UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Lehrbuch der Stereometrie

Hauck, Guido

Tübingen, 1893

Erstes Buch. Gerade und Ebenen im Raume.

urn:nbn:de:hbz:466:1-77777

Visual Library

kante 5, Höhenkante 4 Längeneinheiten mißt). Diese Art der Darstellung (welche als allgemeine Kavalierperspektive bezeichnet wird) ist bei den meisten Abbildungen im folgenden benützt*).

Damit eine Ebene überhaupt dargestellt werden kann, denkt man sich aus ihr ein rechteckiges Stück ausgeschnitten und bildet dieses ab. Das hindert jedoch nicht, sich in der inneren Anschauung die Ebene unendlich ausgedehnt vorzustellen, wie sie in der That gedacht werden muß. — Diejenigen zwei Randlinien des Rechtecks, an denen die Dicke der Ebene sichtbar sein würde, wenn sie (etwa als Brett gedacht) eine endliche Dicke haben würde, werden, um eine plastische Wirkung zu erzielen, mit etwas stärkeren Strichen markiert (vgl. Fig. 2, S. 6).

Ist eine Linie durch einen vor ihr befindlichen Teil des räumlichen Gebildes verdeckt, so wird sie in der Abbildung meist punktiert gezeichnet, indem man sich den verdeckenden Teil des Gebildes halb-durchsichtig denkt (vgl. Fig. 1).

Erstes Buch.

Gerade und Ebenen im Raume.

A. Einleitung.

1—6: Lage-Beziehungen.

1. Axiom von der Geraden. Haben zwei Gerade zwei Punkte gemein, so haben sie sämtliche Punkte gemein.

*) Bei Fig. 1, wie überhaupt bei den meisten folgenden Figuren, ist das Verkürzungsverhältnis der Tiefendimensionen = 1/3, ihr Winkel mit der Breitenrichtung = 60° gewählt. — Dem Lernenden ist sehr zu empfehlen, in der Herstellung von Abbildungen nach dieser Methode sich möglichst rasch eine gewisse Fertigkeit zu erwerben durch Zeichnung einfacher Gegenstände (wie Haus, Tisch, Stuhl, Grabkreuz, Turm mit Zinnen, Treppe mit Wangen u. s. w.).

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

— Durch zwei Punkte läßt sich immer eine Gerade legen und nur eine, oder: eine Gerade ist bestimmt durch zwei Punkte.

2. Axiom von der Ebene. Hat eine Gerade mit einer Ebene zwei Punkte gemein, so liegt sie mit allen ihren Punkten in der Ebene. — Durch zwei Punkte lassen sich unendlich viele Ebenen legen; jede enthält auch die Verbindungsgerade der zwei Punkte.

3. a. Haben zwei Ebenen drei Punkte, die nicht in gerader Linie liegen, gemein, so haben sie sämtliche Punkte gemein. (Denn sie haben, nach 2, zunächst die drei Verbindungslinien der drei Punkte gemein. Zieht man nun durch einen beliebigen Punkt X der ersten Ebene in dieser eine Gerade, welche zwei von jenen Verbindungslinien schneidet, so gehören die zwei Schnittpunkte auch der zweiten Ebene an. Die Gerade hat also mit der zweiten Ebene zwei Punkte — und folglich auch jeden anderen Punkt, z. B. Punkt X, gemein.) — Durch drei Punkte, die nicht in gerader Linie liegen, läßt sich immer eine Ebene legen und nur eine, oder: eine Ebene ist bestimmt durch drei Punkte. Sie enthält auch die drei Verbindungsgeraden der drei Punkte.

b. Zwei Ebenen können immer zur Deckung gebracht werden. Denn (nach a) genügt hiezu, daß man die eine Ebene beliebig durch drei beliebige Punkte der andern legt. Da dies auf unendlich verschiedene Weise geschehen kann, so folgt weiter: Eine Ebene kann beliebig in sich selbst verschoben werden.

c. Aus a folgt ferner: Eine Ebene ist auch bestimmt durch eine Gerade und einen außerhalb derselben liegenden Punkt, desgleichen durch zwei sich schneidende Gerade oder durch einen Winkel. Eine Ebene kann erzeugt gedacht werden durch eine Gerade, die sich um einen festen Punkt dreht und gleichzeitig an einer festen Geraden hingleitet.

---

4. a. Zwei Gerade liegen entweder in der nämlichen Ebene oder nicht. — Im ersten Fall schneiden sie sich oder sind sie parallel. Doch können auch zwei

parallele Gerade aufgefaßt werden als Gerade, die sich schneiden, deren Schnittpunkt aber in unendliche Entfernung gerückt ist. — Im zweiten Fall schneiden sich die Geraden nicht und heißen windschief.

b. Da die durch einen Punkt mit einer Geraden gezogene Parallele (nach a) in der durch den Punkt und die Gerade bestimmten Ebene liegen muß, so ist auch im Raum durch einen Punkt mit einer Geraden nur eine Parallele möglich.

c. Ferner folgt: Eine Ebene ist bestimmt durch zwei parallele Gerade. Eine Ebene kann erzeugt gedacht werden durch eine Gerade, die an einer festen Geraden hingleitet und sich dabei beständig parallel bleibt.

d. Unter dem Winkel zweier windschiefen Geraden versteht man den Winkel, den zwei durch einen beliebigen Punkt zu den Windschiefen gezogene Parallelen einschließen. (Daß die Größe dieses Winkels eine vollkommen bestimmte, von der Wahl des Scheitelpunktes unabhängige ist, wird in B. 4. Zus. bewiesen werden.)

5. Eine Gerade und eine Ebene müssen entweder sich schneiden, oder zu einander parallel sein, oder muß die Gerade in der Ebene liegen. — Im ersten Fall haben sie nur einen Punkt gemein, welcher ihr Schnittpunkt oder Spurpunkt heißt; (denn hätten sie zwei Punkte gemein, so müßte die Gerade, nach 2, mit allen ihren Punkten in die Ebene fallen.) — Im zweiten Fall ist dieser Schnittpunkt in unendliche Entfernung gerückt; die Gerade und die Ebene haben keinen Punkt im Endlichen gemein.

6. a. Zwei Ebenen müssen entweder sich schneiden oder parallel sein. — Im ersten Fall haben sie eine Gerade gemein, welche ihre Schnittlinie oder Spurlinie heißt; (denn hätten sie drei nicht in gerader Linie liegende Punkte gemein, so müßten sie, nach 3. a, zusammenfallen.) — Im zweiten Fall ist diese Schnittlinie in unendliche Entfernung gerückt; die zwei Ebenen haben keinen Punkt in endlicher Entfernung gemein.

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Anm. zu 4. a, 5 und 6. a. Insoferne man unendlich entfernte Punkte als uneigentliche Punkte betrachten kann, sagt man auch kurz: eine Gerade oder Ebene wird von einer ihr parallelen Geraden oder Ebene nicht geschnitten.

b. Schneiden sich zwei Ebenen, und liegt in einer von ihnen eine Gerade, so liegt deren Schnittpunkt mit der andern Ebene in der Schnittlinie beider Ebenen.

c. Sind zwei Ebenen parallel, so ist jede Gerade, die in der einen Ebene liegt, zu der andern parallel. (Denn sie kann mit dieser keinen Punkt gemein haben.)

d. Drei Ebenen haben im allgemeinen einen Punkt gemein, welcher ihr Schnittpunkt heißt. Durch ihn gehen die drei Geraden, nach denen sie sich je zu zweien schneiden.

7—9: Maß-Beziehungen.

7. a. Man sagt, eine Gerade stehe auf einer Ebene senkrecht, wenn sie senkrecht steht auf allen Geraden, die in der Ebene durch ihren Spurpunkt gezogen werden können. (Daß eine solche Stellung einer Geraden zu einer Ebene möglich ist, wird in B. 6. a bewiesen werden.) Der Spurpunkt der Senkrechten in der Ebene heißt ihr Fußpunkt. Man sagt auch, die Ebene sei auf der Geraden senkrecht.

b. Fällt man von einem Punkt außerhalb einer Ebene die Senkrechte auf die Ebene*), so bezeichnet man deren Fußpunkt auch als die Projektion des Punktes auf die Ebene. Die Ebene heißt dann die Projektionsebene, die Senkrechte heißt das projizierende Lot.

c. Unter der Entfernung eines Punktes von einer Ebene versteht man die Entfernung des Punktes von seiner Projektion auf die Ebene.

---

*) Daß nur eine Senkrechte möglich ist, wird in B. 7. a bewiesen werden.

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

d. Zwei Punkte, die auf verschiedenen Seiten einer Ebene auf der nämlichen Senkrechten zu ihr liegen und gleiche Entfernungen von ihr haben, heißen zu einander symmetrisch in Beziehung auf die Ebene; die Ebene heißt ihre Symmetralebene. Zwei räumliche Gebilde heißen zu einander symmetrisch in Beziehung auf eine Ebene, wenn jedem Punkt des einen Gebildes ein Punkt des andern Gebildes entspricht, der zu ihm symmetrisch in Bez. auf die Ebene ist.

8. a. Projiziert man einen beliebigen Punkt A (Fig. 2) einer Geraden AB auf eine Ebene M, und legt durch die Gerade und das projizierende Lot AF eine Ebene N, welche die Projektionsebene M nach FG schneidet: so bezeichnet man die Linie FG als die Projektion der Geraden auf die Ebene M. Die Ebene N heißt die projizierende Ebene. (Daß es gleichgültig ist, von welchem Punkt der Geraden das projizierende Lot gefällt wird, wird in B. 8. Zus. 3 bewiesen werden.) — Schneidet die Gerade die Projektionsebene, so geht (nach 6. b) ihre Projektion durch den Spurpunkt S.

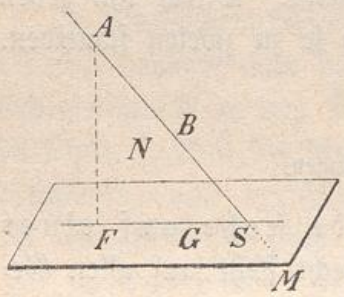

Fig. 2.

b. Eine Gerade heißt schief zu einer Ebene, wenn sie zu ihr weder parallel noch senkrecht ist. Unter dem Neigungswinkel der Geraden gegen die Ebene (oder auch der Ebene gegen die Gerade) versteht man dann den spitzen Winkel ASF (Fig. 2), den die Gerade mit ihrer Projektion auf die Ebene macht.

9. a. Zwei sich schneidende Ebenen M und M′ (Fig. 3) teilen den Raum in vier Teile, welche Keile oder Flächenwinkel heißen. Die Schnittlinie AB heißt ihre Keilkante oder Scheitelkante. Die durch die Keilkante begrenzten Ebenenstücke, die einen Keil einschließen, heißen

dessen Keilblätter. Ein Keil kann längs seiner Keilkante in sich selbst verschoben werden (nach 3. b).

Errichtet man in den zwei Keilblättern eines Keils im nämlichen Punkt C der Keilkante die Senkrechten CD und CD′ zur Keilkante, so heißt der von ihnen gebildete Winkel DCD′ der Keilwinkel. Für seine Größe ist die Wahl des Scheitelpunktes C gleichgültig. (Denn zwei Keilwinkel mit verschiedenen Scheitelpunkten können zur Deckung gebracht werden, indem der Keil in sich selbst verschoben wird.)

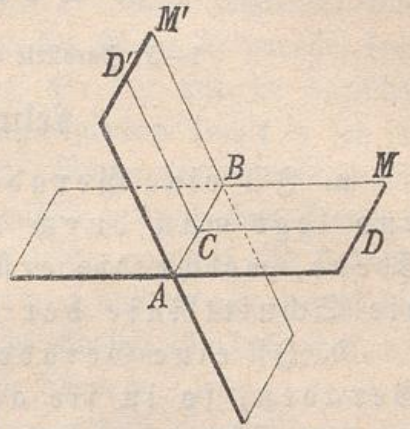

Fig. 3.

b. Zwei Keile heißen gleich, wenn sie zur Deckung gebracht werden können. Zwei gleiche Keile haben gleiche Keilwinkel; denn bringt man die Keile zur Deckung und konstruiert ihre Keilwinkel für den nämlichen Punkt C der gemeinschaftlichen Kante, so decken sich auch diese Winkel. (Daß der Satz auch umgekehrt gilt, wird in B. 7. Zus. bewiesen werden.)

c. Ein Keil hat seinen Keilwinkel zum Maß; er hat ebensoviel Keilgrade als sein Keilwinkel Winkelgrade. Der Keilwinkel ist zugleich das Maß für die Größe der Drehung um die Keilkante, durch die das eine Keilblatt in die Lage des anderen gebracht werden kann. Ein Keil heißt spitz oder stumpf oder ein Rechter, wenn sein Keilwinkel spitz oder stumpf oder ein Rechter ist. Zwei Keile heißen Nebenkeile oder Scheitelkeile, wenn ihre Keilwinkel Nebenwinkel oder Scheitelwinkel sind.

d. Unter dem Neigungswinkel einer Ebene gegen eine andere Ebene versteht man den Keilwinkel des von beiden Ebenen gebildeten spitzen Keils.

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

e. Zwei Ebenen stehen auf einander senkrecht, wenn einer der vier von ihnen gebildeten Keile ein Rechter ist. Auch die andern drei Keile sind dann Rechte.

B. Lehrsätze.

1—5: Parallele Gerade und Ebenen.

Lehrsatz 1.

a. Ist eine Gerade parallel einer Ebene, und legt man durch die Gerade eine zweite Ebene, welche die erste schneidet: so ist auch die Schnittlinie der Geraden parallel.

b. Ist eine Gerade parallel einer zweiten Geraden, so ist sie auch jeder durch diese gelegten Ebene parallel. Oder: Ist eine Gerade parallel einer in einer Ebene liegenden Geraden, so ist sie auch der Ebene parallel.

c. Ist eine Gerade parallel einer Ebene, und zieht man durch einen beliebigen Punkt der Ebene die Parallele zur Geraden, so muß diese ganz in die Ebene fallen.

Beweis. a. Die Gerade sei g (Fig. 4), die ihr parallele Ebene sei M; die durch g gelegte Ebene N schneide M

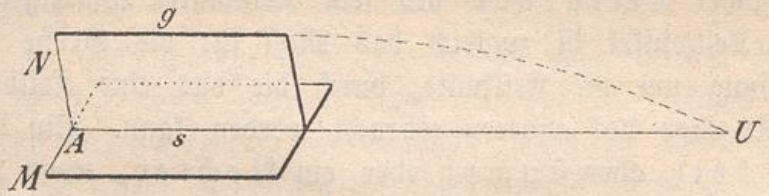

Fig. 4.

nach der Geraden s. Wäre nun s nicht ∥ g, so müßten beide sich schneiden, weil sie in einer Ebene N liegen. Der Schnittpunkt U wäre aber dann ein gemeinsamer Punkt der Geraden g und der Ebene M, — was der Voraussetzung widerspricht. Folglich muß s ∥ g sein.

b. Die zwei parallelen Geraden seien g und s (Fig. 4);

durch s sei die Ebene M gelegt. Legt man durch g und s die Ebene N, so stellt s zugleich die Schnittlinie von N und M vor. Würde nun g die Ebene M schneiden, so müßte (nach I. Einl. 6. b) der Schnittpunkt U in der Schnittlinie s liegen, d. h. g müßte s schneiden; — was gegen die Voraussetzung ist. Folglich muß g der Ebene M parallel sein.

c. Die Gerade sei g (Fig. 4), die mit ihr parallele Ebene sei M; durch den in M liegenden Punkt A sei die Gerade s parallel zu g gezogen. Würde nun s nicht in die Ebene M fallen, so würde es außer s durch den Punkt A noch eine zweite Parallele zu g geben, nämlich die Schnittlinie der Ebene M mit der durch g und A gelegten Ebene N (nach Lehrs. a); — was nicht möglich ist (I. Einl. 4. b). Folglich muß s in die Ebene M fallen.

Zusatz. Aus c folgt: 1) Die unendlich vielen Ebenen, die durch einen Punkt parallel mit einer Geraden gelegt werden können, schneiden sich alle nach einer und derselben Geraden, nämlich nach der durch den Punkt zu der Geraden gezogenen Parallelen. 2) Eine Gerade, die zweien Ebenen parallel ist, ist ihrer Schnittlinie parallel.

Lehrsatz 2.

Werden zwei parallele Ebenen von einer dritten Ebene geschnitten, so sind die zwei Schnittlinien parallel.

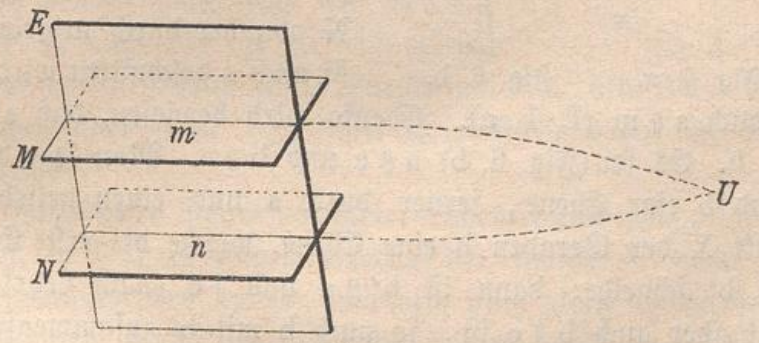

Fig. 5.

Beweis. Die zwei parallelen Ebenen M und N (Fig. 5)

werden von der Ebene E geschnitten nach m und n. Wären nun m und n nicht parallel, so müßten sie sich schneiden, weil beide in der Ebene E liegen. Ihr Schnittpunkt U wäre aber dann ein gemeinsamer Punkt der zwei Ebenen M und N, — was der Voraussetzung widerspricht. Folglich müssen m und n parallel sein.

(Direkter Beweis mittels I. Einl. 6. c und I. 1. a.)

Zusatz. Die unendlich vielen Geraden, die durch einen Punkt parallel mit einer Ebene gezogen werden können, liegen alle in einer und derselben Ebene, nämlich in der durch den Punkt zu der Ebene gelegten Parallelebene. (Bew. mittels I. 1. a, I. 2 und I. Einl. 4. b.)

Lehrsatz 3.

a. Legt man durch zwei parallele Gerade zwei Ebenen, die sich schneiden, so ist die Schnittlinie den zwei Geraden parallel.

b. Sind zwei Gerade einer dritten parallel, so sind sie einander parallel.

Beweis. a. Die zwei parallelen Geraden seien m und n (Fig. 6. a), die durch sie gelegten Ebenen seien M und N, deren Schnittlinie sei s. Da m ∥ n, so ist m auch ∥ zu der durch n gelegten Ebene N (I. 1. b), und weil diese Ebene N von der durch m gelegten M nach s geschnitten wird, so ist auch s ∥ m (I. 1. a). Ebenso wird bewiesen, daß s ∥ n.

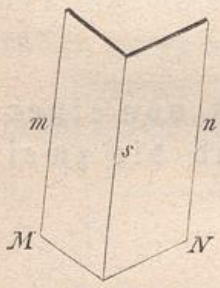

Fig. 6. a.

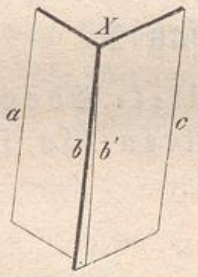

Fig. 6. b.

b. Es sei (Fig. 6. b) a ∥ c und b ∥ c. Man lege durch c und b eine Ebene, ferner durch a und einen beliebigen Punkt X der Geraden b eine Ebene, welche die erste Ebene nach b′ schneide; dann ist b′ ∥ a und ∥ c (nach Lehrs. a). Weil aber auch b ∥ c ist, so muß b mit b′ zusammenfallen (I. Einl. 4. b) und also auch ∥ a sein.

Zusatz. Lehrs. a läßt sich auch so aussprechen: Sind

von den drei Schnittlinien dreier Ebenen (I. Einl. 6. d) zwei parallel, so sind alle drei parallel. Der Schnittpunkt der drei Ebenen kann dann als in unendliche Entfernung gerückt aufgefaßt werden.

Lehrsatz 4.

a. Sind die Schenkel zweier Winkel einzeln parallel, so sind ihre Ebenen parallel.

b. Sind die Schenkel zweier Winkel einzeln parallel, und sind beide Paare paralleler Schenkel gleich gerichtet oder beide entgegengesetzt gerichtet, so sind die Winkel gleich.

Beweis. a. Würden die zwei Ebenen sich schneiden, so müßte (nach I. 3. a) die Schnittlinie parallel sein sowohl mit dem einen als mit dem andern Schenkel eines Winkels; — was nicht möglich ist (I. Einl. 4. b). Folglich müssen die Ebenen parallel sein.

b. Die Winkel seien BAC und B′A′C′ (Fig. 7), es sei AB mit A′B′, AC mit A′C′ parallel und gleich gerichtet; man mache AB = A′B′ und AC = A′C′, ziehe BC, B′C′, ferner AA′, BB′, CC′. Da nun AB ∥ A′B′, so ist ABB′A′ ein Parallelogramm, also auch AA′ ∥ BB′; ebenso beweist man, daß AA′ ∥ CC′; daher ist auch BB′ ∥ CC′ (I. 3. b), folglich BB′C′C ebenfalls ein Parallelogramm, also BC = B′C′. Hieraus aber folgt: △ ABC ≌ A′B′C′, daher W. BAC = B′A′C′.

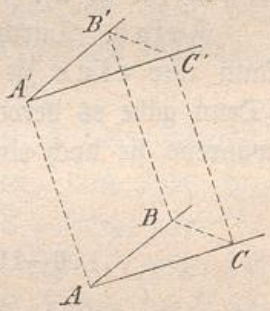

Fig. 7.

Sind beide Paare paralleler Schenkel entgegengesetzt gerichtet, so ist (nach obigem Beweis) der eine Winkel gleich dem Scheitelwinkel des andern und also auch gleich diesem selbst.

Zusatz. Aus b folgt, daß der Winkel, durch den der Winkel zweier windschiefen Geraden gemessen wird (I. Einl. 4. d), stets dieselbe Größe hat, wo auch sein Scheitel angenommen werden mag.

Lehrsatz 5.

Sind zwei Ebenen einer dritten parallel, so sind sie einander parallel.

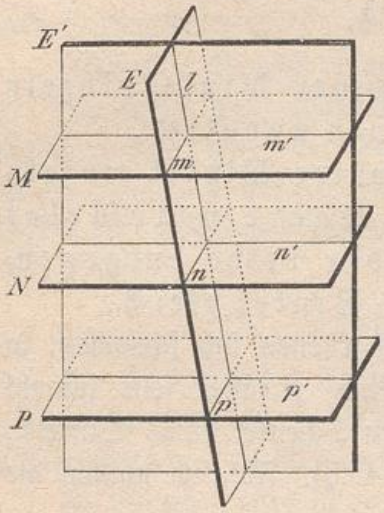

Fig. 8.

Beweis. Es sei (Fig. 8) Ebene M ∥ P und Ebene N ∥ P. Durch eine die drei Ebenen schneidende Gerade l lege man zwei weitere Ebenen E und E', welche die drei ersten schneiden nach m, n, p und m', n', p'. Dann ist m ∥ p und n ∥ p (I. 2), also auch m ∥ n. Ebenso wird bewiesen, daß m' ∥ n'. Nun schneiden sich m und m', n und n', und bilden also zwei Winkel, deren Schenkel einzeln parallel sind. Daher ist Ebene M ∥ N (I. 4. a).

Zusatz. Durch einen außerhalb einer Ebene liegenden Punkt kann nur eine zu dieser Ebene parallele Ebene gelegt werden. (Denn gäbe es deren zwei, so müßten sie unter sich parallel sein, während sie doch einen Punkt gemein haben.)

6—11: Senkrechte Gerade und Ebenen.

Lehrsatz 6.

a. Steht eine Gerade senkrecht auf zwei andern sich schneidenden Geraden in deren Schnittpunkt, so steht sie auch auf der Ebene der zwei Geraden senkrecht.

b. Stehen mehrere Gerade senkrecht auf derselben Geraden in demselben Punkt, so liegen sie alle in einer Ebene, die zu der letzteren Geraden senkrecht ist.

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Beweis. a. Es sei (Fig. 9) AB senkrecht auf den in der Ebene M liegenden Geraden AC und AD. Es ist (nach I. Einl. 7. a) zu beweisen, daß AB auch auf jeder andern in der Ebene M durch A gezogenen Geraden AE senkrecht steht. Zu diesem Zweck ziehe man in M eine beliebige Linie, welche die drei Geraden AC, AD, AE in C, D, E schneidet, verlängere ferner BA um eine Strecke AB′ = BA und verbinde B und B′ mit den drei Punkten C, D, E. Nun ist △ ABC ≌ AB′C, und

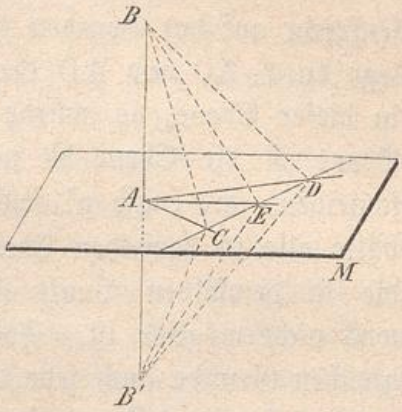

Fig. 9.

ABD ≌ AB′D, also BC = B′C und BD = B′D. Hieraus folgt: △ BCD ≌ B′CD, W. BCD = B′CD, und daher auch △ BCE ≌ B′CE, BE = B′E. Damit kann aber jetzt bewiesen werden, daß △ ABE ≌ AB′E, folglich BAE ein rechter Winkel ist. — Ebenso wird bewiesen, daß AB senkrecht steht auf allen andern in der Ebene M durch A gezogenen Geraden. Folglich steht AB senkrecht auf der Ebene M.

Anderer Beweis. (Fig. 9*). Es ist stets möglich, die Linie CD in der Ebene M so zu ziehen, daß ihre zwischen AC und AD fallende Strecke durch AE halbiert wird**). Dann ist BE Schwerlinie des Dreiecks BCD, und AE Schwerlinie des Dreiecks ACD. Man hat daher (nach bekanntem Satze der ebenen Geometrie):

$$2\,(BE^2 + CE^2) = BC^2 + BD^2,$$
$$2\,(AE^2 + CE^2) = AC^2 + AD^2,$$

subtr.: $$2\,(BE^2 - AE^2) = BC^2 - AC^2 + BD^2 - AD^2$$
$$= 2\,AB^2,$$

*) Man denke sich in Fig. 9 die von B′ ausgehenden Linien hinweg.

**) Man ziehe nämlich durch den beliebig gewählten Punkt E die Parallele mit CA, welche AD schneiden muß, in U; verlängere AU um ein Stück UD = AU, ziehe DE, welche AC schneiden muß, in C.

also: $BE^2 - AE^2 = AB^2$,
woraus folgt, daß BAE ein rechter Winkel ist.

b. Die Geraden AC, AD, AE, . . . stehen alle senkrecht auf der Geraden AB in demselben Punkt A. Man lege durch AC und AD die Ebene M. Läge nun AE nicht in dieser Ebene, so würde die durch AB und AE gelegte Ebene N die Ebene M nach einer andern Geraden AE′ schneiden, die (nach a) senkrecht zu AB sein müßte. Man hätte also in derselben Ebene N zwei Gerade AE und AE′, die in demselben Punkt A auf AB senkrecht stünden, — was nicht möglich ist. Folglich muß AE — und aus dem gleichen Grunde auch jede der andern Senkrechten — in der durch AC und AD gelegten Ebene liegen.

Zusatz 1. Nennt man mit Bezugnahme auf I. Einl. 4. d zwei Windschiefe, deren Winkel ein Rechter ist: auf einander senkrecht, so läßt sich Lehrs. a folgendermaßen verallgemeinern: Eine Gerade steht senkrecht auf einer Ebene, wenn sie senkrecht steht auf irgend zweien in der Ebene liegenden (aber nicht parallelen) Geraden; sie steht alsdann auch senkrecht auf jeder andern in der Ebene gezogenen Geraden.

Zusatz 2. Lehrs. b läßt sich auch so ausdrücken: Dreht man einen rechten Winkel um einen seiner Schenkel, so beschreibt der andere eine Ebene, die auf dem ersten senkrecht steht. — Hieraus folgt weiter: Dreht man die durch einen Punkt und eine Gerade gelegte Ebene um die Gerade als Achse so lange herum, bis sie wieder in ihre erste Lage zurückgekehrt ist, so hat der Punkt einen Kreis beschrieben, dessen Ebene senkrecht zur Drehachse, dessen Halbmesser die von dem Punkt auf die Drehachse gefällte Senkrechte, und dessen Mittelpunkt der Fußpunkt dieser Senkrechten ist.

Zusatz 3. Die Ebene eines Keilwinkels (I. Einl. 9. a) steht senkrecht zur Keilkante.

Lehrsatz 7.

a. Auf einer Ebene läßt sich in einem Punkte derselben nur eine Senkrechte er-

richten, und auf eine Ebene läßt sich von einem Punkt außerhalb derselben nur **eine** Senkrechte fällen.

b. Durch einen Punkt (auf oder außerhalb einer Geraden) läßt sich nur **eine** zu der Geraden senkrechte Ebene legen.

Beweis. a. Gäbe es durch den Punkt A (welcher in oder außerhalb der Ebene M liegen mag) zwei Senkrechte zu M, so würden diese (nach I. Einl. 7. a) auch senkrecht stehen auf der Linie, nach der die durch beide Senkrechte gelegte Ebene N die Ebene M schneidet. Man hätte also in derselben Ebene N zwei Senkrechte zu einer Geraden durch denselben Punkt, — was nicht möglich ist. Folglich kann es auf der Ebene durch den Punkt nur eine Senkrechte geben.

b. Gäbe es durch den Punkt A zwei senkrechte Ebenen M und M′ zu der Geraden g, so würden diese, falls A außerhalb g liegt (Fig. 10. a), von der durch

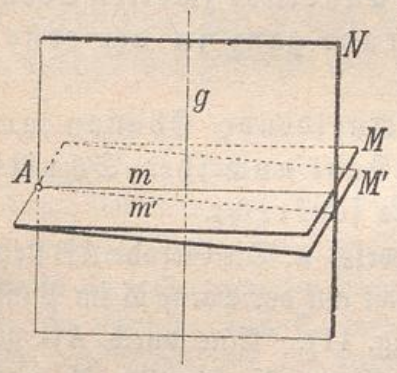

Fig. 10. a.

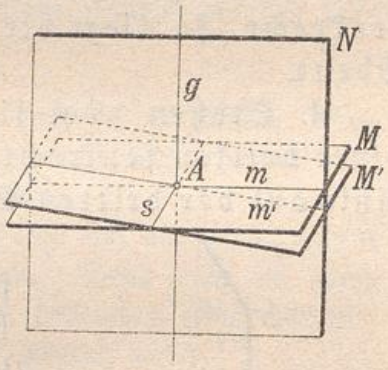

Fig. 10. b.

A und g gelegten Ebene N nach zwei Geraden m und m′ geschnitten werden, die (nach I. Einl. 7. a) auf g senkrecht stehen müßten. Man hätte also wieder in derselben Ebene zwei Senkrechte zu einer Geraden durch denselben Punkt, — was nicht möglich ist. — Liegt der Punkt A auf der Geraden g (Fig. 10. b), so lege man die Ebene N beliebig

durch g (doch so, daß sie nicht durch die Schnittlinie s der Ebenen M und M′ geht,) und mache den gleichen Schluß.

Zusatz. Mittels Lehrs. b und I. 6. Zus. 3 beweist man den Kehrsatz von I. Einl. 9. b: Zwei Keile sind gleich, wenn ihre Keilwinkel gleich sind. — Daraus folgt: Zwei Scheitelkeile sind gleich.

Lehrsatz 8.

a. Steht eine Gerade auf einer Ebene senkrecht, so steht auch jede durch sie gelegte Ebene auf der ersten Ebene senkrecht.

b. Steht eine Gerade, die in einer von zwei senkrechten Ebenen liegt, senkrecht auf deren Schnittlinie, so steht sie auch senkrecht auf der andern Ebene.

c. Stehen eine Gerade und eine Ebene, die einen Punkt gemein haben, auf einer zweiten Ebene senkrecht, so liegt die Gerade ganz in der ersten Ebene.

d. Stehen zwei sich schneidende Ebenen auf einer dritten senkrecht, so steht auch ihre Schnittlinie auf der dritten Ebene senkrecht.

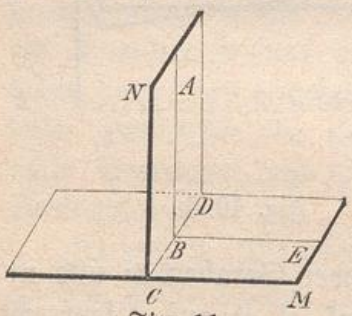

Fig. 11.

Beweis. a. Die Gerade AB stehe senkrecht auf der Ebene M im Punkt B (Fig. 11). Eine durch AB gelegte Ebene N schneide M nach der (durch B gehenden) Geraden CD. Man ziehe in der Ebene M die Linie BE ⊥ CD. Da nun BA ⊥ CD (I. Einl. 7. a) und BE ⊥ CD ist, so ist ABE der Keilwinkel des einen von den zwei Ebenen gebildeten Keils (I. Einl. 9. a); es ist aber W. ABE = R (I. Einl. 7. a), folglich stehen die zwei Ebenen auf einander senkrecht (I. Einl. 9. e).

b. Ebene N sei senkrecht auf Ebene M (Fig. 11), CD sei ihre Schnittlinie; in der Ebene N liege die Gerade AB, und es sei AB ⊥ CD. Man ziehe in M die Linie BE ⊥ CD; dann ist ABE der Keilwinkel des einen von den zwei Ebenen gebildeten Keils, also W. ABE = R. Nun steht AB senkrecht auf BE und BD, folglich auch auf M (I. 6 a).

c. Die Gerade AB und die Ebene N, welche den Punkt A gemein haben, stehen beide senkrecht auf der Ebene M. Läge nun AB nicht in N, so könnte man in N durch A eine Gerade AB′ senkrecht zu ihrer Spurlinie CD ziehen, welche (nach b) auch senkrecht zu M wäre; es würden also durch A zwei Senkrechte zu M vorhanden sein; — was nicht möglich ist (I. 7. a). Folglich muß AB in N liegen.

d. Die zwei Ebenen N und N′ seien senkrecht auf der Ebene M. Von einem beliebigen Punkte der Schnittlinie der Ebenen N und N′ fälle man die Senkrechte auf M; dann muß diese (nach c) sowohl in N als in N′ liegen, also mit der Schnittlinie von N und N′ zusammenfallen; folglich steht die Schnittlinie senkrecht auf M.

Zusatz 1. Lehrs. a läßt sich auch so ausdrücken: Eine Ebene steht auf einer andern Ebene senkrecht, wenn sie auf einer in dieser liegenden Geraden senkrecht steht.

Zusatz 2. Durch eine Gerade läßt sich nur eine Ebene senkrecht zu einer andern Ebene legen. (Denn gäbe es deren zwei, so würden, nach b, von einem beliebigen Punkt der Geraden zwei Senkrechte auf die Ebene möglich sein.)

Zusatz 3. Die projizierende Ebene (I. Einl. 8. a) einer Geraden steht (nach a) senkrecht auf der Projektionsebene und enthält (nach c) die projizierenden Lote ihrer sämtlichen Punkte; die Projektionen der einzelnen Punkte liegen daher alle in der Projektion der Geraden. Es ist folglich gleichgültig, welcher Punkt einer Geraden zur Konstruktion ihrer Projektion verwendet wird. Man erhält sie auch als Verbindungslinie der Projektionen von zwei beliebigen Punkten, oder als Verbindungslinie der Projektion eines beliebigen Punktes mit dem Spurpunkt. Die

Projektion einer Strecke ist identisch mit der Verbindungsstrecke der Projektionen ihrer Endpunkte. — Die Projektion einer zur Projektionsebene senkrechten Geraden ist ein Punkt, welcher identisch ist mit ihrem Spurpunkt.

Lehrsatz 9.

a. Ein rechter Winkel, dessen einer Schenkel in einer Ebene liegt, projiziert sich auf diese Ebene wieder als rechter Winkel.

b. Ist die Projektion eines Winkels, dessen einer Schenkel in der Projektionsebene liegt, ein Rechter, so ist der Winkel selbst ein Rechter.

Beweis. a. Der Winkel ABC (Fig. 12*), dessen Schenkel BC in der Ebene M liegt, sei ein Rechter. Fällt man AF ⊥ M und zieht FB, so ist FB die Projektion von AB auf M (I. 8. Zus. 3). Nun stehen CB und FA auf einander senkrecht (I. 6. Zus. 1); außerdem steht CB senkrecht auf BA, folglich steht CB senkrecht auf der Ebene BFA (I. 6. Zus. 1), und daher auch senkrecht auf BF.

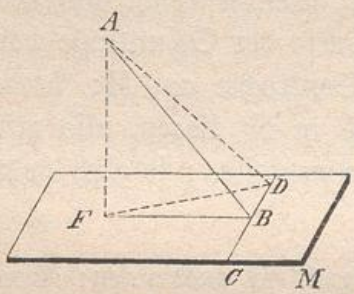

Fig. 12.

b. Der Winkel FBC (Fig. 12), welcher die Projektion des Winkels ABC auf die Ebene M vorstellt, sei ein Rechter. Nun ist CB ⊥ BF und ⊥ FA, folglich ⊥ auf der Ebene BFA, und daher auch ⊥ BA.

Anderer Beweis. **a.** Ist D (Fig. 12) ein beliebiger Punkt auf BC, und zieht man DA und DF, so ist:

$$\begin{aligned} BD^2 &= AD^2 - AB^2 \\ &= (AF^2 + FD^2) - (AF^2 + FB^2) \\ &= FD^2 - FB^2, \end{aligned}$$

folglich: $FB \perp BD$.

*) Man denke sich in Fig. 12 die Linien AD und FD zunächst hinweg.

b. Macht man dieselbe Konstruktion wie in Bew. a, so ist:

$$\begin{aligned} BD^2 &= FD^2 - FB^2 \\ &= (AD^2 - AF^2) - (AB^2 - AF^2) \\ &= AD^2 - AB^2, \end{aligned}$$

folglich: $AB \perp BD$.

Zusatz. Es giebt noch einen zweiten Kehrsatz, nämlich: Hat man zwei rechte Winkel, die einen Schenkel und den Scheitel gemeinsam haben, und fällt von einem Punkt des freien Schenkels des ersten Winkels die Senkrechte auf den freien Schenkel des zweiten, so steht diese senkrecht auf der Ebene des zweiten Winkels. (Beweis ähnlich wie a und b oder indirekt.)

Lehrsatz 10.

a. Steht die eine von zwei parallelen Geraden senkrecht auf einer Ebene, so steht auch die andere senkrecht auf der Ebene.

b. Stehen zwei Gerade auf derselben Ebene senkrecht, so sind sie parallel.

Beweis. **a.** Es sei (Fig. 13) $AB \parallel A'B'$, und $AB \perp$ auf der Ebene M. B und B′ seien die Spurpunkte von AB und A′B′. Zieht man in der Ebene M durch B zwei beliebige Gerade BC und BD, und durch B′ die Parallelen B′C′ und B′D′ zu ihnen, so ist W. ABC = A′B′C′ und W. ABD = A′B′D′ (I. 4. b). Da nun die W. ABC und ABD Rechte sind, so müssen auch die W. A′B′C′ und A′B′D′ Rechte sein. Folglich ist $A'B' \perp M$ (I. 6. a).

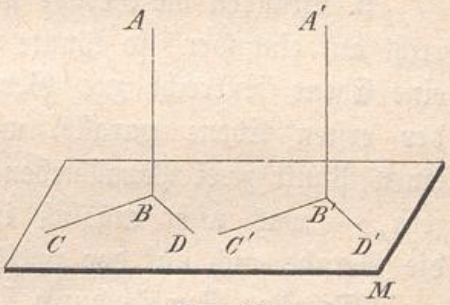

Fig. 13.

b. Es sei $AB \perp M$ und $A'B' \perp M$; wäre nun A′B′ nicht parallel AB, so könnte man durch B′ eine Gerade B′A″ parallel BA ziehen, welche (nach a) $\perp$ M wäre; es würden also auf M in B′ zwei Gerade senkrecht stehen, —

was nicht möglich ist (I. 7. a); folglich muß A'B' ∥ AB sein.

Zusatz. Aus b folgt: Die Projektionen paralleler Geraden auf irgend eine Ebene sind parallel. (Denn nach b und I. 4. a sind die projizierenden Ebenen parallel, folglich nach I. 2 auch die Projektionen.)

Lehrsatz 11.

a. Steht eine Gerade auf zwei Ebenen senkrecht, so sind die Ebenen parallel.

b. Steht eine Gerade auf einer von zwei parallelen Ebenen senkrecht, so steht sie auch auf der andern senkrecht.

Beweis. a. Wären die Ebenen nicht parallel, so würden sie sich schneiden. Würde man dann einen beliebigen Punkt der Schnittlinie verbinden mit den zwei Spurpunkten der Geraden, so entstünde ein Dreieck, in dem zwei Winkel Rechte wären; — was nicht möglich ist. Folglich müssen die Ebenen parallel sein.

(Direkter Beweis durch I. 4. a.)

b. Stünden die Gerade und die zweite Ebene nicht senkrecht auf einander, so könnte man durch ihren Schnittpunkt eine Ebene senkrecht zur Geraden legen, welche (nach a) der ersten Ebene parallel wäre; es würden also durch einen Punkt zwei Parallelebenen zu einer Ebene vorhanden sein, — was nicht möglich ist (I. 5. Zus.). Folglich muß die Gerade auch auf der zweiten Ebene senkrecht stehen.

(Direkter Beweis durch I. 2 und I. 6. a.)

12—15: Maß-Beziehungen.

Lehrsatz 12.

Von allen Strecken, die zwischen einem Punkte und einer Ebene liegen, ist

a. die auf der Ebene senkrechte Strecke die kürzeste.

b. Alle diejenigen sind gleich, deren Fußpunkte gleich weit vom Fußpunkt der Senkrechten entfernt sind.

c. Sie sind um so größer, je weiter ihre Fußpunkte vom Fußpunkt der Senkrechten entfernt sind.

Beweis. a. Ist A (Fig. 14) der Punkt, M die Ebene, AF die von A auf M gefällte Senkrechte, AB irgend eine andere Strecke zwischen A und M: so ziehe man FB. Nun ist △ AFB rechtwinklig, folglich Kathete AF kleiner als Hypotenuse AB.

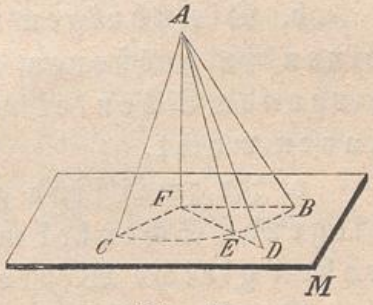

Fig. 14.

b. Ist AC (Fig. 14) eine dritte Strecke zwischen A und der Ebene, und ist FC = FB, so ist △ AFC ≅ AFB, folglich AC = AB.

c. Ist AD (Fig. 14) eine vierte Strecke, und liegt ihr Fußpunkt D so, daß FD > FB, so kann man von FD ein Stück FE = FB abschneiden. Zieht man dann AE, so ist in der Ebene AFD : AD > AE; da aber AE = AB (nach b), so ist auch AD > AB.

Zusatz 1. Die Sätze gelten auch umgekehrt.

Zusatz 2. Aus b folgt: Der geometrische Ort eines Punktes, der in einer Ebene liegt und von einem festen Punkt eine geg. Entfernung hat, ist eine Kreislinie, — gleichgültig ob der feste Punkt in der Ebene oder außerhalb derselben liegt. Das gleiche gilt für den geometrischen Ort einer Geraden, die in einer Ebene liegt und von einem festen Punkt eine geg. Entfernung hat (Beweis durch I. 9. b). — Ferner folgt: Der geometrische Ort eines Punktes, der von allen Punkten (und allen Tangenten) einer Kreislinie gleich weit entfernt ist, ist die auf der Ebene des Kreises in dessen Mittelpunkt errichtete Senkrechte.

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Lehrsatz 13.

Ist eine Gerade schief zu einer Ebene, so ist unter den Winkeln, die sie mit den durch ihren Spurpunkt in der Ebene gezogenen Geraden macht,

a. der spitze Winkel, den sie mit ihrer Projektion macht, der kleinste, dessen Nebenwinkel der größte.

b. Die übrigen Winkel sind um so größer, einen je größeren Winkel der in der Ebene liegende Schenkel mit der Projektion der Geraden macht.

c. Je zwei sind gleich, deren in der Ebene liegende Schenkel mit der Projektion der Geraden gleiche Winkel machen.

Beweis. a. Die Gerade SA (Fig. 15) schneide die Ebene M in S; man fälle AF ⊥ M und ziehe SF, dann ist SF die Projektion von SA auf die Ebene M (I. 8. Zus. 3). SB sei eine beliebige andere durch S gehende Gerade in M; man schneide von ihr SB = SF ab, ziehe AB und FB. Dann ist in den zwei Dreiecken ASF und ASB : SA = SA, SF = SB, AF < AB (I. 12. a); folglich (nach bekanntem Satz der ebenen Geometrie): W. ASF < ASB. — Hieraus folgt zugleich, daß der Nebenwinkel von ASF der größte ist. (Denn gäbe es einen noch größeren, so müßte dessen Nebenwinkel noch kleiner als W. ASF sein.)

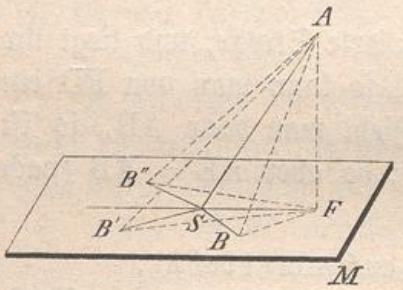

Fig. 15.

b. Ist SB′ (Fig. 15) eine weitere durch S gehende Gerade in M, und ist W. FSB′ > FSB, so mache man SB′ = SB und ziehe AB′ und FB′; dann ergiebt sich zunächst aus der Vergleichung der zwei Dreiecke FSB′ und FSB : FB′ > FB;

hieraus folgt: AB′ > AB (I. 12. c), worauf sich weiter aus der Vergleichung der zwei Dreiecke ASB′ und ASB ergiebt: W. ASB′ > ASB.

c. Liegt SB″ (Fig. 15) in M auf der andern Seite von SF so, daß W. FSB″ = FSB′: so mache man wieder SB″ = SB′ und ziehe AB″ und FB″; dann ist △ FSB″ ≅ FSB′, FB″ = FB′, und daher AB″ = AB′ (I. 12. b); hieraus aber folgt: △ ASB″ ≅ ASB′, W. ASB″ = ASB′.

Zusatz 1. Die Sätze gelten auch umgekehrt.

Zusatz 2. Die Neigung einer Geraden gegen eine Ebene (I. Einl. 8. b) wird also durch den kleinsten zwischen der Geraden und der Ebene möglichen Winkel gemessen, ebenso wie die Entfernung eines Punktes von einer Ebene durch die kleinste zwischen Punkt und Ebene mögliche Strecke gemessen wird.

Zusatz 3. Lehrs. I. 9. b kann als spezieller Fall von Lehrs. c angesehen werden.

Lehrsatz 14.

a. Eine Gerade macht mit parallelen Ebenen gleiche Neigungswinkel.

b. Parallele Gerade machen mit einer Ebene gleiche Neigungswinkel.

c. Parallele Strecken zwischen zwei parallelen Ebenen sind gleich.

d. Werden mehrere Gerade von einer Anzahl paralleler Ebenen geschnitten, so sind die Abschnitte der einzelnen Geraden zwischen denselben Ebenen einander proportioniert.

Beweis. a. Fällt man von einem beliebigen Punkt der Geraden auf eine der parallelen Ebenen die Senkrechte, so steht diese auch senkrecht auf den übrigen (I. 11. b). Legt man daher durch die Gerade und die Senkrechte eine Ebene, so stellen deren Schnittlinien mit den parallelen Ebenen die Projektionen der Geraden auf diese vor (I. Einl. 8. a). Da

KÖNIGLICH PREUSSISCHE BAUGEWERKSCHULE HÖXTER

UNIVERSITÄTS-BIBLIOTHEK PADERBORN

aber die Schnittlinien alle unter sich parallel sind (I. 2), so macht die Gerade mit allen ihren Projektionen gleiche Winkel, folglich auch mit allen Ebenen (I. Einl. 8. b).

b. Folgt aus I. 10. Zus. und I. 4. b.

c. Sind AB und A′B′ zwei parallele Strecken zwischen zwei parallelen Ebenen, so ist ABB′A′ ein Parallelogramm (I. 2), folglich AB = A′B′.

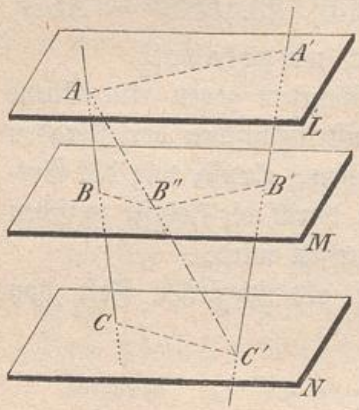

Fig. 16.

d. Zwei Gerade werden von den parallelen Ebenen L, M, N (Fig. 16) geschnitten in den Punkten A, B, C und A′, B′, C′. Man ziehe AC′, welche die M schneidet in B″; die Ebene CAC′ schneidet dann M nach BB″, N nach CC′, und es ist BB″ ∥ CC′ (I. 2), woraus folgt: $\frac{AB}{BC} = \frac{AB''}{B''C'}$. Ebenso giebt die Ebene AC′A′ die parallelen Schnittlinien AA′ und B″B′, woraus folgt: $\frac{A'B'}{B'C'} = \frac{AB''}{B''C'}$. Daher ist auch: $\frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'}$.

Zusatz 1. Sind zwei Ebenen parallel, so sind (nach Lehrs. c und I. 10. b) alle Punkte der einen Ebene von der andern gleich weit entfernt; diese konstante Entfernung wird als die Entfernung der zwei parallelen Ebenen bezeichnet. — Der geometrische Ort eines Punktes, der von einer Ebene eine gegebene Entfernung hat, wird gebildet von zwei Ebenen, die in der geg. Entfernung parallel mit der ersten Ebene zu beiden Seiten derselben liegen.

Zusatz 2. Ist eine Gerade einer Ebene parallel, so haben alle ihre Punkte gleiche Entfernung von der Ebene; diese Entfernung wird als die Entfernung der Geraden von der Ebene bezeichnet.

Zusatz 3. Die (in d besprochenen) zwischen einer Anzahl paralleler Ebenen liegenden Abschnitte einer beliebigen Geraden

sind den Entfernungen der parallelen Ebenen proportioniert. (Hiernach anderer Beweis von d.)

Zusatz 4. Eine Ebene macht mit parallelen Ebenen gleiche Neigungswinkel. (I. 6. Zus. 3 und I. 10. a.)

Lehrsatz 15.

Zwischen zwei windschiefen Geraden giebt es immer eine Strecke, die auf beiden senkrecht steht und zugleich die kürzeste Strecke zwischen ihnen ist.

Beweis. Die zwei windschiefen Geraden seien AB und CD (Fig. 17). Durch einen beliebigen Punkt C der Geraden CD ziehe man die Parallele CE zu AB und lege durch CD und CE die Ebene M; dann ist AB ∥ M (I. 1. b). Hierauf fälle man von einem beliebigen Punkt F′ der Geraden AB die Senkrechte F′G′ auf M und ziehe durch den Fußpunkt G′ die Parallele zu AB, welche in der Ebene M liegt (I. 1. c) und, da sie auch ∥ CE ist, CD schneiden muß, in G. Endlich ziehe man in der Ebene ABG′G durch G die Parallele zu G′F′, welche AB schneidet in F. Es ist nun FG ⊥ M (I. 10. a), also ⊥ CD und ⊥ G′G, und weil AB ∥ G′G, auch ⊥ AB. Folglich ist FG die auf AB und CD senkrechte Strecke.

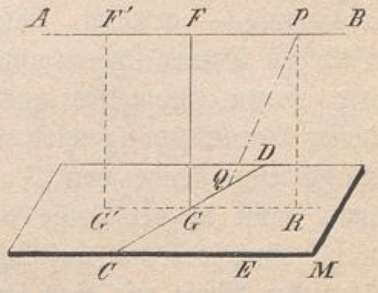

Fig. 17.

Zieht man zwischen AB und CD eine beliebige andere Strecke PQ, so ist diese stets größer als FG. Denn fällt man PR ⊥ M, so ist PR < PQ (I. 12. a), also, weil PR = FG (I. 14. Zus. 2), auch FG < PQ.

Anmerkung. FG heißt die kürzeste Entfernung oder auch schlechtweg die Entfernung der zwei windschiefen Geraden.

Zusatz. Durch eine von zwei windschiefen Geraden läßt sich stets eine Ebene parallel zur andern legen und nur eine. — Durch zwei windschiefe Gerade läßt sich stets ein Paar paralleler

Ebenen legen und nur eines. Ihr Abstand ist gleich der kürzesten Entfernung der zwei Windschiefen. Diese kann auch erhalten werden als Schnittlinie der zwei Ebenen, die senkrecht zu den zwei parallelen Ebenen durch die Windschiefen gelegt werden.

C. Aufgaben.

Vorbemerkung.

Postulat der Stereometrie. Bezüglich der praktischen Ausführbarkeit von Konstruktionen im Raum wird in der Stereometrie die Voraussetzung — aber nur die eine Voraussetzung — gemacht, daß man durch gegebene Punkte nach Belieben Ebenen legen und in jeder Ebene die Konstruktionen der ebenen Geometrie ausführen könne. Mit Zugrundelegung dieser Voraussetzung wird in den folgenden Nummern 1—6 zunächst eine Reihe von Fundamentalaufgaben gelöst, die man dann in der Folge bei stereometrischen Konstruktionen benützt, ohne jedesmal auf ihre Einzelausführung zurückzugehen (in ähnlicher Weise wie dies in der ebenen Geometrie bezüglich des Ziehens von Parallelen, Senkrechten u. s. w. geschieht).

1—6: Fundamentalaufgaben.

Aufgabe 1.

a. Durch einen geg. Punkt eine Gerade parallel zu einer geg. Geraden zu ziehen.

b. Durch einen geg. Punkt eine Ebene parallel zu einer geg. Ebene zu legen.

Auflösung. a. Man lege durch den Punkt und die Gerade eine Ebene und vollziehe die übrige Konstruktion in dieser.

b. Man ziehe in der geg. Ebene zwei beliebige Gerade, die sich schneiden, ziehe zu ihnen durch den geg. Punkt die Parallelen (Aufg. a) und lege durch diese eine Ebene: so ist sie die verlangte.

(Beweise durch I. Einl. 4. b und I. 4. a.)

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Aufgabe 2.

a. Durch eine geg. Gerade eine Ebene parallel zu einer zweiten geg. Geraden zu legen.

b. Durch einen geg. Punkt eine Ebene parallel zu zweien geg. Geraden zu legen.

Auflösung. a. Man ziehe durch einen beliebigen Punkt der ersten Geraden die Parallele zur zweiten (Aufg. 1. a) und lege durch die erste Gerade und die Parallele eine Ebene: so ist diese die verlangte.

b. Man ziehe durch den Punkt die Parallelen zu den zwei geg. Geraden und lege durch sie eine Ebene: so ist diese die verlangte.

(Beweise durch I. 1. b.)

Aufgabe 3.

a. Durch einen auf einer Geraden geg. Punkt eine Ebene senkrecht zu der Geraden zu legen.

b. Durch einen außerhalb einer Geraden geg. Punkt eine Ebene senkrecht zu der Geraden zu legen.

Auflösung. a. Man lege durch die Gerade zwei beliebige Ebenen, errichte in ihnen auf der Geraden in dem geg. Punkt je eine Senkrechte, und lege durch die zwei Senkrechten eine Ebene: so ist diese die verlangte.

b. Man fälle in der durch Punkt und Gerade gelegten Ebene die Senkrechte von dem Punkt auf die Gerade, errichte in deren Fußpunkt auf der Geraden (in einer beliebig durch sie gelegten Ebene) eine zweite Senkrechte, und lege durch beide Senkrechte eine Ebene: so ist diese die verlangte.

(Beweise durch I. 6. a.)

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Aufgabe 4.

a. Von einem außerhalb einer Ebene geg. Punkt die Senkrechte auf die Ebene zu fällen.

b. Auf einer Ebene in einem geg. Punkt derselben die Senkrechte zu errichten.

Auflösung. a. Ist M (Fig. 18*) die geg. Ebene, A der geg. Punkt, so ziehe man in M eine Gerade CD beliebig, fälle in der durch A und CD gelegten Ebene: AB ⊥ CD, ziehe in der Ebene M: BF ⊥ CD, und fälle in der durch AB und BF gelegten Ebene: AF ⊥ BF, so ist AF die verlangte Senkrechte.

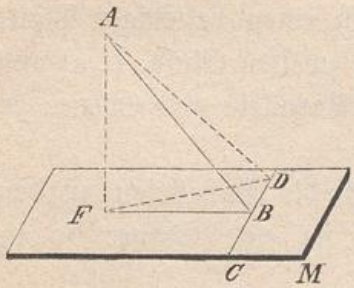

Fig. 18.

b. Ist M (Fig. 18) die geg. Ebene, F der geg. Punkt, so ziehe man in M eine Gerade CD beliebig, fälle FB ⊥ CD, ziehe in einer beliebig durch CD gelegten Ebene: BA ⊥ CD, und errichte in der durch FB und BA gelegten Ebene: FA ⊥ FB, so ist FA die verlangte Senkrechte.

(Beweise durch I. 9. Zus.)

Aufgabe 5.

Durch eine geg. Gerade eine Ebene senkrecht zu einer geg. Ebene zu legen.

Auflösung. Man fälle von einem beliebigen Punkt der Geraden die Senkrechte auf die Ebene (Aufg. 4. a) und lege durch die Gerade und die Senkrechte eine Ebene: so ist diese die verlangte. (Liegt die Gerade in der geg. Ebene, so kommt Aufg. 4. b zur Anwendung.)

(Beweis durch I. 8. a.)

---

*) Man denke sich in Fig. 18 die Linien AD und FD hinweg.

Aufgabe 6.

a. Den Schnittpunkt einer Geraden mit einer ihr nicht parallelen Ebene zu bestimmen.

b. Die Schnittlinie zweier Ebenen zu bestimmen.

Auflösung. a. Man fälle (Fig. 19) von einem beliebigen Punkt A der geg. Geraden AB die Senkrechte AF auf die geg. Ebene M (Aufg. 4. a) und ziehe in der durch AB und AF gelegten Ebene FG ⊥ FA: so schneidet FG die Gerade AB in dem verlangten Punkt S.

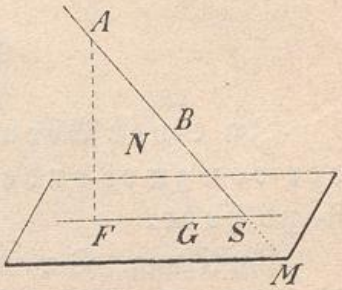

Fig. 19.

b. Man ziehe in einer der zwei geg. Ebenen zwei beliebige Gerade und bestimme deren Schnittpunkte mit der andern Ebene (Aufg. a): so ist die Verbindungslinie dieser zwei Schnittpunkte die verlangte Schnittlinie. (Bei Ausführung der Konstruktion benütze man die vom Schnittpunkt der zwei Geraden auf die andere Ebene gefällte Senkrechte.)

(Beweise durch I. 6. b und I. Einl. 6. b.)

7–10: Beispiele von Konstruktionsaufgaben.

Aufgabe 7.

a. Durch einen geg. Punkt —

b. Parallel zu einer geg. Richtungslinie eine Gerade zu ziehen, die zwei geg. windschiefe Gerade schneide.

Auflösung. a. Man lege durch den geg. Punkt und eine der zwei geg. Geraden eine Ebene, bestimme deren Schnitt-

punkt mit der andern Geraden (Aufg. 6. a), und verbinde diesen mit dem geg. Punkt: so ist die Verbindungslinie die verlangte Gerade.

b. Man lege parallel zu der geg. Richtungslinie durch die eine der zwei geg. Geraden eine Ebene (Aufg. 2. a), bestimme deren Schnittpunkt mit der andern Geraden, und ziehe durch diesen die Parallele zur geg. Richtungslinie: so ist sie die verlangte Gerade.

(Beweise durch Einl. 4. a und I. 1. c.)

Aufgabe 8.

In einer Ebene einen Punkt zu bestimmen, der von zwei andern Ebenen je einen geg. Abstand habe.

Auflösung. Der verlangte Punkt soll 1) in der Ebene M liegen, 2) von der Ebene N den Abstand a, 3) von der Ebene N′ den Abstand a′ haben. — Die Ebene M stellt einen geom. Ort für ihn vor. Die zweite Bedingung liefert einen zweiten geom. Ort, der (nach I. 14. Zus. 1) aus zwei Ebenen besteht, die parallel zu N im Abstand a zu beiden Seiten von N liegen; sie schneiden die Ebene M nach zwei parallelen Geraden, auf denen der gesuchte Punkt liegen muß. Um also diese Geraden zu konstruieren, errichte man in einem beliebigen Punkt der Ebene N die Senkrechte (Aufg. 4. b), schneide auf ihr vom Fußpunkt aus nach beiden Seiten die Strecke a ab, lege durch die Endpunkte Ebenen parallel zu N (Aufg. 1. b), und bestimme deren Schnittlinien mit M (Aufg. 6. b). In gleicher Weise erhält man aus der dritten Bedingung als dritten geom. Ort ein zu N′ paralleles Ebenenpaar, welches die Ebene M nach einem zweiten Geradenpaar schneidet, das ebenso konstruiert wird. Beide Geradenpaare schneiden sich nun in 4 Punkten, von denen jeder eine Lösung der Aufgabe vorstellt. — (Die geg. Ebenen M, N, N′ dürfen nicht zu einer und derselben Geraden parallel sein.)

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Aufgabe 9.

In einer Ebene durch den Spurpunkt einer geg. Geraden eine Linie zu ziehen, die mit der Geraden einen geg. Winkel mache.

Auflösung. Die geg. Gerade g (Fig. 20) schneide die geg. Ebene M in A; der geg. (spitze) Winkel sei w. Angenommen, AD wäre die gesuchte Linie, so fälle man von einem beliebigen Punkt B der Geraden g die Senkrechte BC auf M und ziehe AC; dann ist AC die Projektion von AB auf M. Fällt man ferner CD ⊥ AD und zieht BD, so ist auch BD ⊥ AD (I. 9. b). In der so entstandenen Figur

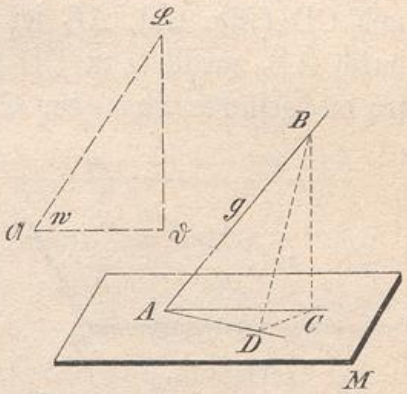

Fig. 20.

ist nun △ ABC nach Gestalt und Lage bekannt; △ ABD kann seiner Gestalt nach bestimmt werden aus Hyp. AB und W. BAD = w. Dann aber kann auch △ ACD aus Hyp. AC und Kath. AD nach Gestalt und Lage in der Ebene M gezeichnet werden, wodurch AD gefunden ist. Man hat demnach folgende Konstruktion:

Von einem beliebigen Punkt B der Geraden g fälle man BC ⊥ M (Aufg. 4. a) und ziehe AC; hierauf konstruiere man (in einer Nebenfigur) ein rechtw. Dreieck ABD aus Hyp. AB = AB und W. BAD = w; endlich zeichne man in der Ebene M ein rechtw. Dreieck ACD über AC als Hyp. mit AD = AD als Kath.: so ist AD die verlangte Gerade. — Wäre Winkel w stumpf, so würde man dieselbe Konstruktion mit seinem spitzen Supplement ausführen und schließlich DA über A verlängern.

Es giebt im allgemeinen zwei Auflösungen. Wann giebt es nur eine und wann wird die Aufgabe unmöglich? (Vgl. I. 13. c u. a, nebst Zus. 3.)

Aufgabe 10.

Zwischen zwei windschiefe Gerade eine Strecke von geg. Länge so zu legen, daß sie mit beiden Geraden gleiche Winkel mache.

Auflösung. Die zwei windschiefen Geraden seien AB und CD (Fig. 21), AC sei ihre kürzeste Entfernung, M die durch AB parallel zu CD gelegte Ebene (vgl. I. 15). BD sei die gesuchte Lage der Strecke, BD mache also mit BA und DC gleiche Winkel. Zieht man nun durch B die Parallele BF zu CD (welche nach I. 1. c in M liegen muß), so macht BD auch mit BA und BF gleiche Winkel; bestimmt man daher die Projektion von BD auf M, indem man DE ⊥ M fällt und BE zieht, so muß auch die Projektion BE mit BA und BF gleiche Winkel machen (I. 13. c mit Zus. 1). Zieht man noch AE, so ist AE ∥ CD ∥ BF, folglich W. BEA = EBF = EBA, also △ BEA gleichschenklig, AB = AE = CD. — Da nun das rechtw. △ BDE seiner Gestalt nach gezeichnet werden kann aus BD = der geg. Strecke und DE = der kürzesten Entfernung der zwei Windschiefen, so ergiebt sich folgende Konstruktion:

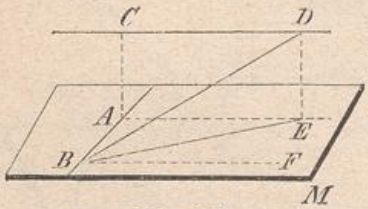

Fig. 21.

Man bestimme (nach I. 15) die kürzeste Entfernung AC der zwei Geraden und zeichne (in einer Nebenfigur) ein rechtw. Dreieck BDE aus Hyp. BD = der geg. Strecke und Kath. DE = CA; hierauf ziehe man durch A die Parallele AE zu CD und lege zwischen die Schenkel von W. BAE die Strecke BE = BE so hinein, daß AB = AE wird; zieht man endlich in der Ebene CDEA durch E die Parallele zu AC, welche CD schneidet in D, und zieht BD: so ist diese die verlangte Strecke.

Es giebt im allgemeinen vier Auflösungen; (statt des

W. EAB können nämlich auch die drei anderen von AB und AE gebildeten Winkelräume benützt werden.)

Zusatz. Werden zwei windschiefe Gerade von einer dritten Geraden so geschnitten, daß diese mit beiden gleiche Winkel macht, so liegen die Schnittpunkte gleich weit entfernt von den Fußpunkten der kürzesten Entfernung der zwei Windschiefen; und umgekehrt.

D. Anhang

von Lehrsätzen und Aufgaben.*)

I. Lehrsätze.

1—17: Gerade und Ebenen, Strecken und Winkel.

1. Ist einem windschiefen Viereck (d. h. einem Viereck, dessen vier Ecken nicht in einer Ebene liegen) ein ebenes Viereck einbeschrieben, so schneiden sich je zwei Gegenseiten des ebenen Vierecks auf einer Diagonale des windschiefen. (I. Einl. 6. d.)

2. Liegen zwei Dreiecke ABC und A'B'C', deren Ebenen nicht parallel sind, so, daß die drei Verbindungslinien je zweier entsprechenden Ecken sich in einem Punkt schneiden, so müssen sich je zwei entsprechende Dreieckseiten schneiden, und müssen die drei Schnittpunkte in gerader Linie liegen; und umgekehrt. (Satz von Desargues.) (I. Einl. 4. a und 6. d.)

3. a. Ist von zwei parallelen Geraden die eine einer Ebene parallel, so ist es auch die andere. (I. 1. a und b.)

b. Ist eine Gerade der einen von zwei parallelen Ebenen parallel, so ist sie auch der andern parallel.

4. Legt man durch einen festen Punkt (Zentrum) und eine Gerade eine Ebene (projizierende Ebene) und bringt diese zum Schnitt mit einer festen Ebene (Bildebene), so heißt die Schnittlinie die Zentralprojektion der Geraden auf die Ebene von dem Punkt aus. — Die Zentralprojektionen einer Anzahl paralleler Geraden schneiden sich alle in einem Punkt (Flucht-

*) Diejenigen Sätze, welche zur Lösung von späteren Aufgaben unerläßlich sind und welche auch außerhalb des Anhanges noch Verwertung finden, sind durch ein Kreuz (†) ausgezeichnet.

punkt), nämlich im Spurpunkt des durch das Zentrum zu den Geraden gezogenen Parallelstrahls. (I. Einl. 4. b u. 6. b.)

5. a. Eine Gerade und eine Ebene, die senkrecht auf einer zweiten Ebene stehen, sind zu einander parallel. (I. 8. b, I. 10. b, I. 1. b, oder indirekt.)

b. Eine Gerade und eine Ebene, die senkrecht zu einer zweiten Geraden stehen, sind zu einander parallel.

c. Ist die eine von zwei parallelen Ebenen senkrecht zu einer dritten Ebene, so ist es auch die andere.

6. Sind zwei Ebenen senkrecht zu je einer von zwei windschiefen Geraden, so ist ihre Schnittlinie parallel der kürzesten Entfernung der zwei Windschiefen. (I. Anh. 5. b und I. 1. Zus. 2.)

† 7. Haben zwei Keile parallele Keilblätter, so sind auch die Keilkanten parallel, und die Keile gleich oder supplementär.

8. Stehen eine Gerade und eine Ebene senkrecht auf einander, so komplementieren sich ihre Neigungswinkel gegen eine zweite Ebene.

† 9. Zieht man durch einen beliebigen Punkt die Senkrechten zu zwei Ebenen, so sind die von den Senkrechten eingeschlossenen Winkel gleich den Keilwinkeln der von den Ebenen gebildeten Keile; und zwar ist der Winkel, dessen Schenkel die Strecken zwischen dem Punkt und den zwei Fußpunkten sind, das Supplement des Keils, innerhalb dessen der Punkt liegt.

† 10. Ist M eine Ebene (die man sich in horizontaler Lage vorstellen mag), N eine zweite, gegen die erste geneigte Ebene, und zieht man in N eine Gerade senkrecht zu ihrer Spurlinie mit M, so heißt diese Gerade eine Neigungslinie oder eine Linie des Gefälls der Ebene N in Beziehung auf die Ebene M, und es gilt der Satz: der Neigungswinkel der Ebene N gegen die Ebene M ist gleich dem Neigungswinkel ihrer Neigungslinie. (I. 9. a.)

11. Macht eine Gerade mit zweien sich schneidenden Ebenen gleiche Winkel, so haben ihre Spurpunkte gleiche Abstände je von der andern Ebene und gleiche Abstände von der Schnittlinie beider Ebenen; und umgekehrt.

12. Steht eine Gerade schief zu einer Ebene M, so hat unter allen Ebenen, die durch sie gelegt werden können, a) diejenige den kleinsten Neigungswinkel gegen M, deren Spurlinie senkrecht

zur Geraden ist; b) je zwei Ebenen, deren Spurlinien gleiche Winkel mit ihr bilden, haben gleiche Neigungswinkel; c) der Neigungswinkel ist um so größer, je kleiner der spitze Winkel ist, den die Spurlinie mit der Geraden macht. (I. Anh. 10.) — Die Sätze gelten auch umgekehrt.

13. a. Die Mitten der vier Seiten eines windschiefen Vierecks liegen in einer Ebene und bilden die Ecken eines Parallelogramms; desgleichen die Mitten je zweier Gegenseiten und der zwei Diagonalen.

b. Die drei Verbindungslinien der Mitten je zweier Gegenseiten und der zwei Diagonalen eines windschiefen Vierecks schneiden sich in einem Punkt und halbieren sich in ihm gegenseitig.

14. Schneidet man die vier Seiten eines windschiefen Vierecks durch eine Ebene, die den zwei Diagonalen parallel ist, so bilden die Schnittpunkte die Ecken eines Parallelogramms, und werden die vier Seiten in den Schnittpunkten proportioniert geteilt. (I. 15. Zus. und I. 14. d.) (Spezialfall von I. Anh. 1.)

† 15. a. Zwei ebene Vielecke, deren Ecken zu einander symmetrisch sind in Bez. auf eine Ebene, sind kongruent. Je zwei entsprechende Seiten der Vielecke schneiden sich in einem Punkt der Symmetralebene und haben gleiche Neigung gegen sie. Die zwei Vielecksebenen schneiden sich nach einer Geraden der Symmetralebene und haben gleiche Neigung gegen sie.

† b. Schneiden zwei Ebenen eine dritte Ebene nach der nämlichen Geraden unter gleichen Neigungswinkeln, so sind sie symmetrisch in Bez. auf die dritte Ebene, d. h. sie werden von jeder zu ihr senkrechten Geraden in zwei symmetrischen Punkten geschnitten.

† c. Sind in Bez. auf eine Ebene die Keilblätter eines Keils einzeln symmetrisch zu den Keilblättern eines andern Keils, so sind auch die Keilkanten symmetrisch und die Keile gleich. (Schneidet die von einem bel. Punkt C der einen Keilkante auf die Symmetralebene gefällte Senkrechte CF die Keilblätter des andern Keils in C′ und C″, so muß, nach b, FC′ = FC″ sein. Man konstr. dann in C und C′ die Keilwinkel.)

† 16. Sind zwei Punkte oder Gerade oder Ebenen symmetrisch in Beziehung auf eine Ebene, so hat jeder Punkt der Symmetralebene gleiche Abstände von den zwei Punkten oder Geraden oder Ebenen.

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

17. Schneidet man auf zwei windschiefen Geraden von den Fußpunkten ihrer kürzesten Entfernung aus vier gleiche Strecken ab, so hat die Verbindungsstrecke zweier Endpunkte die gleiche Länge und bildet mit den zwei Windschiefen die gleichen Winkel wie die Verbindungsstrecke der zwei andern Endpunkte. (Vgl. I. Aufg. 10.)

18—24: Geometrische Örter.

† 18. a. Der geom. Ort eines Punktes, der von zwei festen Punkten gleich weit entfernt ist, ist eine Ebene, die auf der Verbindungsstrecke der zwei Punkte in deren Mitte senkrecht steht. Sie heißt die Mittellotebene der Strecke. (Vgl. I. Anh. 16.)

b. Der geom. Ort eines Punktes, der von drei festen Punkten gleich weit entfernt ist, ist eine Gerade, die auf der durch die drei Punkte gelegten Ebene im Mittelpunkt des durch sie beschriebenen Kreises senkrecht steht. (Vor. Satz oder I. 12. Zus. 2.)

† 19. a. Der geom. Ort eines Punktes, der von zwei sich schneidenden Geraden gleich weit entfernt ist, wird gebildet von zwei Ebenen, die auf der Ebene der Geraden in den Halbierungslinien der von ihnen gebildeten Winkel senkrecht stehen. Eine solche Ebene heißt die Mittellotebene des zugehörigen Winkels. (Vgl. I. Anh. 16.)

† b. Die Mittellotebene eines Winkels ist zugleich der geom. Ort eines Strahls, der vom Scheitel des Winkels ausgeht und mit beiden Schenkeln gleiche Winkel macht. (I. 13. c.)

c. Macht eine Gerade mit drei in einer Ebene liegenden und durch ihren Spurpunkt gehenden Geraden gleiche Winkel, so sind diese Winkel Rechte, und steht also die Gerade senkrecht auf der Ebene.

† 20. Der geom. Ort eines Punktes, der von zwei sich schneidenden Ebenen gleich weit entfernt ist, wird gebildet von zwei Ebenen, welche durch die Schnittlinie der ursprüngl. zwei Ebenen gehen und die von ihnen gebildeten Keile halbieren. Sie stehen auf einander senkrecht und heißen die Medianebenen der zugehörigen Keile. (Vgl. I. Anh. 16.)

† 21. a. Der geom. Ort eines Punktes, der von zwei sich schneidenden Ebenen ein geg. Verhältnis der Entfernungen hat, wird von zwei Ebenen gebildet, die durch die Schnittlinie der zwei ursprüngl. Ebenen gehen. (Wie werden sie gefunden?)

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

b. Diese zwei Ebenen bilden zusammen mit den ursprünglichen zwei Ebenen ein harmonisches Ebenenbüschel. Ein solches hat die Eigenschaft, daß es von jeder Geraden nach vier harmonischen Punkten, und von jeder Ebene nach vier harmonischen Strahlen geschnitten wird. (Bew. zuerst für eine Gerade, die in einer zur Schnittlinie der vier Ebenen senkrechten Ebene liegt, hierauf mit Hilfe einer solchen — für eine beliebige Gerade.)

c. Werden vier durch eine gemeinschaftliche Schnittlinie gehende Ebenen von einer Geraden nach vier harmonischen Punkten, oder von einer Ebene nach vier harmonischen Strahlen geschnitten, so gilt dasselbe von jeder andern Schnittgeraden und Schnittebene.

22. a. Wird ein Ebenenbüschel (d. i. eine Anzahl von Ebenen, die durch die nämliche gerade Linie gehen) von einer Anzahl paralleler Geraden geschnitten, so sind die Abschnitte der letzteren zwischen denselben Ebenen einander proportioniert.

b. Werden zwei sich schneidende Ebenen von einer Schar paralleler Geraden geschnitten, und liegt auf jeder Geraden ein Punkt, der die Strecke zwischen ihren zwei Spurpunkten in einem geg. Verhältnis teilt, so ist der geom. Ort dieses Punktes eine Ebene, die durch die Schnittlinie der zwei ursprüngl. Ebenen geht.

† 23. a. Werden zwei parallele Ebenen von beliebigen Geraden geschnitten, und liegt auf jeder Geraden ein Punkt, der die Strecke zwischen ihren zwei Spurpunkten in einem geg. Verhältnis teilt, so ist der geom. Ort dieses Punktes eine Ebene, die den zwei ursprüngl. Ebenen parallel ist und ihre Entfernung in dem geg. Verhältnis teilt. (Kehrsatz von I. 14. d.)

b. Befinden sich zwischen zwei Ebenen drei gleiche und parallele Strecken, die nicht in einer Ebene liegen, so sind jene zwei Ebenen parallel. (Kehrsatz von I. 14. c.)

24. Legt man durch zwei windschiefe gerade Linien zwei beliebige Ebenen, und zieht in einer Medianebene der von ihnen gebildeten Keile parallel zur Keilkante beliebig eine Gerade, so hat diese von den zwei Windschiefen gleiche kürzeste Entfernungen. (I. 15. Zus. und I. Anh. 20.)

25—31: Projektionssätze.

† 25. a. Die Projektion eines ebenen Vielecks auf eine zu seiner Ebene parallele Projektionsebene ist dem Vieleck kongruent.

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

b. Zieht man durch die Ecken eines ebenen Vielecks in beliebiger Richtung Parallelen, die eine mit der Vielecks-Ebene parallele Ebene schneiden, so bilden die Schnittpunkte die Ecken eines zweiten Vielecks, das dem ersten kongruent ist.

† 26. Die Projektionen paralleler Strecken sind parallel und den Strecken proportioniert.

27. a. Die Projektion eines rechten Winkels, dessen einer Schenkel der Projektionsebene parallel ist, ist wieder ein rechter Winkel. (I. 9. a.)

b. Ein Rechteck, dessen eine Seite der Projektionsebene parallel ist, projiziert sich wieder als Rechteck. — Ein Rhombus, dessen eine Diagonale der Projektionsebene parallel ist, projiziert sich wieder als Rhombus.

28. Steht eine Gerade senkrecht auf einer Ebene, so ist ihre Projektion auf eine beliebige Projektionsebene senkrecht zu der Spurlinie der Ebene.

29. a. Legt man durch die Halbierungslinie eines Winkels oder seines Nebenwinkels eine Ebene, so haben die Schenkel gleiche Neigung gegen die Ebene, und ihre Projektionen auf die Ebene machen mit der Halbierungslinie gleiche Winkel. (Man schneide von den Schenkeln gleiche Strecken ab.)

b. Die Halbierungslinie eines Winkels projiziert sich auf eine zu ihr oder zur Halbierungslinie des Nebenwinkels parallele Ebene als Halbierungslinie der Projektion des Winkels.

30. Die Summe der Neigungswinkel einer Geraden gegen zwei zu einander senkrechte Ebenen liegt zwischen O und R. (I. 13. a.) (Wann ist die Summe = O, und wann = R?)

† 31. Werden verschiedene in einer Ebene liegende Vielecke auf eine zweite Ebene projiziert, so sind ihre Inhalte den Inhalten ihrer Projektionen proportioniert, und zwar verhält sich jedes Vieleck zu seiner Projektion wie eine beliebige Strecke einer Neigungslinie der Vielecks-Ebene (I. Anh. 10) zu ihrer Projektion. Der Satz gilt auch für Vielecke von unendl. vielen unendl. kleinen Seiten. (Man beweise den Satz zuerst für ein Trapez, dessen eine Seite in der Spurlinie der Vielecksebene liegt und dessen zwei parallele Seiten Neigungslinien sind. Ein beliebiges Vieleck läßt sich dann als algebr. Summe von solchen Trapezen darstellen.)

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

II. Aufgaben.

1—20: Aufgaben, die durch zweckmäßig gelegte Ebenen, bezw. geometrische Örter gelöst werden.

1. a. Durch einen geg. Punkt —

b. Parallel zu einer geg. Richtungslinie eine Gerade zu ziehen, die eine geg. Gerade und eine geg. Kreislinie schneide. (Wie viele Lösungen? Wann wird die Lösung unmöglich?)*)

2. a. Zwischen einen Punkt und eine Ebene eine Strecke von geg. Länge so zu legen, daß sie einer zweiten Ebene parallel sei. (I. 2. Zus.)

b. Durch einen geg. Punkt eine Gerade zu ziehen, die eine Ebene und eine zu dieser parallele Gerade so schneide, daß das zwischen beide fallende Stück eine geg. Länge habe.

3. Zwischen zwei windschiefe Gerade eine Strecke von geg. Länge so zu legen, daß sie einer geg. Ebene parallel sei.

Anm. Ist zwischen zwei windschiefe Gerade eine Strecke zu legen, die gewisse Bedingungen erfüllen soll, so lege man durch die Geraden das Paar paralleler Ebenen (I. 15. Zus.), versuche dann, die Strecke zunächst zwischen die zwei Ebenen beliebig zu legen, doch so, daß sie der verlangten Lage parallel ist, und bringe sie schließlich (ähnlich wie in I. 15) durch Parallelverschiebung in die richtige Lage. Häufig (wie z. B. hier) genügt eine einzige der zwei parallelen Ebenen.

4. Geg. ein Punkt, eine Gerade und zwei Ebenen. Durch den Punkt eine Gerade zu ziehen, welche die geg. Gerade schneide und mit den zwei Ebenen zwei Schnittpunkte erzeuge, deren Entfernungen von dem geg. Punkt ein geg. Verhältnis haben.

5. a. In einer Ebene eine gerade Linie so zu ziehen, daß jeder ihrer Punkte von zwei außerhalb der Ebene geg. Punkten gleich weit entfernt sei. (I. Anh. 18. a.)

b. Auf einer Geraden oder Kreislinie einen Punkt zu bestimmen, der von zwei geg. Punkten gleich weit entfernt sei.

c. In einer Ebene einen Punkt zu finden, der von drei außerhalb der Ebene geg. Punkten gleich weit entfernt sei. (I. Anh. 18. b.)

*) Diese Fragen sind bei sämtlichen Aufgaben zu stellen.

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

6. Statt der Punkte in Aufg. 5. a, b und c seien Ebenen geg., von denen die gesuchten Punkte gleiche Entfernungen haben sollen. (I. Anh. 20.)

7. a. Eine Gerade zu finden, die dreien geg. parallelen Geraden parallel sei und von ihnen gleiche Entfernungen habe.

b. Geg. drei Ebenen, deren Schnittlinien parallel sind. Eine Gerade zu finden, die den drei Ebenen parallel sei und von ihnen gleiche Entfernungen habe.

8. Ein geg. Dreieck so zu legen, daß seine drei Ecken einzeln in einem geg. Punkt, auf einer geg. Geraden und in einer geg. Ebene liegen. (Bestimmung der in der Ebene liegenden Ecke entw. mittels des geom. Ortes der zugehör. Dreieckshöhe oder mittels I. 12. Zus. 2.)

9. Einen Punkt zu finden, der von vier geg. Punkten gleich weit entfernt sei.

10. a. Einen Punkt zu finden, der von vier geg. Ebenen gleich weit entfernt sei.

b. Einen Punkt zu finden, dessen Entfernungen von vier geg. Ebenen sich verhalten wie m : n : p : q. (I. Anh. 21. a.) (Im allgem. 8 Lösungen. Vgl. III. Anh. 16. d Schlußbem.)

11. Einen Punkt zu finden, der von den vier Seiten eines windschiefen Vierecks gleich weit entfernt sei. (I. Anh. 19. a.) (Im allgem. 8 Lösungen.)

12. a. Auf einer Geraden oder Kreislinie einen Punkt zu bestimmen, der von einer geg. Ebene eine geg. Entfernung habe. (I. 14. Zus. 1.)

b. Einen Punkt zu finden, der von drei geg. Ebenen geg. Entfernungen habe.

c. Eine Gerade zu finden, die zweien geg. Ebenen parallel sei und von jeder eine geg. Entfernung habe.

13. Auf einer Geraden einen Punkt zu finden, dessen Entfernungen von zwei geg. Ebenen eine geg. Summe oder Differenz haben. (I. 14. Zus. 1 und I. Anh. 20.)

14. Andere Lösung von I. Aufg. 10 mit Hilfe von I. Anh. Anm. zu Aufg. 3 und I. Anh. 19. b.

15. Eine Gerade zu finden, die einer geg. Geraden parallel sei und von zwei anderen Geraden gleiche geg. kürzeste Entfernungen habe. (I. Anh. 24, I. 3. a oder I. 15. Zus., I. 14. Zus. 1.)

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

16. Eine Gerade zu bestimmen, die drei windschiefe Gerade so schneide, daß die durch die drei Schnittpunkte begrenzten Strecken ein geg. Verhältnis haben. (I. 15. Zus., I. Anh. 23. a, I. Aufg. 7. a.)

17. Eine Gerade zu finden, die zwei gegenüberliegende Seiten eines windschiefen Vierecks proportioniert schneide und auf einer von ihnen senkrecht stehe. (I. 15. Zus., I. 14. d, I. 6. b, I. 1. Zus. 2, I. Aufg. 7. b.)

18. a. Die kürzeste Entfernung zweier windschiefen Geraden zu finden durch eine ähnliche Konstruktion wie bei der vor. Aufgabe. (I. Anh. 6, I. Aufg. 7. b.)

b. Eine Gerade zu finden, die von vier geg. Geraden zwei schneide und zu den zwei andern senkrecht sei.

19. a. Auf einer Geraden einen Punkt zu bestimmen, dessen Summe der Entfernungen von zwei außerhalb gelegenen Punkten einen kleinsten Wert habe. (Man lege durch die Gerade und jeden der zwei Punkte eine Ebene und drehe die eine Ebene um die Gerade, bis sie mit der andern zusammenfällt.)

b. In einer Ebene einen Punkt zu bestimmen, dessen Summe der Entfernungen von zwei auf der nämlichen Seite der Ebene gelegenen Punkten einen kleinsten Wert habe.

20. a. In einer Ebene den geom. Ort eines Punktes zu ermitteln, dessen Verbindungslinien mit zwei außerhalb der Ebene geg. festen Punkten gleiche Neigung gegen die Ebene haben.

b. In einer Ebene einen Punkt zu bestimmen, dessen Verbindungslinien mit drei außerhalb gelegenen Punkten gleiche Neigung gegen die Ebene haben.

21—32: Aufgaben, die durch Konstruktion von rechtwinkligen Dreiecken gelöst werden (z. T. ähnlich wie I. Aufg. 9 und 10).

21. a. In einer Ebene durch einen geg. Punkt (oder parallel einer geg. Richtung) eine Gerade zu ziehen, die von einem außerhalb gelegenen Punkt eine geg. Entfernung habe.

b. In einer Ebene eine Gerade zu ziehen, die von zwei außerhalb gelegenen Punkten geg. Abstände habe.

22. a. In einer horizontalen Ebene einen Punkt zu bestimmen, in dem eine Strecke von geg. Länge vertikal aufgestellt werden

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

muß, um von zwei in der Ebene geg. Punkten unter geg. Sehwinkeln gesehen zu werden.

b. In einer horizontalen Ebene einen Punkt zu finden, von dem aus gesehen zwei auf der Ebene aufstehende vertikale Strecken unter geg. Sehwinkeln erscheinen.

23. a. Durch eine geg. Gerade eine Ebene zu legen, die von einem geg. Punkt eine geg. Entfernung habe.

b. Durch einen geg. Punkt eine Ebene zu legen, die einer geg. Geraden parallel sei und von ihr eine geg. Entfernung habe.

c. Durch einen geg. Punkt eine Gerade zu ziehen, die von zwei geg. Geraden geg. kürzeste Entfernungen habe. (Mit Hilfe von b.)

24. Von einem auf einer Geraden geg. Punkt nach einer Ebene eine Strecke von geg. Länge zu legen, so daß sie mit der Geraden einen geg. Winkel mache.

25. Durch einen Punkt einer in einer Ebene geg. Geraden eine Gerade zu ziehen, die mit der Ebene und der Geraden je einen geg. Winkel mache.

26. Durch eine geg. Gerade eine Ebene zu legen, die mit einer geg. Ebene einen geg. Winkel mache.

27. a. Durch den einen Schenkel eines geg. Winkels eine Ebene zu legen, die gegen den andern Schenkel eine geg. Neigung habe.

b. Durch eine geg. Gerade eine Ebene zu legen, die gegen eine andere Gerade eine geg. Neigung habe.

28. Durch einen geg. Punkt eine Gerade zu ziehen, die gegen eine Ebene eine geg. Neigung habe und parallel einer zweiten Ebene sei.

29. a. Zwischen eine Gerade (oder Kreislinie) und eine Ebene eine Strecke von geg. Länge so zu legen, daß sie parallel einer zweiten Ebene sei und mit der ersten Ebene einen geg. Winkel mache. (Vor. Aufg.)

b. Zwischen eine Gerade und eine Ebene eine Strecke von geg. Länge so zu legen, daß sie parallel einer zweiten Ebene sei und mit der Geraden einen geg. Winkel mache. (I. Aufg. 9.)

c. Zwei windschiefe Gerade (oder eine Gerade und eine Kreislinie) durch eine Gerade zu verbinden, die parallel einer geg. Ebene sei und mit einer der zwei (bezw. mit der) geg. Geraden einen geg. Winkel mache. (I. Aufg. 7. b, bezw. I. Anh. Aufg. 1. b.)

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

30. a. Geg. zwei Punkte und eine Gerade. Auf der Geraden einen dritten Punkt zu finden, so daß das durch die drei Punkte bestimmte Dreieck einen geg. Inhalt habe. (I. Anh. Anm. zu Aufg. 3.)

b. Zwischen zwei windschiefe Gerade eine Strecke von geg. Länge so zu legen, daß sie mit einer von ihnen einen geg. Winkel mache.

31. Zwischen zwei windschiefe Gerade eine Strecke von geg. Länge so zu legen, daß ihre Projektion auf eine geg. Ebene eine geg. Länge habe. (Man suche die Strecke zunächst von dem Spurpunkt der einen Windschiefen nach der durch die andere gehenden Parallelebene zu legen.)

32. Ein geg. Quadrat so zu legen, daß zwei gegenüberliegende Ecken auf zwei windschiefen Geraden liegen, und daß es sich auf eine geg. Ebene als Rhombus von geg. Inhalt projiziere. (I. Anh. 27. b und 31. Durch Anwendung von I. Anh. Aufg. 3 erhält man zwei, durch Anwendung der vor. Aufg. zwei weitere Lösungen.)

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN