der Gewölbelaibung als möglich vorausgesetzt werden. In Wirklichkeit darf nach Art. 278 (S. 291) die Stützlinie nicht näher an die Laibungen treten, als daß der Abstand noch $c = \frac{2P}{300K}$ ist. Bei einer Berührung der Laibung durch die Stützlinie würde an dieser Stelle $c = 0$, und da nach Gleichung 393: $\sigma_{max} = \frac{2P}{300c}$ ist, hier $\sigma_{max} = \frac{2P}{0} = \infty$ sein.

Man stellt deshalb die Bedingung, daß eine Maximal- und eine Minimalstütz-

281.
Praktische
Grenzlagen
der
Stützlinie.

linie möglich sei, welche wenigstens um $\frac{2P}{300K}$ von den Gewölbelaibungen absteht, und dass beide nicht zusammenfallen.

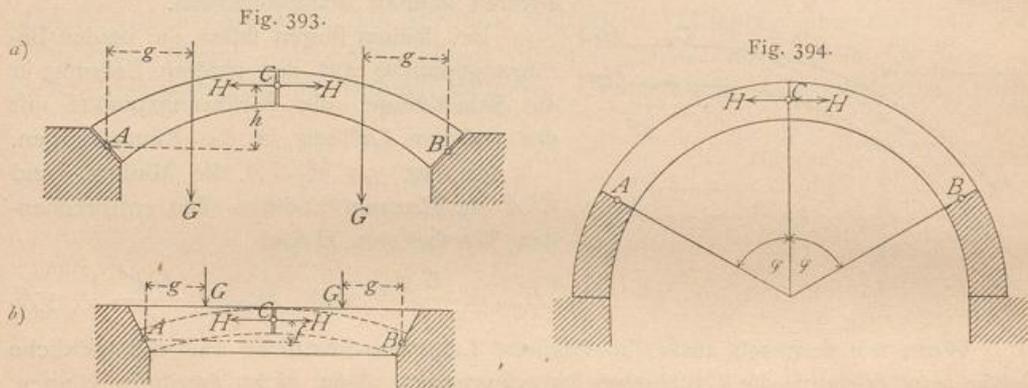
Wenn im inneren Drittel des Gewölbes, in der sog. Kernfläche, eine Maximal- und eine Minimalstützlinie möglich ist und beide nicht zusammenfallen, so ist dies noch günstiger.

Die Stabilität gegen Gleiten erfordert, dass die Tangente an die Stützlinie an keiner Stelle einer größeren, als den Reibungswinkel mit der Fugen-Senkrechten mache. Dieser Bedingung müssen also auch die Maximal- und Minimalstützlinie genügen.

282.
Horizontal Schub
für verschiedene
Bogenformen.

Für einige häufig vorkommende Bogenformen ergeben sich die Horizontalschübe unter Annahme symmetrischer Form und Belastung, so wie unter der weiteren Annahme einer mittleren Stützlinie folgendermaßen.

- 1) Flachbogen (Fig. 393 a). Nach Früherem ist $H = \frac{Gg}{h}$.
- 2) Scheitrechter Bogen. Man kann die Tragfähigkeit des scheinrechten Bogens als eben so groß annehmen, wie diejenige eines Flachbogens, dessen Mittel-



punkt auf der Lothrechten der Scheitelfuge liegt und dessen innere Laibung durch die unteren Punkte der Kämpferfugen, dessen äußere Laibung durch den obersten Punkt der Scheitelfuge geht. Dann wird nach Fig. 393 b)

$$H = \frac{Gg}{f}$$

3) Halbkreisbogen. Eine halbkreisförmige Mittelkraftlinie für lothrechte (hier nur in Betracht kommende) Belastung giebt es nicht; denn bei derselben müsste die Tangente an jedem Kämpfer, also auch die Mittelkraft an dieser Stelle, lothrecht sein. Da aber die Mittelkraft stets eine wagrechte Seitenkraft (den Horizontalschub) hat, so kann sie nie lothrecht sein. Deshalb kann die Mittelkraftlinie nicht einen vollen Halbkreis vorstellen. Man muss daher die unteren Theile des Bogens als zum Widerlager gehörig betrachten und berechnet den Horizontalschub H für den zwischengespannten Flachbogen (Fig. 394). Der Winkel φ wird zweckmäßig etwa gleich 60 Grad gewählt; H ergibt sich dann, wie unter 1.

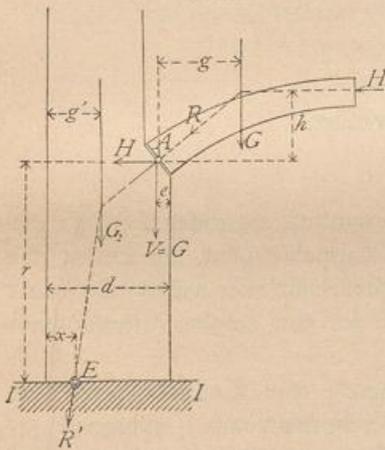
283.
Stabilität
der
Widerlager
und Pfeiler.

Bei den Widerlagern, bzw. Mittelpfeilern der Gewölbe kann man, genau wie bei den Gewölben selbst, von einer Stützlinie sprechen, wenn man dieselbe als Gesamtheit der Punkte erklärt, in welchen die einzelnen Querschnitte der Widerlager,

bezw. Pfeiler von den auf sie wirkenden Mittelkräften geschnitten werden. Alsdann gelten die in Art. 276 bis 279 (S. 290 bis 293) aufgestellten Sätze auch hier und können folgendermaßen ausgesprochen werden: Soll das Widerlager, bezw. der Pfeiler gegen Kanten, Zerdrücken und Gleiten stabil sein, so muß die Stützlinie ganz im Widerlager, bezw. Pfeiler liegen, darf die Mittelkraft an keiner Querschnittsstelle eine größere Druckbeanspruchung erzeugen, als der Baustoff gestattet, und darf endlich der Winkel der Mittelkraft mit der Senkrechten zur Fuge an keiner Stelle größer sein, als der Reibungswinkel.

1) Widerlager. Die vom Gewölbe auf ein Widerlager ausgeübte Kraft R ist nach Größe und Richtung gleich dem Kämpferdruck, welcher auf das Gewölbe wirkt, dem Sinne nach demselben entgegengesetzt. Wenn R bekannt oder angenommen ist, so kann die entsprechende Widerlager-Stützlinie leicht durch Zusammenfassung dieser Kraft R mit den Widerlagerlasten konstruiert werden. Für R und H sind aber nach Obigem nur gewisse Grenzen bekannt. Wenn nun das Widerlager für die Grenzwerte von H stabil ist, so offenbar auch für die Mittelwerte. Ist es also möglich, für den Maximal- und Minimalwerth von H je eine Widerlager-Stützlinie zu konstruieren, welche obigen Bedingungen genügt, so ist das Widerlager stabil. Da die Maximalwerthe von H nur in Folge künstlicher Vergrößerung des Horizontalschubes auftreten, so ist es meistens ausreichend, den Nachweis unter Zugrundelegung eines mittleren Werthes von H zu führen, d. h. eines solchen Werthes, welcher einer mittleren Gewölbe-Stützlinie entspricht.

Fig. 395.



Auf dem Wege der Rechnung kann man die Stabilität des Widerlagers folgendermaßen untersuchen. Man sucht die Punkte, in welchen die Stützlinie die einzelnen Fugen schneidet, und ermittelt die in denselben hervorgerufenen Druckspannungen. Die Untersuchung soll für die Fuge II (Fig. 395) gezeigt werden. Die Mittelkraft aller oberhalb von II wirkenden Kräfte schneide die Fuge im Punkte E ; dann ist E ein Punkt der Stützlinie. Die Lage von E ist bekannt, wenn x , der Abstand von der äußeren Mauerkante, bekannt ist. Auf das Widerlager wirken in A : der Kämpferdruck R , dessen wagrechte, bezw. lothrechte Seitenkraft H ,

bezw. V ist. Es ist $H = \frac{Gg}{h}$ und $V = G$. Außer diesen Kräften wirkt als belastend auf die Fuge II noch das Gewicht der Mauer, so weit sie oberhalb II liegt, d. h. G_1 . Die Mittelkraft von H , $V (= G)$ und G_1 ist R' , und diese Kraft geht durch E , hat also für den Drehpunkt E das statische Moment Null. Demnach ist auch die algebraische Summe der statischen Momente der Einzelkräfte für E als Drehpunkt gleich Null, also

$$0 = G_1(g' - x) + G(d - e - x) - Hr,$$

woraus

$$x = \frac{G_1 g' + G(d - e) - Hr}{G + G_1}$$

folgt. Wenn sich für x ein negativer Werth ergibt, so bedeutet dies, daß die

Kraft R' den Querschnitt links von der Aufsenkante der Mauer schneidet, das also Kanten eintreten muß.

Die lothrechte Seitenkraft der Mittelkraft R' ist offenbar $P = G_1 + G$. Nachdem in E der Schnittpunkt der Mittelkraft mit der Fuge gefunden ist, kann man die größte in der Fuge durch diese Belastung erzeugte Druckspannung ermitteln, wie in Art. 127 bis 130 (S. 112 bis 117) für verschiedene Querschnittsformen gezeigt ist. Wenn der Querschnitt ein Rechteck von der Länge b (senkrecht zur Bildfläche gemessen) ist und die Kräfteebene denselben in der Hauptaxe schneidet, so ist für

$$x < \frac{d}{3}$$

$$\sigma_{max} = \frac{2P}{3xb}$$

x und b sind in Centimetern, P in Kilogramm einzusetzen; alsdann erhält man σ_{max} in Kilogramm für das Quadr.-Centimeter. In ganz derselben Weise kann man die Unterfuchung für eine Anzahl von Fugen führen.

2) Pfeiler. Die Stabilitätsunterfuchung eines zwischen zwei Gewölben befindlichen Mittelpfeilers wird entsprechend vorgenommen.

Die Punkte E können auch leicht graphisch ermittelt werden, indem man R mit G_1 zu R' zusammensetzt und in gleicher Weise weiter für die verschiedenen Fugen verfährt.

3. Kapitel.

Kreuz- und Kuppelgewölbe.

a) Kreuzgewölbe.

284.
Lagerfugen.

Die Einwölbung erfolgt beim Kreuzgewölbe bekanntlich entweder so, daß die Lagerfugen parallel zu den Längsaxen der einzelnen Kappen laufen, aus denen das Kreuzgewölbe besteht, oder so, daß sie im Grundriß senkrecht oder nahezu senkrecht zu den Graten verlaufen. Das statische Verhalten ist bei den beiden Anordnungen verschieden.

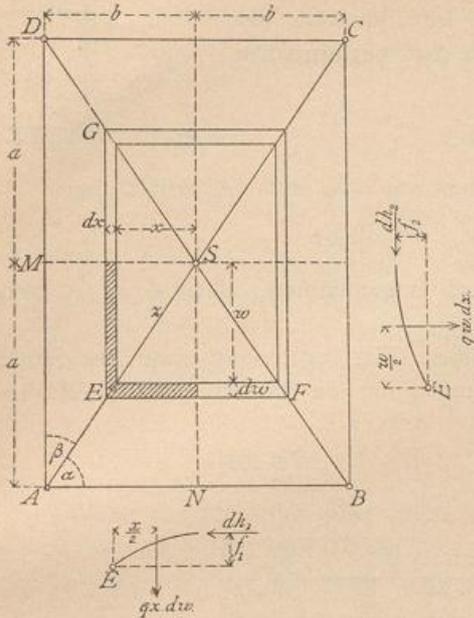
285.
Lagerfugen
parallel
zur Axe der
Kappen.

1) Die Lagerfugen laufen zu den Längsaxen der Kappen parallel. Bei den hier vorzunehmenden Berechnungen soll die vereinfachende, genügend genaue Annahme einer über die Grundfläche gleichmäßig vertheilten Belastung q auf die Flächeneinheit gemacht werden. Für die Ermittlung der Seilcurve und damit auch des Horizontalschubes werden stets drei Punkte angenommen werden.

Der nachfolgenden Unterfuchung soll ein Kreuzgewölbe über rechteckigem Raume zu Grunde gelegt werden; die Anwendung für ein solches mit quadratischem Grundriß ist dann leicht.

Zerlegt man jede Kappe durch senkrecht zur Längsaxe gelegte, lothrechte Ebenen in einzelne Streifen, welche im Grundriß Paralleltrapeze bilden (Fig. 396), und betrachtet man zwei solche Streifen GE und EF , die sich im Punkte E des Grates treffen, so ergeben sich die auf diese Streifen in ihren Scheiteln übertragenen Horizontalschübe folgendermaßen. Bezeichnet man die Pfeilhöhen der Seilcurven in den Streifen bezw. mit f_1 und f_2 , die Horizontalschübe mit bezw. dh_1 und dh_2 , so erhält man nach Fig. 396

Fig. 396.



$$dh_1 = \frac{q x^2 dw}{2f_1} \text{ und } dh_2 = \frac{q w^2 dx}{2f_2} \quad 397.$$

Der Punkt E ist der gemeinſame Kämpferpunkt für die beiden Bogen GE und EF ; die in dieſem Punkte auf den Gratbogen von den beiden Bogen übertragenen Kräfte haben je eine wagrechte Seitenkraft, welche dh_1 , bzw. dh_2 iſt, und eine lothrechte Seitenkraft, deren Gröſſen

$dv_1 = qx dw$ und $dv_2 = qw dx$ find. Die lothrechten Seitenkräfte addiren ſich einfach in E zu einer abwärts wirkenden Kraft:

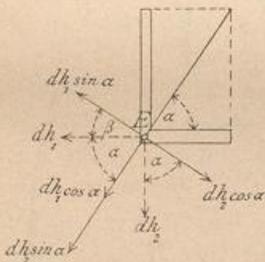
$$v = q(x dw + w dx).$$

v iſt alſo gleich dem halben Gewichte der anſchließenden Streifen (gleich dem Gewichte der in Fig. 396 ſchraffirten Fläche). Die beiden wagrechten Kräfte zerlegen ſich (Fig. 397) in je eine Seitenkraft, welche

in die Richtung der Diagonalen AC fällt, und in eine Seitenkraft ſenkrecht zur erſteren. Soll die Mittelkraft von dh_1 und dh_2 in die lothrechte, durch die Diagonale gelegte Ebene fallen, ſo müſſen ſich die zuletzt genannten Seitenkräfte $dh_1 \sin \alpha$ und $dh_2 \cos \alpha$ aufheben; ſomit muß

$$dh_1 \sin \alpha = dh_2 \cos \alpha.$$

Fig. 397.



ſein, daraus

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{dh_2}{dh_1} = \frac{w^2 dx \cdot f_1}{x^2 dw \cdot f_2}.$$

Nun iſt

$$w = x \operatorname{tg} \alpha \text{ und } dw = \operatorname{tg} \alpha dx,$$

daher

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{x^2 \operatorname{tg}^2 \alpha \cdot dx \cdot f_1}{x^2 \operatorname{tg} \alpha \cdot dx \cdot f_2} = \operatorname{tg} \alpha \frac{f_1}{f_2}.$$

Damit obige Bedingung erfüllt ſei, muß daher

$$\frac{f_1}{f_2} = 1, \text{ d. h. } f_1 = f_2$$

ſein. Soll alſo die Mittelkraft beider Horizontalkräfte im Grundriß in die Richtung der Diagonalen fallen, ſo find für die Seilcurven der beiden zugehörigen Streifen gleiche Pfeilhöhen einzuführen.

Damit dieſe günstige Kräftewirkung möglich ſei, müſſen die zugehörigen Streifen annähernd gleiche Scheitelhöhen haben. Wenn die Scheitellinien \overline{MS} und \overline{SN} der Kappen (Fig. 396) wagrecht ſind, ſo kann $f_1 = f_2$ ſein; aber auch wenn \overline{MS} nach einer geraden oder gekrümmten Linie anſteigt, iſt es möglich und zweckmäßig, der Linie \overline{SN} die entſprechende Form zu geben, bei welcher die Werthe f_1 der einzelnen Streifen den Werthen f_2 nahezu gleich ſind. Wenn die Bedingung $f_1 = f_2$ nicht erfüllt iſt, wenn beispielsweise $dh_1 \sin \alpha > dh_2 \cos \alpha$ iſt, ſo wirkt der Ueberſchuß $\Delta h = dh_1 \sin \alpha - dh_2 \cos \alpha$ wie in Fig. 398 gezeichnet iſt. Δh zer-

legt sich in eine Seitenkraft Δg in der lothrechten Gratebene und eine Seitenkraft Δw , welche parallel der Längsaxe der Kappe ASD (Fig. 396) wirkt. Die Kräfte Δw beanspruchen den Schildbogen AMD . Man erhält

$$\Delta w = \frac{\Delta h}{\sin \alpha} = dh_1 - \frac{dh_2}{\operatorname{tg} \alpha}.$$

Mit den in Gleichung 397 gefundenen Werthen von dh_1 und dh_2 erhält man

$$\Delta w = \frac{q x^2}{2} \operatorname{tg} \alpha \left(\frac{1}{f_1} - \frac{1}{f_2} \right) dx.$$

Für die weiteren Untersuchungen wird angenommen, daß $f_1 = f_2$, also $\Delta w = 0$ sei.

Betrachtet man ein Viertel des Gewölbes (Fig. 399), und zwar das Stück $MSNA$, so wirken auf dasselbe die Belaftung q für die Einheit der Grundfläche, also im Ganzen $G = qab$ im Schwerpunkt O des Rechteckes $MSNA$; außerdem wirken in den Scheiteln der einzelnen Gewölbestreifen die Kräfte dh_1 , bzw. dh_2 , endlich der Kämpferdruck auf den Gratbogen in A . Diese Kräfte müssen den Gewölbetheil im Gleichgewicht halten. Die den einzelnen Streifen entsprechenden Seilcurven sind, weil die Belastungen gleichmäÙig über die wagrechte Projection vertheilt sind, Parabeln, und man kann annehmen, daß sich in allen Streifen desselben Gewölbetheiles (ASB , bzw. ASD in Fig. 396) dieselbe Seilcurve bildet. Dann ist, wenn C_1 und C_2 noch zu bestimmende Festwerthe sind, bzw.

$$x^2 = C_1 f_1 \quad \text{und} \quad w^2 = C_2 f_2.$$

Werden diese Werthe in die Gleichung 397 eingeführt, so ergibt sich

$$dh_1 = \frac{q C_1 dx}{2} \quad \text{und} \quad dh_2 = \frac{q C_2 dx}{2} \quad \dots \quad 398.$$

Die in den Scheiteln der Gewölbestreifen wirkenden Horizontalkräfte haben also auf die ganze Länge des Gewölbes für die Längeneinheit die gleiche GröÙe (sind constant). Man erhält demnach die auf die gesammten Scheiteltrecken SN , bzw. SM ausgeübten Horizontalkräfte zu

$$H_1 = \frac{q C_1 a}{2} \quad \text{und} \quad H_2 = \frac{q C_2 b}{2} \quad \dots \quad 399.$$

Diese Mittelkräfte liegen in den Mitten der bezüglichlichen Scheiteltrecken, weil alle Einzelkräfte gleich groß sind. Beide Kräfte H_1 und H_2 schneiden sich in der Mitte der Diagonale AS , d. h. in der Lothrechten des Punktes O . Wird die Pfeilhöhe der Seilcurve im äußersten Gewölbestreifen (AB , bzw. AD) mit c bezeichnet, so ist $b^2 = C_1 c$ und $a^2 = C_2 c$; hiernach wird

$$H_1 = \frac{q}{2} a \frac{b^2}{c} \quad \text{und} \quad H_2 = \frac{q}{2} b \frac{a^2}{c}.$$

Fig. 398.

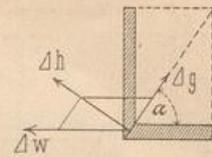
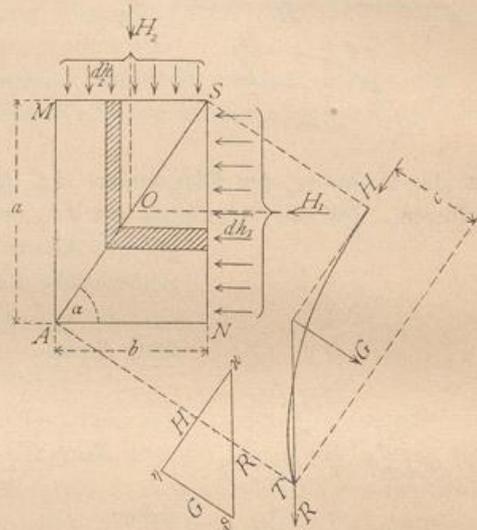


Fig. 399.



* H_1 und H_2 setzen sich in ihrem Schnittpunkte zu einer Mittelkraft H zusammen, welche im Grundriss in die Richtung der Diagonalen AS fällt; dieselbe ist

$$H = H_1 \cos \alpha + H_2 \sin \alpha = \frac{q}{2c} ab (b \cos \alpha + a \sin \alpha).$$

Nun ist $\cos \alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ und $\sin \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$; mithin wird

$$H = \frac{qab(b^2 + a^2)}{2c\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{qab}{2c} \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Diese Kraft H vereinigt sich in der Lothrechten des Punktes O mit dem Gewichte $G = qab$ zu der auf den Kämpfer wirkenden Mittelkraft. Damit ist die auf einen jeden Eckpfeiler des rechteckigen Kreuzgewölbes wirkende Kraft gefunden; sie hat eine wagrechte und eine lothrechte Seitenkraft, deren Größen sind:

$$H = \frac{qab}{2c} \sqrt{a^2 + b^2} \dots \dots \dots 400.$$

$$V = qab \dots \dots \dots 401.$$

Wenn das Gewölbe quadratischen Grundriss hat, so bleibt alles Vorstehende gültig; nur ist $b = a$ einzuführen, so dass man erhält: Beim Kreuzgewölbe über quadratischem Raume mit einer Seitenlänge $2a$ ist der Horizontalschub am Grat

$$H = \frac{qa^3}{c\sqrt{2}}, \dots \dots \dots 402.$$

und die lothrechte auf jeden Pfeiler übertragene Kraft

$$V = qa^2 \dots \dots \dots 403.$$

Die graphische Ermittlung von H läuft auf die Zerlegung von $G = qab$ (bezw. qa^2) in die beiden Kräfte H und R hinaus. Ist in Fig. 399: $G = \eta \vartheta$, so ist $\alpha \eta = H$ und $\vartheta \alpha = R$.

2) Die Lagerfugen sind im Grundriss senkrecht zu den Graten. Der Untersuchung wird wieder ein Gewölbe über rechteckigem Raume zu Grunde gelegt. Dasselbe werde durch lothrechte Ebenen, welche im Grundriss senkrecht zu den Graten gerichtet sind, in Streifen zerlegt; dann besteht jeder Streifen aus zwei Theilen, welche sich im Grat treffen. Für jeden Theil stellt der Grat den einen Stützpunkt dar; die anderen Stützpunkte werden bei den innerhalb des Viereckes $LMNO$ (Fig. 400) liegenden Streifen durch die entsprechenden Streifen der benachbarten Gewölbeviertel gebildet, bei den außerhalb dieses Viereckes liegenden Streifen einerseits durch die Streifen des benachbarten Gewölbeviertels, andererseits oder beiderseits durch die Gurtbogen AB, BC, CD, DA .

a) Es werde zuerst ein Streifen $FE G$ aus dem Viereck $LMNO$ betrachtet. Die Belastung für die Einheit der Grundfläche sei wiederum q ; alsdann ist (Fig. 400)

$$dh_1 = \frac{qz_1^2 dw}{2f_1} \quad \text{und} \quad dh_2 = \frac{qz_2^2 dw}{2f_2}, \dots \dots \dots 404.$$

wenn f_1 und f_2 die Pfeilhöhen der betreffenden Seilcurven sind. Im Punkte E wird auf den Grat nur eine lothrechte Kraft übertragen, falls $dh_1 = dh_2$, d. h. wenn $\frac{f_2}{f_1} = \frac{z_2^2}{z_1^2}$ ist. Nun ist $z_2 = w \operatorname{tg} \alpha$ und $z_1 = \frac{w}{\operatorname{tg} \alpha}$; mithin ist die Bedingung für $dh_1 = dh_2$:

$$\frac{f_2}{f_1} = \operatorname{tg}^4 \alpha = \frac{a^4}{b^4}; \dots \dots \dots 405.$$

286.
Lagerfugen
senkrecht
zu den
Graten.

β) Nunmehr werde ein Streifen $H\mathcal{F}K$ untersucht, welcher auferhalb des Viereckes $LMNO$ liegt, aber an der einen Seite sich gegen den entsprechenden Streifen des benachbarten Gewölbeviereckes lehnt (Fig. 400). Es kann angenommen werden, daß die Seilcurve im Punkte K eine wagrechte Tangente hat; im Punkte H ist dies nicht der Fall. Wir ergänzen das Stück $\mathcal{F}H$ des Streifens durch ein Stück, welches bis zur Verlängerung der Linie LN reicht, und nehmen an, daß im Punkte H'' dieses Streifens die Seilcurve eine wagrechte Tangente habe. Der Horizontalschub im Streifen $H\mathcal{F}$ ist eben so groß, wie im Streifen $H''\mathcal{F}$. Werden die Pfeilhöhen der betreffenden Seilcurven mit f_3 und f_4 bezeichnet, so ist

$$dh_3 = \frac{q dw z_3^2}{2 f_3} \quad \text{und} \quad dh_4 = \frac{q dw \delta_4^2}{2 f_4}.$$

Soll, wie oben, $dh_3 = dh_4$ sein, so muß

$$\frac{f_4}{f_3} = \frac{\delta_4^2}{z_3^2} = \text{tg}^2 \alpha = \frac{a^2}{b^2}$$

sein, d. h. die Pfeilhöhen müssen im gleichen Verhältniß zu einander stehen, wie oben unter α (Gleichung 405).

Im Punkte \mathcal{F} wird auf den Grat eine lothrechte Belastung übertragen, welche dem Gewichte des ganzen Streifens $H''\mathcal{F}K$ gleich ist; denn der im Punkte H vom Gurtbogen auf den Streifen wirkende Gegendruck hat eine nach unten gerichtete lothrechte Seitenkraft, die dem Gewichte des Streifens HH'' gleich ist.

Demnach wirkt in \mathcal{F} als Belastung auf den Grat

$$dv_2 = q dw (z_3 + \delta_4) = q w dw \left(\frac{1}{\text{tg} \alpha} + \text{tg} \alpha \right)$$

und, da $w = y \sin \alpha$, also $dw = \sin \alpha dy$ ist,

$$dv_2 = q y \text{tg} \alpha dy \quad \dots \dots \dots 407.$$

Im Punkte K wirken zwei Kräfte dh_3 , deren Mittelkraft sich zu

$$dh' = 2 dh_3 \cos \alpha = \frac{q dw z_3^2}{f_3} \cos \alpha$$

ergiebt. Mit $w = z_3 \text{tg} \alpha$, also $dw = \text{tg} \alpha dz_3$ erhält man

$$dh' = \frac{q z_3^2}{f_3} \sin \alpha dz_3.$$

Setzt man wiederum $z_3^2 = C f_3$, so wird

$$dh' = q C \sin \alpha dz_3$$

und, weil $z_3 = y \cos \alpha$ oder $dz_3 = dy \cos \alpha$ ist,

$$dh' = q C \sin \alpha \cos \alpha dy.$$

Die Summe aller Kräfte dh und dh' , welche von den Streifen bis $L''M''N''$ ausgeübt werden, ist demnach

$$\mathfrak{D}_1 = q C a \sin \alpha \cos \alpha$$

und, weil $\sin \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ und $\cos \alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ ist,

$$\mathfrak{D}_1 = \frac{q a^2 b C}{a^2 + b^2} \quad \dots \dots \dots 408.$$

γ) Betrachtet man endlich einen Streifen $F''E''G''$, welcher sich beiderseits gegen die Gurtbogen stützt, so hat man hier beiderseits ergänzende Gewölbestücke hinzuzufügen, welche bis zu den verlängerten Halbirungslinien des Gewölbes reichen.

Die beiden in E'' auf den Grat übertragenen wagrechten Kräfte sind, wenn die obigen Bezeichnungen (mit Abänderung der Zeiger) beibehalten werden,

$$dh_5 = \frac{q dw \delta_5^2}{2f_5},$$

$$dh_6 = \frac{q dw \delta_6^2}{2f_6}.$$

Sollen sich wiederum die beiden wagrechten Kräfte in E'' aufheben, so muß

$$\frac{f_6}{f_5} = \frac{\delta_6^2}{\delta_5^2} = \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{a^4}{b^4}$$

sein. Die in E'' auf den Grat übertragene lothrechte Last ist alsdann (vergl. die Angaben unter β)

$$dv_3 = q dw (\delta_5 + \delta_6).$$

Nun ist

$$(\delta_5 + \delta_6) = \frac{y_5}{\cos \alpha}$$

und $dw = \sin \alpha dy$, also

$$dv_3 = \frac{q y_5}{\cos \alpha} \sin \alpha dy$$

$$= q y_5 dy \cdot \operatorname{tg} \alpha, \dots 409.$$

genau wie in den Formeln 406 u. 407.

Die im Punkte G'' auf den Gurtbogen ausgeübte Kraft dh_3 zerlegt sich in eine senkrecht zum Gurtbogen gerichtete Seitenkraft $dh_3 \cos \alpha$ und eine solche, welche im Grundriß in die Richtung des Gurtbogens fällt: $dh_3 \sin \alpha$. Letztere wird durch eine gleich große, entgegengesetzt gerichtete Seitenkraft im symmetrisch zur Mitte liegenden Punkte aufgehoben; die erstere ist

$$dh_3 \cos \alpha = \frac{q dw \delta_5^2}{2f_5} \cos \alpha.$$

Setzt man wieder $\delta_5^2 = C f_5$, so wird

$$dh_3 \cos \alpha = \frac{q dw C}{2} \cos \alpha.$$

Nach Fig. 401 ist $\cos \alpha = \frac{\rho - w}{u}$, $w = \rho - u \cos \alpha$ und $dw = -\cos \alpha du$,

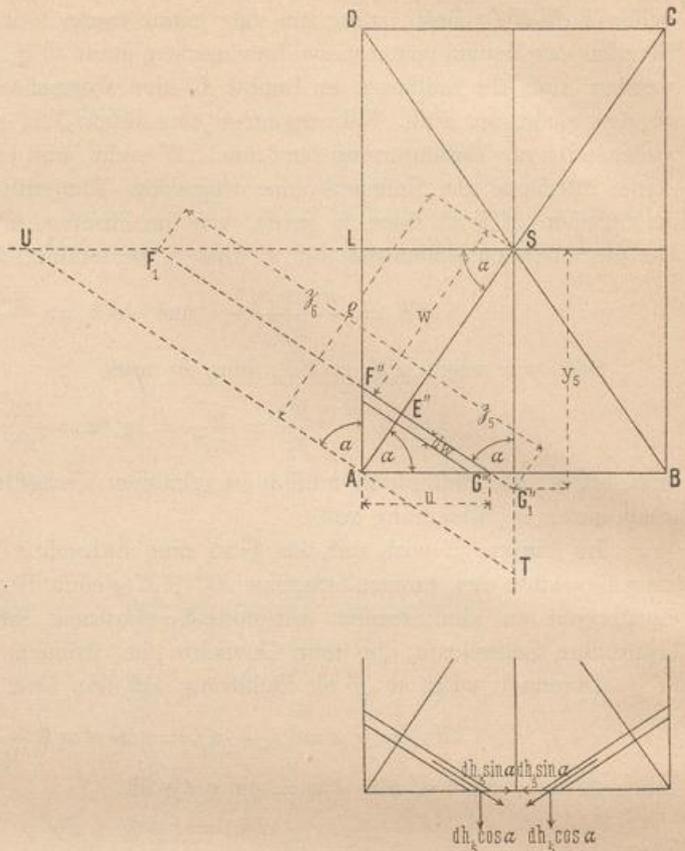
also

$$dh_3 \cos \alpha = -\frac{q C}{2} \cos^2 \alpha du.$$

Die auf den Gurtbogen wirkende wagrechte Kraft ist also auf die ganze Grundrißlänge constant, und zwar entfällt auf jede Hälfte b der Breite

$$-\int_b^0 \frac{q C}{2} \cos^2 \alpha du = \frac{q C}{2} \cos^2 \alpha b.$$

Fig. 401.



Die gefamnte auf den Gurtbogen übertragene, wagrechte Kraft ist demnach in der Axe des Gewölbes ASB (vergl. Gleichung 408)

$$\mathfrak{H}_1 = \frac{q a^2 b C}{a^2 + b^2};$$

gleichmäfsig über die Grundrifsänge $2b$ vertheilt wirkt:

$$\mathfrak{H}_2 = \frac{q C b^3}{a^2 + b^2}.$$

Diese Kräfte greifen in verschiedenen Höhen an; die Lage von \mathfrak{H}_2 folgt aus den Höhen der Stellen, an welchen die einzelnen Gewölbefstreifen sich an den Gurtbogen setzen. An diesen Stellen wirken aufser den wagrechten auch lothrechte Seitenkräfte nach aufwärts; dieselben sind gleich den Gewichten der zu ergänzenden Gewölbefstreifen.

Die gefamnte, normal gegen den Gurtbogen AB wirkende Horizontalkraft ist

$$\mathfrak{H}_1 + \mathfrak{H}_2 = \frac{q C b}{a^2 + b^2} (a^2 + b^2) = q C b, \\ (\mathfrak{H}_I) = q C b; \dots \dots \dots 410.$$

eben so erhält man als gefamnte Horizontalkraft, welche normal gegen den Gurtbogen AD wirkt,

$$(\mathfrak{H}_{II}) = q C a \dots \dots \dots 411.$$

Wird die Pfeilhöhe f_3 der Seilcurve, welche durch M'' gelegt ist, mit e bezeichnet, für welchen Streifen s_3 den Werth $a \cos \alpha$ annimmt, so ergibt sich

$$a^2 \cos^2 \alpha = C e, \text{ d. h. } C = \frac{a^2 b^2}{e(a^2 + b^2)}; \text{ fomit}$$

$$\left. \begin{aligned} (\mathfrak{H}_I) &= \frac{q a^2 b^3}{e(a^2 + b^2)} \\ (\mathfrak{H}_{II}) &= \frac{q a^3 b^2}{e(a^2 + b^2)} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 412.$$

Die Kräfte \mathfrak{H} werden entweder durch gleiche, entgegengesetzt gerichtete, vom Nachbargewölbe ausgehende Kräfte aufgehoben, oder sie werden von der Mauer aufgenommen, gegen welche sich das Gewölbe setzt.

δ) Die Belastung des Gratbogens ist nach Vorstehendem lothrecht; nach Gleichung 406, 407 u. 409 nimmt sie von der Mitte des Gewölbes von S bis zum Kämpfer des Gratbogens bei A

entsprechend den Ordinaten einer Geraden zu. In allen drei oben betrachteten Abtheilungen ist sie auf die Grundrifsänge $d w$

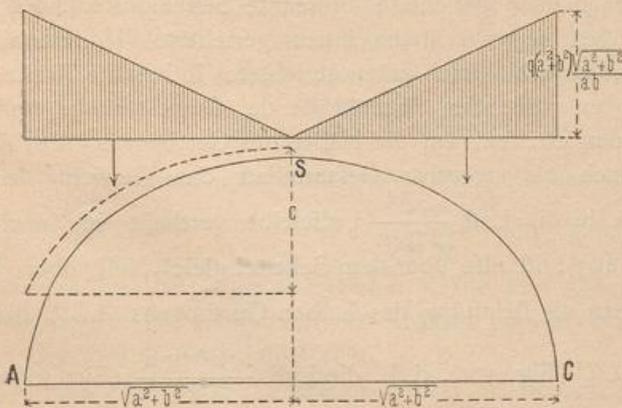
$$d v = q d w \frac{y}{\cos \alpha};$$

demnach ist auf die Längeneinheit des Gratbogens im Grundrifs die Belastung

$$\frac{d v}{d w} = \frac{q y}{\cos \alpha}.$$

y hat seinen grössten Werth für den Kämpferpunkt;

Fig. 402.



für diesen Punkt ist $y = \overline{ST} = a + \frac{b}{\operatorname{tg} \alpha} = a + \frac{bb}{a} = \frac{a^2 + b^2}{a}$. An dieser Stelle ist die Einheitsbelastung $\frac{q(a^2 + b^2)}{a \cos \alpha} = \frac{q(a^2 + b^2)}{ab} \sqrt{a^2 + b^2}$.

Wird die Pfeilhöhe der Seilcurve im Gratbogen gleich c angenommen, so ist der Horizontal Schub im Grat

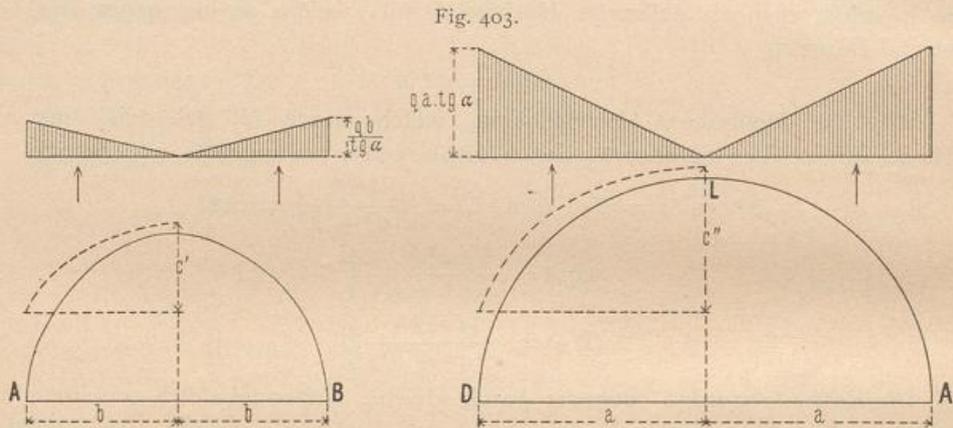
$$R_h = \frac{q(a^2 + b^2) \sqrt{a^2 + b^2}}{abc} \cdot \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{3},$$

$$R_h = \frac{q(a^2 + b^2)^2 \sqrt{a^2 + b^2}}{6abc} \dots \dots \dots 413.$$

Die lothrechte Seitenkraft der vom Gratbogen auf den Eckpfeiler ausgeübten Kraft ist

$$R_v = \frac{q(a^2 + b^2) \sqrt{a^2 + b^2} \sqrt{a^2 + b^2}}{2ab} = \frac{q(a^2 + b^2)^2}{2ab} \dots \dots \dots 414.$$

e) Standficherheit der Eckpfeiler. Für die Untersuchung der Standficherheit der Eckpfeiler sind weiter noch die Kräfte in das Auge zu fassen, welche



von den Gurtbogen auf die Eckpfeiler übertragen werden; dieselben sollen nur so weit besprochen werden, als sie vom Kreuzgewölbe hervorgerufen werden; vom Eigengewicht der Gurtbogen kann hier abgesehen werden.

Von den einzelnen Gewölbestreifen werden nach Vorstehendem Kräfte auf die Gurtbogen übertragen, welche nach oben gerichtete lothrechte Seitenkräfte haben; diese letzteren rufen im Gurtbogen negative (nach innen gerichtete) Horizontalkräfte hervor, außerdem im Pfeiler negative (nach unten gerichtete) lothrechte Kräfte. Die lothrechten, auf die Gurtbogen wirkenden Seitenkräfte der Gewölbschübe sind gleich den Gewichten der Ergänzungstreifen; auf die Hälfte des Gurtbogens $AM''B$ (Fig. 400 u. 401) wirkt demnach als negative Gesamtlast das Gewicht des Ergänzungsdreieckes $AM''T$, d. h. die Last $\frac{qb^2}{2 \operatorname{tg} \alpha}$; dieselbe vertheilt sich nach dem Gesetze des Dreieckes (Fig. 403), ist also über dem Scheitel gleich Null, über A gleich $\frac{qb}{\operatorname{tg} \alpha}$. Eben so erhält man als Belastung des halben Gurtbogens ALD die Last des Ergänzungsdreieckes ALU (Fig. 401), d. h. die Last $\frac{qa^2 \operatorname{tg} \alpha}{2}$ (Fig. 403);

über A und D ist die Belaftung für die Längeneinheit gleich $q a \operatorname{tg} \alpha$; über L ist die Einheitsbelaftung gleich Null. Fig. 403 zeigt die Belaftung. Demnach entfällt auf den Eckpfeiler A die negative Zusatzlast $\Delta R_v = -\left(\frac{q b^2}{2 \operatorname{tg} \alpha} + \frac{q a^2 \operatorname{tg} \alpha}{2}\right)$ und mit $\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b}$

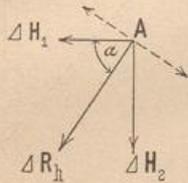
$$\Delta R_v = -\frac{q}{2 a b} (a^4 + b^4) \dots \dots \dots 415.$$

Die in Fig. 403 angegebenen Belaftungen erzeugen in den Gurtbogen die Horizontalstöße

$$\Delta H_1 = -\frac{q b^2 b}{2 \operatorname{tg} \alpha \cdot 3 c'} \quad \text{und} \quad \Delta H_2 = -\frac{q a^2 \operatorname{tg} \alpha \cdot a}{2 \cdot 3 c''},$$

welche sich zu einer in der Richtung des Grates wirkenden Mittelkraft ΔR_h vereinen. Es ist

Fig. 404.



$$\Delta R_h = -(\Delta H_1 \cos \alpha + \Delta H_2 \sin \alpha),$$

$$\Delta R_h = -\frac{q}{6} \left(\frac{b^3 \cos^2 \alpha}{c' \sin \alpha} + \frac{a^3 \sin^2 \alpha}{c'' \cos \alpha} \right) \dots \dots \dots 416.$$

Für $c' = c'' = c$ wird

$$\Delta R_h = -\frac{q(a^6 + b^6)}{6 a b c \sqrt{a^2 + b^2}} \dots \dots \dots 417.$$

Vereinigt man die für ΔR_v und ΔR_h gefundenen Werthe mit den Werthen derjenigen Kräfte, welche vom Grat auf den Eckpfeiler übertragen werden, d. h. mit den Ausdrücken der Gleichungen 413 u. 414, so erhält man, wenn man

$$R_h + \Delta R_h = H \quad \text{und} \quad R_v + \Delta R_v = V$$

setzt,

$$H = \frac{q(a^2 + b^2)^2}{6 a b c} \sqrt{a^2 + b^2} - \frac{q}{6 a b c \sqrt{a^2 + b^2}} \left(\frac{b^6}{c'} + \frac{a^6}{c''} \right) \dots \dots \dots 418.$$

Für $c' = c'' = c$ ergibt sich

$$H = \frac{q a b}{2 c} \sqrt{a^2 + b^2}; \dots \dots \dots 419.$$

ferner

$$V = \frac{q}{2 a b} (a^2 + b^2)^2 - \frac{q}{2 a b} (a^4 + b^4);$$

mit einfachen Umformungen erhält man

$$V = q a b \dots \dots \dots 420.$$

Die auf den Eckpfeiler Seitens des Kreuzgewölbes ausgeübte Kraft hat also, falls man $c' = c'' = c$ setzen kann, als Seitenkräfte

für das Kreuzgewölbe über rechteckigem Raume:

$$H = \frac{q a b}{2 c} \sqrt{a^2 + b^2} \quad \text{und} \quad V = q a b;$$

für das Kreuzgewölbe über quadratischem Raume:

$$H = \frac{q a^3}{c \sqrt{2}} \quad \text{und} \quad V = q a^2.$$

Die auf die Eckpfeiler ausgeübten Kräfte sind also genau gleich groß, mögen die Lagerfugen den Längsachsen der Kappen parallel laufen oder im Grundriss fenkrecht zu den Graten angeordnet sein.

Man nehme H im inneren Drittel der Scheitelfuge des Gratabogens wirkend an.

b) Kuppelgewölbe.

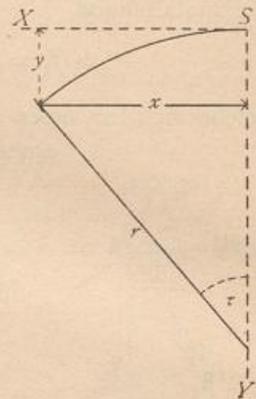
287.
Voraus-
setzungen.

Die Kuppelfläche entsteht durch Drehung einer krummen Linie um eine lothrechte Axe. In den folgenden Untersuchungen sollen die im Inneren des Kuppelgewölbes auftretenden Kräfte unter der Annahme ermittelt werden, daß die Belastung eine ruhende und über die einzelnen zwischen den Parallelkreisen liegenden Ringe so vertheilt sei, daß ein jeder Ring entweder voll belastet oder ganz unbelastet ist. Weiter wird die Kuppelfläche als die Gleichgewichtsfläche angenommen; demnach werden die auf ein beliebiges Kuppeltheilchen wirkenden inneren Kräfte in die betreffenden Berührungsebenen der Kuppelfläche fallen. Daraus ergeben sich dann die inneren Kräfte oder Spannungen, welche, in der Kuppel wirkend, im Stande sind, das Gleichgewicht aufrecht zu erhalten.

288.
Allgemeine
Gleichgewichts-
bedingungen.

Der Anfangspunkt der Coordinaten soll in den Scheitel der Kuppel (Fig. 405) gelegt und die lothrechte Axe als Y-Axe, eine im Scheitel *S* senkrecht zu ersterer errichtete Axe als X-Axe gewählt werden. Irgend ein Kuppeltheilchen *MNOP* (Fig. 406), welches oben und unten durch Parallelkreise, rechts und links durch Meridiane der Kuppel begrenzt ist, wird auf seinen Gleichgewichtszustand untersucht. Das Theilchen *MNOP* ist in Fig. 406a in der Ansicht, in Fig. 406b im Grundriss, daneben im abgewickelten Zustande dargestellt.

Fig. 405.



Auf *MN* wirkt für die Längeneinheit die Tangentialspannung *T*, und da *MN* (vergl. den Grundriss in Fig. 406b) $x d\omega$ Längeneinheiten enthält, so wirkt auf *MN* die Kraft $T x d\omega$.

Auf *OP* wirkt $(T + dT)(x + dx) d\omega$; auf *MP* und *NO* wirken die Ringspannungen, welche für die Längeneinheit gleich *R* sein, also auf *ds* Längeneinheiten die Größe *R ds* haben. Außerdem wirkt noch die veränderliche Belastung *p* für die Flächeneinheit der Kuppelfläche, d. h. auf *MNOP* die Last $p ds \cdot x d\omega$. Um sämtliche auf das Theilchen wirkende Kräfte in einer Ebene zu erhalten, ermittelt man die Mittelkraft der beiden Ringspannungen *R ds*; sie ist $\mathfrak{S} = 2 R ds \sin \frac{d\omega}{2}$,

und, da wegen der Kleinheit von $\frac{d\omega}{2}$ die

Größe $\sin \frac{d\omega}{2} = \frac{d\omega}{2}$, wird

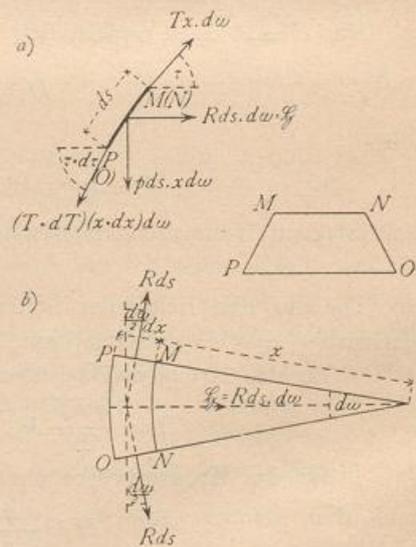
$$\mathfrak{S} = R ds d\omega \dots 421.$$

Die Aufstellung der allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen für *MNOP* ergibt nun

$$0 = T x d\omega \cos \tau - (T + dT)(x + dx) d\omega \cos(\tau + d\tau) + R ds d\omega.$$

Führt man die Multiplication durch und läßt die unendlich kleinen Glieder zweiter und dritter Ordnung fort, so bleibt

Fig. 406.



$0 = Tx \sin \tau d\tau - dTx \cos \tau - Tdx \cos \tau + Rds = -d(Tx \cos \tau) + Rds;$
daher

$$Rds = d(Tx \cos \tau) \dots \dots \dots 422.$$

Ferner ist

$$0 = pdsx d\omega - Txd\omega \sin \tau + (T + dT)(x + dx)d\omega \sin(\tau + d\tau);$$

$$\sin(\tau + d\tau) = \sin \tau + \cos \tau d\tau.$$

Durch Ausmultipliciren und Fortlassen der unendlich kleinen Glieder zweiter und dritter Ordnung erhält man $0 = pxds + d(Tx \sin \tau);$ daher

$$-pxds = d(Tx \sin \tau) \dots \dots \dots 423.$$

Die beiden Gleichungen 422 u. 423 geben Aufschluss über die Gröſse der gleichzeitigen Werthe von T und R , welche irgend welchen Belastungen und Gleichgewichtsflachen entsprechen.

Die erzeugende Linie ist bei der Kugelkuppel ein Kreis. Die bezüglichen Werthe von T und R werden also erhalten, wenn in die Gleichungen 422 u. 423 für x und ds die Werthe eingeführt werden, welche dem Kreise entsprechen. Nach Fig. 405 ist $x = r \sin \tau$ und $ds = r d\tau$; mithin, wenn noch die Annahme gemacht wird, daf p für die ganze Kuppel constant ist,

289.
Kugelförmige
Kuppel.

$$-pr \sin \tau \cdot r d\tau = d(Tr \sin \tau \sin \tau) \quad \text{und} \quad \int_{\tau_0}^{\tau} d(Tr \sin^2 \tau) = -pr^2 \int_{\tau_0}^{\tau} \sin \tau d\tau.$$

Als untere Grenze ist der Werth τ_0 von τ einzuführen, welcher dem oberen Endpunkte der Erzeugenden entspricht; hier ist dieser Endpunkt S , und es wird $\tau_0 = 0$; demnach ist

$$Tr \sin^2 \tau = +pr^2 \left(\cos \tau \right)_0^{\tau} = -pr^2 (1 - \cos \tau),$$

$$T = -\frac{pr(1 - \cos \tau)}{\sin^2 \tau} = -\frac{pr(1 - \cos \tau)}{1 - \cos^2 \tau} = -\frac{pr}{1 + \cos \tau} \dots \dots 424.$$

Wird dieser Werth in die Gleichung 422 für R eingefetzt, so erhält man

$$Rds = Rr d\tau = d\left(-\frac{pr}{1 + \cos \tau} r \sin \tau \cos \tau\right) = -pr^2 d \frac{\sin \tau \cos \tau}{1 + \cos \tau},$$

$$R = -pr \frac{\cos 2\tau + \cos^3 \tau}{(1 + \cos \tau)^2} \dots \dots \dots 425.$$

Die Werthe der Gleichungen 424 u. 425 gelten für oben geschlossene Kugelkuppeln. Die Spannungen im Scheitel werden für $\tau = 0$ erhalten. Für letzteren Werth ist

$$T_0 = -\frac{pr}{2} \quad \text{und} \quad R_0 = -\frac{pr}{2}, \dots \dots \dots 426.$$

d. h. die Meridianspannungen und Ringspannungen sind für die Längeneinheit im Scheitel gleich groß; dafelbst findet somit nach allen Richtungen ein gleicher Druck $\frac{pr}{2}$ für die Längeneinheit statt.

Für die Halbkugelkuppel ist am Aequator $\tau = \frac{\pi}{2}$, daher

$$T_{\frac{\pi}{2}} = -pr \quad \text{und} \quad R_{\frac{\pi}{2}} = +pr \dots \dots \dots 427.$$

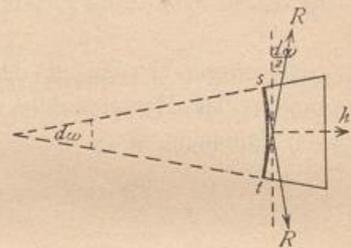
290.
Halbkugel-
kuppel.

Die Meridianspannung nimmt also vom Scheitel nach dem Aequator von $\frac{\rho r}{2}$ bis auf ρr zu, bleibt aber stets Druck, da $1 + \cos \tau$ nie negativ werden kann. Am Aequator ist T lothrecht gerichtet, da T gleiche Richtung mit der Tangente an die Erzeugende hat. Die Summe aller $T_{\frac{\pi}{2}}$ ist gleich dem Gewichte der ganzen Kuppel, da die $T_{\frac{\pi}{2}}$ die Auflagerdrücke darstellen. Es ist $\Sigma \left(T_{\frac{\pi}{2}} \right) = \rho r \cdot 2 r \pi = 2 \rho r^2 \pi$, und das ganze Kuppelgewicht ist gleich $\frac{4 r^2 \pi}{2} \rho = 2 r^2 \rho \pi$. Die Ringspannung R geht vom Druck $\frac{\rho r}{2}$ im Scheitel zum Zug ρr am Aequator über, demnach für irgend einen näher zu bestimmenden Winkel durch Null. Ist dieser Winkel τ_1 , so ist $0 = \rho r \frac{\cos 2 \tau_1 + \cos^3 \tau_1}{(1 + \cos \tau_1)^2}$, woraus sich ergibt

$$\cos \tau_1 = 0,618 \quad \text{und} \quad \tau_1 = 51^\circ 50' \dots \dots \dots 428.$$

In allen Ringen, deren zugehörige Winkel τ kleiner als τ_1 sind, findet Druck, in den Ringen, deren Winkel größer sind als τ_1 , findet Zug statt. Nimmt man auf die Zugfestigkeit des Mörtels keine Rücksicht, so können die einzelnen Theile eines Ringes keinen Zug auf einander ausüben. Ohne solchen kann aber bei den letzteren Ringen Gleichgewicht nicht stattfinden; ohne Hilfsconstruction ist daher das Gleichgewicht nicht vorhanden. Solche Hilfsconstructionen sind entweder umgelegte eiserne Ringe oder die Hintermauerung. Letztere leistet die auf den Kuppelring wirkenden Ringkräfte R ; auf dieselbe wirken sonach nach dem Princip von Wirkung und Gegenwirkung die Kräfte R in entgegengesetztem Sinne; dieselben sind bei Berechnung der Hintermauerung zu berücksichtigen. Betrachtet man ein Bogenstück st (Fig. 407), welches zum Winkel $d\omega$ gehört, so ist die Mittelkraft der beiden R die nach außen gerichtete Kraft h gleich $2 R \sin \frac{d\omega}{2} = R d\omega$.

Fig. 407.



Wir führen die abkürzende Bezeichnung

$$\mu = - \frac{\cos 2 \tau + \cos^3 \tau}{(1 + \cos \tau)^2} \dots \dots \dots 429.$$

ein; alsdann wird

$$R = \mu \rho r \quad \text{und} \quad h = \mu \rho r d\omega \dots \dots \dots 430.$$

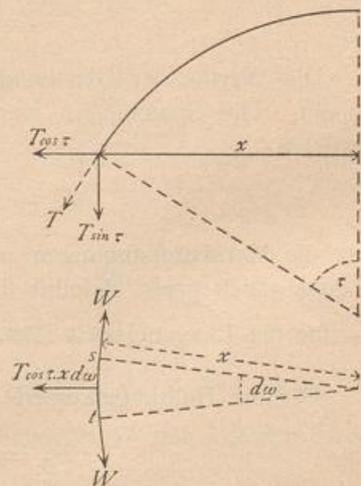
Für die Längeneinheit des $x d\omega$ langen Bogens ist also die nach außen auf die Hintermauerung wirkende Horizontalkraft in Folge der Ringspannungen

Fig. 408.

$$h = \frac{\mu \rho r d\omega}{x d\omega} = \frac{\mu \rho r}{x} \dots \dots \dots 431.$$

Aus Vorstehendem folgt noch, dass bei der Halbkugelpuppel die Hintermauerung wenigstens bis zu derjenigen Höhe hinaufreichen muss, welche dem Winkel $\tau_1 = 51^\circ 50'$ entspricht.

Außer den Kräften h (nach Gleichung 431) wirken auf die Widerlager noch die Meridianspannungen T , welche dem größten zur Kuppel gehörigen Winkel τ entsprechen. T hat eine wagrechte Seitenkraft $T \cos \tau$ und eine lothrechte Seitenkraft $T \sin \tau$. Die erstere wird durch die Widerlager oder durch einen eisernen Ring aufgehoben. Die Spannung in diesem Ringe ergibt sich dann wie folgt. Auf den Bogen st (Fig. 408)



von der Länge $x d\omega$ wirkt nach aufsen $T \cos \tau x d\omega$, und diese Kraft soll durch die beiden Ringspannungen W aufgehoben werden; es ist demnach

$$T \cos \tau x d\omega = 2 W \sin \frac{d\omega}{2} = W d\omega;$$

$$W = T x \cos \tau = \frac{p r r \sin \tau \cos \tau}{1 + \cos \tau} = \frac{p r^2 \sin \tau \cos \tau}{1 + \cos \tau} \dots 432.$$

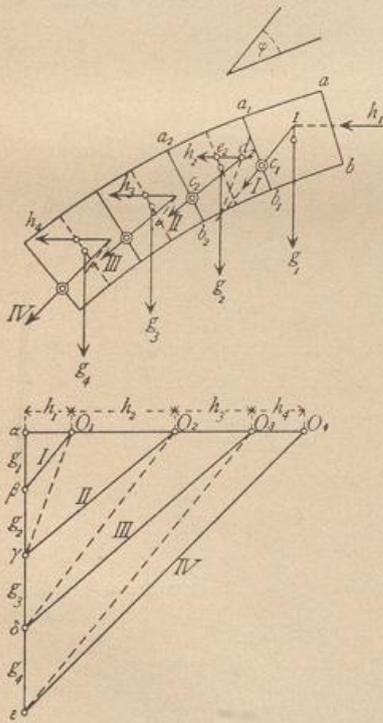
Die vorstehend entwickelten Werthe für T und R entsprechen einer Gleichgewichtsfläche. Man kann diese Werthe als genügend genaue Mittelwerthe annehmen; immerhin sind aber gröfsere und geringere Werthe denkbar, welche anderen in der Kuppel möglichen Gleichgewichtsflächen entsprechen, die nicht mit der Mittelfläche des Kuppelgewölbes zusammenfallen.

Die graphische Ermittlung der Werthe von T und R an den verschiedenen Stellen der Kuppel kann nun in ähnlicher Weise durchgeführt werden, wie bei den anderen Gewölbearten gezeigt ist, indem man bestimmte Bedingungen für die Stützzlinie vorschreibt. Man untersucht zu diesem Zwecke den einem Centriwinkel α entsprechenden Kuppeltheil und geht dabei vom Scheitel, bzw. vom Laternenring aus.

291.
Graphische
Ermittlung.

Stellt man die Bedingung, dafs die Stützzlinie im inneren Drittel verbleiben soll und kein Gleiten stattfindet, so erhält man eine solche, indem man vom obersten Kuppelringe ausgeht, folgendermafsen (Fig. 409). Die Belastung des obersten, zum angenommenen Centriwinkel gehörigen Kuppeltheiles sei

Fig. 409.



$g_1 (= \alpha \beta)$; aufser g_1 wirken auf diesen Theil noch die beiden Spannungen $R ds$, welche von den Nachbartheilen im Ringe ausgeübt werden. Diese beiden $R ds$ werden genau, wie in Fig. 406, zu einer Mittelkraft vereinigt, welche in derselben Ebene wie g_1 liegt, d. h. in der Ebene, welche den zum Centriwinkel α gehörigen Kuppeltheil halbiert. Diese Mittelkraft ist in Fig. 409 mit h_1 bezeichnet; h_1 ist vor der Hand nur der Richtung nach bekannt; Gröfse und Lage von h_1 sind unbekannt. Die Mittelkraft von h_1 und g_1 soll die Fuge $a_1 b_1$ im inneren Drittel schneiden und mit der Senkrechten zu dieser Fuge keinen gröfseren Winkel, als den Reibungswinkel φ einschließen. Man ziehe nun durch c_1 , den untersten Punkt des inneren Drittels der Fuge $a_1 b_1$, eine Linie, die den Winkel φ mit der Senkrechten zur Fuge einschließt; diese Linie schneide die Richtungslinie von g_1 in I ; alsdann hat die durch I gelegte Kraft h_1 den kleinsten Werth, welcher obigen Bedingungen entspricht. Rükte nämlich h_1 nach abwärts unter Beibehaltung von c_1 , so würde h_1 (da ja g_1 denselben Werth behält) gröfser werden; rükte gleichzeitig c_1 hinauf, so würde h_1 erst recht gröfser. Rükten h_1 und c_1 gleich viel hinauf, so bliebe h_1 unverändert, behielte also den kleinsten Werth. Alles dies ergibt sich ohne Schwierigkeit durch Verzeichnung eines Kraftdreiecks für g_1 , h_1 und Kraft I ; h_1 kann aber endlich nicht weiter nach oben rücken, wenn nicht auch c_1 nach oben rückt, weil sonst der Winkel von I mit der Senkrechten zur Fuge gröfser als φ wird. — Wenn der Schnittpunkt von h_1 mit der Mittellinie des ersten Steines oberhalb des inneren Drittels fiel, so wären an dieser Stelle auch die Ringspannungen

nicht mehr im inneren Drittel; da auch diese im Drittel liegen sollen, so würde man h_1 bis zum oberen Endpunkt des inneren Drittels hinabzurücken und den sich dann ergebenden Schnittpunkt von h_1 und g_1 mit c_1 zu verbinden haben, wobei der Winkel der Mittelkraft I gegen die Fugen-Senkrechte kleiner als φ würde.

Auf den zweiten Stein wirken nun I und g_2 ; außerdem die Mittelkraft h_2 der Spannungen R im zweiten Ringe. Die Mittelkraft von I und g_2 ist aus dem Kraftpolygon zu entnehmen ($= O_1 \gamma$); sie geht durch den Schnittpunkt der Schnittlinien dieser beiden Kräfte. Die Resultirende dieser Kraft und der Kraft h_2 soll wiederum im inneren Drittel verbleiben; eben so soll auch der Schnittpunkt von h_2 mit der punktirten Halbierungslinie dieses Steines nicht aus dem Drittel herausfallen. Der kleinste Werth von h_2 , welcher diesen Bedingungen entspricht, ist derjenige, bei welchem h_2 durch den oberen Grenzpunkt des inneren Drittels der Steinschwerlinie, d. h. durch e_2 , geht, die Gesamtmittelkraft von I , g_2 und h_2 aber die Fuge $a_2 b_2$ im unteren Grenzpunkte c_2 des inneren Drittels schneidet. Die Verbindungslinie von c_2 mit d_2 , dem Schnittpunkte der Mittelkraft von I und g_2 mit h_2 ergibt die Richtung der Gesamtmittelkraft II ; die Größe erhält man durch Ziehen einer Linie γO_2 durch γ parallel zur Richtungslinie von II . Der Winkel, welchen II mit der Fugen-Senkrechten zu $a_2 b_2$ einschließt, ist kleiner als φ , also die Construction brauchbar. Wäre der Winkel größer als φ , so wäre h_2 so weit hinabzurücken und zu vergrößern, bis der Winkel höchstens gleich φ ist. In dieser Weise erhält man durch Weiterconstruiren eine mögliche Stützlinie, welche auch mit der Wirklichkeit nahezu übereinstimmen dürfte.

Literatur.

Bücher über »Statik der Gewölbe«.

- DIETLEIN, J. F. W. Beitrag zur Statik der Kreuzgewölbe. Halle 1823.
 TELLKAMPF, H. Beitrag zur Gewölbetheorie. Frei nach CARVALLO. Hannover 1855.
 SCHEFFLER, H. Theorie der Gewölbe, Futtermauern etc. Braunschweig 1857.
 FABRE, V. *Théorie des voûtes élastiques et dilatables d'une application spéciale aux arcs métalliques.* Paris 1860.
 HAGEN, G. Ueber Form und Stärke gewölbter Bogen. Berlin 1863.
 HÄNEL, v. Zur Theorie der Tonnengewölbe. Stuttgart 1868.
 FONTAINE, H. *Stabilité des constructions. Extrait de la notice sur la théorie des voûtes.* Befançon 1870.
 ORTMANN, O. Die Statik der Gewölbe mit Rücksicht auf ihre Anwendung. Halle 1876.
 FABIAN, W. Ueber Gewölbstheorien mit besonderer Berücksichtigung auf den Brückenbau. Leipzig 1876.
 BONNIN, R. *Étude sur la stabilité des voûtes en maçonnerie.* Evreux 1876.
 PERRODIL. *Résistance des voûtes et arcs métalliques.* Paris 1879.
 GOBERT, J. B. *Nouvelles recherches sur la théorie des voûtes.* Paris 1879.
 FOEPL, A. Theorie der Gewölbe. Leipzig 1880.
 DURAND-CLAYE, A. *Vérification de la stabilité des voûtes et des arcs; application aux voûtes sphériques.* Paris 1880.
 UNGEWITTER, G. G. Lehrbuch der gotischen Konstruktionen. 3. Aufl. von K. MOHRMANN. Leipzig 1892.
 GNUSCHKE, H. Die Theorie der gewölbten Bogen etc. Berlin 1892.
 AUTHENRIETH, E. Die statische Berechnung der Kuppelgewölbe. Berlin 1894.
 TOLKMITT, G. Leitfaden für das Entwerfen und die Berechnung gewölbter Brücken. Berlin 1895.
 Siehe auch Theil III, Band 2, Heft 3 (Abth. III, Abschn. 2, B: Gewölbte Decken) dieses »Handbuches«.

Nachtrag.

Auf S. 5 sind nachstehende Werke nachzutragen:

- SMITH, H. *Graphics; or the art of calculation by drawing lines, applied to mechanical engineering.* London 1889—91.
 BOVEY, H. T. *Theory of structures and strength of materials.* London 1893.
 PILLET, J. *Traité de stabilité des constructions etc.* Paris 1895.
 VONDERLINN, J. Statik für Bauhandwerker etc. Stuttgart 1896.

Desgl. auf S. 204:

- HEHNE, W. Eiserne Träger und Säulen. Hilfsbuch zur statischen Berechnung. Halle 1890.
 COUSINS, R. H. *A theoretical and practice treatise on the strength of beams and columns.* London 1890.

