Lehrbuch der Stereometrie

Hauck, Guido

Tübingen, 1893

Zweites Buch. Krumme Flächen und Vielkant.

urn:nbn:de:hbz:466:1-77777

Zweites Buch.

Krumme Flächen und Vielkant.

A. Einleitung.

1: Allgemeine Umdrehungsflächen.

1. a. Diejenigen Körper, welche bloß von ebenen Flächen begrenzt sind, heißen ebenflächige Körper oder Polyeder. Diejenigen, welche ganz oder teilweise von krummen Flächen begrenzt sind, heißen krummflächige Körper. Von den letzteren werden in der elementaren Stereometrie nur die Umdrehungskörper betrachtet.

b. Dreht sich eine ebene geschlossene Figur um eine in ihrer Ebene liegende und sie nicht schneidende Gerade als Achse so lange herum, bis sie wieder in ihre erste Lage zurückgekehrt ist, so hat sie einen Körper beschrieben oder erzeugt, welcher Umdrehungskörper genannt wird; ihre Peripherie hat eine krumme Fläche beschrieben, welche Umdrehungsfläche heißt und welche die Oberfläche des Umdrehungskörpers bildet.

c. Da bei der Drehung der Figur jeder Punkt ihrer Peripherie einen Kreis beschreibt, dessen Ebene senkrecht zur Drehachse ist, und dessen Mittelpunkt im Fußpunkt der von dem Punkt auf die Drehachse gefällten Senkrechten liegt (I. 6. Zus. 2): so schneiden alle zur Achse senkrechten Ebenen die Umdrehungsfläche nach Kreisen, deren Mittelpunkte auf der Drehachse liegen, und welche **Parallelkreise** heißen. Das Stück der Fläche oder des Körpers zwischen zwei Parallelkreisen heißt eine **Zone** der Fläche oder des Körpers. — Da jede durch die Achse gelegte Ebene angesehen werden kann als die Ebene der gedrehten Figur in einer gewissen während der Drehung eingenommenen Lage, so schneiden alle durch die Achse gelegten Ebenen die Fläche nach kongruenten Figuren, welche **Achsenschnitte** oder **Meridiane** heißen. Jeder Meridian besteht aus zwei kongruenten und gegen die Achse symmetrisch liegenden Teilen (Halbmeridianen), deren jeder der gedrehten Figur kongruent ist.

d. Unter den Umdrehungs-Körpern und -Flächen sind von besonderer Wichtigkeit: der Umdrehungs-**Cylinder**, der Umdrehungs-**Kegel** und die **Kugel**.*)

2—4: Cylinder und Kegel.

2. a. Dreht sich ein Rechteck OO'A'A (Fig. 22) um eine seiner Seiten OO' als Achse so lange herum, bis es wieder in seine erste Lage zurückgekehrt ist, so hat es einen Umdrehungskörper erzeugt, welcher **Umdrehungscylinder** oder kurz: **Cylinder** heißt. Die drei andern Seiten haben seine Oberfläche beschrieben; und zwar haben die der Achse anliegenden Seiten OA und O'A' zwei gleiche, zur Achse senkrechte und daher unter sich parallele Kreise beschrieben (I. 6.

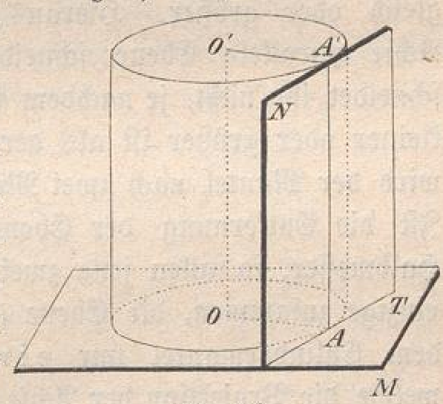


Fig. 22.

*) Nach 1. b müßte strenge genommen unterschieden werden zwischen „Cylinder, Kegel, Kugel" und „Cylinder*fläche*, Kegel*fläche*, Kugel*fläche*". Doch gebraucht man die Worte „Cylinder, Kegel, Kugel" häufig nicht bloß zur Bezeichnung des Körpers, sondern auch der Fläche, ähnlich wie in der ebenen Geometrie das Wort „Kreis" sowohl für „Kreis*fläche*" als für „Kreis*linie*" gebraucht wird.

Zus. 2 und I. 11. a), welche die **Grundkreise** heißen; die der Achse gegenüberliegende Seite AA' hat eine krumme Fläche erzeugt, welche der **Mantel** des Cylinders heißt.

b. Da der Mantel von einer Geraden beschrieben worden ist, so liegen auf ihm unendlich viele Gerade; sie heißen **Mantellinien** und sind alle mit der Achse parallel und gleich, also auch unter sich parallel und gleich (I. 3. b). Die Entfernung der zwei Grundkreis-Ebenen heißt die **Höhe** des Cylinders; sie ist gleich der Achse und gleich den Mantellinien (I. 14. Zus. 1). Alle Parallelkreise sind unter sich und mit den Grundkreisen gleich; jeder Parallelkreis-Halbmesser heißt ein **Halbmesser** des Cylinders. Der Achsenschnitt ist ein Rechteck, dessen Seiten zwei Mantellinien und zwei Grundkreis-Durchmesser sind.

c. Ein Punkt oder eine mit der Achse parallele Gerade liegt innerhalb des Cylinders oder auf dessen Mantel oder außerhalb, je nachdem die Entfernung des Punktes oder der Geraden von der Achse kleiner ist als der Halbmesser oder gleich oder größer. Hieraus folgt weiter: Eine mit der Achse parallele Ebene schneidet den Cylindermantel oder schneidet ihn nicht, je nachdem ihre Entfernung von der Achse kleiner oder größer ist als der Halbmesser. Im ersten Fall wird der Mantel nach zwei Mantellinien geschnitten (I. 1. c). Ist die Entfernung der Ebene von der Achse gleich dem Halbmesser, so fallen jene zwei Schnitt-Mantellinien in eine einzige zusammen, die Ebene (Ebene N in Fig. 22) hat mit dem Cylindermantel nur **eine** Mantellinie AA' gemein, welche die Projektion der Achse auf die Ebene vorstellt; (denn jede andere in ihr parallel zu AA' gezogene Gerade fällt außerhalb des Cylinders nach I. 12. a.) Eine solche Ebene heißt eine **Berührungsebene** des Cylindermantels, die Mantellinie AA' heißt ihre **Berührungsmantellinie**. Die Berührungsebene steht senkrecht auf der durch Berührungsmantellinie und Achse gelegten Ebene. Die Schnittlinie AT der Berührungsebene mit einer Grundkreis-Ebene

M ist Tangente an den Grundkreis; denn sie hat mit ihm nur einen Punkt gemein, nämlich den Endpunkt A der Berührungsmantellinie. Um daher (Fig. 22) die Berührungsebene zu konstruieren, die den Cylindermantel längs einer geg. Mantellinie AA′ berührt, zieht man an einen Grundkreis im Endpunkt A der Mantellinie die Tangente AT und legt durch Tangente AT und Mantellinie AA′ eine Ebene.

d. Aus c (Anf.) folgt ferner: Eine gerade Linie schneidet den Cylindermantel oder schneidet ihn nicht, je nachdem ihre kürzeste Entfernung von der Achse kleiner oder größer ist als der Halbmesser. Ist die kürzeste Entfernung gleich dem Halbmesser, so hat die Gerade mit dem Cylindermantel nur einen einzigen Punkt gemein, nämlich den Fußpunkt der kürzesten Entfernung. Eine solche Gerade heißt eine Tangente des Cylindermantels, jener Punkt — ihr Berührungspunkt. Jede Gerade, die auf einem Halbmesser in seinem Endpunkt senkrecht steht, ist Tangente, (denn der Halbmesser steht auch senkrecht auf der Achse). Daher ist auch jede in einer Berührungsebene gezogene Gerade Tangente.

3. a. Dreht sich ein rechtwinkliges Dreieck SOA (Fig. 23) um eine seiner Katheten SO als Achse so lange herum, bis es wieder in seine erste Lage zurückgekehrt ist, so hat es einen Umdrehungskörper erzeugt, welcher Umdrehungskegel oder kurz: Kegel heißt. Die zwei andern Seiten haben die Oberfläche des Kegels beschrieben; diese besteht

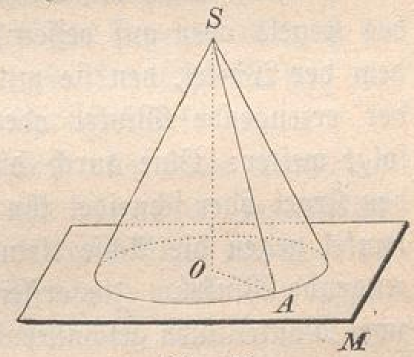


Fig. 23.

aus dem von der andern Kathete OA beschriebenen Grundkreis, welcher senkrecht zur Achse ist, und aus dem von der Hypotenuse SA beschriebenen krummen Mantel des Kegels. — Der Winkel OSA zwischen der Achse und der Hypotenuse heißt der erzeugende Winkel des Kegelmantels. Der Endpunkt S der Achse heißt die Spitze, ihre Entfernung von der Ebene des Grundkreises die **Höhe** des Kegels; die Höhe ist gleich der Achse.

b. Jede Gerade, die von der Spitze nach einem Punkt der Peripherie des Grundkreises gezogen wird, kann als die Hypotenuse des erzeugenden Dreiecks in einer gewissen während der Drehung eingenommenen Lage betrachtet werden; sie liegt daher auf dem Kegelmantel und heißt eine **Mantellinie** des Kegels. Alle Mantellinien sind gleich lang und machen mit der Achse gleiche Winkel. Jeder Halbmesser OA des Grundkreises stellt die Projektion der durch seinen Endpunkt gehenden Mantellinie SA auf die Ebene des Grundkreises vor. Da nun der Winkel SAO stets die nämliche Größe hat, so sind alle Mantellinien gegen die Grundkreis-Ebene gleich geneigt, und zwar ist der Neigungswinkel gleich dem Komplement des erzeugenden Winkels. — Der Achsenschnitt ist ein gleichschenkliges Dreieck, dessen Seiten zwei Mantellinien und ein Grundkreis-Durchmesser sind. Der Dreieckswinkel an der Spitze (gleich dem doppelten erzeugenden W.) heißt die **Öffnung** des Kegels.

c. Eine durch die Spitze gehende Gerade liegt innerhalb des Kegels oder auf dessen Mantel oder außerhalb, je nachdem der Winkel, den sie mit der Achse macht, kleiner ist als der erzeugende Winkel oder gleich oder größer. Hieraus folgt weiter: Eine durch die Spitze gelegte Ebene schneidet den Kegel oder schneidet ihn nicht, je nachdem ihr Neigungswinkel gegen die Achse kleiner oder größer ist als der erzeugende Winkel. Im ersten Fall wird der Kegelmantel nach zwei Mantellinien geschnitten (I. Einl. 2). Ist der Neigungswinkel gleich dem erzeugenden Winkel, so fallen jene zwei Schnitt-Mantellinien in eine einzige zusammen, die Ebene hat mit dem Kegelmantel nur **eine** Mantellinie gemein, welche mit der Projektion der Achse auf die Ebene zusammenfällt, (denn jede andere durch die Spitze in der Ebene gezogene Gerade liegt außerhalb des Kegelmantels nach I. 13. a). Eine solche

Ebene N (Fig. 24*) heißt eine Berührungsebene des Kegelmantels; die gemeinsame Mantellinie ST heißt ihre Berührungsmantellinie. Die Berührungsebene steht senkrecht auf der durch Berührungsmantellinie und Achse gelegten Ebene STO. Die Schnittlinie TB der Berührungsebene mit der Ebene des Grundkreises ist (wie beim Cylinder) Tangente an den Grundkreis. Daher Konstruktion der Berührungsebene wie beim Cylinder. — Der Neigungswinkel einer Berührungsebene N gegen die Ebene des Grundkreises ist gleich dem Neigungswinkel ihrer Berührungsmantellinie ST; denn ST stellt eine Neigungslinie der Ebene N vor (I. 9. b und I. Anh. 10). Daher haben alle Berührungsebenen gleiche Neigung gegen die Ebene des Grundkreises, und zwar ist der Neigungswinkel gleich dem Komplement des erzeugenden Winkels.

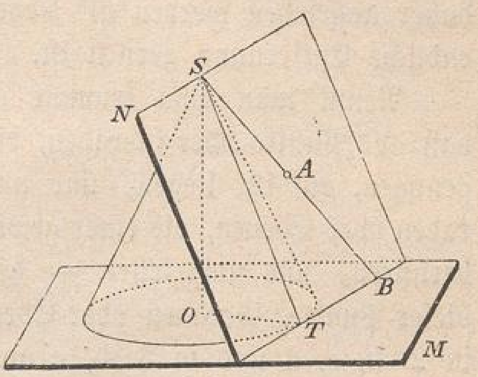


Fig. 24.

d. Jede in einer Berührungsebene liegende Gerade ist Tangente an den Kegelmantel. Ihr Schnittpunkt mit der Berührungsmantellinie ist ihr Berührungspunkt.

4. a. Der Mantel eines Kegels und eines Cylinders stellt nur einen Teil — nämlich eine Zone — der Cylinderfläche und Kegelfläche im weiteren Sinne des Wortes vor. Die vollständige Fläche erhält man, wenn man sämtliche Mantellinien nach beiden Seiten ins Unendliche verlängert. Die vollständige Kegelfläche besteht also aus zwei kongruenten Teilen, die in der Spitze zusammenhängen; sie wird erzeugt durch Drehung der einen von zwei sich schneidenden unbegrenzten Geraden um die andere. (Ist der von den Geraden gebildete erzeugende Winkel ein Rechter, so erhält man als speziellen Fall der Kegelfläche die

*) Man denke sich in Fig. 24 die Linie SAB hinweg.

Ebene, vgl. I. 6. Zus. 2.) — Die Cylinderfläche wird erzeugt durch Drehung der einen von zwei unbegrenzten parallelen Geraden um die andere. Die Cylinderfläche kann daher angesehen werden als Kegelfläche, deren Spitze in unendliche Entfernung gerückt ist.

Nennt man eine krumme Fläche von der Eigenschaft, daß alle Punkte oder Geraden, die einer gewissen Bedingung genügen, auf ihr liegen, und umgekehrt, oder daß alle Geraden oder Ebenen, die einer gewissen Bedingung genügen, sie berühren, und umgekehrt, — den geometrischen Ort dieser Punkte, Geraden oder Ebenen: so lassen sich die Sätze in 2. b, c, d und in 3. b, c auch in folgender Form aussprechen:

b. Der geom. Ort eines Punktes, der eine geg. Entfernung — oder einer Geraden, die eine geg. kürzeste Entfernung von einer festen Geraden hat, ist eine Cylinderfläche, deren Achse die feste Gerade, und deren Halbmesser gleich der geg. Entfernung ist.

c. Der geom. Ort einer Geraden oder einer Ebene, die einer festen Geraden parallel ist und von ihr eine geg. Entfernung hat, ist eine Cylinderfläche, deren Achse die feste Gerade, und deren Halbmesser gleich der geg. Entfernung ist.

d. Der geom. Ort einer Geraden oder einer Ebene, die eine feste Gerade in einem festen Punkt unter geg. Winkel schneidet, ist eine Kegelfläche, deren Achse die feste Gerade, deren Spitze der feste Punkt, und deren erzeugender Winkel gleich dem geg. Winkel ist.

e. Der geom. Ort einer Geraden oder einer Ebene, die durch einen festen Punkt geht und gegen eine feste Ebene eine geg. Neigung hat, ist eine Kegelfläche, deren Spitze der feste Punkt ist, deren Achse senkrecht zu der festen Ebene steht, und deren erzeugender Winkel gleich dem Komplement des geg. Neigungswinkels ist. (Der Satz bleibt auch für den Fall gültig, daß der Punkt in der Ebene selbst liegt, I. 14. a und Zus. 4.)

5—9: Die Kugel.

5. a. Dreht sich ein Halbkreis PCAP′ (Fig. 25) um seinen Durchmesser PP′ als Achse so lange herum, bis er wieder in seine erste Lage zurückgekehrt ist, so hat er einen Umdrehungskörper erzeugt, welcher Kugel heißt; seine Peripherie hat deren krumme Oberfläche beschrieben.

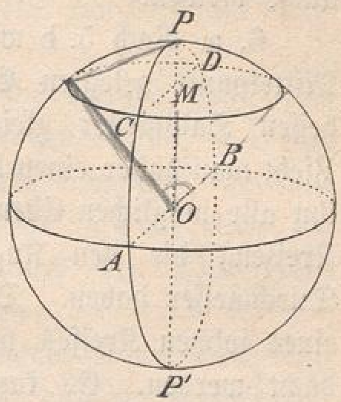


Fig. 25.

b. Der Mittelpunkt O des erzeugenden Halbkreises heißt der Mittelpunkt der Kugel. Jede vom Mittelpunkt an einen Punkt der Oberfläche gezogene Strecke heißt ein Halbmesser der Kugel. Alle Halbmesser sind gleich, denn jeder ist Halbmesser des erzeugenden Halbkreises in einer gewissen während der Drehung eingenommenen Lage; alle Punkte der Kugeloberfläche sind daher vom Mittelpunkt gleich weit entfernt. Jede durch den Mittelpunkt gehende und von der Oberfläche begrenzte Strecke heißt ein Durchmesser der Kugel; jeder Durchmesser besteht aus zwei Halbmessern, daher sind auch alle Durchmesser einander gleich. Die zwei Endpunkte eines Durchmessers heißen Gegenpunkte oder Antipoden.

c. Aus b folgt: Der geom. Ort eines Punktes, der von einem festen Punkt eine geg. Entfernung hat, ist eine Kugelfläche, deren Mittelpunkt der feste Punkt, und deren Halbmesser gleich der geg. Entfernung ist. — Man sagt, die Kugelfläche sei aus dem festen Punkt mit der geg. Entfernung als Halbmesser beschrieben.

d. Eine Kugel ist vollständig und eindeutig bestimmt durch Mittelpunkt und Halbmesser. Zwei Kugeln, die gleiche Halbmesser haben, sind kongruent, und zwar decken sich ihre Oberflächen in jeder Lage, wenn nur die Mittelpunkte zusammenfallen. Eine auf einer Kugeloberfläche liegende Figur kann daher auf derselben beliebig so verschoben werden, daß dabei ihre sämtlichen Punkte beständig auf der Kugeloberfläche bleiben.

6. a. Nach 5. b wird eine Kugel von jeder durch ihren Mittelpunkt gelegten Ebene nach einem Kreise geschnitten, dessen Halbmesser gleich dem Halbmesser der Kugel ist. Zieht man daher einen beliebigen Durchmesser, und legt durch ihn alle möglichen Ebenen, so schneiden diese die Kugel nach Kreisen, die den Kugeldurchmesser zum gemeinschaftlichen Durchmesser haben. Die Kugel kann also durch Umdrehung eines solchen Kreises um jenen Durchmesser entstanden gedacht werden. Es kann somit jeder beliebige Durchmesser einer Kugel als deren Achse angesehen werden.

b. Da ein Umdrehungskörper von jeder zur Achse senkrechten Schnittebene nach einem Kreis geschnitten wird (1. c), bei der Kugel aber jeder Durchmesser als Achse genommen werden kann, so wird die Kugel von jeder Ebene (die überhaupt schneidet) nach einem Kreise geschnitten. Man nennt einen solchen Kreis einen Kugelkreis.

c. Der Mittelpunkt M (Fig. 25) eines Kugelkreises liegt (nach 1. c) auf dem zu seiner Ebene senkrechten Durchmesser. Dieser heißt die Achse, seine Endpunkte P und P′ heißen die Pole des Kreises. Zu jedem Kugelkreis gehören zwei bestimmte Pole, welche Gegenpunkte zu einander sind. Alle parallelen Kugelkreise haben dieselbe Achse und dieselben Pole. Derjenige Parallelkreis, der durch den Mittelpunkt der Kugel geht, heißt der den Polen zugehörige Äquator.

d. Da die Durchmesser AB, CD, . . . (Fig. 25) der einzelnen, zu derselben Achse PP′ gehörigen Parallelkreise zugleich Sehnen in einem durch die Achse gelegten Kugelkreis PCAP′BD sind, so ist unter allen Parallelkreisen der Äquator der größte. Da dies für jede beliebige Achse gilt, so ist der Kreis, nach welchem eine durch den Kugelmittelpunkt gelegte Ebene schneidet, überhaupt der größte, nach dem eine Kugel geschnitten werden kann. Ein solcher Kreis heißt daher auch größter Kreis oder Großkreis der Kugel, wogegen jeder andere Kugelkreis als Kleinkreis bezeichnet wird.

7. a. Eine die Kugel schneidende Gerade heißt eine Sekante. Da sie zugleich Sekante des Kreises ist, nach dem eine beliebig durch sie gelegte Ebene die Kugel schneidet, so kann eine Gerade die Kugeloberfläche in nicht mehr als zwei Punkten schneiden. — Eine durch den Mittelpunkt gehende Sekante heißt Zentrallinie.

b. Das innerhalb der Kugel fallende Stück einer Sekante heißt Sehne. Aus 6. d folgt, daß der Durchmesser die größte Sehne ist.

8. a. Ein Punkt liegt innerhalb der Kugel oder auf deren Oberfläche oder außerhalb, je nachdem seine Entfernung vom Mittelpunkt kleiner ist als der Halbmesser oder gleich oder größer.

b. Hieraus folgt weiter: Eine Ebene oder eine Gerade schneidet die Kugel oder schneidet sie nicht, je nachdem ihre Entfernung vom Mittelpunkt kleiner oder größer ist als der Halbmesser. Ist die Entfernung gleich dem Halbmesser, so hat die Ebene oder Gerade mit der Kugeloberfläche nur einen einzigen Punkt gemein, nämlich den Fußpunkt der vom Mittelpunkt auf sie gefällten Senkrechten, (jeder andere Punkt der Ebene oder Geraden liegt außerhalb der Kugel nach I. 12. a). Eine solche Ebene heißt eine Berührungsebene, und eine solche Gerade — eine Tangente der Kugel. Der gemeinsame Punkt heißt ihr Berührungspunkt, der nach dem Berührungspunkt gezogene Halbmesser — ihr Berührungshalbmesser; der letztere steht senkrecht auf der Berührungsebene oder Tangente im Berührungspunkt. Umgekehrt: eine auf einem Halbmesser der Kugel in dessen Endpunkt senkrecht stehende Ebene oder Gerade berührt die Kugel.

c. Jede Tangente eines Kugelkreises ist auch Tangente an die Kugel; denn da sie in der Ebene des Kugelkreises liegt und mit diesem nur einen Punkt gemein hat, so kann sie auch mit der Kugelfläche nur diesen einen Punkt gemein haben. — Jede in einer Berührungsebene durch den Berührungspunkt gezogene Gerade ist Tangente an die Kugel. Umgekehrt: Haben zwei Tangenten denselben Berührungspunkt, so ist die durch sie gelegte Ebene Berührungsebene (I. 6. a).

d. Aus b folgt: Der geom. Ort einer Ebene oder einer Geraden, die von einem festen Punkt eine geg. Entfernung hat, ist eine Kugelfläche, deren Mittelpunkt der feste Punkt, und deren Halbmesser gleich der geg. Entfernung ist.

9. a. Ist von einem in der Ebene eines Kreises liegenden Punkt S eine Tangente SA an den Kreis gelegt, und dreht man die Ebene um die Zentrallinie SO, so beschreibt der Kreis eine Kugel, und die Tangente den Mantel eines Kegels, dessen sämtliche Mantellinien die Kugel berühren; sein Grundkreis ist der vom Berührungspunkt A beschriebene Kleinkreis. Der Kegel heißt der vom Punkt S an die Kugel gelegte Berührungskegel, jener Kleinkreis heißt sein Berührungskreis. Man sagt auch, die Kugel sei der Kegelfläche als Berührungskugel einbeschrieben.

b. Aus a folgt: die unendlich vielen Tangenten, die sich von einem Punkt an die Kugel legen lassen, haben — je von dem Punkt bis zum Berührungspunkt gemessen — alle gleiche Länge.

c. Jede Berührungsebene des Kegels berührt auch die Kugel; denn ist SA die Berührungsmantellinie, so hat die Ebene mit der Kugel den Punkt A, aber auch nur diesen gemein. Umgekehrt berührt jede durch den Punkt S an die Kugel gelegte Berührungsebene auch den Kegel.

d. Parallel mit einer geraden Linie lassen sich unendlich viele Tangenten an die Kugel legen; sie bilden die Mantellinien einer Cylinderfläche (Berührungscylinder); denn ihre Berührungspunkte liegen auf einem Großkreis der Kugel, dessen Ebene zu ihnen senkrecht ist (Berührungskreis). Jede Berührungsebene des Cylinders berührt auch die Kugel. Der Berührungscylinder kann als Berührungskegel angesehen werden, dessen Spitze in unendliche Entfernung gerückt ist.

Unter dem Berührungscylinder einer Kugel im engeren Sinn versteht man einen Cylinder, dessen Mantel und dessen beide Grundkreise die Kugel berühren, dessen Achse also der zu den Mantellinien parallele Kugeldurchmesser ist.

e. Zwei Kugeln berühren sich in einem Punkt, wenn sie in demselben eine gemeinschaftliche Berührungsebene besitzen. Da die zwei Berührungshalbmesser auf der Berührungsebene im nämlichen Punkte senkrecht stehen, so liegen die zwei Mittelpunkte und der Berührungspunkt in gerader Linie (I. 7. a). Die Entfernung der Mittelpunkte ist gleich der Summe oder gleich der Differenz der zwei Halbmesser, je nachdem die eine Kugelfläche die andere von außen oder von innen berührt. Umgekehrt gilt: Ist die Entfernung der Mittelpunkte zweier Kugeln gleich der Summe oder gleich der Differenz ihrer Halbmesser, so berühren sich die Kugeln.

10—12: Kugel-Teile.

10. a. Ein Kugelkreis teilt die Kugel (als Körper) in zwei Teile, welche Kugelabschnitte heißen, und die Kugeloberfläche in zwei Teile, welche Kugelkappen oder Kugelhauben heißen. Die Oberfläche eines Kugelabschnitts besteht also aus einem Kreise, welcher sein Grundkreis heißt, und aus einer Kugelhaube. Das ins Innere des Kugelabschnittes fallende Stück der Achse des Grundkreises heißt die Achse oder die Höhe, ihr Endpunkt — der Pol des Kugelabschnittes oder der Kugelhaube.

b. Ein Großkreis teilt die Kugel in zwei kongruente Hälften, welche Halbkugeln heißen. Jeder Kleinkreis teilt sie in zwei ungleiche Abschnitte (Hauben); der größere enthält den Mittelpunkt der Kugel.

11. a. Der zwischen zwei parallelen Kugelkreisen liegende Teil der Kugel oder der Kugeloberfläche heißt eine Kugelzone. Die zwei Kreise heißen die Grundkreise, das zwischen ihre Ebenen fallende Stück ihrer Achse heißt die Achse der Kugelzone. Die Entfernung der zwei Grundkreise heißt die Höhe; sie ist gleich der Achse.

b. Eine Kugelzone kann als Differenz zweier Kugelabschnitte (bezw. Kugelhauben) angesehen werden. Ein Kugelabschnitt kann als Kugelzone aufgefaßt werden, deren einer Grundkreis zu einem Punkt zusammengeschrumpft ist. Die Kugel selbst kann als Kugelzone aufgefaßt werden, deren beide Grundkreise zu Punkten zusammengeschrumpft sind.

12. a. Der Kegel, der einen Kleinkreis der Kugel zum Grundkreis, und den Kugelmittelpunkt zur Spitze hat, heißt der dem Kleinkreis zugehörige Kegel. Sein Mantel teilt die Kugel in zwei Teile, von denen jeder ein Kugelausschnitt oder Kugelsektor heißt. Die Oberfläche jedes Kugelausschnittes besteht aus einem Kegelmantel und einer Kugelhaube; der eine (konvexe) Ausschnitt kann als Summe, der andere (konkave) als Differenz eines Kugelabschnittes und eines Kegels angesehen werden.

b. Der erzeugende Winkel des Kegelmantels heißt der erzeugende Zentriwinkel des Kugelausschnittes; ein Kugelausschnitt kann nämlich erzeugt gedacht werden durch Drehung eines Kreisausschnittes um einen der zwei ihn begrenzenden Halbmesser.

c. Die Halbkugel und die Kugel selbst können als Kugelausschnitte aufgefaßt werden, deren erzeugende Winkel bezw. 1R und 2R betragen.

13—22: Sphärik und Vielkant.

13. a. Durch zwei Punkte einer Kugeloberfläche, die nicht Gegenpunkte sind, läßt sich immer ein und nur ein Großkreis legen (I. Einl. 3. a, Schluß).

b. Unter der sphärischen Entfernung zweier Punkte auf einer Kugeloberfläche versteht man die Länge des zwischen ihnen liegenden Großkreisbogens, und zwar desjenigen Bogens, der kleiner als ein Halbkreis ist. Es wird (in B. 11. Zus. 1) bewiesen werden, daß die sphärische Entfernung zweier Punkte den kürzesten Weg vorstellt, auf dem man von einem Punkt zum andern auf der Oberfläche der Kugel gelangen kann. — Die sphärischen Entfernungen können entweder nach irgend einer Längeneinheit (etwa mittels eines Fadens) oder nach Bogengraden (1 Grad = $\frac{1}{360}$ der Groß-kreis-Peripherie) gemessen werden. Da auf derselben Kugeloberfläche die Bogengrade durchweg gleiche Länge haben, so können auch sie als Einheiten eines Längenmaßstabes gelten.

c. Haben auf einer Kugelfläche zwei Punkte gleiche geradlinige Entfernung wie zwei andere Punkte, so haben sie auch gleiche sphärische Entfernung; und umgekehrt. (Denn die sphärischen Entfernungen sind dann Bögen gleicher Kreise mit gleichen Sehnen.) Einer größeren geradlinigen Entfernung entspricht auch eine größere sphärische Entfernung, und umgekehrt. Dasselbe gilt für zwei gleiche Kugeln.

d. Nach I. 12. b hat ein Pol eines Kugelkreises (II. Einl. 6. c) von allen Punkten der Kreisperipherie gleiche geradlinige, und folglich (nach c) auch gleiche sphärische Entfernungen. Man nennt daher denjenigen Pol eines Kleinkreises, der mit ihm auf der nämlichen Seite des zugehörigen Äquators liegt, den sphärischen Mittelpunkt des Kleinkreises; seine sphär. Entfernung von einem Punkt der Peripherie heißt der sphärische Halbmesser. Auf der Oberfläche einer massiven Kugel kann ein Kugelkreis aus seinem sphärischen Mittelpunkt ganz ebenso mit dem Zirkel beschrieben werden, wie in der Ebene ein Kreis aus seinem Mittelpunkt beschrieben wird.

e. Jeder Pol eines Großkreises hat von allen Punkten desselben eine sphär. Entfernung = 90° oder gleich dem vierten Teil der Großkreis-Peripherie. Der sphär. Halbmesser eines Großkreises ist also = 90°. Jeder seiner Pole kann als sein sphär. Mittelpunkt gelten.

f. Die in a und b genannten zwei Eigenschaften der Großkreise auf der Kugeloberfläche sind dieselben wie die Grundeigenschaften der geraden Linien in der Ebene. Die Großkreise spielen daher auf der Kugeloberfläche die nämliche Rolle wie die geraden Linien in der Ebene. Den Beziehungen zwischen geraden Linien und Kreisen in der Ebene, wie sie die ebene Geometrie betrachtet, entsprechen auf der Kugeloberfläche analoge Beziehungen zwischen Großkreisen und Kleinkreisen. Die Lehre von diesen Beziehungen heißt Sphärik.

g. Da es keine parallelen Großkreise giebt, so sind zu den Sätzen der ebenen Geometrie über parallele Gerade nur teilweise analoge Sätze in der Sphärik vorhanden.

14. a. Zwei von einem Punkt P (Fig. 26) einer Kugeloberfläche ausgehende Großkreisbögen PQ und PR schließen einen sphärischen Winkel QPR ein; der Punkt P heißt die Spitze oder der Scheitel, die beiden Großkreisbögen PQ und PR heißen die Schenkel des Winkels. Ein sphär. Winkel wird gemessen durch den Winkel, den die in der Spitze an die beiden Schenkel gelegten Tangenten PT und PU einschließen. Er ist gleich dem Keilwinkel des von den Ebenen der zwei Großkreisbögen gebildeten Keils; denn PT und PU liegen in den Keilblättern und sind senkrecht zur Keilkante OP. Ein sphär. Winkel

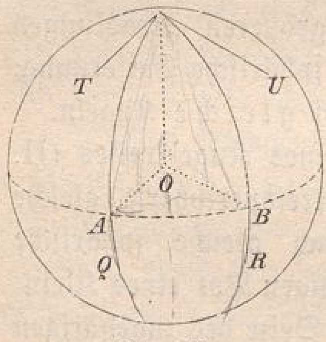


Fig. 26.

kann auch auf der Kugeloberfläche selbst gemessen werden, und zwar durch seinen Äquatorbogen, d. h. durch den zwischen seine Schenkel fallenden Bogen AB des zu der Spitze P gehörigen Äquators; denn der Zentriwinkel AOB dieses Bogens ist = W. TPU (I. 4. b), der Äquatorbogen mißt also ebensoviel Bogengrade als der sphär. Winkel Winkelgrade. — Die Benennungen: Nebenwinkel, Scheitelwinkel u. s. w. haben dieselbe Bedeutung wie bei ebenen Winkeln.

b. Zwei Großkreisbögen stehen auf einander senkrecht, wenn sie einen Winkel von 90° einschließen. Jeder Großkreis PA (Fig. 26), der durch den Pol P eines andern Großkreises AB geht, steht auf diesem senkrecht, und umgekehrt (I. 8. a und c).

15. a. Zwei Großkreise ABA'B' und ACA'C' (Fig. 27, S. 61) einer Kugeloberfläche schneiden sich in zwei Gegenpunkten A und A' und halbieren sich daher gegenseitig, (denn ihre Ebenen haben den Mittelpunkt gemein, schneiden sich also nach einem Durchmesser). Sie teilen die Kugeloberfläche in vier Teile, von denen jeder ein Kugelzweieck oder sphärisches Zweieck heißt. Ein sphär. Zweieck wird also von zwei halben Großkreisen begrenzt. Ihre Schnittpunkte A und A' heißen die Ecken des Zweiecks. Die sphär. Winkel an den zwei Ecken sind gleich; denn sie haben denselben Äquatorbogen, welcher auch der Äquatorbogen des sphär. Zweiecks heißt. — Die Halbkugel und die ganze Kugeloberfläche können als sphär. Zweiecke aufgefaßt werden, deren Winkel bezw. 2 R und 4 R betragen.

b. Der von den zwei Halbkreis-Ebenen eines sphär. Zweiecks eingeschlossene Keil heißt der dem Zweieck zugehörige Keil. Sein Keilwinkel ist gleich dem sphär. Winkel des Zweiecks (14. a).

c. Zwei sphär. Zweiecke derselben Kugel oder gleicher Kugeln sind kongruent, wenn sie gleiche Winkel oder Äquatorbögen haben (I. 7. Zus. und II. Einl. 5. d).

d. Zwei sphär. Zweiecke derselben Kugel oder gleicher Kugeln verhalten sich ihrem Flächeninhalte nach wie ihre Winkel oder Äquatorbögen. Denn verhalten sich die Äquatorbögen wie m zu n, wo m und n zunächst ganze Zahlen sein mögen, und teilt man den Äquatorbogen des einen Zweiecks in m, den des andern in n gleiche Teile, so ist ein Teil des einen Bogens gleich einem Teil des andern Bogens; legt man daher in beiden Zweiecken durch jeden Teilpunkt und die Ecken einen Großkreis, so wird dadurch das eine Zweieck in m, das andere in n Teile geteilt, die (nach c) sämtlich kongruent sind; die zwei Zweiecke verhalten sich somit wie m zu n. Läßt sich das Verhältnis der zwei Äquatorbögen nicht in ganzen Zahlen m und n ausdrücken, so liegt es doch zwischen zwei Grenzen $\frac{m}{n}$ und $\frac{m+1}{n}$, deren Unterschied $\frac{1}{n}$ beliebig klein gemacht werden kann*).

Ein sphär. Zweieck verhält sich zur halben Kugeloberfläche wie sein Winkel zu 2 R (nach a, Schluß).

16. a. Hat man auf einer Kugeloberfläche drei Großkreise, die sich nicht in den nämlichen zwei Gegenpunkten schneiden, so teilen zunächst zwei derselben, z. B. ABA′B′ und ACA′C′ (Fig. 27) die Kugeloberfläche in vier sphär. Zweiecke, von denen dann jedes durch den dritten Kreis BCB′C′ wieder in zwei Teile geteilt wird. Jeder dieser 8 Teile wird ein Kugeldreieck oder sphärisches Dreieck genannt. Die ein sphär. Dreieck einschließenden Großkreisbögen heißen die Seiten, die sphär. Winkel, die von je zwei in einer Ecke zusammenstoßenden Seiten gebildet werden, heißen die Winkel des sphär. Dreiecks.

b. Zwei sphär. Dreiecke, die zusammen ein sphär. Zweieck bilden, heißen Nebendreiecke. Zu jedem sphär. Dreieck

*) Ist z. B. das Verhältnis $= \sqrt{2} = 1{,}41421\ldots$, so liegt es zwischen den zwei Grenzen $\frac{1414}{1000}$ und $\frac{1415}{1000}$, oder zwischen $\frac{14142}{10000}$ und $\frac{14143}{10000}$, u. s. f.

sind drei Nebendreiecke vorhanden, oder: jedes sphär. Dreieck läßt sich auf dreifache Art zu einem Zweieck ergänzen. (Die Nebendreiecke von △ ABC sind z. B. BCA′, CAB′ und ABC′.) Zwei solche Dreiecke, deren Ecken paarweise Gegenpunkte sind, heißen Gegendreiecke. Zu jedem sphär. Dreieck ist ein Gegendreieck vorhanden. (Das Gegendreieck von △ ABC ist z. B. A′B′C′.)

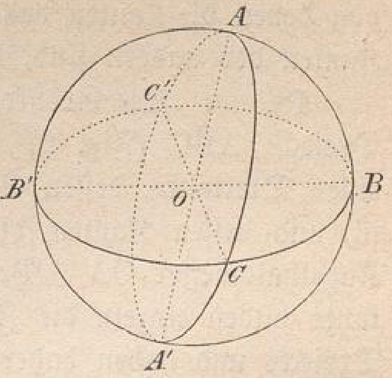


Fig. 27.

c. Die Sphärik beschränkt sich auf die Betrachtung solcher sphär. Dreiecke, in denen jede Seite kleiner als ein halber Großkreis, und jeder Winkel kleiner als 2 R ist. — Ein sphär. Dreieck entsteht daher auch dadurch, daß man drei beliebige, nicht auf demselben Großkreis liegende Punkte der Kugeloberfläche durch ihre sphär. Entfernungen verbindet.

17. a. Hat man drei Ebenen, die nicht der nämlichen Geraden parallel sind, so teilen zunächst zwei derselben den unendlichen Raum in vier Keile, von denen dann jeder durch die dritte Ebene wieder in zwei Teile geteilt wird. Jeder dieser acht Teile wird ein Dreikant genannt. Der Schnittpunkt der drei Ebenen heißt die Spitze, die von der Spitze ausgehenden Äste der drei Schnittlinien heißen die Kanten, die drei Ebenen — die Seitenflächen des Dreikants. Die von je zwei Kanten eingeschlossenen Winkel heißen seine Seiten, die von je zwei Seitenflächen gebildeten Keile — seine Winkel. Wir bezeichnen im folgenden ein Dreikant, dessen Spitze O, dessen Kanten OA, OB, OC sind, durch O,ABC, seine Seiten durch AOB, BOC, COA, seine Winkel durch A, B, C, die numerischen Werte der Winkel durch α, β, γ, die der gegenüberliegenden Seiten durch a, b, c.

b. Zwei Dreikante, die zusammen einen Keil bilden, heißen Nebendreikante. Zu jedem Dreikant sind drei Nebendreikante vorhanden, die man erhält, wenn man je eine Kante über die Spitze verlängert. Zwei Dreikante, von denen die Kanten des einen die Rückverlängerungen der Kanten des andern sind, heißen Scheiteldreikante.

18. a. Die Großkreis-Ebenen der Seiten eines sphär. Dreiecks ABC (Fig. 27, S. 61) bilden die Seitenflächen eines Dreikants, dessen Spitze der Mittelpunkt O der Kugel ist, und dessen Kanten die nach den drei Ecken gezogenen Kugelhalbmesser OA, OB, OC sind. Die Seiten des Dreikants bilden einzeln die Zentriwinkel der Seiten des sphär. Dreiecks und haben daher ebensoviel Winkelgrade, als die entsprechenden Dreieckseiten Bogengrade haben. Die Winkel des Dreikants sind einzeln gleich den Winkeln des sphär. Dreiecks (14. a). Das Dreikant heißt das dem sphär. Dreieck zugehörige Dreikant.

b. Beschreibt man umgekehrt aus der Spitze eines Dreikants mit beliebigem Halbmesser eine Kugelfläche, so schneidet das Dreikant aus dieser das zugehörige sphär. Dreieck aus. Da der Halbmesser der Kugel beliebig ist, so giebt es zu einem Dreikant unendlich viele zugehörige sphär. Dreiecke; zwei entsprechende Seiten zweier solcher Dreiecke haben zwar verschiedene absolute Längen, nach Bogengraden gemessen aber haben sie gleiche numerische Werte.

c. Jeder Lehrsatz über die Seiten und Winkel der sphär. Dreiecke gilt eben damit auch für Dreikante, und umgekehrt.

19. a. Die Summe der drei Winkel hat für verschiedene sphär. Dreiecke verschiedene Werte, sie ist stets größer als 2 R. Z. B. ist in dem sphär. Dreieck PAB in Fig. 26 (S. 58) die Summe der Winkel gleich 2 R plus dem W. APB, der zwischen 0 und 2 R liegen kann. (Der allgemeine Beweis wird in B. 15. a erbracht werden.) Man nennt den Ueberschuß der Winkelsumme eines sphär. Dreiecks über 2 R den sphärischen Exzeß des Dreiecks. Dieselbe Bezeichnung wird auch auf Dreikante übertragen.

b. Je kleiner die Dimensionen eines sphär. Dreiecks im Verhältnis zum Halbmesser seiner Kugel sind, desto kleiner ist sein sphär. Exzeß; denn desto weniger weicht das sphär. Dreieck von dem durch seine Endpunkte bestimmten ebenen Dreieck ab. Sind über ein auf einer Kugeloberfläche von großem Halbmesser (z. B. auf der Erdkugel) liegendes Dreieck geometrische Untersuchungen anzustellen, und ist sein sphär. Exzeß für den Grad der Genauigkeit, der für die Untersuchung vorgeschrieben ist, verschwindend klein, so kann das Dreieck als ebenes Dreieck behandelt werden. Ist dies aber nicht der Fall, so muß zu der Untersuchung statt der ebenen Geometrie die Sphärik angewendet werden.

c. Ein sphär. Dreieck oder Dreikant, das einen rechten Winkel besitzt, heißt r e c h t w i n k l i g. Ein sphär. Dreieck oder Dreikant kann übrigens auch mehr als einen rechten Winkel enthalten (vgl. z. B. △ PAB in Fig. 26, S. 58). Ebenso können mehrere stumpfe Winkel vorhanden sein. — Ein sphär. Dreieck oder Dreikant mit zwei gleichen Seiten heißt g l e i c h s c h e n k l i g, ein solches mit drei gleichen Seiten heißt g l e i c h s e i t i g. — Drei größte Kreise, die auf einander senkrecht stehen, teilen die Kugeloberfläche in acht kongruente Teile, von denen jeder ein K u g e l o k t a n t heißt; das zugehörige Dreikant heißt O k t a n t. In ihm sind alle Seiten und alle Winkel = 90°.

20. a. Zwei sphär. Dreiecke derselben Kugel oder gleicher Kugeln, und ebenso zwei Dreikante heißen e n t s p r e c h e n d - g l e i c h, wenn sie alle Winkel und alle entsprechenden Seiten bezw. gleich haben.

b. Umläuft man auf der Oberfläche einer Kugel zwei entsprechend-gleiche sphär. Dreiecke ABC und A'B'C', indem man ihre entsprechenden Ecken und Seiten in der nämlichen Reihenfolge passiert, und hat man dabei das umlaufene Dreieck beidemal zur Linken oder beidemal zur Rechten (Fig. 28. a), so sagt man, die entsprechenden Elemente folgen sich i n g l e i c h e m S i n n, oder: die zwei Dreiecke seien g l e i c h s t i m m i g. Hat man dagegen das eine Dreieck zur Linken, das andere zur Rechten (Fig. 28. b), so folgen sich die entsprechenden Elemente in entgegengesetztem Sinn, die zwei Dreiecke sind ungleichstimmig. Im ersten Fall können die Dreiecke und ihre zugehörigen Dreikante zur Deckung gebracht werden und heißen daher kongruent. Im zweiten Fall können sie nicht zur Deckung gebracht werden. Verschiebt man nämlich das eine Dreieck auf der Kugeloberfläche, bis zwei seiner Ecken, z. B. A und B mit den entsprechenden Ecken A′ und B′ des andern Dreiecks — und also die zwei Kanten OA und OB des einen zugehörigen Dreikants mit den entsprechenden Kanten OA′ und OB′ des andern zusammenfallen: so liegt jetzt das dritte Kantenpaar OC und OC′ (nach I. Anh. 15. b u. c) symmetrisch in Bez. auf die gemeinschaftliche Seitenfläche AOB. Zwei solche sphär. Dreiecke oder Dreikante heißen symmetrisch*). — Um bei entsprechend-gleichen Dreikanten zu entscheiden, ob sie gleichstimmig oder ungleichstimmig sind, ohne hiezu die zugehörigen sphär. Dreiecke zu Hilfe zu nehmen, kann man sich zwei menschliche Figuren mit den zwei Dreikanten als Mänteln bekleidet den-

Fig. 28. a.

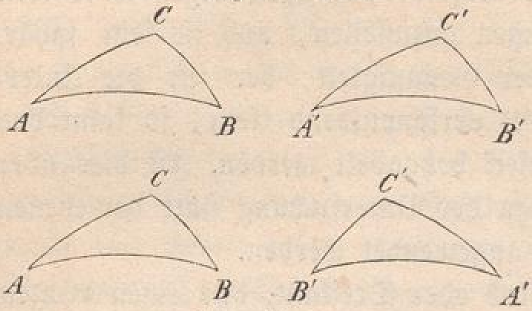


Fig. 28. b.

*) Derselbe Unterschied zwischen kongruenten und symmetrischen Dreiecken findet wie in der Sphärik, so auch in der ebenen Geometrie statt. Zwei symmetrische ebene Dreiecke können durch bloßes Verschieben in ihrer Ebene nicht zur Deckung gebracht werden, sondern nur dadurch, daß man das eine Dreieck umlegt, so daß es seine vorherige Unterseite nach oben kehrt. Versucht man dasselbe bei zwei symmetrischen sphärischen Dreiecken auszuführen, indem man sie von der Kugeloberfläche abhebt und so legt, daß die Ecken des einen mit den entsprechenden Ecken des andern zusammenfallen: so sind jetzt die konkaven Seiten der zwei Dreiecke einander zugekehrt (ähnlich wie wenn die rechte und die linke hohle Hand so gegen einander gelegt werden, daß je zwei entsprechende Fingerspitzen sich berühren); von einer Deckung kann also keine Rede sein.

ken (den Hals in der Spitze), und sehen, ob für beide Figuren die entsprechenden Kanten (Falten) ihrer Mäntel in demselben Sinne auf einander folgen, oder für die eine Figur von der Rechten über die Brust zur Linken, für die andere von der Linken über die Brust zur Rechten.

c. Zwei entsprechend=gleiche sphär. Dreiecke oder Dreikante müssen entweder kongruent oder symmetrisch sein. Bloß in dem Falle, wo sie gleichschenklig sind, und in jedem den gleichen Seiten auch gleiche Winkel gegenüberliegen, sind sie sowohl kongruent als symmetrisch, denn es können dann die gleichen Elemente sowohl so, daß sie sich in gleichem Sinne —, als so, daß sie sich in entgegengesetztem Sinne folgen, einander zugeordnet werden.

d. Zwei sphär. Gegendreiecke oder zwei Scheiteldreikante sind entsprechend=gleich, (denn je zwei entsprechende Seiten oder Winkel sind als Scheitelwinkel gleich, I. 7. Zus.); und zwar sind sie — abgesehen von dem in c besprochenen Fall — immer entgegengesetzten Sinnes, also symmetrisch.

21. a. Konstruiert man zu den drei Seiten eines sphär. Dreiecks (d. h. zu den Großkreisen, von denen die Seiten Bögen sind) die Pole, und zwar zunächst zu jeder Seite nur denjenigen Pol, welcher auf derselben Halbkugel mit dem Dreieck liegt: so bestimmen diese drei Pole die Ecken eines zweiten sphär. Dreiecks, welches das Polardreieck oder Supplementardreieck des ersten heißt. Jeder Seite des ursprünglichen Dreiecks entspricht im Polardreieck ein ihr zugehöriger Winkel, nämlich derjenige, dessen Spitze der Pol der Seite ist; und jedem Winkel des ursprünglichen Dreiecks entspricht im Polardreieck eine ihm zugehörige Seite, nämlich diejenige, deren Endpunkte die Pole der jenen Winkel einschließenden Seiten sind. — Die entgegengesetzten Pole der Dreieckseiten bestimmen ein zweites Polardreieck, welches das Gegendreieck des ersten, und also ihm entsprechend=gleich ist. Das erste Polardreieck heißt mit dem ursprüng=

lichen Dreieck gleichstimmig, das zweite — ungleichstimmig.

b. Entsprechend erhält man das Polardreikant oder Supplementardreikant eines Dreikants, wenn man auf dessen drei Seitenflächen in der Spitze die Senkrechten errichtet, und zwar entweder alle drei Senkrechten auf derjenigen Seite der betreffenden Seitenfläche, auf der das Dreikant liegt, oder alle drei auf der entgegengesetzten Seite. Was zugehörige Winkel und Seiten des Dreikants und seines Polardreikants sind, ergiebt sich ähnlich wie beim sphär. Dreieck.

22. a. Zieht man nach den Ecken eines ebenen Vielecks von einem außerhalb seiner Ebene liegenden Punkt Gerade, und legt durch je zwei auf einander folgende Gerade eine Ebene, so umschließen diese Ebenen einen (nicht allseitig begrenzten) Raum, welcher Vielkant (auch körperlicher Winkel oder körperliche Ecke) heißt. Hat das Vielkant n Kanten und also auch n Seitenflächen, so heißt es n-kant. — Beschreibt man aus der Spitze des Vielkants mit beliebigem Halbmesser eine Kugelfläche, so schneidet es aus dieser ein sphärisches Vieleck (n-eck) aus, das dem Vielkant zugehörig heißt. Seiten und Winkel des Vielkants und des sphär. Vielecks haben die nämliche Bedeutung wie beim Dreikant und sphär. Dreieck. Erhabene Winkel sind ausgeschlossen. — Ein Vielkant oder ein sphär. Vieleck heißt regulär, wenn alle seine Seiten gleich und alle seine Winkel gleich sind.

b. Die Ebenen, die durch je zwei nicht auf einander folgende Kanten eines Vielkants gelegt werden können, heißen Diagonalebenen. Sie schneiden die Fläche des zugehörigen sphär. Vielecks nach dessen Diagonalen. Jedes n-kant (sphär. n-eck) kann durch Diagonalebenen (Diagonalen) in n—2 Dreikante (sphär. Dreiecke) zerlegt werden.

c. Da die Summe der Winkel eines sphär. Dreiecks größer als 2 R ist (19. a), so ist die Summe der Winkel eines sphär. n-ecks (nach b, Schluß) größer als (n—2) 2 R, d. h. größer als die Winkelsumme eines ebenen Vielecks von gleicher Seitenzahl. Der Ueberschuß über die letztere heißt der sphärische Exzeß des sphär. Vielecks. Sind also α, β, γ ... die Winkel des sphär. n-ecks, so ist sein sphär. Exzeß $= \alpha + \beta + \gamma + \ldots - (n-2)\,2\,R$. Die Bezeichnung „sphär. Exzeß" wird auch auf Vielkante übertragen.

d. Zwei Vielkante oder zwei sphär. Vielecke gleicher Kugeln heißen entsprechend-gleich, wenn sie in derselben Reihenfolge alle Winkel und alle entsprechenden Seiten einzeln gleich haben. Je nachdem sich dabei die entsprechenden Elemente in gleichem oder in entgegengesetztem Sinne folgen (vgl. 20. b), können die zwei Vielkante oder Vielecke zur Deckung gebracht werden und heißen kongruent, oder können sie nicht zur Deckung, wohl aber in symmetrische Lage gebracht werden und heißen symmetrisch.

B. Lehrsätze.

1—4: Kugelkreise.

Lehrsatz 1.

a. Die vom Mittelpunkt einer Kugel auf die Ebene eines Kleinkreises gefällte Senkrechte hat ihren Fußpunkt im Mittelpunkt des Kleinkreises.

b. Die Verbindungslinie des Mittelpunktes einer Kugel mit dem Mittelpunkt eines Kleinkreises steht auf der Ebene des Kleinkreises senkrecht.

c. Die auf der Ebene eines Kleinkreises in dessen Mittelpunkt errichtete Senkrechte geht durch den Mittelpunkt der Kugel.

Beweis. **a** folgt unmittelbar aus Einl. II. 6. c. — Beweise von **b** und **c** indirekt.

Zusatz 1. Die vom Mittelpunkt einer Kugel auf eine Sehne gefällte Senkrechte hat ihren Fußpunkt im Mittelpunkt der Sehne. Die Verbindungslinie des Mittelpunkts einer Kugel mit dem Mittelpunkt einer Sehne steht auf der Sehne senkrecht. Die Mittellotebene (I. Anh. 18. a) einer Sehne geht durch den Mittelpunkt der Kugel.

Zusatz 2. Dieselben Sätze gelten auch für eine Berührungsebene oder eine Tangente der Kugel, wenn statt „Mittelpunkt des Kleinkreises", bezw. „der Sehne" gesetzt wird: „Berührungspunkt der Berührungsebene", bezw. „der Tangente".

Lehrsatz 2.

Schneiden sich zwei Kugelflächen, so schneiden sie sich nach einem Kreis, dessen Mittelpunkt auf der gemeinschaftlichen Zentrallinie liegt, und dessen Ebene zur Zentrallinie senkrecht ist.

Beweis. Sind O und O′ die Mittelpunkte der zwei Kugeln, und ist A ein beliebiger Punkt der Schnittkurve, so sind, wie auch der Punkt A auf der Schnittkurve angenommen werden mag, die Dreiecke OAO′ alle unter sich kongruent; daher haben die von den Punkten A auf OO′ gefällten Höhen alle den nämlichen Fußpunkt M und die gleiche Länge. Die Punkte A liegen somit alle auf der Peripherie eines Kreises, dessen Mittelpunkt M ist, und dessen Ebene senkrecht zu OO′ ist (I. 6. b).

Lehrsatz 3.

a. Gleiche Kugelkreise derselben Kugel sind vom Mittelpunkt gleich weit entfernt, und umgekehrt.

b. Von zwei ungleichen Kugelkreisen ist der größere dem Mittelpunkt näher, und umgekehrt.

Beweis. Es ſei O der Mittelpunkt der Kugel, M und M′ ſeien die Mittelpunkte zweier Kugelkreiſe, alſo OM und OM′ die Entfernungen ihrer Ebenen vom Kugelmittelpunkt (II. 1. b). MA und M′A′ ſeien beliebige Halbmeſſer der zwei Kugelkreiſe; man ziehe OA und OA′.

a. Sind die zwei Kugelkreiſe gleich, ſo iſt MA = M′A′; da außerdem OA = OA′, ſo iſt △ OMA ≌ OM′A′, folglich: OM = OM′. — Iſt umgekehrt OM = OM′, ſo iſt gleichfalls △ OMA ≌ OM′A′, folglich MA = M′A′, d. h.: die Kugelkreiſe ſind gleich.

b. In den zwei rechtw. Dreiecken OMA und OM′A′ ſind die Hypotenuſen OA und OA′ gleich. Haben aber zwei rechtw. Dreiecke gleiche Hypotenuſen, und iſt die erſte Kathete des einen größer als die erſte Kathete des andern, ſo iſt die zweite Kathete des einen kleiner als die zweite Kathete des andern. Iſt daher Kugelkreis M größer als Kugelkreis M′, alſo Kath. MA > M′A′, ſo iſt Kath. OM < OM′. Iſt umgekehrt OM < OM′, ſo iſt MA > M′A′, d. h.: Kugelkreis M größer als Kugelkreis M′.

Zuſatz 1. Dieſelben Sätze gelten auch für Kugelſehnen.

Zuſatz 2. Verlängert man OM und OM′, bis ſie die Kugeloberfläche ſchneiden in P und P′, und vergleicht die zwei Dreiecke PMA und P′M′A′, ſo erhält man (gemäß II. Einl. 13. c und d) die Sätze: Haben zwei Kugelkreiſe derſelben Kugel gleiche ebene Halbmeſſer, ſo haben ſie auch gleiche ſphäriſche Halbmeſſer; und umgekehrt. Sind die ebenen Halbmeſſer ungleich, ſo hat der Kreis mit dem größeren ebenen Halbmeſſer auch einen größeren ſphäriſchen Halbmeſſer; und umgekehrt.

Anm. Sämtliche Sätze gelten auch für zwei gleiche Kugeln.

Lehrſatz 4.

a. Hat ein Punkt der Kugeloberfläche von drei Punkten eines Kugelkreiſes gleiche ſphäriſche Entfernungen, ſo iſt er Pol des Kugelkreiſes.

b. Hat ein Punkt der Kugeloberfläche von zwei Punkten eines Großkreises, die nicht Gegenpunkte sind, sphär. Entfernungen von je 90 Graden, so ist er Pol des Großkreises.

Beweis. a. Ist P der Punkt auf der Kugeloberfläche, und sind A, B, C die drei Punkte des Kugelkreises, so ist Strecke PA = PB = PC (II. Einl. 13. c). Fällt man daher von P auf die Ebene des Kugelkreises die Senkrechte PM, so ist: MA = MB = MC (I. 12. b mit Zus. 1); folglich ist M Mittelpunkt des Kreises ABC, und somit (nach II. 1. c u. II. Einl. 6. c) P einer seiner zwei Pole.

b. Ist P (vgl. Fig. 26, S. 58) der Punkt auf der Kugeloberfläche, O der Mittelpunkt der Kugel, und sind A, B die zwei Punkte des Großkreises, so ziehe man OP, OA, OB; da nun die Großkreisbögen PA und PB je 90 Grade betragen, so sind die Zentriwinkel POA und POB je = R; folglich steht (da A, O, B nicht in gerader Linie liegen) PO senkrecht auf der Ebene des Großkreises in dessen Mittelpunkt (I. 6. a); somit ist P einer seiner zwei Pole (II. Einl. 6. c).

5—17: **Sphärisches Dreieck und Dreikant.**

Lehrsatz 5.

a. Ist ein sphärisches Dreieck Polardreieck eines zweiten, so ist auch das zweite Dreieck Polardreieck des ersten. — Ist ein Dreikant Polardreikant eines zweiten, so ist auch das zweite Dreikant Polardreikant des ersten.

b. Die Bogengrade der Seiten eines sphär. Dreiecks supplementieren die Winkelgrade der zugehörigen Winkel seines Polardreiecks, und die Winkelgrade der Winkel des sphär. Dreiecks supplementieren die Bogengrade der zugehörigen Seiten des Polardreiecks. — Die Seiten und Winkel eines Dreikants supplementieren bezw. die zugehörigen Winkel und Seiten seines Polardreikants.

Erster Beweis. a. Es sei ABC (Fig. 29) ein sphär. Dreieck, abc sein Polardreieck, und zwar das mit ihm gleichstimmige (II. Einl. 21. a), a Pol von BC, b von CA, c von AB. Man ziehe die Großkreisbögen Ab und Ac. Da nun b Pol von AC ist, so ist Bogen bA = 90°, und da c Pol von AB ist, so ist Bogen cA = 90°; Punkt A hat also von b und von c sphär. Entfernungen von je 90 Graden, ist folglich Pol von bc (II. 4. b). Ebenso zeigt man, daß B Pol von ca, C Pol von ab ist. Nun liegt jeder der Pole A, B, C mit △ abc auf der nämlichen Halbkugel. Folglich ist △ ABC Polardreieck von △ abc, und zwar das mit ihm gleichstimmige.

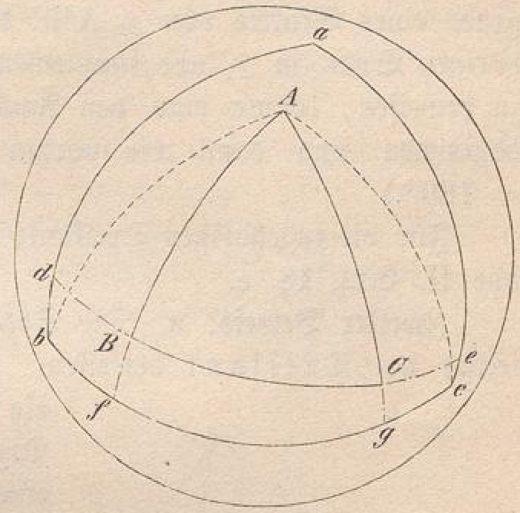


Fig. 29.

Für die zugehörigen Dreikante O, ABC und O, abc ergiebt sich sodann der Beweis unmittelbar durch die Bemerkung, daß zu jedem Bogen von 90° ein Zentriwinkel gleich einem Rechten gehört.

b. Zur Seite BC des Dreiecks ABC gehört der Winkel a des Polardreiecks abc. Um diesen Winkel mit dem Bogen BC vergleichen zu können, benütze man seinen Äquatorbogen (II. Einl. 14. a). Da BC der Äquator von a ist, so ist, wenn BC von ab in d, von ac in e geschnitten wird, de der Äquatorbogen von W. a; man hat also zu beweisen, daß Bogen de + BC = 180° ist. Nun betragen die Bögen Be und Cd je 90° (nach a), folglich ist Be + Cd = 180°;

aber: Be + Cd = BC + Ce + dB + BC = de + BC; somit auch: de + BC = 180°. Damit ist bewiesen, daß die Bogengrade einer Seite des sphär. Dreiecks ABC die Winkelgrade des zugehörigen Winkels im Polardreieck abc supplementieren. Da aber (nach a) umgekehrt △ ABC Polardreieck von △ abc ist, so ist eben damit auch bewiesen, daß die Winkelgrade eines Winkels von △ ABC die Bogengrade der zugehörigen Seite in △ abc supplementieren. (Um dies direkt zu beweisen, könnte man den Äquatorbogen fg von W. A bestimmen und dann wie vorhin zeigen, daß bc + fg = 180°.)

Für die zugehörigen Dreikante folgt sodann der Beweis aus II. Einl. 18. c.

Zweiter Beweis. a. Die Sätze lassen sich auch unmittelbar am Dreikant beweisen. Ist nämlich O (Fig. 30) die Spitze des ursprünglichen Dreikants, und fällt man von einem in seinem Innern liegenden Punkt o auf seine Seitenflächen die Senkrechten oa, ob, oc, so sind diese (nach I. 10. b) parallel und gleichgerichtet mit den Kanten desjenigen Polardreikants, das mit Dreikant O ungleichstimmig ist. Hieraus folgt, daß das von den drei Senkrechten gebildete Dreikant mit jenem Polardreikant kongruent ist; denn es hat mit ihm (nach I. 4. b) die Seiten, und (nach I. 4. a u. I. Anh. 7) die Winkel gleichstimmig gleich. — Werden die Kanten des ursprünglichen Dreikants O von den Seitenflächen des Dreikants o in den Punkten A, B, C geschnitten, so schneiden sich die beiderlei Seitenflächen nach den Geraden aB, Bc, cA, Ab, bC, Ca, und es entsteht ein von sechs Vierecken begrenzter Körper. Nun ist z. B. Fläche aoc senkrecht auf Fläche BOC, weil sie durch oa geht, und senkrecht auf Fläche AOB, weil sie durch

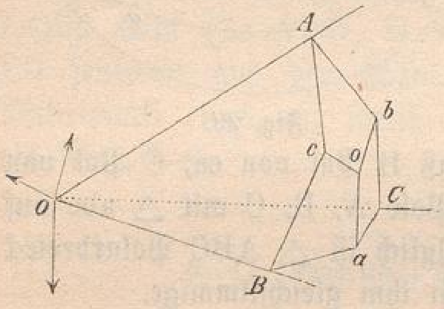


Fig. 30.

oc geht (I. 8. a), folglich auch senkrecht auf deren Schnittlinie OB (I. 8. d). Daher ist auch die mit aoc parallele Seitenfläche des eigentlichen Polardreikants senkrecht auf OB (I. 11. b), u. s. w.

b. In jedem der sechs Vierecke sind zwei gegenüberliegende Winkel Rechte, folglich supplementieren sich die zwei andern Winkel; von diesen stellt aber immer der eine eine Seite des einen Dreikants, der andere den zugehörigen Winkel des andern Dreikants vor.

Anm. Aus Lehrs. b erklären sich die Namen „Supplementardreieck, Supplementardreikant".

Zusatz 1. Nach a können zu einem sphär. Dreieck die Polardreiecke auch dadurch konstruiert werden, daß man zu jeder Ecke den Äquator konstruiert; und zu einem Dreikant die Polardreikante dadurch, daß man senkrecht zu jeder Kante eine Ebene durch die Spitze legt.

Zusatz 2. Aus b folgt: Haben auf gleichen Kugeloberflächen zwei sphär. Dreiecke — oder haben zwei Dreikante die Seiten bezw. gleich, so haben ihre Polardreiecke oder Polardreikante die Winkel bezw. gleich; und umgekehrt. Hieraus folgt weiter: Sind zwei sphär. Dreiecke gleicher Kugeln oder zwei Dreikante entsprechend-gleich, so sind auch ihre Polardreiecke oder Polardreikante entsprechend-gleich.

Lehrsatz 6.

Zwei Dreikante oder zwei sphär. Dreiecke gleicher Kugeln sind entsprechend-gleich, wenn zwei Seiten und der von ihnen eingeschlossene Winkel im einen bezw. gleich sind zweien Seiten und dem von ihnen eingeschlossenen Winkel im andern.

Beweis. Die zwei Dreikante seien $\triangle$ und $\triangle'$ oder O, ABC und O', A'B'C'; es sei Winkel A = A', Seite AOB = A'O'B', Seite AOC = A'O'C'.

Folgen sich die gleichen Elemente in gleichem Sinne, so können △ und △′ zur Deckung gebracht werden. Bringt man nämlich Keil A′ mit A zur Deckung so, daß Punkt O′ mit O zusammenfällt, so müssen in den beiden Keilblättern (wegen der Gleichheit der betr. Dreikantseiten) auch OB′ mit OB, und OC′ mit OC zusammenfallen. Die zwei Dreikante sind somit kongruent. — Folgen sich die gleichen Elemente in entgegengesetztem Sinne, so konstruiere man zu △′ dessen Scheiteldreikant △″. Nun ist △″ mit △′ entsprechend-gleich, und zwar entgegengesetzten Sinnes (II. Einl. 20. d). Daher folgen sich in △″ und △ die gleichen Elemente wieder in gleichem Sinne; also ist △ entsprechend-gleich △″ (1. Teil des Bew.), und somit auch entsprechend-gleich △′.

Ist der Satz für Dreikante bewiesen, so gilt er auch für sphär. Dreiecke gleicher Kugeln (II. Einl. 18. c).*)

Lehrsatz 7.

Zwei Dreikante oder zwei sphär. Dreiecke gleicher Kugeln sind entsprechend-gleich, wenn eine Seite und die zwei ihr anliegenden Winkel im einen bezw. gleich sind einer Seite und den zwei ihr anliegenden Winkeln im andern.

Beweis. Konstruiert man zu den zwei Dreikanten die Polardreikante, so haben diese einen Winkel und die ihn einschließenden Seiten bezw. gleich (II. 5. b), und sind daher entsprechend-gleich (II. 6). Dann aber müssen auch die ursprünglichen Dreikante entsprechend-gleich sein (II. 5. Zus. 2).

Lehrsatz 8.

Zwei Dreikante oder zwei sphär. Dreiecke gleicher Kugeln sind entsprechend-gleich, wenn

*) Dieselbe Bemerkung gilt für jeden der folgenden Beweise zu Lehrs. 7 bis 12.

die drei Seiten des einen bezw. gleich sind den drei Seiten des andern.

Beweis. Die Dreikante seien O, ABC und O', A'B'C' (Fig. 31). Man schneide von den 6 Kanten gleiche Stücke ab: OA = OB = OC = O'A' = O'B' = O'C', und verbinde ihre Endpunkte. Dann sind die Dreiecke OAB, OBC, OCA bezw. kongruent den Dreiecken O'A'B', O'B'C', O'C'A'; daher ist AB = A'B', BC = B'C', CA = C'A', folglich △ ABC ≌ A'B'C'. Weiter folgt aus den genannten Kongruenzen, daß die in A zusammenstoßenden drei Dreieckswinkel einzeln gleich sind den entsprechenden in A' zusammenstoßenden Dreieckswinkeln. Man schneide nun auf den Kanten OA und O'A' gleiche Stücke OD = O'D' ab und lege senkrecht zu OA und O'A' durch D und D' Ebenen, welche die in A und A' zusammenstoßenden Dreiecke nach DE, DF, EF, bezw. D'E', D'F', E'F' schneiden. Dann stellen W. EDF und E'D'F' die Keilwinkel an den Kanten OA und O'A' vor, und es kann leicht bewiesen werden, daß diese zwei Winkel gleich sind. Es ergiebt sich nämlich zunächst: △ ADE ≌ A'D'E' und △ ADF ≌ A'D'F', daher AE = A'E', DE = D'E', AF = A'F', DF = D'F'. Hieraus folgt weiter: △ EAF ≌ E'A'F', EF = E'F', und daher schließlich: △ EDF ≌ E'D'F', W. EDF = E'D'F'. Die zwei Dreikante haben also auch zwei entsprechende Winkel gleich und sind folglich entsprechend-gleich (nach II. 6).

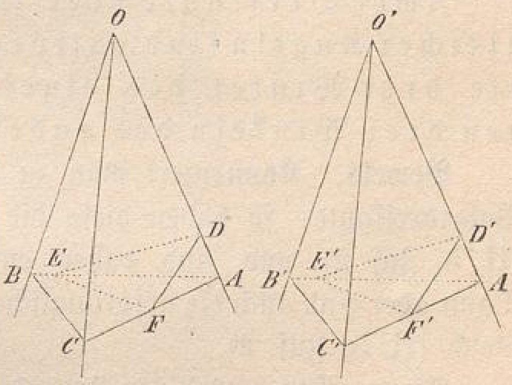


Fig. 31.

Anm. Der obige Beweis ist für alle Fälle giltig, mögen die Seiten spitz oder stumpf oder Rechte sein. — Übrigens kann der Beweis auch ohne Hinzuziehung der Dreiecke ABC und A'B'C' geführt werden. Schneiden nämlich die durch D und D' senkrecht zu OA und

O'A' gelegten Ebenen die Kanten OB und OC, O'B' und O'C' in G und H, G' und H': so ist $\triangle$ ODG $\cong$ O'D'G', $\triangle$ ODH $\cong$ O'D'H'. Hieraus folgt: $\triangle$ OGH $\cong$ O'G'H', und weiter: $\triangle$ GDH $\cong$ G'D'H', W. GDH = G'D'H'. Dieser Beweis ist jedoch nur dann direkt anwendbar, wenn in den Dreikanten zwei Paare gleicher Seiten spitz sind. Trifft dies nicht zu, so ist mindestens ein Paar Nebendreikante vorhanden, in denen es zutrifft; sind aber diese entsprechend-gleich, so sind es auch die ursprünglichen Dreikante.

Lehrsatz 9.

Zwei Dreikante oder zwei sphär. Dreiecke gleicher Kugeln sind entsprechend-gleich, wenn die drei Winkel des einen bezw. gleich sind den drei Winkeln des andern.

Beweis. Konstruiert man zu den zwei Dreikanten die Polardreikante, so haben diese die drei Seiten bezw. gleich (II. 5. Zus. 2) und sind daher entsprechend-gleich (II. 8). Dann aber sind auch die ursprünglichen Dreikante entsprechend-gleich (II. 5. Zus. 2).

Anm. Man bemerke den Unterschied zwischen den Sätzen II. 6, 7, 8, 9 und den Lehrsätzen über die Kongruenz ebener Dreiecke. Die vier Sätze lassen sich auch so aussprechen: Ein Dreikant oder sphär. Dreieck ist eindeutig bestimmt aus drei Seiten, aus drei Winkeln, u. s. w. Allgemein läßt sich der Satz aussprechen: Ein Dreikant oder ein sphär. Dreieck ist (ebenso wie ein ebenes Dreieck) bestimmt aus drei von einander unabhängigen Elementen. Der Unterschied zwischen den obigen vier Sätzen und den Lehrsätzen über die Kongruenz ebener Dreiecke rührt nun daher, daß bei ebenen Dreiecken die drei Winkel von einander abhängig sind, was bei sphär. Dreiecken nicht der Fall ist (II. Einl. 19. a). — Aus zwei Seiten und dem Gegenwinkel einer derselben ist ein sphär. Dreieck (ebenso wie ein ebenes) im allgemeinen nicht eindeutig, sondern zweideutig bestimmt, und daher sind zwei Dreikante oder sphär. Dreiecke, die drei solche Elemente bezw. gleich haben, nicht notwendig entsprechend-gleich. Dieselbe Bewandtnis hat es mit zwei Dreikanten oder sphär. Dreiecken, die zwei Winkel und die Gegenseite eines derselben bezw. gleich haben. (Siehe hierüber II. Anh. 30. a und b.) — Aehnliche Dreikante oder sphär. Dreiecke auf derselben Kugel giebt es nicht; doch stellen zwei sphär. Dreiecke, die demselben Dreikant, aber zweien ungleichen Kugeln angehören (II. Einl. 18. b), ähnliche Gebilde vor.

Lehrsatz 10.

In einem Dreikant oder in einem sphär. Dreieck liegen

a. gleichen Winkeln gleiche Seiten —

b. gleichen Seiten gleiche Winkel gegenüber.

Beweis. a. In dem Dreikant O, ABC (Fig. 32) sei W. B = C. Man konstruiere sein Scheiteldreikant O, A′B′C′; dann läßt sich beweisen, daß dieses mit O, ABC in der Art entsprechend-gleich ist, daß Kante OB′ mit OC und Kante OC′ mit OB entsprechend ist. Es ist nämlich W. B′ = B = C = C′ (I. 7. Zus.); in den zwei Dreikanten O, ABC und O, A′C′B′ ist also S. BOC = C′OB′, W. B = C′, W. C = B′; folglich sind sie in dem angegebenen Sinne entsprechend-gleich (II. 7), daher ist S. AOB = A′OC′ = AOC.

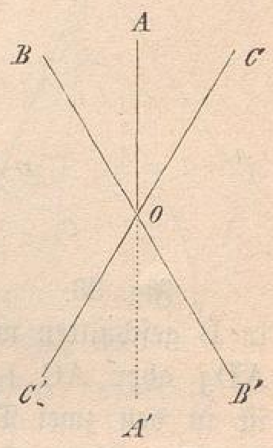


Fig. 32.

b. Es sei S. AOB = AOC; konstruiert man wieder das Scheiteldreikant O, A′B′C′, so ist S. A′OB′ = AOB = AOC = A′OC′; also ist in den zwei Dreikanten O, ABC und O, A′C′B′, wenn sie in dem nämlichen Sinne wie oben auf einander bezogen werden, W. A = A′, S. AOB = A′OC′, S. AOC = A′OB′; folglich sind sie entsprechend-gleich (II. 6), daher ist W. B = C′ = C.

(Anderer Beweis durch I. Anh. 12. b.)

Zusatz 1. Satz b wird auch so ausgesprochen: Im gleichschenkligen sphär. Dreieck (Dreikant) sind die Winkel an der Grundlinie (Grundfläche) gleich.

Zusatz 2. Im gleichseitigen sphär. Dreieck oder Dreikant sind alle Winkel gleich, und: sind in einem sphär. Dreieck oder Dreikant die drei Winkel gleich, so ist es gleichseitig.

Lehrsatz 11.

In einem Dreikant oder in einem sphär. Dreieck sind zwei Seiten zusammen größer als die dritte.

Beweis. Das Dreikant sei O, ABC (Fig. 33); AOB sei seine größte Seite; es ist dann bloß zu beweisen, daß AOC + BOC > AOB. Man lege in der Ebene AOB an OA in O den Winkel AOD = AOC an; dann muß OD innerhalb des W. AOB fallen. Schneidet man die Strecken OC = OD beliebig ab und legt durch die Punkte C und D beliebig eine Ebene, welche von OA in A, von OB in B geschnitten wird, so ist △ AOC ≅ AOD, also AC = AD; aber AC + BC > AB; folglich BC > BD. Nun ist in den zwei Dreiecken BOC und BOD: S. OB = OB, S. OC = OD, S. BC > BD, daher: W. BOC > BOD; addiert man hiezu: AOC = AOD, so folgt: AOC + BOC > AOB.

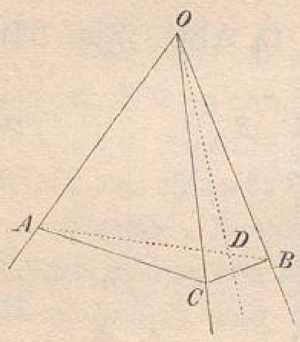


Fig. 33.

Zusatz 1. Aus dem Satze folgt: In einem sphär. Vieleck ist eine Seite kleiner als die Summe der übrigen Seiten. — Hieraus folgt weiter: Auf der Oberfläche einer Kugel ist die sphär. Entfernung zweier Punkte der kürzeste Weg, auf dem man von einem Punkt zum andern gelangen kann. Denn jeder andere Weg kann als polygonaler Zug (eventuell von unendl. vielen unendl. kleinen Seiten) aufgefaßt werden.

Zusatz 2. Wendet man Lehrs. 11 auf die drei Seiten $2R - \alpha$, $2R - \beta$, $2R - \gamma$ des Polardreikants an, so ergiebt sich der Satz: In einem Dreikant oder sphär. Dreieck sind zwei Winkel zusammen kleiner als der um 2 R vermehrte dritte.

Lehrsatz 12.

In einem Dreikant oder in einem sphär. Dreieck liegt

a. dem größeren Winkel die größere Seite —

b. der größeren Seite der größere Winkel gegenüber.

Beweis. a. In dem Dreikant O, ABC (Fig. 34) sei W. C > B. Dann ist zu beweisen, daß S. AOB > AOC. Legt man durch die Kante OC eine Ebene, die mit der Seitenfläche COB einen Winkel = B macht, so muß diese Ebene innerhalb des W. C — und folglich ihre Schnittlinie OD mit der Seitenfläche AOB zwischen OA und OB fallen. In dem Dreikant O, BCD ist nun S. DOB = DOC (II. 10. a); ferner ist in dem Dreikant O, ACD:

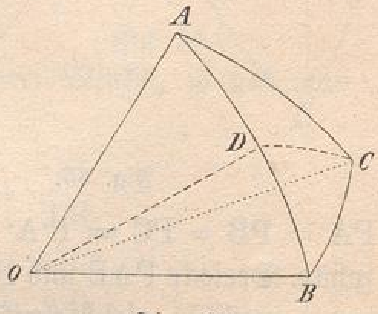


Fig. 34.

$$AOC < AOD + DOC \quad \text{(II. 11)},$$

also auch: $AOC < AOD + DOB$

oder: $AOC < AOB.$

b. Es sei S. AOB > AOC. Wäre W. C nicht größer als B, so wäre entweder C = B oder C < B. Im ersten Falle müßte S. AOB = AOC sein (II. 10. a); im zweiten Falle müßte AOB < AOC sein (nach a). Beides widerspricht der Voraussetzung; folglich muß W. C > B sein.

(Anderer Beweis durch I. Anh. 12. c.)

Lehrsatz 13.

Zwei entsprechend-gleiche sphär. Dreiecke haben gleichen Flächeninhalt.

Beweis. Für kongruente Dreiecke ist der Satz selbstverständlich. Für symmetrische Dreiecke beweist er sich folgendermaßen:

Die Dreiecke seien ABC und A′B′C′ (Fig. 35); dann ist Sehne AB = A′B′, BC = B′C′, CA = C′A′ (II. Einl. 13. c); folglich sind die ebenen Dreiecke ABC und A′B′C′ kongruent, und die Schnittkreise ihrer Ebenen mit der Kugeloberfläche gleich (denn kongruente Dreiecke haben gleiche umbeschriebene Kreise). Sind also P und P′ die sphär. Mittelpunkte dieser zwei Kreise, so ist (gemäß II. 3. Zus. 2): Bogen PA = PB = PC = P′A′ = P′B′ = P′C′.

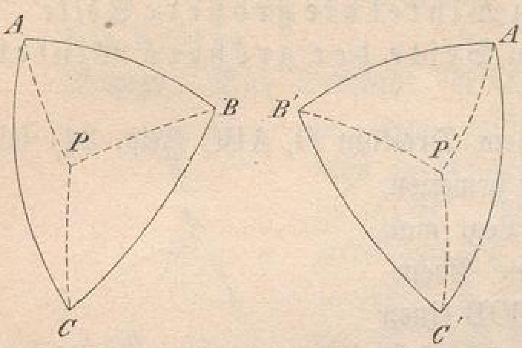


Fig. 35.

Hiernach sind die sphär. Dreiecke PAB und P′A′B′ entsprechend-gleich (II. 8), und zwar, weil sie gleichschenklig sind, kongruent (II. Einl. 20. c), folglich auch flächengleich. Dasselbe gilt von den Dreiecken PBC und P′B′C′, PCA und P′C′A′. Liegen daher die Punkte P und P′ innerhalb der Dreiecke ABC und A′B′C′, so ist △ ABC = PAB + PBC + PCA = P′A′B′ + P′B′C′ + P′C′A′ = △ A′B′C′. Liegt aber einer jener Punkte außerhalb seines Dreiecks, so muß auch der andere eine entsprechende Lage außerhalb seines Dreiecks haben; (liegt z. B. P außerhalb so, daß W. BPC = BPA + APC ist, so muß wegen der Gleichheit der entsprechenden Winkel auch B′P′C′ = B′P′A′ + A′P′C′ sein;) die zwei Dreiecke ABC und A′B′C′ sind also dann Differenzen gleicher Flächenräume, folglich ebenfalls flächengleich.

Lehrsatz 14.

Der Flächeninhalt eines sphär. Dreiecks verhält sich zur halben Oberfläche seiner Kugel wie sein sphär. Exzeß zu 4 R.

Beweis. Das sphär. Dreieck sei ABC (Fig. 36), die Oberfläche seiner Kugel sei = F. Man erweitere die Seiten des Dreiecks zu Großkreisen, welche sich in den Gegenpunkten A′, B′, C′ von A, B, C zum zweitenmal schneiden. Nun bildet △ ABC mit seinen Nebendreiecken BCA′, CAB′, ABC′ drei sphär. Zweiecke, von denen jedes mit △ ABC einen Winkel gemein hat. Sind daher

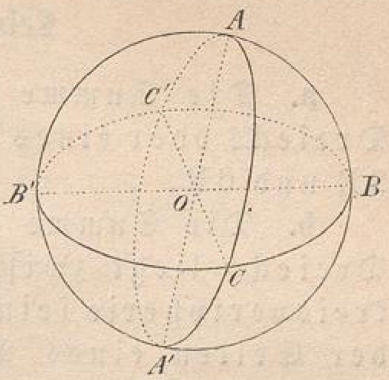


Fig. 36.

α, β, γ die numerischen Werte der drei Winkel, so hat man (nach II. Einl. 15. d):

$$\frac{\triangle ABC + BCA'}{\frac{1}{2}F} = \frac{\alpha}{2R},$$

$$\frac{\triangle ABC + CAB'}{\frac{1}{2}F} = \frac{\beta}{2R},$$

$$\frac{\triangle ABC + ABC'}{\frac{1}{2}F} = \frac{\gamma}{2R}.$$

Addiert man diese drei Gleichungen und bemerkt, daß △ ABC′ mit seinem Gegendreieck A′B′C flächengleich ist (II. 13), und daß ABC + BCA′ + CAB′ + A′B′C die halbe Kugeloberfläche einnimmt, so folgt:

$$\frac{2\triangle ABC + \frac{1}{2}F}{\frac{1}{2}F} = \frac{\alpha + \beta + \gamma}{2R}, \text{ oder}$$

$$\frac{2\triangle ABC}{\frac{1}{2}F} = \frac{\alpha + \beta + \gamma - 2R}{2R}, \text{ oder}$$

$$\frac{\triangle ABC}{\frac{1}{2}F} = \frac{\alpha + \beta + \gamma - 2R}{4R}.$$

Zusatz. Die Inhalte zweier sphär. Dreiecke gleicher Kugeln verhalten sich zu einander wie ihre sphär. Exzesse.

Lehrsatz 15.

a. Die Summe der Winkel eines sphär. Dreiecks oder eines Dreikants liegt zwischen 2 R und 6 R.

b. Die Summe der Seiten eines sphär. Dreiecks liegt zwischen Null und der Großkreisperipherie seiner Kugel. — Die Summe der Seiten eines Dreikants liegt zwischen Null und 4 R.

Beweis. a. Aus der letzten Gleichung in II. 14 folgt, daß $\alpha + \beta + \gamma - 2R$ stets positiv, also $\alpha + \beta + \gamma > 2R$ sein muß. Da ferner jeder einzelne Winkel $< 2R$ ist (II. Einl. 16. c), so ist die Summe der drei Winkel $< 6R$.

b. Da die drei Seiten eines Dreikants mit den drei Winkeln seines Polardreikants zusammen 6 R ausmachen (II. 5. b), die drei Winkel des Polardreikants aber (nach a) mehr als 2 R betragen, so müssen die drei Seiten des Dreikants zusammen weniger als 4 R betragen. Daher muß auch im zugehörigen sphär. Dreieck die Summe der Seiten kleiner sein als 360° oder als die Peripherie eines Großkreises der Kugel. — Da ferner die obere Grenze der Winkelsumme des Polardreikants (nach a) $= 6R$ ist, so ist die untere Grenze der Seitensumme des Dreikants $= 0$.

Zusatz. Aus a folgt, daß $\alpha + \beta + \gamma - 2R < 4R$ ist, daß also in der letzten Gleichung von II. 14 auf der rechten Seite ein ächter Bruch steht. Daher muß auch linker Hand ein ächter Bruch stehen, woraus sich ergiebt: Jedes sphär. Dreieck ist kleiner als die halbe Oberfläche seiner Kugel. — Ferner folgt aus jener Gleichung, daß, je kleiner $\triangle$ ABC im Verhältnis zu $\frac{1}{2}F$ ist, desto kleiner auch sein sphär. Exzeß ist. Der sphär. Exzeß wird $= 0$, d. h. die Winkelsumme wird $= 2R$, wenn $F = \infty$ wird, d. h. wenn die Kugeloberfläche zur Ebene wird. (Vgl. II. Einl. 19. b.)

Lehrsatz 16.

Der Flächeninhalt eines sphär. Vielecks verhält sich zur halben Oberfläche seiner Kugel wie sein sphär. Exzeß zu 4 R.

Beweis. Das Vieleck sei ABC . . EF (Fig. 37), seine Winkel seien $= \alpha, \beta, \gamma, \,. \,. \,\varepsilon, \varphi$, sein Inhalt sei $=$ J, die Oberfläche seiner Kugel $=$ F. Man ziehe von der Ecke A aus sämtliche Diagonalen. Hat das Vieleck n Seiten, so wird es dadurch

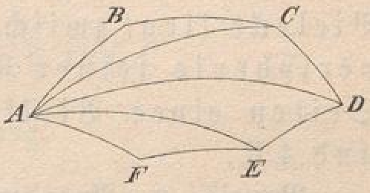


Fig. 37.

in $n-2$ sphär. Dreiecke zerlegt, deren Inhalte $= i_1$, $i_2, \,. \,. \,i_{n-2}$ sein mögen. Die Diagonale AC teile den Winkel γ in die zwei Teile γ_1 und γ_2, die Diagonale AD teile den Winkel δ in die zwei Teile δ_1 und δ_2, u. s. w.; der Winkel α wird in $n-2$ Teile geteilt, die $= \alpha_1$, $\alpha_2, \,. \,. \,\alpha_{n-2}$ seien. Man hat nun (nach II. 14):

$$\frac{i_1}{\frac{1}{2}F} = \frac{\alpha_1 + \beta + \gamma_1 - 2R}{4R},$$

$$\frac{i_2}{\frac{1}{2}F} = \frac{\alpha_2 + \gamma_2 + \delta_1 - 2R}{4R},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{i_{n-2}}{\frac{1}{2}F} = \frac{\alpha_{n-2} + \varepsilon_2 + \varphi - 2R}{4R}.$$

Addiert man diese $n-2$ Gleichungen, so erhält man:

$$\frac{J}{\frac{1}{2}F} = \frac{\alpha + \beta + \gamma + \,. \,. \,\varepsilon + \varphi - (n-2)\,2R}{4R}.$$

Zusatz 1. Auf gleichen Kugeloberflächen verhalten sich die Inhalte zweier beliebiger sphär. Vielecke wie ihre sphär. Exzesse.

Zusatz 2. Wird als Maßeinheit für die Flächeninhalte auf einer Kugeloberfläche das Kugelzweieck, dessen Äquatorbogen $= 1^\circ$ ist, (also der 360te Teil der Kugeloberfläche) gewählt, so ist der Inhalt eines sphär. Vielecks gleich seinem halben sphär. Exzeß ausgedrückt in Graden.

Lehrsatz 17.

a. Die Summe der Winkel eines sphär. Vielecks oder eines Vielkants von n Seiten liegt zwischen $(n-2).2R$ und $n.2R$.

b. Die Summe der Seiten eines sphär. Vielecks liegt zwischen Null und der Großkreisperipherie seiner Kugel. — Die Summe der Seiten eines Vielkants liegt zwischen Null und 4 R.

Beweis. a. Aus der letzten Gleichung in II. 16 folgt, daß $\alpha + \beta + \gamma + \ldots - (n-2).2R$ stets positiv, also $\alpha + \beta + \gamma + \ldots > (n-2).2R$ sein muß. Da ferner jeder einzelne Winkel $< 2R$, die Anzahl der Winkel aber $= n$ ist, so ist : $\alpha + \beta + \gamma + \ldots < n.2R$.

b. Zerlegt man das spär. Vieleck in Dreiecke, so ist die untere Grenze für die Seitensumme jedes Dreiecks $= 0$ (II. 15. b), folglich ist auch für die Seitensumme des Vielecks die untere Grenze $= 0$. Dasselbe gilt für ein Vielkant. — Um die obere Grenze zu erhalten, verlängere man in dem sphär. Vieleck ABCD . . die an eine Seite BC anstoßenden Seiten AB und DC bis zu ihrem Schnitt S, und zwar so, daß das hinzugefügte Dreieck BCS ganz außerhalb des Vielecks liegt. Aus dem ursprünglichen n-eck ABCD . . wird dann ein $(n-1)$-eck ASD . ., dessen Seitensumme größer ist als diejenige des n-ecks, weil in $\triangle$ BCS : $BS + CS > BC$ ist (II. 11). Durch dasselbe Verfahren kann ferner aus dem $(n-1)$-eck ein $(n-2)$-eck gemacht werden, dessen Seitensumme noch größer ist. Fährt man auf diese Weise fort, so gelangt man schließlich zu einem Dreieck, und von diesem zu einem Zweieck. Jedes der erhaltenen Vielecke hat eine größere Seitensumme als das vorangehende. Somit ist die Seitensumme des ursprünglichen n-ecks kleiner als diejenige des Zweiecks, also kleiner als die

Großkreisperipherie oder als 360°. Daher ist auch die Seitensumme des zugehörigen Vielkants kleiner als 4 R.

Zusatz. Der Inhalt eines sphär. Vielecks ist stets kleiner als die Halbkugel. — Je kleiner ein sphär. Vieleck im Verhältnis zu seiner Kugeloberfläche ist, desto kleiner ist sein sphär. Exzeß. Für $F = \infty$ wird der sphär. Exzeß = o. (Beweise wie in II. 15. Zus.)

C. Aufgaben.

Vorbemerkung.

Bei Verwertung der krummen Flächen als geom. Örter zu Konstruktionsaufgaben kommen die Flächen als solche zwar in der inneren Vorstellung zur vollen Geltung. Bei der wirklichen Ausführung der Konstruktion dagegen kann man nicht direkt mit ihnen operieren, da man an das in der Vorbemerkung S. 26 aufgestellte Postulat gebunden ist. Wie nun die hier auftretenden Fundamentalaufgaben mit Rücksicht auf jenes Postulat gelöst werden, zeigen die folgenden Nummern 1—5. Man hat sich dabei die Kugelfläche stets durch Mittelpunkt und Halbmesser gegeben zu denken, die Kegelfläche und Cylinderfläche entweder (als Mantel eines Kegels, bezw. Cylinders) durch Grundkreis und Höhe, oder (als unendlich ausgedehnte Fläche) durch Achse, Spitze und erzeugenden Winkel, bezw. durch Achse und Halbmesser. Umgekehrt läuft die Aufgabe: eine dieser Flächen zu „konstruieren", darauf hinaus, daß die genannten Bestimmungselemente für sie ermittelt werden.

1—5: Fundamentalaufgaben über krumme Flächen.

Aufgabe 1.

a. Den Schnittkreis einer Ebene mit einer Kugelfläche zu bestimmen.

b. Die Schnittpunkte einer Geraden mit einer Kugelfläche zu bestimmen.

Auflösung. **a.** Man fälle von dem geg. Kugelmittelpunkt die Senkrechte auf die geg. Ebene (I. Aufg. 4. a), konstruiere (in einer Nebenfigur) ein rechtw. Dreieck aus dem geg. Kugelhalbmesser als Hyp. und der Senkrechten als Kath., und beschreibe in der geg. Ebene aus dem Fußpunkt der Senkrechten einen Kreis mit der andern Kath. als Halbmesser: so ist dieser Kreis der verlangte.

(Beweis durch II. 1. a.)

b. Man lege durch die Gerade eine beliebige Ebene und konstruiere deren Schnittkreis mit der Kugelfläche (Aufg. a): so sind die Schnittpunkte dieses Kreises mit der Geraden die verlangten Punkte. Am einfachsten legt man die Ebene durch den Kugelmittelpunkt und hat dann in dieser Ebene bloß einen Kreis mit dem Kugelhalbmesser aus dem Mittelpunkt zu beschreiben.

(Beweis durch II. Einl. 7. a.)

Aufgabe 2.

a. Den Schnittkreis zweier Kugelflächen zu bestimmen.

b. Die Schnittpunkte einer Kreislinie mit einer Kugelfläche zu bestimmen.

c. Die Schnittpunkte dreier Kugelflächen zu bestimmen.

Auflösung. a. Man lege durch die zwei geg. Mittelpunkte eine beliebige Ebene und zeichne deren Schnittkreise mit den zwei Kugelflächen, lege hierauf durch die gemeinschaftliche Sehne dieser zwei Kreise senkrecht zu ihrer Ebene eine zweite Ebene, und beschreibe in ihr einen Kreis über der gemeinschaftl. Sehne als Durchmesser: so ist dieser Kreis der verlangte.

(Beweis durch II. 2.)

b. Man bestimme den Kreis, nach dem die Ebene der geg. Kreislinie die Kugelfläche schneidet (Aufg. 1. a): so sind die Schnittpunkte dieses Schnittkreises und des geg. Kreises die verlangten Punkte.

c. Man konstruiere den Schnittkreis zweier von den geg. Kugelflächen (Aufg. a), und bestimme die Schnittpunkte dieses Schnittkreises mit der dritten Kugelfläche (Aufg. b): so sind sie die verlangten.

Andere Auflösung. Legt man durch die drei geg. Mittelpunkte eine Ebene, und zeichnet deren Schnittkreise mit den drei Kugelflächen, so schneiden sich die drei gemeinschaftlichen Sehnen nach bekanntem Satze in einem Punkte p. Man lege nun durch eine der drei gemeinschaftl. Sehnen senkrecht zur ersten Ebene eine zweite Ebene, errichte in dieser über der Sehne als Durchmesser einen Kreis, und auf der Sehne im Punkt p die Senkrechte: so sind die Schnittpunkte der Senkrechten mit dem Kreis die verlangten Punkte. — Punkt p muß im Innern der drei Schnittkreise liegen, wenn die Aufgabe möglich sein soll.

Aufgabe 3.

a. Die Schnitt-Mantellinien einer Kegelfläche (oder Cylinderfläche) mit einer Ebene zu bestimmen, die durch die Spitze der Kegelfläche geht (bezw. der Cylinderachse parallel ist).

b. Die Schnittpunkte einer Geraden mit einer Kegelfläche (oder Cylinderfläche) zu bestimmen.

Auflösung. a. Ist die Fläche als Mantel eines Kegels (oder Cylinders) durch Grundkreis und Höhe gegeben, so bestimme man die Schnittlinie der geg. Ebene mit der Grundkreis-Ebene (I. Aufg. 6. b), markiere deren Schnittpunkte mit der Peripherie des Grundkreises, und ziehe durch diese Schnittpunkte Linien nach der Kegelspitze (bezw. parallel zur Cylinderachse): so sind sie die verlangten Schnitt-Mantellinien.

Ist die Kegelfläche durch Achse, Spitze und erzeugenden Winkel (oder die Cylinderfläche durch Achse und Halbmesser) gegeben, so konstruiere man zuerst irgend einen Parallelkreis und benütze diesen als Grundkreis wie oben. Bei der Kegelfläche erhält man einen Parallelkreis, indem man durch einen Punkt O der Achse in beliebigem Abstand von der Spitze S eine Ebene M senkrecht zur Achse legt (I. Aufg. 3. a), ein rechtw. Dreieck aus dem geg. erzeugenden Winkel und SO als anliegender Kath. konstruiert, und in der Ebene M aus O einen Kreis mit der andern Kath. als Halbmesser beschreibt.

b. Man lege durch die Gerade und die Kegelspitze (bezw. parallel zur Cylinderachse) eine Ebene und bestimme deren Schnitt-Mantellinien mit der geg. Fläche (Aufg. a): so sind die Schnittpunkte dieser Mantellinien mit der geg. Geraden die verlangten Punkte.

Aufgabe 4.

a. Durch einen geg. Punkt an eine Kugelfläche eine Tangente zu ziehen, die einer geg. Ebene parallel sei.

b. Durch zwei geg. Punkte (oder durch eine geg. Gerade) eine Berührungsebene an eine Kugelfläche zu legen.

Auflösung. a. Man lege durch den geg. Punkt eine Ebene parallel zur geg. Ebene (I. Aufg. 1. b), bestimme deren Schnittkreis mit der Kugelfläche (II. Aufg. I. a), und ziehe an ihn von dem geg. Punkt eine Tangente: so genügt diese der Aufgabe. — Da von einem Punkt an einen Kreis im allgem. zwei Tangenten möglich sind, so erhält man im allgem. zwei Lösungen.

(Beweis durch II. Einl. 8. c und I. Einl. 6. c.)

b. Sind A und B (Fig. 38) die zwei geg. Punkte, O der Mittelpunkt der geg. Kugelfläche: so lege man durch O die zu

AB senkrechte Ebene M, welche AB in C schneidet (I. Aufg. 3. b), und zeichne in ihr den Großkreis, nach dem sie die Kugelfläche schneidet. Man ziehe sodann an diesen Kreis von C eine Tangente CT und lege durch AB und CT die Ebene N: so genügt diese der Aufgabe. — Man erhält im allgem. zwei Lösungen.

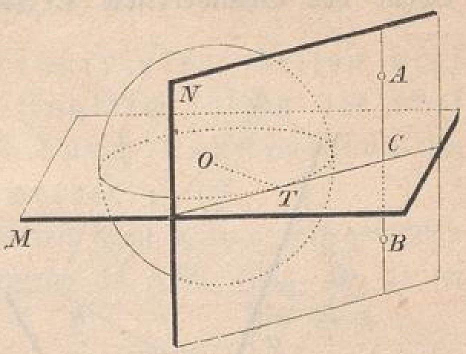


Fig. 38.

Beweis. Die Ebenen M und N stehen senkrecht auf einander (I. 8. a); da ferner Halbm. OT in M liegt und auf der Schnittlinie CT von M und N senkrecht steht, so steht OT auch senkrecht auf N (I. 8. b); folglich ist N Berührungsebene an die Kugelfläche (II. Einl. 8. b). (Anderer Beweis mittels I. 6. Zus. 1.)

Zusatz. Soll durch einen geg. Punkt parallel zu einer geg. Geraden eine Berührungsebene an eine Kugelfläche gelegt werden, so ziehe man durch den geg. Punkt A die Parallele AB zu der geg. Geraden, und verfahre im übrigen wie oben. — Soll parallel zu einer geg. Ebene eine Berührungsebene an eine Kugelfläche gelegt werden, so fälle man vom Kugelmittelpunkt O die Senkrechte auf die Ebene, schneide auf ihr eine Strecke OT = dem Kugelhalbmesser ab, und lege durch T die Ebene N parallel zur geg. Ebene.

Aufgabe 5.

a. Durch einen geg. Punkt —

b. Parallel mit einer geg. Geraden eine Berührungsebene an eine Kegel- oder Cylinderfläche zu legen.

Auflösung. a. Ist die Kegelfläche als Mantel eines Kegels durch Grundkreis und Höhe gegeben, so verbinde man den geg. Punkt A (Fig. 39) mit der Spitze S, bestimme den Schnittpunkt B der Verbindungslinie mit der Ebene des Grundkreises (I. Aufg. 6. a), und ziehe von B an den Grundkreis eine Tangente BT. Legt man dann durch SB und BT die Ebene N: so genügt N als Berührungsebene mit ST als Berührungs-Mantellinie der Aufgabe. Man erhält im allgem. zwei Lösungen. — Ist die Kegelfläche durch Achse, Spitze und erzeugenden Winkel geg., so konstruiere man zuerst irgend einen Parallelkreis wie in Aufg. 3. a, und benütze diesen als Grundkreis. Am einfachsten wird die Parallelkreis-Ebene durch den Punkt A selbst gelegt.

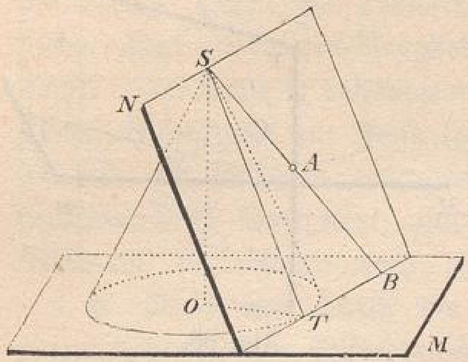


Fig. 39.

Beim Cylinder ziehe man durch A die Parallele zur Achse, bestimme deren Schnittpunkt B mit der Grundkreis-Ebene, und verfahre im übrigen wie beim Kegel.

b. Man ziehe durch die Spitze S der Kegelfläche die Parallele SB zu der geg. Geraden, und verfahre im übrigen wie oben.

Beim Cylinder lege man durch die geg. Gerade eine Ebene parallel zur Cylinderachse (I. Aufg. 2. a), bestimme deren Schnittlinie mit der Grundkreis-Ebene (I. Aufg. 6. b), und lege parallel zu dieser eine Tangente an den Grundkreis; zieht man dann durch den Berührungspunkt die Parallele zur Achse, und legt durch sie und die Tangente eine Ebene, so genügt diese der Aufgabe.

(Beweise durch II. Einl. 3. c und 2. c.)

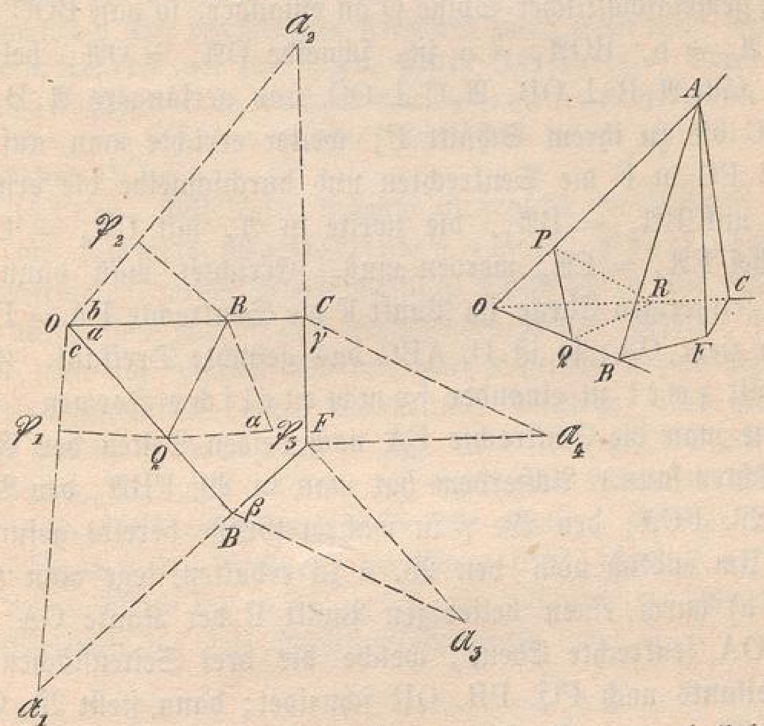
6—9: Dreikant-Konstruktionen.

Aufgabe 6.

Ein Dreikant zu konstruieren, dessen drei Seiten gegeben sind. Zugleich sollen die drei Winkel des Dreikants durch Konstruktion in einer Ebene gefunden werden.

Auflösung. Die geg. Seiten seien a, b, c; die gesuchten Winkel α, β, γ. Angenommen: O, ABC (Fig. 40. a) sei

Fig. 40. b. Fig. 40. a.



das gesuchte Dreikant, so fälle man von einem beliebigen Punkt A der Kante OA die Senkrechte AF auf die gegenüberliegende Seitenfläche. Fällt man hierauf FB $\perp$ OB, FC $\perp$ OC, und zieht AB, AC, so ist auch AB $\perp$ OB, AC $\perp$ OC (I. 9. b), und es ist W. FBA = β, W. FCA = γ. Die entstandene Figur enthält nun ein Viereck mit zwei rechten Winkeln, ferner vier rechtw. Dreiecke, die an die vier Seiten des Vierecks anstoßen. Legt man diese vier rechtw. Dreiecke in die Ebene des Vierecks um, indem man sie um die vier Seiten desselben (nach außen) dreht, so seien (Fig. 40. b) $O B \mathfrak{A}_1$, $O C \mathfrak{A}_2$, $F B \mathfrak{A}_3$, $F C \mathfrak{A}_4$ ihre neuen Lagen. $B\mathfrak{A}_1$ fällt in die Verlängerung von FB, $C\mathfrak{A}_2$ in die Verlängerung von FC; ferner ist $O\mathfrak{A}_2 = O\mathfrak{A}_1$, $B\mathfrak{A}_3 = B\mathfrak{A}_1$, $C\mathfrak{A}_4 = C\mathfrak{A}_2$, $F\mathfrak{A}_4 = F\mathfrak{A}_3$. — Nach diesen Bemerkungen fällt es nicht schwer, aus den geg. Seiten a, b, c die Figur 40. b, bezw. eine ihr ähnliche — und damit das Dreikant und die Größen seiner Winkel β und γ zu konstruieren:

Man lege (Fig. 40. b) in einer Ebene die drei geg. Seiten mit gemeinschaftlicher Spitze O an einander, so daß $BOC = a$, $CO\mathfrak{A}_2 = b$, $BO\mathfrak{A}_1 = c$ ist, schneide $O\mathfrak{A}_1 = O\mathfrak{A}_2$ beliebig ab, fälle $\mathfrak{A}_1 B \perp OB$, $\mathfrak{A}_2 C \perp OC$, und verlängere $\mathfrak{A}_1 B$ und $\mathfrak{A}_2 C$ bis zu ihrem Schnitt F; weiter errichte man auf FB und FC in F die Senkrechten und durchschneide die erste in $\mathfrak{A}_3$ mit $B\mathfrak{A}_3 = B\mathfrak{A}_1$, die zweite in $\mathfrak{A}_4$ mit $C\mathfrak{A}_4 = C\mathfrak{A}_2$, wobei $F\mathfrak{A}_4 = F\mathfrak{A}_3$ werden muß. Errichtet man dann auf der seitherigen Ebene im Punkt F die Senkrechte $FA = F\mathfrak{A}_3$, und zieht OA: so ist O, ABC das gesuchte Dreikant. (Man erhält zwei zu einander symmetrische Formen, insoferne man die Senkrechte FA nach beiden Seiten der Ebene errichten kann.) Außerdem hat man in W. $FB\mathfrak{A}_3$ den W. β, in W. $FC\mathfrak{A}_4$ den W. γ in wahrer Größe bereits gefunden. — Um endlich noch den W. α zu erhalten, lege man (Fig. 40. a) durch einen beliebigen Punkt P der Kante OA eine zu OA senkrechte Ebene, welche die drei Seitenflächen des Dreikants nach PQ, PR, QR schneidet; dann stellt W. QPR den W. α vor. Denkt man sich nun $\triangle PQR$ durch Drehung um QR ebenfalls in die Ebene BOC umgelegt, so kann es in dieser Lage leicht gezeichnet werden. Man zeichne nämlich zunächst die zwei rechtw. Dreiecke OPQ und OPR in umgelegter Lage, indem man (Fig. 40. b) $O\mathfrak{P}_1 = O\mathfrak{P}_2$ beliebig auf $O\mathfrak{A}_1$ und $O\mathfrak{A}_2$ abschneidet, und auf $O\mathfrak{P}_1$ und $O\mathfrak{P}_2$ in $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$ die Senkrechten errichtet, welche OB und OC in Q und R schneiden; zieht man dann QR, und beschreibt aus

Q und R mit QP_1 und RP_2 Kreisbögen, die sich in P_3 schneiden: so ist QRP_3 das umgelegte Dreieck, also W. $QP_3R = \alpha$.

Anm. 1. Die Punkte O, P_3, F (Fig. 40. b) müssen in einer geraden Linie liegen, welche $\perp$ QR ist. (Bew. durch I. Anh. 28 u. I. 9. b.)

Anm. 2. In Fig. 40. b fällt Punkt F innerhalb des Winkels BOC. Würde F außerhalb fallen, und zwar über OB hinaus, so würde das (stumpfe) Supplement von W. FBA_3 als W. β zu nehmen sein. Dasselbe gilt von W. γ, wenn F über OC hinaus fällt. — Ist eine der drei geg. Seiten stumpf, so lege man diese in die Mitte. Sind zwei oder drei Seiten stumpf, so bleibt die Konstruktion zwar Schritt für Schritt die nämliche; doch kann man immerhin behufs größerer Anschaulichkeit statt des gesuchten Dreikants zuerst eines seiner Nebendreikante mit drei oder zwei spitzen Seiten konstruieren. — Damit die Aufgabe möglich sein soll, muß die Summe je zweier Seiten größer als die dritte, und die Summe aller drei Seiten kleiner als 4 R sein. (II. 11 und 15. b.)

Zusatz. Mit dieser Aufgabe ist zugleich die Aufgabe gelöst: die Schnitt-Mantellinien zweier Kegelflächen zu konstruieren, welche gemeinschaftliche Spitze haben und außerdem durch ihre Achsen und erzeugenden Winkel gegeben sind. Denkt man sich nämlich von den zwei Kegelflächen zwei Kegelmäntel abgeschnitten, deren Mantellinien beliebige, aber gleiche Länge haben, so kann man in Fig. 40. b OB und OC als die geg. Achsen, W. b und c als die geg. erzeugenden Winkel, $\triangle OBA_1$ und OCA_2 als die erzeugenden Dreiecke ansehen. Errichtet man schließlich in F die Senkrechte zur Ebene BOC, schneidet auf ihr nach beiden Seiten $FA = FA' = FA_3$ ab, und zieht OA und OA': so stellen diese die zwei Schnitt-Mantellinien vor.

Aufgabe 7.

Ein Dreikant zu konstruieren, dessen drei Winkel gegeben sind.

Auflösung. Die drei geg. Winkel seien α, β, γ. Man konstruiere zuerst (II. Aufg. 6) ein Dreikant, dessen Seiten $2R - \alpha$, $2R - \beta$, $2R - \gamma$ sind, und stelle dann dessen Polardreikant her (II. Einl. 21. b): so ist dieses das verlangte. Die Supplemente der Winkel des zuerst konstruierten Dreikants stellen die Seiten des gesuchten Dreikants vor.

(Beweis durch II. 5. b.)

Anm. Eine direkte Lösung findet sich angedeutet in II. Anh. Aufg. 42.

Aufgabe 8.

Ein Dreikant zu konstruieren, von dem zwei Seiten und ein Winkel gegeben sind, und zwar

a. der von den zwei Seiten eingeschlossene Winkel,

b. der — einer der zwei Seiten gegenüberliegende Winkel.

Auflösung. a. Gegeben: S. a, S. c und W. β. Man kann aus den geg. Elementen die Fig. 40. b (S. 91) leicht konstruieren. Man lege nämlich in einer Ebene die zwei geg. Seiten mit gemeinschaftlicher Spitze O an einander, so daß $BOC = a$, $BO\mathfrak{A}_1 = c$ ist, fälle von einem beliebigen Punkt $\mathfrak{A}_1$ der $O\mathfrak{A}_1$: $\mathfrak{A}_1B \perp OB$, lege an die Verlängerung von $\mathfrak{A}_1B$ den Winkel $FB\mathfrak{A}_3 = \beta$ an, mache $B\mathfrak{A}_3 = B\mathfrak{A}_1$, und fälle $\mathfrak{A}_3F \perp BF$. Errichtet man dann auf der Ebene BOC in F die Senkrechte $FA = F\mathfrak{A}_3$ und zieht OA: so ist O,ABC das gesuchte Dreikant. — Es ist leicht (vgl. Aufg. 6), die Figur 40. b zu vollenden und damit die übrigen Elemente des Dreikants b, γ, α durch ebene Konstruktion zu erhalten.

b. Gegeben: S. b, S. c und W. β. Man mache (Fig. 40. b) W. $BO\mathfrak{A}_1 = c$, fälle von einem beliebigen Punkt $\mathfrak{A}_1$ der $O\mathfrak{A}_1$: $\mathfrak{A}_1B \perp OB$, lege an die Verlängerung von $\mathfrak{A}_1B$ W. $FB\mathfrak{A}_3 = \beta$ an, mache $B\mathfrak{A}_3 = B\mathfrak{A}_1$, und fälle $\mathfrak{A}_3F \perp BF$. Es kann nun weiter $\triangle\, OC\mathfrak{A}_2$ (zwar nicht seiner Lage, aber doch seiner Gestalt nach) in einer Nebenfigur gezeichnet werden aus $O\mathfrak{A}_2 = O\mathfrak{A}_1$ und W. $CO\mathfrak{A}_2 = b$. Ist dadurch die Länge von OC gefunden, so beschreibe man über OF als Durchmesser einen Kreis, lege OC als Sehne hinein, und vollende die Konstruktion wie bei Aufg. 6. — Da zwei Lagen der Sehne OC möglich sind, so erhält man im allgem. zwei Lösungen.

Aufgabe 9.

Ein Dreikant zu konstruieren, von dem eine Seite und zwei Winkel gegeben sind, und zwar

a. die der Seite anliegenden Winkel,

b. ein anliegender und der gegenüberliegende Winkel.

Auflösung. a. Gegeben: S. a, W. β und W. γ. Es können von Fig. 40. b (S. 91) zunächst die zwei rechtw. Dreiecke $FB\mathfrak{A}_3$ und $FC\mathfrak{A}_4$ ihrer Gestalt nach in einer Nebenfigur gezeichnet werden aus den Katheten $F\mathfrak{A}_3 = F\mathfrak{A}_4 =$ einer beliebig gewählten Strecke und aus den W. β und γ als gegenüberliegenden Winkeln. Sind dadurch die Längen von FB und FC gefunden, so mache man W. BOC = der geg. S. a und bestimme in der Ebene dieses Winkels den Punkt F so, daß seine Entfernungen FB und FC von OB und OC die gefundenen Längen haben. Hierauf kann die Figur ohne Schwierigkeit vollendet werden.

b. Gegeben: S. c, W. β und W. γ. Man beginne die Konstruktion (Fig. 40. b) mit Zeichnung der zwei Dreiecke $OB\mathfrak{A}_1$ und $FB\mathfrak{A}_3$ wie in Aufg. 8. b, konstruiere sodann $\triangle FC\mathfrak{A}_4$ seiner Gestalt nach in einer Nebenfigur aus $F\mathfrak{A}_4 = F\mathfrak{A}_3$ und W. $FC\mathfrak{A}_4 = \gamma$, beschreibe über OF als Durchmesser einen Kreis, lege die in der Nebenfigur gefundene Länge von FC als Sehne hinein, und ziehe OC; worauf die Konstruktion wie seither vollendet werden kann. — Man erhält im allgem. zwei Lösungen.

(Andere Auflösung von Aufg. a und b durch Zurückführung auf Aufg. 8. a und b mittels des Polardreikants, ähnlich wie bei Aufg. 7.)

10: Fundamentalkonstruktionen der Sphärik.

Aufgabe 10.

Gegeben eine massive Kugel, deren Halbmesser nicht bekannt ist, und auf deren Oberfläche die Konstruktionen mit bloßer Anwendung eines Zirkels ausgeführt werden sollen.

a. Von einem auf der Kugeloberfläche aufgezeichneten Kugelkreis den ebenen Halbmesser zu finden.

b. Den Halbmesser der Kugel zu bestimmen.

c. Durch zwei auf der Kugeloberfläche geg. Punkte einen Großkreis zu legen.

Auflösung. a. Man nehme auf dem geg. Kugelkreis drei beliebige Punkte an, steche mit dem Zirkel ihre Entfernungen ab, und zeichne in einer Ebene ein Dreieck mit diesen drei Entfernungen als Seiten: so ist der dem Dreieck umbeschriebene Kreis gleich dem geg. Kugelkreis.

b. Man beschreibe aus einem beliebigen Punkt der Kugeloberfläche mit beliebiger Zirkelöffnung einen Kugelkreis (vgl. II. Einl. 13. d) und bestimme dessen ebenen Halbmesser (Aufg. a). Konstruiert man dann ein rechtwinkliges Dreieck aus dem ebenen Halbmesser als Höhe und der zuerst benützten Zirkelöffnung als Kathete: so ist die Hypotenuse gleich dem Durchmesser der Kugel.

c. Man zeichne in einer Ebene einen Kreis, dessen Halbmesser gleich dem Kugelhalbmesser ist (Aufg. b); dann stellt der vierte Teil seiner Peripherie den sphär. Halbmesser eines Großkreises der Kugeloberfläche vor (II. Einl. 13. e). Nimmt man also die zugehörige Sehne in den Zirkel, und schlägt auf der Kugeloberfläche mit dieser Zirkelöffnung aus den zwei geg. Punkten Kreisbögen, so sind deren zwei Schnittpunkte die beiden Pole des gesuchten Großkreises (II. 4. b); beschreibt man aus einem von ihnen mit der nämlichen Zirkelöffnung einen Kreis, so ist dieser der verlangte.

Anm. Hiernach können sämtliche Konstruktionen der Sphärik (vgl. II. Einl. 13. f) auf der Kugeloberfläche mit bloßer Anwendung des Zirkels ausgeführt werden. Liegt eine Kugel geg. vor, so wird man den sphär. Halbmesser ihrer Großkreise gleich zu Anfang ein für allemal bestimmen. (Die Schenkel des zu benützenden Zirkels müssen größer als der Halbmesser der Kugel sein.)

D. Anhang

von Lehrsätzen und Aufgaben.

I. Lehrsätze.

1—16: Die Kugel. Geometrische Örter. Berührungskegel.

1. Das Produkt aus den zwei Abschnitten aller durch denselben Punkt gehenden Sehnen einer Kugel ist konstant. (Die Abschnitte sind additiv oder subtraktiv, je nachdem der Punkt innerhalb oder außerhalb der Kugel liegt.)

2. Unter allen durch einen Punkt im Innern einer Kugel gelegten Ebenen erzeugt diejenige, welche auf dem durch den Punkt gehenden Halbmesser senkrecht steht, den kleinsten Schnittkreis.

3. Schneidet man zwei konzentrische Kugelflächen durch eine beliebige Ebene, so hat der Kreisring zwischen den zwei Schnittkreisen einen konstanten Flächeninhalt.

4. Durch drei in drei verschiedenen Ebenen liegende Kreise, von denen jeder jeden zweimal schneidet, läßt sich immer eine Kugelfläche legen. (I. 12. Zus. 2.)

5. a. Eine Kugelfläche wird von einer sie schneidenden Kegel- oder Cylinderfläche, deren Achse durch ihren Mittelpunkt geht, nach zwei Kreislinien geschnitten, deren Ebenen senkrecht zur Achse sind.

b. Lehrsatz I. 12 bleibt richtig, wenn statt „Ebene" — „Kugelfläche" gesetzt wird. Der Punkt kann außerhalb oder innerhalb der Kugelfläche liegen. Unter „Fußpunkt der Senkrechten" ist der Fußpunkt der kürzesten Strecke zu verstehen. Die längste Strecke fällt in dieselbe Gerade (Zentrallinie) wie die kürzeste.

6. Ein Körper, der von jeder Schnittebene nach einem Kreise geschnitten wird, ist eine Kugel.

7. Der geom. Ort einer Ebene, die eine feste Kugelfläche nach einem Kreis von geg. Halbmesser schneidet, ist eine mit ihr konzentrische Kugelfläche.

† 8. a. Der geom. Ort einer Ebene, die von zwei festen Punkten ein geg. Verhältnis der Entfernungen hat, besteht aus zwei Punkten, welche die Verbindungsstrecke der zwei festen Punkte in dem geg. Verhältnis harmonisch teilen.*) — Ist das geg. Verhältnis das der Gleichheit, so fällt der eine Punkt ins Unendliche.

b. Der geom. Ort einer Ebene, die von drei (nicht in gerader Linie liegenden) festen Punkten geg. Verhältnisse der Entfernungen hat, wird gebildet von vier Geraden, die in der Ebene der drei festen Punkte so liegen, daß ihre Entfernungen von diesen die geg. Verhältnisse haben. — Bei Gleichheit der Entfernungen fällt eine der vier Geraden ins Unendliche.

9. Der geom. Ort der Schnittlinie zweier Ebenen, die durch zwei feste parallele Gerade gehen und einen Keil von geg. Größe einschließen, ist eine Cylinderfläche, der die zwei festen Geraden als Mantellinien angehören.

† 10. Der geom. Ort eines Punktes, dessen Verbindungsstrecken mit zwei festen Punkten einen rechten Winkel einschließen, ist eine Kugelfläche, welche die Verbindungsstrecke der zwei festen Punkte zum Durchmesser hat.

† 11. a. Der geom. Ort eines Punktes, dessen Entfernungen von zwei festen Punkten ein geg. Verhältnis haben, ist eine Kugelfläche über einem Durchmesser, dessen Endpunkte die Strecke zwischen den zwei festen Punkten in dem geg. Verhältnis harmonisch teilen.

b. Der geom. Ort eines Punktes, dessen Entfernungen von

*) Ein Punkt oder eine Gerade kann als geom. Ort einer Ebene gelten, insoferne der Punkt als unendlich kleine Kugel, die Gerade als unendlich dünne Cylinderfläche angesehen werden kann. Jede durch den Punkt oder die Gerade gelegte Ebene hat die in Rede stehende Eigenschaft. — Auch der unendlich ferne Punkt einer Geraden oder die unendlich ferne Gerade einer Ebene kann als geom. Ort auftreten. Alsdann hat jede mit der Geraden oder der Ebene parallele Ebene die in Rede stehende Eigenschaft.

drei festen Punkten geg. Verhältnisse haben, ist eine Kreislinie, die symmetrisch zu der Ebene der drei festen Punkte liegt und sie in denjenigen zwei Punkten schneidet, die in der Ebene die geg. Verhältnisse der Entfernungen von den drei festen Punkten haben.

(Inwieferne sind I. Anh. 18. a und b spezielle Fälle der vorangehenden zwei Sätze?)

12. a. Der geom. Ort des Mittelpunktes einer Kugelfläche von geg. Halbmesser, die eine feste Ebene berührt (oder aus ihr einen Kreis von geg. Halbmesser ausschneidet), besteht aus zwei mit der festen Ebene parallelen und symmetrisch zu ihr liegenden Ebenen.

b. Der geom. Ort des Mittelpunktes einer Kugelfläche von geg. Halbmesser, die eine feste Kugelfläche berührt (oder sie nach einer Kreislinie von geg. Halbmesser schneidet), besteht aus zwei mit der festen Kugel konzentrischen Kugelflächen.

† 13. Der geom. Ort eines Punktes von der Eigenschaft, daß die von ihm an eine feste Kugel gelegten Tangenten eine geg. Länge haben, oder daß der von ihm an die Kugel gelegte Berührungskegel eine geg. Öffnung hat, ist eine mit der geg. Kugel konzentrische Kugelfläche.

14. a. Der geom. Ort eines Punktes von der Eigenschaft, daß die von ihm an zwei feste Kugeln gezogenen Tangenten gleiche Länge haben, ist eine zur gemeinschaftl. Zentrallinie senkrechte Ebene, welche die P o t e n z e b e n e der zwei Kugeln heißt. Schneiden sich die zwei Kugeln, so stellt die Ebene ihres Schnittkreises die Potenzebene vor.

b. Die drei Potenzebenen dreier Kugeln schneiden sich nach e i n e r Geraden (P o t e n z l i n i e), welche zu der Ebene der drei Mittelpunkte senkrecht steht. — Die sechs Potenzebenen von vier Kugeln schneiden sich in e i n e m Punkt (P o t e n z p u n k t).

15. a. Legt man von beliebigen Punkten einer geraden Linie Berührungskegel an eine feste Kugel, so schneiden sich deren Berührungskreise alle in zwei festen Punkten der Kugeloberfläche, welche zugleich die Berührungspunkte der zwei Berührungsebenen vorstellen, die durch die Gerade an die Kugel gelegt werden können. (Wie lautet der entsprechende Satz für Berührungscylinder? — II. Einl. 9. c und d.)

b. Legt man durch zwei Punkte, von denen der eine fest ist, der andere sich beliebig im Raum bewegt, die zwei Berührungsebenen an eine feste Kugel, so ist der geom. Ort der zwei Berührungspunkte ein fester Kugelkreis.

16. a. Ist an eine Kugel ein Berührungskegel gelegt, und zieht man durch die Kegelspitze eine beliebige Sekante, so wird deren innerhalb der Kugel fallende Sehne in ihrem Schnittpunkt mit der Ebene des Berührungskreises und in der Kegelspitze harmonisch geteilt.

b. Sind an eine Kugel zwei Berührungskegel gelegt, und liegt die Spitze des ersten in der Ebene des Berührungskreises des zweiten, so liegt auch die Spitze des zweiten in der Ebene des Berührungskreises des ersten.

(Beweise durch Zurückführung auf die entsprechenden Sätze der ebenen Geom.)

17—25: Ähnlichkeitspunkte zweier Kugeln. Kegelschnitte.

† 17. a. Zieht man in zwei Kugeln beliebige Paare paralleler und gleichgerichteter Halbmesser und verbindet deren Endpunkte, so schneiden sich alle diese Verbindungslinien in einem Punkt der gemeinschaftlichen Zentrallinie, welcher der äußere Ähnlichkeitspunkt der zwei Kugeln heißt. Zieht man die parallelen Halbmesser jedesmal in entgegengesetzter Richtung, so schneiden sich die Verbindungslinien ihrer Endpunkte in einem zweiten Punkt der Zentrallinie, welcher der innere Ähnlichkeitspunkt heißt. Die beiden Ähnlichkeitspunkte teilen die Strecke zwischen den Kugelmittelpunkten im Verhältnis der Halbmesser harmonisch.

† b. Legt man durch die gemeinschaftl. Zentrallinie zweier Kugeln eine Schnittebene und zieht an die zwei Schnittkreise die vier gemeinschaftl. Tangenten, so beschreiben diese, wenn die Ebene um die Zentrallinie gedreht wird, zwei Kegelflächen, welche beide Kugeln berühren. Der von den äußeren gemeinschaftl. Tangenten beschriebene Kegel heißt der äußere —, der von den inneren beschriebene heißt der innere gemeinschaftliche Berührungskegel der zwei Kugeln. Ihre Spitzen sind identisch mit den zwei Ähnlichkeitspunkten der Kugeln. — Jede Berührungsebene an einen der zwei Kegel berührt auch beide Kugeln und heißt äußere oder innere gemeinschaftl. Be-

rührungsebene, je nachdem sie den äußeren oder den inneren gemeinschaftl. Berührungskegel berührt und also durch den äußeren oder den inneren Ähnlichkeitspunkt geht.

18. Der geom. Ort eines Punktes, der eine von einem festen Punkt S nach einem beliebigen Punkt einer Kugelfläche gezogene Strecke in einem geg. Verhältnis teilt, ist eine Kugelfläche, deren Mittelpunkt O' die Zentralstrecke SO in dem geg. Verhältnis teilt, und deren Halbmesser sich zum Halbmesser der geg. Kugel verhält wie SO' zu SO. (Vor. Satz a.)

19. Die drei äußeren Ähnlichkeitspunkte dreier Kugeln liegen in einer Geraden, welche die äußere Ähnlichkeitsachse der drei Kugeln heißt. Je zwei innere Ähnlichkeitspunkte liegen mit einem äußeren in einer Geraden, welche eine innere Ähnlichkeitsachse heißt.

† 20. Haben zwei Kegelflächen gemeinschaftliche Spitze, und beschreibt man jeder eine beliebige Berührungskugel ein, so ist der geom. Ort für deren äußeren, bezw. inneren Ähnlichkeitspunkt je eine durch die gemeinschaftl. Spitze gehende Gerade, welche zugleich die Schnittlinie der beiden äußeren, bezw. inneren gemeinschaftl. Berührungsebenen der zwei Kegelflächen vorstellt. (II. Einl. 9. c.)

21. Der geom. Ort eines Punktes, von dem aus gesehen zwei feste Kugeln gleich groß erscheinen*), ist eine Kugelfläche, welche die Strecke zwischen den beiden Ähnlichkeitspunkten der Kugeln zum Durchmesser hat. (II. Anh. 11. a.)

22. a. Ist an zwei Kugeln, die sich nicht schneiden, der äußere gemeinschaftl. Berührungskegel gelegt, so wird dessen Mantel von einer beliebigen inneren gemeinschaftl. Berührungsebene der zwei Kugeln nach einer Kurve geschnitten, deren Punkte eine konstante Summe der Entfernungen von den zwei Berührungspunkten haben. — Schneidet man ebenso den Mantel des inneren gemeinschaftl. Berührungskegels durch eine äußere gemeinschaftl. Berührungsebene, so haben die Punkte der Schnittkurve eine konstante Differenz der Entfernungen von den zwei Berührungspunkten. Die Schnittkurve heißt im ersten Fall Ellipse, im zweiten Fall

---

*) Die scheinbare Größe ist abhängig von der Öffnung des von dem Punkt an die Kugel gelegten Berührungskegels.

Hyperbel; die zwei Berührungspunkte heißen ihre Brennpunkte. (Die konstante Summe oder Differenz ist gleich dem Stück einer Mantellinie des Berührungskegels zwischen den beiden Berührungskreisen. II. Einl. 8. c u. 9. b.)

b. Eine Cylinderfläche wird von jeder Ebene, die nicht parallel ihrer Achse ist, nach einer Ellipse geschnitten. (Man beschreibe der Cylinderfläche zwei Berührungskugeln ein, welche die Schnittebene berühren.)

c. Der Schnittpunkt der Cylinderachse mit der Ebene heißt der Mittelpunkt der Ellipse, er halbiert die Strecke zwischen den zwei Brennpunkten und hat die Eigenschaft, daß jede durch ihn gezogene Ellipsensehne (Durchmesser) in ihm halbiert wird. Der Durchmesser, auf dem die zwei Brennpunkte liegen, heißt die große —, der zu ihm senkrechte Durchmesser die kleine Achse der Ellipse; der letztere ist gleich dem Durchmesser des Cylinders. Die konstante Summe der Entfernungen eines Ellipsenpunktes von den zwei Brennpunkten ist gleich der großen Achse. (Wie findet man hiernach die Brennpunkte einer Ellipse, von der die Achsen geg. sind?) — Jeder Parallelkreis des Cylinders kann als eine Projektion der Ellipse angesehen werden. Sind a und b die Halbachsen der Ellipse, so ist ihr Flächeninhalt $= a\,b\,\pi$. (I. Anh. 31.)

23. Ist einem Kegelmantel eine Berührungskugel einbeschrieben, und legt man parallel mit einer beliebigen Berührungsebene des Kegels eine Berührungsebene M an die Kugel, so schneidet M den Kegelmantel nach einer Kurve von der Eigenschaft, daß jeder ihrer Punkte gleiche Entfernungen hat von dem Berührungspunkt der Ebene M und von ihrer Schnittlinie mit der Ebene des Berührungskreises des Kegelmantels. Die Kurve heißt Parabel, der Berührungspunkt heißt ihr Brennpunkt, jene Schnittlinie ihre Direktrix. (Ist S die Kegelspitze, F der Brennpunkt, A ein beliebiger Kurvenpunkt, AB die auf die Direktrix gefällte Senkrechte, T der Schnittpunkt von SA mit dem Berührungskreis, U der Schnittpunkt der zur Ebene M parallelen Mantellinie mit dem Berührungskreis, so ist $AF = AT$, $AB \parallel SU$, $\triangle\, ABT \backsim SUT$.)

24. Zieht man durch einen Ähnlichkeitspunkt S zweier Kugeln eine beliebige Gerade, welche die eine Kugelfläche in X und

Y, die andere in X' und Y' schneidet, wobei Halbm. OX || O'X', OY || O'Y' sei, so ist: SX . SY' = SX' . SY = const.

25. a. Werden zwei Kugeln von einer dritten berührt, so geht die Verbindungslinie der beiden Berührungspunkte durch einen Ähnlichkeitspunkt der zwei ersten Kugeln, und zwar durch den äußeren oder den inneren, je nachdem die zwei Berührungen gleichartig (d. i. entw. beide von außen od. beide von innen) oder ungleichartig sind.

b. Werden drei Kugeln von einer vierten berührt, so geht die durch die drei Berührungspunkte gelegte Ebene durch eine Ähnlichkeitsachse der drei ersten Kugeln, und zwar durch die äußere oder eine innere, je nachdem die drei Berührungen gleichartig sind oder nicht.

26—52: Sphärik und Vielkant.

26. Die Sätze II. 5. a und b gelten auch für ein sphär. Vieleck oder ein Vielkant. (I. Anh. 9.)

† 27. Zwei Dreikante (Vielkante), deren Kanten parallel und gleich gerichtet sind, sind kongruent. — Zwei Dreikante (Vielkante), deren Kanten parallel und entgegengesetzt gerichtet sind, sind symmetrisch.

† 28. a. Nimmt man auf jeder Kante eines Vielkants einen Punkt an, und bestimmt zu jedem dieser Punkte sowie zur Spitze den symmetrischen Punkt in Beziehung auf eine beliebige Ebene, so bilden die Verbindungslinien des zur Spitze symmetrischen Punktes mit den übrigen symmetrischen Punkten ein Vielkant, das mit dem ursprünglichen Vielkant entsprechend-gleich, und zwar symmetrisch ist. (I. Anh. 15.)

b. Legt man durch zwei Gegenpunkte P und Q einer Kugeloberfläche eine Anzahl von Großkreisen und schneidet auf jedem vier gleiche Bögen von beliebiger Länge PA = PA' = QA'' = QA''', PB = PB' = QB'' = QB''', u. s. f. ab, so zwar, daß die Punkte A'',B'', . . mit A,B, . . — , A''',B''', . . mit A',B', . . je auf dem nämlichen Halbkreis liegen, so bilden diese Punkte die Ecken von vier entsprechend-gleichen sphär. Vielecken, von denen je zwei kongruent oder symmetrisch sind, je nachdem sie auf derselben Seite des zu P und Q gehörigen Äquators liegen, oder auf verschiedenen Seiten.

Anm. Man formuliere in den folgenden Nummern 29 bis 38 die nur für Dreikante ausgesprochenen Sätze jedesmal auch für sphärische Dreiecke gleicher Kugeln.

29. Die Summe zweier Seiten eines Dreikants und die Summe ihrer Gegenwinkel sind beide gleichzeitig entweder größer oder kleiner als 180°. (Mit Hilfe eines Nebendreikants, das mit dem ursprüngl. Dreikant eine der zwei fraglichen Seiten gemein hat. II. 12.)

† 30. a. Zwei Dreikante sind entsprechend-gleich, wenn sie zwei Seiten und den Gegenwinkel einer derselben bezw. gleich haben, und wenn die Gegenwinkel des andern Paars gleicher Seiten entweder beide spitz oder beide stumpf sind. (Indirekt: Wären die dritten Seiten nicht gleich, so könnte man von der einen ein Stück gleich der andern abschneiden u. s. w.)

† b. Zwei Dreikante sind entsprechend-gleich, wenn sie zwei Winkel und die Gegenseite eines derselben bezw. gleich haben, und wenn die Gegenseiten des andern Paars gleicher Winkel entweder beide spitz oder beide stumpf sind. (Durch Satz a mit Hilfe der Polardreikante.)

31. Zwei rechtwinklige Dreikante (mit nur einem rechten W.) sind entsprechend-gleich, a) wenn sie die Hypotenuse und eine Kathete bezw. gleich haben, b) wenn sie die Hypotenuse und einen der Hypotenuse anliegenden Winkel bezw. gleich haben.

32. Sind in einem Dreikant zwei Winkel = 90°, so sind auch die gegenüberliegenden Seiten = 90°; und umgekehrt.

33. a. In einem gleichschenkligen Dreikant fallen die zur Grundfläche gehörige Höhenebene, Mittellotebene, seitenhalbierende Transversalebene und Medianebene zusammen.

b. In einem allgem. Dreikant wird jede Seite von der zugehörigen Höhenebene in zwei ungleiche Segmente geteilt, von denen das größere der größeren —, das kleinere der kleineren der zwei andern Seiten anliegt. (I. 13. b mit Zus. 1.)

34. Haben zwei Dreikante zwei Seiten bezw. gleich, und ist der von ihnen eingeschlossene Winkel im einen größer als im andern, so ist auch die dritte Seite im einen größer als im andern; und umgekehrt. (Bew. wie in der ebenen Geometrie.)

† 35. Die Mittellotebenen der Seiten eines Dreikants schneiden sich nach einer Geraden, welche mit den drei Kanten gleiche

Winkel macht. (I. Anh. 19. b. — Achse des umbeschriebenen Kegelmantels; Mittelpunkt des einem sphär. Dreieck umbeschr. Kreises.)

† 36. Die drei inneren Medianebenen eines Dreikants schneiden sich nach einer Geraden, welche gegen die drei Seitenflächen gleich geneigt ist. Dasselbe gilt von je einer inneren und zwei äußeren Medianebenen. (I. Anh. 20. — Achsen des einbeschriebenen und der drei anbeschriebenen Kegelmäntel; Mittelpunkte des einem sphär. Dreieck einbeschriebenen Kreises und der drei anbeschriebenen Kreise, die letzteren sind den drei Nebendreiecken einbeschrieben.)

37. Die seitenhalbierenden Transversalebenen eines Dreikants schneiden sich nach einer Geraden. (Mittels eines Schnittdreiecks, dessen Ecken von der Spitze gleich weit entfernt sind.)

38. Die Höhenebenen eines Dreikants schneiden sich nach einer Geraden. (Man lege senkrecht zu einer Kante eine Ebene und betrachte das Schnittdreieck.)

39. Die Großkreisbögen, welche die Ecken eines sphär. Dreiecks mit den Ecken seines Polardreiecks verbinden, schneiden sich in einem Punkt. (Vor. Satz.)

40. Die Mittellote der Seiten eines sphär. Dreiecks sind identisch mit den Medianen seines Polardreiecks. Der umbeschriebene Kreis des einen Dreiecks und der einbeschriebene Kreis des andern haben daher denselben sphär. Mittelpunkt, und ihre sphär. Halbmesser ergänzen sich zu 90°.

† 41. a. Ist das in II. Einl. 22. a zur Erzeugung eines Vielkants benützte ebene Vieleck regulär, und liegt die Spitze auf der Geraden, die auf der Ebene des Vielecks in seinem Mittelpunkt senkrecht steht, so ist das erzeugte Vielkant regulär.

b. In einem regulären Vielkant schneiden sich sämtliche innere Medianebenen und die Mittellotebenen sämtlicher Seiten nach einer und derselben Geraden.

c. Jedem regulären Vielkant läßt sich ein Kegelmantel umbeschreiben und ein Kegelmantel einbeschreiben. Sie haben die in b genannte Gerade zur gemeinsamen Achse.

(Entsprechende Sätze fürs reguläre sphär. Vieleck.)

Anm. Man formuliere in den folgenden Nummern 42 bis 51 die für Kugelkreise ausgesprochenen Sätze jedesmal auch für Kegelflächen.

42. a. Liegt auf einer Kugeloberfläche ein Kugelkreis und ein Punkt A, so sind die sphär. Entfernungen der einzelnen Kreispunkte von A um so größer, je größere Winkel die nach ihnen gezogenen sphär. Halbmesser mit dem nach A gerichteten Halbmesser machen. Für die kleinste Entfernung ist dieser Winkel $= 0$, für die größte $= 180^{\circ}$. Je zwei Entfernungen, die zu beiden Seiten des nach A gerichteten Halbmessers symmetrisch zu ihm liegen, sind gleich. (II. Anh. 34 und II. 6.)

† b. Unter den sphär. Entfernungen eines Punktes der Kugeloberfläche von den einzelnen Punkten eines Großkreises sind die zwei auf dem Großkreise senkrechten die größte und die kleinste. Die letztere wird als die sphär. Entfernung des Punktes von dem Großkreise bezeichnet.

† 43. a. Ein Großkreis, der auf einem sphär. Halbmesser eines Kleinkreises in dessen Endpunkt senkrecht steht, hat mit dem Kleinkreis nur diesen einen Punkt gemein. Er heißt die sphär. Tangente des Kleinkreises in dem Punkt. Seine Ebene ist Berührungsebene an den dem Kleinkreis zugehörigen Kegel. Die Schnittlinie seiner Ebene mit der Ebene des Kleinkreises ist Tangente sowohl an den Kleinkreis als an den Großkreis.

b. Die zwei von einem Punkt einer Kugeloberfläche an einen Kleinkreis gelegten sphär. Tangenten sind gleich. (II. Anh. 31. a.)

44. a. Läßt sich in ein sphär. Viereck ein Kreis einbeschreiben, so ist die Summe zweier Gegenseiten des Vierecks gleich der Summe der zwei andern Gegenseiten; und umgekehrt. (Vor. Satz.)

b. Läßt sich um ein sphär. Viereck ein Kreis beschreiben, so ist die Summe zweier Gegenwinkel des Vierecks gleich der Summe der zwei andern Gegenwinkel; und umgekehrt.

† 45. Der geom. Ort eines Punktes auf einer Kugeloberfläche, der von einem Großkreise eine geg. sphär. Entfernung hat, besteht aus zwei gleichen Kleinkreisen, die zu beiden Seiten des Großkreises liegen und mit ihm die Pole gemein haben.

46. Der geom. Ort eines Punktes auf einer Kugeloberfläche von der Eigenschaft, daß die von ihm an einen festen Kleinkreis gelegten sphär. Tangenten eine geg. Länge haben oder einen geg. Winkel einschließen, ist ein mit dem Kleinkreis konzentrischer Kugelkreis.

47. Der geom. Ort eines Punktes auf einer Kugeloberfläche

von der Eigenschaft, daß die von ihm an zwei feste Kleinkreise gelegten sphär. Tangenten gleiche Länge haben, ist ein Großkreis, dessen Ebene durch die Schnittlinie der Ebenen der Kleinkreise geht. (Die von einem Punkt jener Schnittlinie an die zwei Kreise gezogenen geradlinigen Tangenten sind gleich.)

48. a. Alle sphär. Dreiecke, die einen Winkel und den der Gegenseite anbeschriebenen Kreis gemeinsam haben, haben den gleichen Umfang. (II. Anh. 43. b.)

b. Alle sphär. Dreiecke, die einen Winkel und den einbeschriebenen Kreis gemeinsam haben, haben den gleichen Überschuß der Summe der zwei den Winkel einschließenden Seiten über die dritte Seite.

49. Alle sphär. Dreiecke, welche die Grundlinie und den umbeschriebenen Kreis gemeinsam haben, haben den gleichen Überschuß der Summe der Winkel an der Grundlinie über den Winkel an der Spitze. (Man ziehe die sphär. Halbmesser nach den Ecken.)

50. Der geom. Ort der Spitzen C aller flächengleichen sphär. Dreiecke auf der nämlichen Grundlinie AB ist ein durch die Gegenpunkte A', B' gehender Kugelkreis. (Satz von L e x e l l.) (Bewegt sich C auf dem genannten Kugelkreis, so ist in △ A'B'C nach dem vor. Satz W. A' + B' — C konstant.)

† 51. Der geom. Ort eines Großkreises, der einen festen Großkreis unter einem geg. Winkel schneidet, besteht aus zwei gleichen, mit dem festen Großkreis konzentrischen Kleinkreisen, deren sphär. Halbmesser den Äquatorbogen des geg. Winkels komplementieren.

† 52. a. Ist P derjenige Pol des Grundkreises einer Halbkugel, der nicht auf der Halbkugel liegt, und zieht man von P nach einem beliebigen Punkt A eine Gerade, welche die Ebene des Grundkreises in A' schneidet, so heißt A' die s t e r e o g r a p h i s c h e P r o j e k t i o n von A. Die Ebene des Grundkreises heißt die Projektionsebene, P das Projektionszentrum, PA der projizierende Strahl. — Die stereogr. Projektion eines Kugelkreises ist ein Kreis (Satz von H i p p a r c h), dessen Mittelpunkt die stereogr. Projektion der Spitze des Berührungskegels ist, der die Kugel längs des Kugelkreises berührt (Satz von C h a s l e s). (Der Kugelkreis und seine Projektion liegen auf einer Kugel-

fläche; ist nämlich O der Kugelmittelpunkt, Q der Gegenpunkt von P, A' die Projektion eines Punktes A des Kugelkreises, so ist: PA . PA' = PQ . PO = const. Bew. des zweiten Teils an der Schnittfigur der durch O, P und die Kegelspitze gelegten Ebene.)

† b. Die stereographischen Projektionen zweier sich schneidenden Kugelkreise schneiden sich unter dem gleichen Winkel wie die Kugelkreise selbst. (Schneiden die an die zwei Kugelkreise in ihrem Schnittpunkt A gezogenen Tangenten die Projektionsebene in den Punkten T und U, so läßt sich mittels II. Einl. 9. b und Bew. des Satzes a leicht zeigen, daß $\triangle$ TUA' $\cong$ TUA.)

II. Aufgaben.

1—20: Aufgaben zur Anwendung von geometrischen Örtern.

1. Auf einer geg. Kugel-, Kegel- oder Cylinderfläche einen Punkt zu finden, der a) von drei geg. Punkten — b) von drei Ebenen gleiche Entfernungen habe, c) von zwei Ebenen geg. Entfernungen habe. (II. Aufg. 1. b und 3. b.)

2. a. Den Mittelpunkt einer Kugel zu finden, wenn ihre Oberfläche oder ein Teil derselben geg. ist. (I. Anh. 18. b.)

b. Durch vier nicht in einer Ebene liegende Punkte —

c. durch eine Kreislinie und einen außerhalb ihrer Ebene liegenden Punkt eine Kugelfläche zu legen.

3. Durch einen im Innern einer Kugel gelegenen Punkt eine Sehne so zu ziehen, daß sie einer geg. Ebene parallel sei und in dem Punkt in einem geg. Verhältnis geteilt werde.

4. Durch eine geg. Gerade oder parallel einer geg. Ebene eine Ebene zu legen, die zwei konzentrische Kugelflächen so schneide, daß der Flächeninhalt des inneren Schnittkreises halb so groß sei als derjenige des äußeren. (II. Anh. 3 u. 7. — Determination?)

5. a. Den Mittelpunkt einer Kugelfläche von geg. Halbmesser zu finden, die irgend drei von folgenden Bedingungen erfülle: α) sie gehe durch einen geg. Punkt, β) sie berühre eine geg. Ebene oder γ) Kugelfläche, δ) sie schneide eine geg. Ebene oder ε) Kugelfläche nach einem Kreis von geg. Halbmesser. — Unter den drei Bedingungen, welche die Kugel erfüllen soll, können auch zwei oder drei der nämlichen Art sein.

b. Den Mittelpunkt einer Kugelfläche von geg. Halbmesser zu finden, die irgend zwei von den Bedingungen β und δ der Aufg. a erfülle und außerdem eine geg. Gerade berühre oder aus ihr eine Sehne von geg. Länge ausschneide. (II. Aufg. 3. b.)

6. a. Auf einer Geraden einen Punkt zu finden, der von zwei geg. Punkten ein geg. Verhältnis der Entfernungen habe. (II. Anh. 11. a.)

b. Auf einer Kreislinie einen Punkt zu finden, dessen Verbindungsstrecken mit zwei geg. Punkten einen rechten Winkel einschließen. (II. Anh. 10, II. Aufg. 2. b.)

7. a. Einen Punkt zu finden, von dem aus gesehen vier geg. Kugeln gleiche scheinbare Größe haben. (II. Anh. 21.)

b. Auf einer Ebene oder einer Kugeloberfläche einen Punkt zu finden, von dem aus gesehen drei geg. Kugeln gleiche scheinbare Größe haben.

8. a. Einen Punkt zu finden von der Eigenschaft, daß von ihm aus gesehen drei geg. Kugeln geg. scheinbare Größen haben (d. h. daß die von ihm an die Kugeln gelegten Berührungskegel geg. Öffnungen haben). (II. Anh. 13.)

b. Auf einer Ebene oder einer Kugeloberfläche einen Punkt zu finden, von dem aus gesehen zwei geg. Kugeln geg. scheinbare Größen haben.

c. Eine Kugel zu konstr., die von vier geg. Punkten aus gesehen geg. scheinbare Größen habe. (II. Anh. 11. a.)

9. Einem Dreikant (oder regul. Vielkant) einen Kegelmantel a) umzubeschreiben, b) einzubeschreiben. (II. Anh. 35, 36 und 41. c.)

10. Auf einer Geraden einen Punkt zu finden, dessen Entfernungen von einer andern Geraden und von einem auf dieser liegenden Punkt ein geg. Verhältnis haben. (II. Aufg. 3. b.)

11. Andere Lösung von I. Aufg. 9 und I. Anh. Aufg. 27. a mittels II. Einl. 4. d.

Es ist ferner sehr lehrreich, die Aufgaben: I. Anh. Aufg. 21. a u. b, 23. a u. b, 24, 26, 28, 30. a u. b nochmals zu behandeln mit Anwendung von geom. Örtern; man kommt dabei auf die alten Lösungen. (Bei Aufg. 21. a kann entweder II. Einl. 8. d oder II. Anh. 10 verwendet werden.)

Anm. Bei den folgenden Aufgaben 12—15 benütze man II. Aufg. 6 (vgl. Zus.).

12. a. Eine gerade Linie zu ziehen, die zwei windschiefe Gerade unter geg. Winkeln schneide. (I. Anh. Anm. zu Aufg. 3.)

b. Behandlung von I. Anh. Aufg. 31 mittels II. Aufg. 6.

13. Eine Gerade zu ziehen, die gegen zwei Ebenen geg. Neigungen habe und a) durch einen geg. Punkt gehe, b) zwei windschiefe Gerade (oder eine Gerade und eine Kreislinie) schneide.

c. Zwischen zwei Ebenen eine Strecke von geg. Länge so zu legen, daß sie mit den Ebenen geg. Winkel mache und eine geg. Gerade schneide.

14. Zwischen eine Gerade und eine Ebene eine Strecke von geg. Länge so zu legen, daß sie mit jeder einen geg. Winkel mache.

15. Eine Kegelfläche von geg. erzeugendem Winkel zu konstr., die a) durch zwei geg. sich schneidende Gerade gehe, b) zwei Ebenen berühre, so daß die Spitze in einem geg. Punkt ihrer Schnittlinie liege, c) zwei Kegelflächen mit gemeinschaftlicher Spitze (nach zwei Mantellinien) berühre, d) durch eine Gerade gehe und eine Ebene berühre, u. s. w. — (Die Aufg. ist analog mit II. Anh. Aufg. 5. a. Was würde den dortigen Bedingungen δ und ε entsprechen?)

16. a. Durch einen geg. Punkt oder parallel einer geg. Richtung eine Gerade zu ziehen, welche α) die Mäntel zweier geg. Kegel oder zweier Cylinder oder eines Kegels und eines Cylinders — β) eine Kugel und einen Kegel- od. Cylindermantel — γ) zwei Kugeln berühre. (II. Einl. 2. d, 3. d und 9. a.)

b. Durch einen geg. Punkt oder parallel einer geg. Richtung eine Gerade zu ziehen, die zwei von folgenden Bedingungen erfülle: α) sie habe von einem geg. Punkt eine geg. Entfernung, β) sie schneide eine Kugel nach einer Sehne von geg. Länge, γ) sie habe von einer Geraden eine geg. kürzeste Entfernung. — Die Bedingungen, welche die Gerade erfüllen soll, können auch beide von der nämlichen Art sein.

17. a. Geg. zwei gleiche Strecken in bestimmter Lage im Raum. Eine Gerade zu ermitteln, um welche als Achse gedreht die eine Strecke in die Lage der andern übergeht.

b. Geg. zwei kongruente Dreiecke (Polygone) in bestimmter Lage im Raum. Einen Punkt zu finden, um welchen bewegt das eine Dreieck (Polygon) in die Lage des andern übergeführt werden kann. (Denkt man sich die zwei Polygone als Seitenflächen kongruenter Polyeder, so ist die Aufg. auch für diese gelöst.)

18. Eine Kugelfläche zu bestimmen, die vier geg. Kugelflächen rechtwinklig schneide. (II. Anh. 14.)

19. Durch einen geg. Punkt eine Gerade so zu ziehen, daß ihre zwischen eine geg. Kreislinie und eine geg. Kugelfläche fallende Strecke in dem Punkt nach einem geg. Verhältnis geteilt werde. (II. Anh. 18.)

20. Zwischen eine Kreislinie und eine Kugelfläche eine Strecke von geg. Länge so zu legen, daß sie einer geg. Geraden parallel sei.

21—40: Berührungs-Aufgaben.

21. Durch eine geg. Gerade eine Ebene zu legen, die eine geg. Kreislinie berühre.

22. Eine Kugel zu konstr., die eine geg. Kugel und eine geg. Ebene, und zwar die letztere in einem geg. Punkt, berühre.

23. Eine Kugel zu konstr., deren Oberfläche durch eine geg. Kreislinie gehe und eine geg. Gerade berühre. (Man ermittle den Abstand des Berührungspunkts der Geraden von ihrem Schnittpunkt mit der Kreisebene.)

24. Eine Kugel zu konstr., die eine geg. Ebene und eine geg. Kugel, und zwar die letztere in einem geg. Punkt, berühre.

25. Einem Dreikant eine Kugel von geg. Halbmesser einzubeschreiben, so daß sie a) die Seitenflächen, b) die Kanten des Dreikants berühre. (II. Anh. Aufg. 9. b u. a.)

26. a. In einen Kugelausschnitt —

b. in den von einem sphär. Dreieck und seinem zugehörigen Dreikant begrenzten Raum eine Kugel einzubeschreiben.

27. Einer Kegelfläche eine Kugel einzubeschreiben, die außerdem eine geg. Kugel berühre.

28. a. Einer Kegelfläche eine Kugel einzubeschreiben, die außerdem eine die Kegelfläche schneidende Gerade berühre. (Der Kreis, welcher dem von der Geraden und zwei Mantellinien gebildeten Dreieck einbeschrieben wird, liegt auf der gesuchten Kugel. Oder auch mittels Ähnlichkeitspunkt.)

b. Einem Dreikant α) eine flächenberührende — β) eine kantenberührende Kugel einzubeschreiben, die außerdem eine das Dreikant schneidende Gerade berühre.

29. Eine Kugel zu konstr., deren Mittelpunkt auf einer geg. Geraden liege, und deren Oberfläche eine geg. Ebene berühre und durch einen geg. Punkt gehe. (Man nehme den Schnittpunkt der Geraden mit der Ebene als Ähnlichkeitspunkt der gesuchten Kugel und einer Hilfskugel, die nur die zwei ersten Bedingungen erfüllt.)

30. Eine Kugel zu konstr., deren Oberfläche durch drei geg. Punkte gehe und a) eine geg. Ebene — b) eine geg. Kugel berühre. (Analog den entsprechenden Aufg. der ebenen Geom.)

31. Eine Kugel zu konstr., deren Oberfläche durch zwei geg. Punkte gehe und a) zwei geg. Ebenen — b) zwei Kugeln — c) eine Ebene und eine Kugel berühre. (Analog den entspr. Aufg. der ebenen Geom. II. Anh. 24 und 25. a.)

---

† 32. Durch einen geg. Punkt oder parallel einer geg. Geraden eine gemeinschaftliche Berührungsebene an zwei Kugeln zu legen. (II. Anh. 17. b, II. Aufg. 4. b oder 5.)

† 33. An drei Kugeln eine gemeinschaftliche Berührungsebene zu legen. (II. Anh. 19. — 8 Lösungen.)

† 34. An zwei Kegelflächen mit gemeinsamer Spitze eine gemeinschaftliche Berührungsebene zu legen. (II. Anh. 20 giebt die einfachste Lösung. Eine andere Lösung ist angedeutet in II. Anh. Aufg. 51.)

35. An eine Kegelfläche (oder Cylinderfläche) und eine Kugel eine gemeinschaftliche Berührungsebene zu legen. (II. Anh. 20.)

36. In einer Ebene durch einen geg. Punkt oder parallel einer geg. Richtung eine Gerade so zu ziehen, daß die Berührungsebenen, die durch sie an zwei auf derselben Seite der Ebene befindliche Kugeln gelegt werden, gegen die Ebene gleich geneigt seien. (Man bestimme zu einer der zwei Kugeln die symmetrische in Beziehung auf die geg. Ebene und wende II. Anh. Aufg. 32 an.)

37. Eine Ebene zu bestimmen, die irgend drei von folgenden Bedingungen erfülle: a) sie gehe durch einen geg. Punkt, b) sie sei einer geg. Geraden parallel, c) sie habe von einem Punkt eine geg. Entfernung, d) sie schneide eine Kugel nach einem Kreis von geg. Halbmesser, e) sie habe von zwei Punkten ein geg. Ver-

hältnis der Entfernungen, f) sie habe gegen eine Ebene eine geg. Neigung, g) sie habe gegen eine Gerade eine geg. Neigung. — Unter den drei Bedingungen, welche die Ebene erfüllen soll, können auch zwei oder drei der nämlichen Art sein. Von den Bedingungen b, f und g dürfen jedoch nicht drei zugleich verwertet werden. (Kommt f oder g zweimal vor, so kommt II. Anh. Aufg. 34 zur Verwendung. Kommt c oder d zusammen mit f oder g vor, so benütze man einen einer Kugel umbeschriebenen Berührungskegel. Bei g ist die Gerade unter Umständen an geeigneten Ort parallel zu verschieben.)

38. Eine Ebene zu bestimmen, die eine der in der vor. Aufg. genannten Bedingungen und außerdem noch eine der folgenden erfülle: α) sie sei einer Geraden parallel und habe von ihr eine geg. Entfernung, β) sie schneide einen Cylinder nach einem Rechteck von geg. Inhalt, γ) sie schneide einen Kegel nach einem Dreieck von geg. Inhalt. (Kommt α oder β zusammen mit 37. f oder g vor, so kommt II. Aufg. 5. b zur Anwendung.)

39. Eine Ebene zu bestimmen, die eine von den Bedingungen a, c, d, e der Aufg. 37 erfülle und außerdem gegen drei geg. Gerade oder Ebenen gleich geneigt sei.

40. Eine Ebene zu bestimmen, die von vier nicht in einer Ebene liegenden Punkten a) geg. Verhältnisse der Entfernungen, b) gleiche Entfernungen habe. (II. Anh. 8. — Bei a erhält man 8 Lösungen. Bei b fällt eine dieser 8 Ebenen ins Unendliche.)

41—61: Sphärik und Vielkant.

41. Eine Kugel, auf welcher Meridiane und Parallelkreise in Abständen von je 15° mit N und S als Nord- und Südpol aufgezeichnet sind, wird durch eine beliebige Großkreis-Ebene in zwei Halbkugeln geteilt. Von einer derselben soll ein stereographisches Kartennetz gezeichnet werden, indem der nicht auf ihr liegende Pol P des Großkreises als Projektionszentrum genommen wird. (II. Anh. 52. — Eine in der Ebene PNS gezeichnete Hilfsfigur liefert die Projektionen N′ und S′ von N und S, sowie die Durchmesser der einzelnen Parallelkreis-Projektionen nach Größe und Lage. Die Meridian-Projektionen gehen in der Hauptfigur alle durch N′ und S′, ihre Mittelpunkte liegen auf dem Mittellot von N′S′ und ergeben sich gemäß II. Anh. 52. b dadurch, daß man

an N'S' in N' die Komplemente der Winkel anlegt, die die einzelnen Meridiane mit dem durch P gehenden Meridian machen.)

42. Direkte Lösung von II. Aufg. 7. (Zwei Ebenen, die den W. α einschließen, sind durch eine dritte Ebene so zu schneiden, daß diese mit ihnen die W. β und γ macht. Mittels II. Einl. 4. e und II. Anh. Aufg. 34.)

43. Ein Dreikant zu konstr., von dem geg. sind:

a) zwei Seiten und die zur dritten gehörige Höhe (d. i. der Winkel, nach dem die betr. Höhenebene das Dreikant schneidet),

b) zwei Seiten und die zu einer derselben gehörige Höhe,

c) eine Seite und die zu den zwei andern gehörigen Höhen,

d) eine Seite, die zu ihr gehörige Höhe und eine weitere Höhe.

44. Auf der Oberfläche einer Kugel von geg. Halbmesser sind drei Punkte geg., deren Entfernungen mit dem Zirkel abgestochen werden mögen. Es sollen hieraus durch Konstruktion in einer Ebene die Seiten und Winkel des Dreikants gefunden werden, das von den in den drei Punkten an die Kugel gelegten Berührungsebenen gebildet wird.

45. Von einem durch seine drei Seiten geg. Dreikant folgende Stücke durch Konstruktion in einer Ebene zu finden: a) die Höhen, b) die Medianen (Winkel, nach denen die Medianebenen das Dreikant schneiden), c) die seitenhalbierenden Transversalen (Winkel, nach denen die Transversalebenen schneiden), d) der erzeugende Winkel des einbeschriebenen Kegels, e) der erzeugende Winkel des umbeschriebenen Kegels. (Man lehne die Konstr. an Fig. 40. b, S. 91 an. Bei a, b und c fasse man den Körper ins Auge, der von dem Dreikant und der Ebene eines der zwei rechtw. Dreiecke AFB oder AFC eingeschlossen wird, und ermittle dessen Schnittdreieck mit der betreffenden Ebene. Bei d und e gehe man auf den Schnittpunkt der Kegelachse mit der Ebene eines jener rechtw. Dreiecke aus.)

Anm. In den folgenden Aufgaben 46—61 ist die geg. Kugel massiv vorauszusetzen, und sind die Konstruktionen auf ihrer Oberfläche mit bloßer Anwendung des Zirkels auszuführen (vgl. II. Aufg. 10. Anm.).

† 46. Durch einen geg. Punkt einen Großkreis senkrecht zu einem geg. Großkreis zu legen. (II. Einl. 14. b.)

† 47. Von einem außerhalb eines Kleinkreises geg. Punkt

eine sphär. Tangente an den Kleinkreis zu legen. (Mittels II. Anh. Lehrs. 46, oder durch Konstr. eines Pols der sphär. Tangente mittels zweier Kreisbögen, die aus dem geg. Punkt und dem Mittelpunkt des Kleinkreises beschrieben werden.)

† 48. a. An einen Großkreis in einem geg. Punkt einen sphär. Winkel anzulegen, der gleich viel Grade habe wie ein geg. ebener Winkel. (Man bestimme durch ebene Konstr. die Länge des Äquatorbogens.)

† b. Durch einen geg. Punkt einen Großkreis zu legen, der einen geg. Großkreis unter geg. Winkel schneide. (Man wende Aufg. a an und lege durch den Punkt einen Parallelkreis zu dem geg. Großkreis; oder auch mittels II. Anh. 51 und II. Anh. Aufg. 47.)

49. Zu beweisen, daß die Aufgaben: auf der Oberfläche einer massiven Kugel a) eine sphär. Entfernung zu halbieren, b) einen sphär. Winkel zu halbieren, c) einem sphär. Dreieck einen Kreis um- und d) einzubeschreiben, e) ein sphär. Dreieck zu konstr. aus drei Seiten, f) — aus zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel, g) — aus zwei Seiten und einem Gegenwinkel, — die nämlichen Auflösungen haben, wie die entsprechenden Aufgaben der ebenen Geometrie.

50. Einen Kugelkreis von geg. sphär. Halbmesser zu zeichnen, der zwei geg. Kugelkreise berühre. (Wie in der ebenen Geom.)

† 51. An zwei Kugelkreise die vier gemeinschaftlichen sphär. Tangenten zu legen. (Spezialfall der vor. Aufg. — Hiernach andere Lösung von II. Anh. Aufg. 34.)

52. Ein sphär. Dreieck zu konstr., wenn geg. sind: a) die drei Winkel, b) eine Seite und die zwei anliegenden Winkel, c) zwei Winkel und eine Gegenseite. (Durch Zurückführung auf II. Anh. Aufg. 49. e—g mittels der Polardreiecke, oder direkt. Die direkte Lösung von a mittels II. Anh. 51 und vor. Aufg.)

53. Geg. zwei kongruente (oder symmetrische) sphär. Vielecke in bestimmter Lage auf der Kugeloberfläche. Einen Punkt auf ihr zu finden von der Eigenschaft, daß das eine Vieleck, wenn es in fester Verbindung mit dem Punkte gedacht, durch Drehung um ihn auf der Kugeloberfläche verschoben wird, mit dem andern Vieleck zur Deckung (bezw. in antipodische Lage) gelangt. (Das gedrehte Vieleck befindet sich in der verlangten Lage, sobald eine seiner Seiten sich darin befindet.)

54. Ein sphär. Zweieck durch einen Großkreisbogen von geg. Länge zu halbieren.

55. Ein sphär. Vieleck in ein Zweieck von gleichem Flächeninhalt zu verwandeln. (Der Zweiecksunkel ist nach II. 16 gleich dem halben sphär. Exzeß des Vielecks. Konstr. des sphär. Exzesses durch Addieren der Äquatorbögen.)

56. Von einem sphär. Zweieck a) ein gleichseitiges sphär. Dreieck abzuschneiden, b) ein gleichschenkliges sphär. Dreieck abzuschneiden, das der nte Teil des Zweiecks sei. (II. Anh. 51. Bei b wird der W. an der Grundl. bestimmt nach II. 14. Zus.)

57. Ein sphär. Dreieck zu konstr., von dem eine Seite, die zugehörige Höhe und der Inhalt geg. sind. (II. Anh. 45 u. 50.)

58. Ein sphär. Dreieck zu konstr., von dem zwei Winkel und der Umfang geg. sind. (II. Anh. 48. a und 51.)

59. Ein sphär. Dreieck zu konstr., von dem geg. sind:

a) eine Seite, ein anliegender Winkel und die Summe der zwei andern Seiten,

b) eine Seite, ein anliegender Winkel und der Inhalt. (b mittels a durch das Polardreieck.)

60. Ein sphär. Dreieck zu konstr., von dem geg. sind:

a) eine Seite, der gegenüberliegende Winkel und die Summe der zwei andern Seiten (II. Anh. 48. a und b, II. Anh. Aufg. 51),

b) eine Seite, der gegenüberliegende Winkel und der Inhalt (mittels a durch das Polardreieck).

61. Eine geg. Kugelfläche in ein Netz von lauter kongruenten regulären sphär. Dreiecken zu teilen, und zwar so, daß a) immer drei, b) vier, c) fünf Dreiecke mit gemeinschaftl. Ecke an einander stoßen. (Man teile die Kugeloberfläche von einem beliebigen Punkt aus in 3, 4, 5 gleiche sphär. Zweiecke und wende auf eines von ihnen II. Anh. Aufg. 56. a an.) Durch Verbinden der sphär. Mittelpunkte der Dreiecke in den Netzen b und c erhält man zwei weitere Netze, die aus lauter kongr. regul. Vierecken und Fünfecken bestehen.

Anm. Man formuliere die Aufgaben 49—53 und 56—61 und deren Lösungen für Dreikante und Kegelflächen.