Lehrbuch der Stereometrie

Hauck, Guido

Tübingen, 1893

Drittes Buch. Polyeder und Umdrehungskörper.

urn:nbn:de:hbz:466:1-77777

Drittes Buch.

Polyeder und Umdrehungskörper.

A. Einleitung.

1: Allgemeines.

1. a. Ein von lauter ebenen Flächen begrenzter Körper heißt ein Polyeder. Die Linien, nach denen je zwei an einander stoßende Begrenzungsflächen sich schneiden, heißen die Kanten, die Punkte, in denen mehrere benachbarte Begrenzungsflächen und deren Schnittkanten zusammentreffen, heißen die Ecken des Polyeders. Die Gesamtheit der in einer Ecke zusammentreffenden Begrenzungsflächen und Kanten bildet ein Vielkant. Die Gesamtheit der in einer Begrenzungsfläche liegenden Ecken und Kanten bildet ein ebenes Vieleck. Diese Vielecke heißen die Flächen des Polyeders, ihre Gesamtheit bildet seine Oberfläche. Die Verbindungsstrecke zweier nicht in der nämlichen Begrenzungsfläche liegenden Ecken heißt eine Diagonale. Legt man durch drei oder mehr Ecken, von denen höchstens zwei in der nämlichen Begrenzungsfläche liegen, eine Ebene, so heißt deren Schnittfigur mit dem Polyeder ein Diagonalschnitt.

b. Breitet man die Oberfläche eines Polyeders als ein zusammenhängendes Stück in einer Ebene aus, nachdem man vorher den Zusammenhang der einzelnen Flächen in den Kanten, *soweit es nötig ist*, gelöst hat: so heißt die hiedurch entstandene ebene Figur ein *Netz* des Polyeders. Ein solches kann umgekehrt dazu verwendet werden, von dem Polyeder ein Modell (etwa aus Karton) herzustellen. Das Netz eines Polyeders kann in der mannigfaltigsten Weise und Form gebildet werden. Über die gestaltlichen Eigenschaften einer Netzfigur läßt sich folgendes sagen:

Da das Ausbreiten der Oberfläche eines Vielkants in einer Ebene nur dadurch möglich wird, daß man das Vielkant längs einer Kante aufschneidet, so muß man bei Herstellung eines Polyeder-Netzes an jeder Ecke mindestens längs einer Kante aufschneiden. Die aufgeschnittenen Kanten bilden den Umriß der Netzfigur, und zwar enthält der Umriß jede aufgeschnittene Kante zweimal. Da nun von jeder Polyeder-Ecke mindestens eine aufgeschnittene Kante ausgeht, so müssen auch die Polyeder-Ecken sämtlich auf dem Umriß der Netzfigur liegen; die nicht aufgeschnittenen Kanten, welche ins Innere der Netzfigur fallen, können daher immer nur eine Ecke des Umrisses mit einer andern verbinden, oder: jede nicht aufgeschnittene Kante teilt die Netzfigur in zwei getrennte Teile. *)

Anm. Es werden im folgenden nur *gewöhnliche* Polyeder in Betracht gezogen, d. h. solche, welche nachstehenden zwei Bedingungen genügen:

1) Es muß möglich sein, sämtliche Ecken des Polyeders durch einen aus lauter Kanten zusammengesetzten polygonalen Zug, der sich nicht selbst durchschneidet, zu verbinden, so daß also, wenn man diesen Zug vom Anfangspunkt bis zum Endpunkt durchläuft, man sämtliche Ecken, und zwar jede Ecke nur einmal, passiert. **)

2) Schneidet man die Oberfläche des Polyeders nach einem der ersten Bedingung genügenden Kantenzug auf, so muß dadurch der Zusammenhang der Oberfläche in der Art gelöst sein, daß ein

---

*) Man kann hiezu Fig. 46 (S. 133) vergleichen.

**) Man kann hiezu das Polyeder Fig. 45. e (S. 130) vergleichen, wo einer der vielen möglichen Kantenzüge durch die eingeschriebenen Zahlen 1 . . . 12 angedeutet ist.

Ausbreiten derselben zu einem ebenen Netze möglich ist, ohne daß es nötig wäre, vorher noch nach einer weiteren, nicht durchlaufenen Kante aufzuschneiden.*)

Diese zwei Bedingungen treffen zu, wenn 1) das Polyeder nur *einfach zusammenhängende Flächen* (d. h. Flächen mit einer einzigen geschlossenen Randlinie**) besitzt, und wenn 2) die *Gesamtoberfläche einfach zusammenhängend* ist. (Ein Polyeder mit mehrfach zusammenhängender Oberfläche entsteht, wenn ein gewöhnliches Polyeder einfach oder mehrfach durchlocht wird.)

Ausdrücklich mag hervorgehoben werden, daß bei einem gewöhnlichen Polyeder sehr wohl auch *einspringende Keile* vorkommen können. — Ein Polyeder, das nur ausspringende Keile besitzt, heißt ein *konvexes* Polyeder.

c. Zwei Polyeder heißen *kongruent*, wenn sie zur Deckung gebracht werden können. Zwei Polyeder heißen *symmetrisch*, wenn sie in solche Lage gebracht werden können, daß jede Ecke des einen zu einer entsprechenden Ecke des andern in Beziehung auf eine Ebene symmetrisch ist. Zwei kongruente Polyeder und ebenso zwei symmetrische Polyeder haben die entsprechenden Kanten, Winkel und Keile bezw. gleich; je zwei entsprechende Flächen sind kongruent; je zwei entsprechende Vielkante sind entsprechend=gleich, und zwar bei kongruenten Polyedern kongruent, bei symmetrischen symmetrisch (I. Anh. 15. a und II. Anh. 28. a). Für kongruente und symmetrische Polyeder gebraucht man die gemeinsame Bezeichnung: *entsprechend=gleich*.

d. Zwei Polyeder heißen *ähnlich*, wenn sie von gleich vielen Flächen begrenzt sind, die unter sich einzeln ähnlich und in beiden Polyedern übereinstimmend gruppiert sind, und wenn die Vielkante an je zwei entsprechenden Ecken durchweg kongruent oder durchweg symmetrisch sind; sie haben also die entsprechenden Winkel und Keile bezw. gleich, und die Kanten des einen sind den entsprechenden Kanten des

---

*) Fig. 46 (S. 133) stellt das auf solche Weise hergestellte Netz des Polyeders Fig. 45. e (S. 130) vor.

**) Fig. 47 (S. 133) stellt z. B. eine Fläche mit *zwei* Randlinien vor.

andern proportioniert. Je nachdem die Vielkante an entsprechenden Ecken kongruent oder symmetrisch sind, heißen die Polyeder gleichstimmig ähnlich oder ungleichstimmig ähnlich. Zwei Polyeder, von denen jedes einem von zwei symmetrischen Polyedern gleichstimmig ähnlich ist, sind zu einander ungleichstimmig ähnlich.

2—6: Prisma.

2. a. Zieht man durch die Ecken eines ebenen Vielecks ABCD . . (Fig. 41) in beliebiger Richtung (aber nicht in der Ebene des Vielecks) Parallelen, und legt durch je zwei aufeinanderfolgende Parallelen Ebenen, so werden diese von einer zur Vielecksebene parallelen Ebene nach den Seiten eines zweiten Vielecks A′B′C′D′ . . geschnitten, das dem ersten kongruent ist. (Denn es sind, nach I. 2, je zwei entsprechende Vielecksseiten parallel, daher, nach I. 4. b, je zwei entsprechende Winkel gleich; ferner sind je zwei entsprechende Vielecksseiten gleich, da sie mit den parallelen Verbindungslinien ihrer Endpunkte ein Parallelogramm bilden.) Diese Parallelogramme samt den zwei Vielecken begrenzen ein Polyeder, welches Prisma heißt.

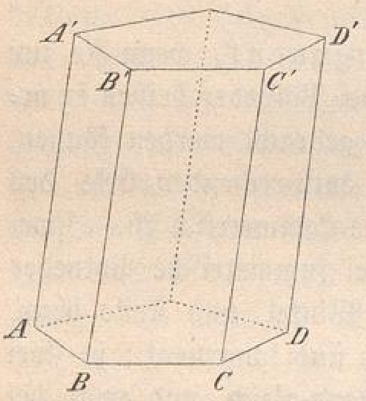

Fig. 41.

b. Ein Prisma ist also ein Polyeder, dessen Oberfläche aus zwei kongruenten und parallel liegenden Vielecken und aus eben so vielen Parallelogrammen besteht, als jedes Vieleck Seiten hat. Die Vielecke heißen die Grundflächen, die Parallelogramme die Seitenflächen des Prismas, die Gesamtheit der Seitenflächen bildet seinen Mantel. Die Seiten der Grundflächen heißen Grundkanten, die übrigen, unter sich gleichen und parallelen Kanten heißen Seitenkanten. An jeder Ecke befindet sich ein Dreikant. Die Entfernung der beiden Grundflächen heißt die Höhe des Prismas.

c. Ein Prisma heißt dreiseitig, vierseitig u. s. w., wenn seine Grundflächen Dreiecke, Vierecke u. s. w. sind.

d. Jede zu den Seitenkanten parallele Schnittebene schneidet das Prisma nach einem Parallelogramm (I. 1. a und I. 2). Insbesondere ist jeder durch zwei Seitenkanten gehende Diagonalschnitt ein Parallelogramm. Jede zu den Grundflächen parallele Schnittebene schneidet nach einem den Grundflächen kongruenten Vieleck; eine solche Schnittfigur heißt ein Parallelschnitt. Die Schnittfigur einer zu den Seitenkanten senkrechten Schnittebene heißt ein Querschnitt. Alle Querschnitte eines Prismas sind kongruent.

e. Wird der Mantel eines Prismas von einer Ebene geschnitten, die den Grundflächen nicht parallel ist, so wird dadurch das Prisma in zwei Polyeder zerlegt, von denen jedes ein schiefabgeschnittenes Prisma heißt.

3. a. Ein Prisma heißt senkrecht, wenn die Seitenkanten auf den Grundflächen senkrecht stehen; andernfalls heißt es schief. Im senkrechten Prisma sind die Seitenflächen und die durch je zwei Seitenkanten gehenden Diagonalschnitte Rechtecke; die Seitenkanten sind gleich der Höhe. Zwei senkrechte Prismen, die kongruente Grundflächen und gleiche Höhen haben, sind kongruent; denn sie können (gemäß I. 7. a) zur Deckung gebracht werden.

b. Ein Prisma heißt regulär, wenn es senkrecht ist und reguläre Vielecke zu Grundflächen hat. Im regulären Prisma sind alle Seitenflächen kongruent und alle Dreikante kongruent. Die Strecke zwischen den Mittelpunkten der Grundflächen ist den Seitenkanten parallel u. gleich und heißt die Achse des regulären Prismas.

c. Schneidet man den Mantel eines senkrechten Prismas längs einer Seitenkante auf, wickelt ihn als zusammenhängendes Stück von dem Prisma ab, und breitet ihn in einer

Ebene aus, so legen sich in der Netz- oder Abwicklungsfigur die Grundkanten beider Grundflächen je in eine Gerade. Der Umriß der Abwicklungsfigur wird also ein Rechteck, dessen eine Seite gleich der Seitenkante, dessen andere Seite gleich dem Umfang der Grundfläche ist.

d. Ein Cylinder kann als reguläres Prisma angesehen werden, dessen Grundflächen unendl. viele unendl. kleine Seiten haben. Daher kann der Mantel des Cylinders gleich dem Prismenmantel abgewickelt und in einer Ebene ausgebreitet werden. Die Abwicklungsfigur ist (nach c) ein Rechteck, dessen eine Seite gleich der Mantellinie, dessen andere Seite gleich dem Umfang des Grundkreises ist.

4. a. Ein Prisma, dessen Grundflächen Parallelogramme sind (Fig. 42), heißt Parallelflach oder Spat (auch Parallelepipedon). Von seinen sechs Flächen, die alle Parallelogramme sind, sind je zwei parallel und kongruent. Jedes Paar paralleler Flächen kann als Grundflächen betrachtet werden. Von den zwölf Kanten sind je vier parallel und gleich. Es sind also drei verschiedene Kantenlängen vorhanden. Von jeder Ecke gehen drei ungleiche Kanten aus.

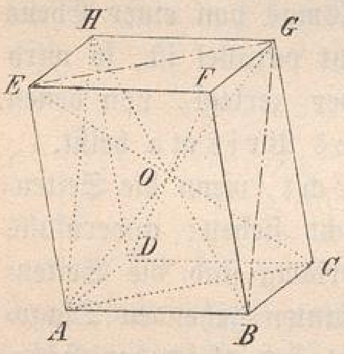

Fig. 42.

b. Zwei Ecken eines Parallelflachs, die nicht in der nämlichen Fläche liegen, heißen gegenüberliegende Ecken. Zu jeder Ecke ist nur eine gegenüberliegende vorhanden. Ihre Verbindungsstrecke ist eine Diagonale. Das Parallelflach hat vier Diagonalen. Von diesen ist jede zugleich Diagonale in zweien von den sechs Diagonalschnitt-Parallelogrammen, und je zwei sind Diagonalen in einem und demselben Diagonalschnitt. Hieraus folgt, daß sich alle vier Diagonalen in einem Punkt schneiden und gegenseitig halbieren. Dieser Punkt heißt der Mittelpunkt des Parallelflachs. (Z. B. halbieren sich in Fig. 42 AG und BH gegenseitig in O wegen Parallelogramm ABGH. CE geht ebenfalls durch O und wird in O halbiert wegen Parallelogramm ACGE, u. s. f.)

c. Die Dreikante an den acht Ecken stehen in derselben Beziehung zu einander wie die acht von drei Ebenen gebildeten Dreikante (II. Anh. 27). Insbesondere sind die Dreikante an zwei gegenüberliegenden Ecken symmetrisch.

5. a. Ein senkrechtes Prisma, dessen Grundflächen Rechtecke sind, heißt rechtwinkliges Parallelflach oder Quader. Seine Flächen und Diagonalschnitte sind (nach 3. a) alle Rechtecke. Von den Diagonalschnitten sind je zwei kongruent. Die vier Diagonalen sind gleich. Die Dreikante an den acht Ecken sind sämtlich Oktanten.

b. Sind in einem Parallelflach drei von einer Ecke ausgehende Kanten gleich, so sind alle zwölf Kanten gleich. Das Parallelflach ist also von lauter Rhomben umgeben und heißt Rhomboeder. — Unter Rhomboeder im engeren Sinn versteht man ein solches, dessen sechs Rhomben kongruent sind. Die zwei gegenüberliegenden Ecken, in denen alsdann drei gleiche Rhombenwinkel zusammenstoßen, heißen Hauptecken, ihre Verbindungsstrecke heißt Hauptdiagonale. Das Rhomboeder heißt spitz oder stumpf, je nachdem jene drei gleichen Winkel spitz oder stumpf sind.

c. Ein Quader, der zugleich Rhomboeder ist, dessen sechs Flächen also lauter Quadrate sind, heißt Würfel (auch Kubus oder reguläres Hexaeder). Im Würfel sind alle sechs Diagonalschnitte kongruent.

6. Zwei Quader sind kongruent, wenn sie drei von einer Ecke ausgehende Kanten einzeln gleich haben (3. a). Ein Quader ist also bestimmt durch drei von einer Ecke ausgehende Kanten. Ein Würfel ist daher bestimmt durch eine Kante. — Der Würfel, dessen Kante gleich der Längeneinheit ist, wird als Körpereinheit oder Kubikeinheit benützt. Unter dem Rauminhalt oder Kubikinhalt

oder **Volumen** eines Körpers versteht man die Zahl der Kubikeinheiten, die er faßt. Zwei Körper, die gleichen Rauminhalt haben, heißen **gleich**.

7—10: Pyramide.

7. a. Zieht man nach den Ecken eines ebenen Vielecks ABCD . . (Fig. 43) von einem außerhalb seiner Ebene gelegenen Punkt S Strecken, und legt durch je zwei aufeinanderfolgende Strecken eine Ebene, so begrenzen die in diesen Ebenen liegenden Dreiecke zusammen mit dem Vieleck ein Polyeder, welches **Pyramide** heißt.

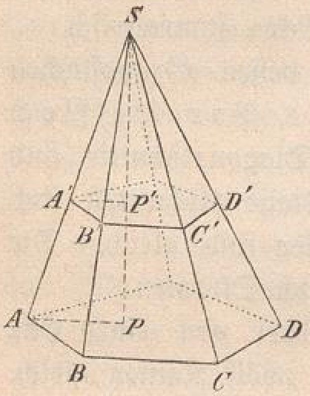

Fig. 43.

b. Eine Pyramide ist also ein Polyeder, dessen Oberfläche aus einem Vieleck und ebenso vielen Dreiecken besteht, als das Vieleck Seiten hat. Das Vieleck heißt die **Grundfläche**, die Dreiecke heißen die **Seitenflächen**, die Gesamtheit der Seitenflächen bildet den **Mantel** der Pyramide. Die Seiten der Grundfläche heißen **Grundkanten**, die übrigen, von S ausgehenden Kanten **Seitenkanten**. Die Ecke S heißt die **Spitze**, die Entfernung SP der Spitze von der Grundfläche die **Höhe** der Pyramide.

c. Eine Pyramide heißt **dreiseitig**, **vierseitig** u. s. w., wenn ihre Grundfläche ein Dreieck, Viereck u. s. w. ist. — An jeder Grundecke befindet sich ein Dreikant, an der Spitze ein Vielkant, und zwar ein n=kant, wenn die Pyramide n=seitig ist. — Die dreiseitige Pyramide heißt auch **Vierflach** (oder **Tetraeder**). Im Vierflach kann jede Fläche als Grundfläche, die ihr gegenüberliegende Ecke als Spitze betrachtet werden.

d. Jede durch die Spitze gehende Schnittebene schneidet die Pyramide nach einem Dreieck. Insbesondere ist jeder durch zwei Seitenkanten gehende Diagonalschnitt ein Dreieck. Diagonalen besitzt die Pyramide nicht. — Die Schnittfigur A'B'C'D'.. (Fig. 43) einer zur Grundfläche parallelen Schnittebene heißt ein Parallelschnitt. Es wird (in B. 10. a) bewiesen werden, daß jeder Parallelschnitt der Grundfläche ähnlich ist.

8. a. Eine Pyramide heißt regulär, wenn die Grundfläche ein reguläres Vieleck ist, und die Spitze auf der Geraden liegt, die auf der Grundfläche in deren Mittelpunkt senkrecht steht. In einer regulären Pyramide sind daher die Grundkanten unter sich gleich, und die Seitenkanten unter sich gleich (I. 12. b). Die Seitenflächen sind kongruente gleichschenklige Dreiecke, und die Dreikante an den Grundecken sind kongruente gleichschenklige Dreikante (II. 8). Hieraus folgt weiter, daß das Vielkant an der Spitze regulär ist, sowie daß die Seitenflächen und Seitenkanten je unter sich gleiche Neigung gegen die Grundfläche haben.

b. Sind in einer regulären dreiseitigen Pyramide die Seitenflächen gleichseitige Dreiecke (und also der Grundfläche kongruent), so heißt das Polyeder: reguläres Tetraeder oder Tetraeder im engeren Sinn.*)

c. Schneidet man den Mantel einer regulären Pyramide längs einer Seitenkante auf, wickelt ihn als zusammenhängendes Stück von der Pyramide ab, und breitet ihn in einer Ebene aus, so erhält man als Netz- oder Abwicklungsfigur ein Vieleck von der Eigenschaft, daß eine Ecke von allen übrigen eine Entfernung gleich der Seitenkante hat, und daß die Summe aller nicht an jene Ecke anstoßenden Seiten gleich dem Umfang der Grundfläche ist.

d. Jeder Kegel kann als reguläre Pyramide angesehen werden, deren Grundfläche unendl. viele unendl. kleine Seiten hat. Daher kann der Mantel des Kegels gleich dem

*) Im folgenden wird unter Tetraeder schlechtweg — stets das reguläre Polyeder verstanden, während die allgemeine dreiseitige Pyramide durch Vierflach bezeichnet wird.

Pyramidenmantel abgewickelt und in einer Ebene ausgebreitet werden. Die Abwicklungsfigur ist (nach c) ein Kreisausschnitt, dessen Halbmesser gleich der Mantellinie, und dessen Bogen gleich dem Umfang des Grundkreises ist.

9. Jedes Polyeder kann man von einem beliebigen, in seinem Innern liegenden Punkt aus in Pyramiden zerlegen, indem man von dem Punkt nach sämtlichen Ecken Strahlen zieht und den Punkt als gemeinschaftliche Spitze, die Strahlen als Seitenkanten, die einzelnen Polyederflächen als Grundflächen der Pyramiden nimmt. Die gemeinschaftliche Spitze kann auch in eine Ecke des Polyeders verlegt werden.

10. a. Eine Pyramide S, ABCD . . (Fig. 43, S. 124) wird durch einen Parallelschnitt A′B′C′D′ . . in zwei Teile zerlegt, von welchen der zwischen Grundfläche und Parallelschnitt liegende Teil: *Pyramidenrumpf* heißt. Die letzteren zwei Flächen, welche ähnlich sind (7. d), heißen die *Grundflächen*, die übrigen, welche Trapeze sind, die *Seitenflächen*, die Entfernung der Grundflächen heißt die *Höhe* des Pyramidenrumpfs. Die Pyramide, die den Rumpf zur ganzen Pyramide ergänzt, heißt seine *Ergänzungs-Pyramide*.

b. Ein Pyramidenrumpf heißt *regulär*, wenn er von einer regulären Pyramide abgeschnitten ist. Im regulären Pyramidenrumpf sind die Grundflächen ähnliche reguläre Vielecke, die Seitenflächen kongruente gleichschenklige Trapeze; die Seitenkanten haben gleiche Länge.

c. Ein Kegel wird durch einen Parallelkreis in einen *Kegelrumpf* und dessen *Ergänzungskegel* zerlegt. Der Grundkreis des ursprünglichen Kegels und der Parallelkreis heißen die *Grundkreise* des Kegelrumpfes. Die Stücke der ursprünglichen Mantellinien zwischen den beiden Grundkreisen haben alle gleiche Länge und heißen die *Mantellinien*, das Stück der Achse zwischen den beiden Grundkreisen heißt die *Achse* des Kegelrumpfes. Der Achsenschnitt ist ein gleichschenkliges Trapez, dessen parallele Seiten Grundkreis-Durchmesser, und dessen Schenkel Mantellinien sind. Die Abwicklungsfigur des Mantels eines Kegelrumpfes ist ein Kreisring-Ausschnitt, welcher die Differenz der Abwicklungsfiguren des ganzen Kegels und des Ergänzungskegels vorstellt.

11—13: Prismatoid.

11. a. Ein Polyeder, das begrenzt ist von zwei beliebigen, in parallelen Ebenen liegenden Vielecken ABC . . und FGH . . (Fig. 44*), und außerdem von lauter Dreiecken, deren jedes mit dem einen Vieleck eine Seite, mit dem andern eine Ecke gemein hat, heißt Prismatoid. Die zwei Vielecke heißen seine Grundflächen, die Dreiecke seine Seitenflächen; die Seiten der Grundflächen heißen Grundkanten, die übrigen Kanten — Seitenkanten. Hat die eine Grundfläche m, die andere n Seiten, so hat das Prismatoid m + n Seitenflächen und m + n Seitenkanten, und heißt (m + n)-seitig. Die Entfernung der zwei parallelen Grundflächen heißt die Höhe des Prismatoids.

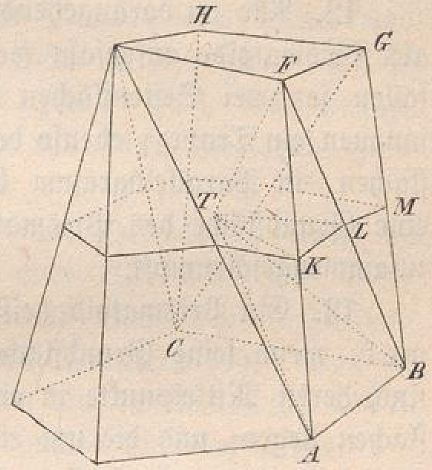

Fig. 44.

b. Ein Prismatoid ist durch die Gestalt und Lage seiner Grundflächen allein nicht vollständig bestimmt, da die Ecken noch auf die mannigfaltigste Weise durch Seitenkanten verbunden werden — und also die Seitenflächen noch die verschiedenartigsten Lagen haben können.

c. Eine durch die Mitte der Höhe parallel zu den Grundflächen gelegte Ebene halbiert sämtliche Seiten-

*) Man denke sich in Fig. 44 die von Punkt T ausgehenden Linien hinweg.

kanten (I. 14. d) und erzeugt eine Schnittfigur KLM . . (Fig. 44), welche der **Mittelschnitt** des Prismatoids heißt. Der Mittelschnitt ist ein (m + n)-eck, dessen Seiten parallel den Grundkanten und gleich ihren Hälften sind, und dessen Winkel gleich den Winkeln je zweier (in derselben oder in verschiedenen Grundflächen liegender) Grundkanten sind (I. 4. b und I. Einl. 4. d). Unter den Keilen an den Seitenkanten können sich auch einspringende Keile befinden. Daher kann der Mittelschnitt auch einspringende Winkel haben (wie z. B. an der Ecke L in Fig. 44).

12. Alle im vorangehenden betrachteten Polyeder können als Prismatoide aufgefaßt werden. Beim Pyramidenrumpf fallen je zwei Seitenflächen in eine Ebene und bilden zusammen ein Trapez; ebenso beim Prisma, wo je zwei Seitenflächen ein Parallelogramm bilden. Bei der Pyramide ist eine Grundfläche des Prismatoids zu einem Punkt (Spitze) zusammengeschrumpft.

13. Ein Prismatoid heißt **regulär** oder eine **Trommel**, wenn seine Grundflächen kongruente reguläre Vielecke sind, deren Mittelpunkte in einer Senkrechten zu den Grundflächen liegen, und die um einen halben Vieleckszentriwinkel gegen einander verdreht sind, so daß die im Zickzack laufenden Seitenkanten kongruente gleichschenklige Dreiecke als Seitenflächen einschließen. Der Mittelschnitt ist ein reguläres Vieleck, das doppelt so viel Seiten hat als eine Grundfläche. Im 2n-seitigen regul. Prismatoid ist der Mittelschnitt ein regul. 2n-eck.

14—16: Die regulären Polyeder.

14. a. Ein Polyeder heißt **regulär** (im engeren Sinn), wenn alle seine Flächen kongruente reguläre Vielecke sind und an allen seinen Ecken sich kongruente reguläre Vielkante befinden. Es sind also auch alle Kanten eines solchen Polyeders, alle Winkel und alle Keile je unter sich gleich. Unter den bisher betrachteten Polyedern treffen diese Eigenschaften zu beim Würfel und beim regulären Tetraeder.

b. Die Vielkante an den Ecken eines regulären Polyeders können bloß Dreikante oder Vierkante oder Fünfkante sein. Denn die Summe der Seiten eines Vielkants muß $< 4\,R$ sein (II. 17. b). Sechskante sind daher schon unmöglich, wenn die Flächen regul. Dreiecke sein sollen (weil $6 \,.\, \frac{2}{3}\,R = 4\,R$). Noch weniger wären sie möglich, wenn die Flächen Quadrate, regul. Fünfecke u. s. w. sein sollten.

Die Flächen eines regulären Polyeders können bloß regul. Dreiecke oder Vierecke oder Fünfecke sein. Denn regul. Sechsecke sind schon unmöglich, wenn an den Ecken sich bloß Dreikante befinden sollen (weil $3 \,.\, \frac{4}{3}\,R = 4\,R$). Noch weniger wären sie möglich, wenn sich an den Ecken Vierkante, Fünfkante u. s. w. befinden sollten.

c. Sind nun die Flächen regul. Dreiecke, so können die Vielkante entweder Dreikante oder Vierkante oder Fünfkante sein. Sind die Flächen regul. Vierecke oder Fünfecke, so können die Vielkante bloß noch Dreikante sein; denn ein Vierkant hätte schon bei Vierecken eine Seitensumme $= 4\,R$. Es kann demnach nur fünf reguläre Polyeder geben:

I. Dasjenige mit Dreiecken und

α) Dreikanten heißt regul. Tetraeder (= Vierflach),

β) Vierkanten — regul. Oktaeder (= Achtflach),

γ) Fünfkanten — regul. Ikosaeder (= Zwanzigflach).

II. Dasjenige mit Vierecken und Dreikanten heißt regul. Hexaeder (= Sechsflach, Würfel).

III. Dasjenige mit Fünfecken und Dreikanten heißt regul. Dodekaeder (= Zwölfflach).

15. Diese 5 regulären Polyeder (auch pythagoräische oder platonische Körper genannt) sind in Fig. 45 abgebildet. Tetraeder (Fig. a) und Hexaeder (Fig. b) wurden in 8. b und 5. c bereits besprochen. Zum Verständnis von Oktaeder (Fig. c), Dodekaeder (Fig. d) und Ikosaeder (Fig. e) mögen folgende Bemerkungen dienen:

a. Das Oktaeder (Fig. 45. c) kann aufgefaßt werden — entweder als reguläres sechsseitiges Prismatoid, dessen Seitenflächen regul. Dreiecke sind, oder als bestehend aus zwei kongruenten regulären vierseitigen Pyramiden, welche die quadratische Grundfläche gemeinsam haben, und deren Seitenflächen regul. Dreiecke sind.

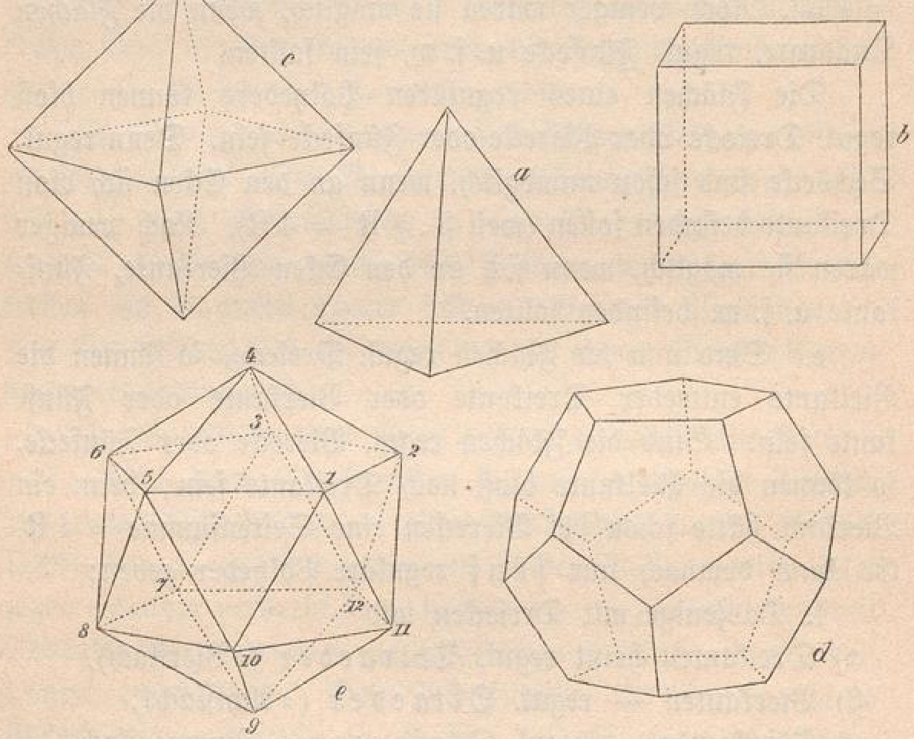

Fig. 45.
Die fünf regulären Polyeder.
a. Tetraeder, b. Hexaeder, c. Oktaeder, d. Dodekaeder, e. Ikosaeder.

b. Setzt man an jede Seite eines regul. Fünfecks ein ihm kongruentes regul. Fünfeck an, und zwar so, daß von den angesetzten Fünfecken je zwei benachbarte mit einer Seite an einander stoßen: so entsteht ein Korb-ähnliches Gebilde (Fig. 45. d). Das erste Fünfeck bildet den Boden, die fünf angesetzten Fünfecke bilden die Seitenwände des Korbes, der Rand ist eine Zickzacklinie. Würde man die Zacken geradlinig abschneiden, so würde ein regulärer fünfseitiger Pyramidenrumpf bleiben. Nimmt man nun zwei solche, einander kongruente Körbe und bringt sie in eine derartige Lage, daß die Zacken des einen in die Einschnitte des andern eingreifen, daß also die zwei Zickzacklinien sich decken: so entsteht ein Dodekaeder. — Ein Dodekaeder kann angesehen werden als bestehend aus einem regulären zehnseitigen Prismatoid und zwei kongruenten regulären fünfseitigen Pyramidenrümpfen, von denen jeder mit dem Prismatoid eine Grundfläche gemein hat. (Die zwei Pyramidenrümpfe wurden schon oben erwähnt; werden sie vom Dodekaeder weggenommen, so bleibt in der Mitte das Prismatoid, dessen Seitenflächen von den abgeschnittenen Zacken der zwei Körbe, und dessen Grundkanten von Fünfecksdiagonalen gebildet werden.)

c. Nimmt man ein reguläres zehnseitiges Prismatoid (Fig. 45. e), dessen Seitenflächen regul. Dreiecke sind, ferner zwei reguläre fünfseitige Pyramiden, deren Seitenflächen ebenfalls regul. Dreiecke, und deren Grundflächen mit den Grundflächen des Prismatoids kongruent sind, und setzt auf jede Grundfläche des Prismatoids eine der Pyramiden auf, so hat man ein Ikosaeder.

16. Außer den regulären Polyedern sind noch zu erwähnen die halbregulären Polyeder, von denen es zwei Gattungen giebt, nämlich:

a. gleicheckig-halbreguläre Polyeder (auch Archimedische Polyeder genannt), d. s. solche, deren Flächen reguläre Vielecke von zwei- oder dreierlei Art, und deren Vielkante sämtlich entsprechend-gleich (aber nicht regulär) sind,

b. gleichflächig-halbreguläre Polyeder, d. s. solche, an deren Ecken sich reguläre Vielkante von zwei- oder dreierlei Art befinden, und deren Flächen sämtlich kongruent (aber nicht regulär) sind.

B. Lehrsätze.

1—5: Allgemeine Polyedersätze.

Lehrsatz 1.

Eulerscher Lehrsatz: Bezeichnet man die Anzahl der Ecken eines Polyeders mit E, die der Flächen mit F, die der Kanten mit K, so ist:

$$E + F = K + 2.$$

Beweis. Man denke sich sämtliche Ecken des Polyeders (Fig. 45. e, S. 130) durch einen aus lauter Kanten zusammengesetzten polygonalen Zug 1 2 3 . . . 12, der sich nicht selbst durchschneidet, verbunden (vgl. III. Einl. 1. b. Anm., Bedingung 1). Besteht dieser Zug aus k_1 Kanten, so ist:

$$E = k_1 + 1. \qquad (1)$$

Ist k_2 die Anzahl der nicht dem Zuge angehörigen Kanten, so ist:

$$k_1 + k_2 = K. \qquad (2)$$

Man denke sich hierauf die Oberfläche des Polyeders längs jenes Kantenzuges aufgeschnitten und in einer Ebene zu einem Netze (Fig. 46) ausgebreitet (vgl. III. Einl. 1. b. Anm., Bedingung 2). Dann läßt sich leicht zeigen, daß in der Netzfigur stets die Anzahl F der Flächen um 1 größer ist als die Anzahl k_2 der Kanten, in denen die Flächen noch zusammenhängen. Aus den in III. Einl. 1. b besprochenen Eigenschaften einer Netzfigur folgt nämlich, daß die Netzfigur betrachtet werden kann als ein Band von einfach an einander gereihten Flächen, von denen unter Umständen Seitenäste abzweigen, die ebenfalls eine einfache Reihe von Flächen bilden; von den letzteren können dann wieder Nebenzweige abzweigen, u. s. f. Denkt man sich nun das Hauptband von dessen äußerster Fläche bis zur letzten durchlaufen (Weg abcde in Fig. 46), so ist die Anzahl der durchlaufenen

Flächen um 1 größer als die Anzahl der überschrittenen Kanten. Beläuft man dann noch vom Hauptband aus die einzelnen Seitenäste (Wege bf, cg, dhi), und von diesen aus — deren Nebenzweige (Weg hk): so ist die Anzahl der neu hinzukommenden Flächen jedesmal gleich der Anzahl der neu überschrittenen Kanten. Es ist somit die Anzahl der im ganzen belaufenen Flächen um 1 größer als die Anzahl der im ganzen überschrittenen Kanten, d. h:

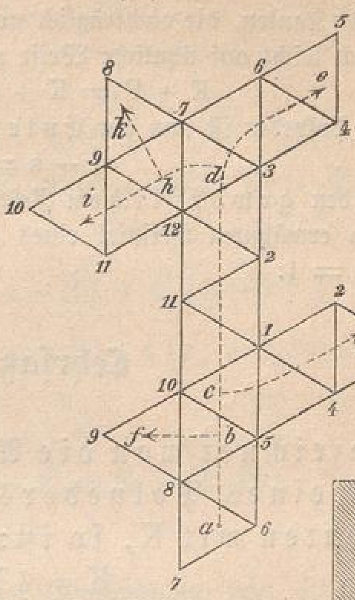

Fig. 46.

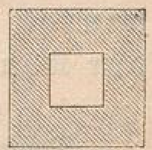

Fig. 47.

$$F = k_2 + 1. \qquad (3)$$

Addiert man (1) und (3), so folgt mit Berücksichtigung von (2):

$$E + F = K + 2.$$

Anm. Obiger Lehrsatz gilt für alle gewöhnlichen Polyeder (vgl. III. Einl. 1. b. Anm.). Auf ein außergewöhnliches Polyeder erstreckt sich der Beweis zunächst nicht. Doch giebt es auch unter ihnen „Eulersche Polyeder", d. h. solche, für welche der Satz gilt. Das Vorhandensein von mehrfach zusammenhängenden Flächen und das Mehrfachzusammenhängen der Gesamtoberfläche (III. Einl. 1. b. Anm.) kann sich nämlich unter Umständen kompensieren. Z. B. ist für ein röhrenförmiges Prisma, dessen Grundfläche durch Fig. 47 vorgestellt wird: $E = 16$, $F = 10$, $K = 24$, folglich die Eulersche Gleichung zutreffend. — Der Satz samt Beweis kann leicht verallgemeinert werden, so daß er sich auf sämtliche Klassen von Polyedern erstreckt: Ist es nämlich nicht möglich, die Ecken eines Polyeders durch einen einzigen Kantenzug zu verbinden, so nehme man mehrere getrennte Kantenzüge. Schneidet man hierauf die Polyederoberfläche nach den Kanten dieser Züge auf, und wird dadurch der Zusammenhang der Oberfläche noch nicht in der Art gelöst, daß ein Ausbreiten zu einem ebenen Netz möglich ist, so schneide man nachträglich noch nach weiteren Kanten auf (jedoch nur nach so vielen, daß man ein aus einem einzigen Stück bestehendes Netz erhält). Ist nun z die Anzahl der Kantenzüge, s die Anzahl der Kanten, die nachträglich noch durchschnitten werden mußten, so läßt sich leicht auf ähnliche Weise wie oben zeigen, daß jederzeit:

$$E + F = K + z - s + 1$$

ist. Ein Polyeder ist nun ein Eulersches, wenn

$$z - s = 1$$

ist. Bei den gewöhnlichen Polyedern ist $z = 1$, $s = 0$. Bei dem oben erwähnten Beispiel eines außergewöhnlichen Polyeders ist $z = 2$, $s = 1$.

Lehrsatz 2.

Bezeichnet man die Anzahl aller Vielecks-winkel eines Polyeders mit W, die Anzahl der Kanten mit K, so ist:

$$K = \tfrac{1}{2} W.$$

Beweis. Denkt man sich sämtliche Flächen einzeln von dem Polyeder abgehoben, so ist in jeder die Anzahl der Winkel gleich der Anzahl der Seiten; die Gesamtanzahl der Winkel ist also gleich der Gesamtanzahl der Vieleckseiten. Denkt man sich dann die Vielecke wieder auf das Polyeder aufgelegt, so vereinigen sich je zwei Vieleckseiten zu einer Kante, während die Anzahl der Winkel unverändert bleibt. Somit ist: $K = \frac{1}{2} W$.

Zusatz. Da K immer eine ganze Zahl ist, so muß W immer eine gerade Zahl sein. Daher können bei einem Polyeder Flächen von ungerader Seitenzahl oder Ecken von ungerader Kantenzahl nur in gerader Anzahl vorkommen.

Lehrsatz 3.

Hat ein Polyeder E Ecken, und betragen alle seine Vieleckswinkel zusammen N Rechte, so ist:

$$N = 4(E - 2).$$

Beweis. Die Oberfläche des Polyeders enthalte z_3 Dreiecke, z_4 Vierecke, z_5 Fünfecke u. s. w.; dann ist (mit

Benützung der Bezeichnungen der vorhergehenden Sätze):

$$z_3 + z_4 + z_5 + \cdots\cdots = F,$$

und

$$\begin{aligned} 3z_3 + 4z_4 + 5z_5 + \cdots &= W \\ &= 2K \quad \text{(III. 2).} \end{aligned}$$

Nun betragen die Winkel eines n-ecks: $2(n-2)$ Rechte, alſo iſt:

$$\begin{aligned} N &= 2\left[z_3(3-2) + z_4(4-2) + z_5(5-2) + \cdots\right] \\ &= 2(3z_3 + 4z_4 + 5z_5 + \cdots) - 4(z_3 + z_4 + z_5 + \cdots) \\ &= 2 . 2K - 4F \\ &= 4(K - F), \end{aligned}$$

oder, da (nach III. 1) $K - F = E - 2$ iſt:

$$N = 4(E-2).$$

Zuſatz. Vermittels der (unabhängig von Lehrſ. 1 bewieſenen) drittletzten Gleichung: $N = 4(K - F)$ ergiebt ſich ein zweiter Beweis für Lehrſ. 1. Projiziert man nämlich das Polyeder auf eine Ebene, die zu keiner ſeiner Flächen ſenkrecht iſt, ſo iſt die Projektion eines n-ecks wieder ein n-eck; daher iſt die Summe aller Vieleckswinkel des Polyeders gleich der Summe ihrer Projektionen. Fallen nun die Projektionen von e_u Polyederecken auf den Umfang der Projektionsfigur, und die Projektionen von e_i Ecken ins Innere derſelben, ſo iſt die Summe aller Vieleckswinkel der Projektionsfigur $= 2 . (e_u - 2)\, 2R + e_i . 4R = (e_u + e_i - 2) . 4R = (E-2)\, 4R$; daher iſt: $(E-2)\, 4 = N = 4(K-F)$, oder: $E + F = K + 2$. — Dieſer Bew. erſtreckt ſich jedoch nur auf konvexe Polyeder (vgl. III. Einl. 1. b. Anm.).

Lehrſatz 4.

		Flächen	Ecken	Kanten
a.	Das Tetraeder hat . .	4	4	6
b.	„ Hexaeder „ . .	6	8	12
c.	„ Oktaeder „ . .	8	6	12
d.	„ Dodekaeder „ . .	12	20	30
e.	„ Ikoſaeder „ . .	20	12	30

Beweis. Das Dodekaeder (welches als Beispiel dienen mag) hat 5-ecke und 3-kante. Da in jeder Fläche 5 Kanten liegen, aber jede Kante zweien Flächen zugleich angehört, so ist:

$$K = \frac{5\,F}{2} \quad \text{oder:} \quad F = \tfrac{2}{5}K.$$

Da ferner von jeder Ecke drei Kanten ausgehen, aber jede Kante zweien Ecken zugleich angehört, so ist:

$$K = \frac{3\,E}{2} \quad \text{oder:} \quad E = \tfrac{2}{3}K.$$

Setzt man nun diese Werte von F und E ein in die für alle Polyeder geltende Gleichung:

$$E + F = K + 2 \qquad \text{(III. 1)},$$

so folgt:

$$\tfrac{2}{3}K + \tfrac{2}{5}K = K + 2,$$

woraus:

$$K = 30,$$
$$F = \tfrac{2}{5} . 30 = 12,$$
$$E = \tfrac{2}{3} . 30 = 20.$$

Bei den übrigen Polyedern sind die Schlüsse analog.

Zusatz. Man bemerke, daß Hexaeder und Oktaeder gleiche Kantenzahl haben, und daß die Eckenzahl des einen gleich der Flächenzahl des andern ist. Man nennt daher diese zwei regul. Polyeder einander zugeordnet oder reziprok. Aus dem nämlichen Grunde sind Dodekaeder und Ikosaeder einander zugeordnet. Das Tetraeder, dessen Eckenzahl gleich der Flächenzahl ist, ist sich selbst zugeordnet.

Lehrsatz 5.

Um jedes reguläre Polyeder und in jedes reguläre Polyeder läßt sich eine Kugel beschreiben; beide Kugeln sind konzentrisch.

Beweis. Es seien P und Q (Fig. 48) die Mittelpunkte zweier benachbarten Flächen eines regulären Polyeders; M sei der Mittelpunkt der Kante AB, in der sie an einander stoßen. Errichtet man auf den zwei Flächen in P und Q die Senkrechten, so müssen diese sich schneiden, da sie (nach I. 8. a und c) beide in der Mittellotebene von AB (Ebene durch MP und MQ) liegen. Der Schnittpunkt O hat nun (nach I. 12. b) von sämtlichen Ecken der zwei Flächen gleiche Entfernung, ist folglich der Mittelpunkt der diesen zwei Flächen umbeschriebenen Kugel. Zieht man ferner OM, so ist $\triangle$ OPM $\cong$ OQM (weil PM = QM), folglich ist OP = OQ. Punkt O hat also auch von den zwei Flächen gleiche Entfernung. — Ist hierauf R der Mittelpunkt einer dritten Fläche des regul. Polyeders, welche mit der Fläche P die Kante CD gemein hat: so ist das aus den Flächen P und R bestehende Gebilde dem aus den Flächen P und Q bestehenden Gebilde kongruent. Daher muß auch die den Flächen P und R umbeschriebene Kugel den gleichen Halbmesser — und ihr Mittelpunkt O′ die gleiche Entfernung von beiden Flächen haben wie bei dem ersten Gebilde. Nun liegt O′ wieder auf der in P errichteten Senkrechten, also muß, weil PO′ = PO ist, O′ mit O zusammenfallen. — In gleicher Weise kann man dann zu einer vierten Fläche u. s. f. übergehen und der Reihe nach beweisen, daß die zuerst gefundene Kugelfläche auch durch sämtliche übrigen Ecken des Polyeders geht, sowie daß ihr Mittelpunkt von sämtlichen Flächen gleich weit entfernt ist, daß folglich eine aus O mit Halbmesser OP beschriebene Kugel sämtliche Flächen berührt.

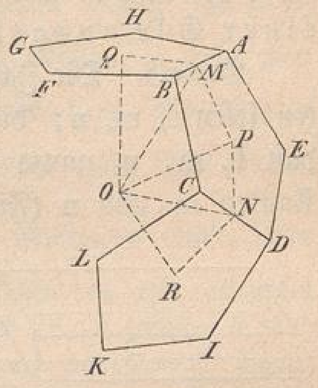

Fig. 48.

Zusatz. Die einbeschriebene Kugel berührt die Flächen in ihren Mittelpunkten.

6—16: Berechnung von Prisma, Pyramide, Prismatoid, u. s. w.

Lehrsatz 6.

Die Zahl der Kubikeinheiten, die ein Quader enthält, ist gleich dem Produkt aus den Zahlen der Längeneinheiten dreier von einer Ecke ausgehenden Kanten.

Beweis. Die Zahlen der Längeneinheiten der drei Kanten seien l, m, n; die Längeneinheit sei so klein gewählt, daß l, m, n ganze Zahlen seien. Das Rechteck mit den Kanten m und n (Fig. 49), das als Grundfläche angesehen werde, enthält mn quadratische Flächeneinheiten. Denkt man sich auf jede derselben einen Würfel gleich der Kubikeinheit gestellt, so bildet die Gesamtheit dieser Würfel einen Teil-Quader Q, dessen Höhe eine Längeneinheit, und dessen Inhalt mn Kubikeinheiten beträgt. Teilt man nun die dritte Kante in l Längeneinheiten und legt durch jeden Teilpunkt einen Parallelschnitt, so wird dadurch der ursprüngliche Quader in l Teil-Quader geteilt, die alle dem Quader Q kongruent sind (III. Einl. 6), also je mn Kubikeinheiten enthalten. Folglich enthält der ganze ursprüngliche Quader l . mn Kubikeinheiten.

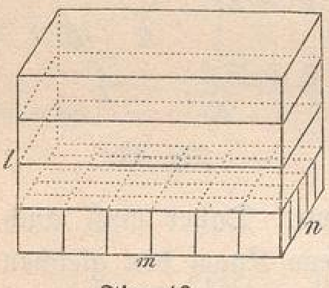

Fig. 49.

Zusatz 1. Kürzer drückt man den Lehrs. so aus: Der Inhalt eines Quaders ist gleich dem Produkt aus drei von einer Ecke ausgehenden Kanten. Bezeichnet man also den Inhalt mit K, die Kantenlängen mit l, m, n, so ist:

$$K = l \cdot m \cdot n.$$

Zusatz 2. Ist a die Kante eines Würfels, so ist (nach Zus. 1):

$$K = a^3.$$

Ist die Längeneinheit das Meter, so ist die Kubikeinheit das Kubikmeter; da seine Kante 10 Dezimeter enthält, so enthält das

Kubikmeter 1000 Kubikdezimeter, ebenso das Kubikdezimeter 1000 Kubikcentimeter u. s. w.

Anm. Der in Zus. 1 ausgesprochene Satz ist zunächst nur für den Fall bewiesen, daß l, m, n ganze Zahlen sind; er ist jedoch auch für den Fall von gebrochenen und von irrationalen Zahlen gültig. Sind nämlich l, m, n ursprünglich gebrochene rationale Zahlen, so kann man die Längeneinheit stets nachträglich so klein wählen, daß die Maßzahlen für die Kanten ganze Zahlen werden. Ist z. B. $l = \frac{\mathfrak{l}}{10}$ Millim., $m = \frac{\mathfrak{m}}{10}$ Millim., $n = \frac{\mathfrak{n}}{10}$ Millim., so wählt man ein Zehntelsmillimeter als Längeneinheit, und hat dann: $K = \mathfrak{l} . \mathfrak{m} . \mathfrak{n}$ Kub.-Zehntelsmillim. $= \frac{\mathfrak{l} . \mathfrak{m} . \mathfrak{n}}{1000}$ Kub.-Millim. (nach Zus. 2) $= \frac{\mathfrak{l}}{10} . \frac{\mathfrak{m}}{10} . \frac{\mathfrak{n}}{10}$ Kub.-Millim. $= l . m . n$ Kub.-Millim. — Sind ferner l, m, n irrationale Zahlen, und liegt l zwischen den zwei rationalen Zahlen $\mathfrak{l}$ und $\mathfrak{l}'$*), ebenso m zwischen $\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{m}'$, n zwischen $\mathfrak{n}$ und $\mathfrak{n}'$: so muß K zwischen den zwei Werten $\mathfrak{l}.\mathfrak{m}.\mathfrak{n}$ und $\mathfrak{l}'.\mathfrak{m}'.\mathfrak{n}'$ liegen; zwischen denselben Werten liegt auch das Produkt l.m.n. Es können nun die zwei Zahlen $\mathfrak{l}$ und $\mathfrak{l}'$, $\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{m}'$, $\mathfrak{n}$ und $\mathfrak{n}'$ einander ganz beliebig nahe genommen werden, so daß der Unterschied zwischen den zwei Werten $\mathfrak{l}.\mathfrak{m}.\mathfrak{n}$ und $\mathfrak{l}'.\mathfrak{m}'.\mathfrak{n}'$ beliebig klein wird.

Lehrsatz 7.

a. Jedes schiefe Prisma ist gleich einem senkrechten Prisma, dessen Höhe gleich der Seitenkante, und dessen Grundfläche gleich dem Querschnitt des schiefen Prismas ist.

b. Jedes Parallelflach wird durch einen Diagonalschnitt halbiert.

Beweis. a. Das schiefe Prisma sei ABC.., A′B′C′.. (Fig. 50). Zwei zu den Seitenkanten AA′, BB′, .. senkrechte Ebenen, deren Entfernung = AA′ ist, mögen den Prismenmantel, bezw. dessen Verlängerung nach den Viel-

---

*) Ist z. B. $l = \sqrt{2} = 1{,}41421\,..$, so liegt l zwischen den zwei rationalen Zahlen $\mathfrak{l} = 1{,}41421$ und $\mathfrak{l}' = 1{,}41422$.

ecken DEF .. und D′E′F′ .. schneiden; dann ist DEF .., D′E′F′ .. das senkrechte Prisma, dessen Höhe gleich der Seitenkante, und dessen Grundfläche gleich dem Querschnitt des schiefen Prismas ist. Nun ist DD′ = AA′, also auch AD = A′D′, ebenso BE = B′E′, CF = C′F′, u. s. f.; da diese Strecken auf den kongruenten Vielecken DEF .. und D′E′F′ .. senkrecht stehen, so können (gemäß I. 7. a) die zwei Polyederstücke DEF .., ABC .. und D′E′F′ .., A′B′C′ .. zur Deckung gebracht werden und sind also gleich. Fügt man zu jedem das Stück DEF .., A′B′C′ .. hinzu, so folgt: Prisma ABC .., A′B′C′ .. = DEF .., D′E′F′ ...

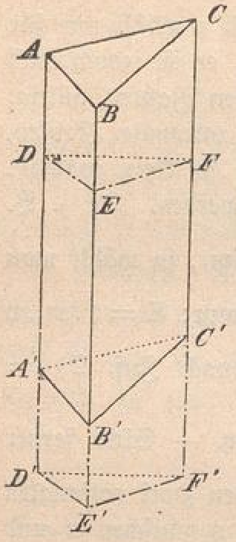

Fig. 50.

Anm. Sollte es nicht möglich sein, einen Querschnitt DEF .. zu legen, der ganz innerhalb des schiefen Prismas fällt, so bringe man beide Querschnitte DEF .. und D′E′F′ .. an der Verlängerung des Prismenmantels an. Das schiefe und das senkrechte Prisma stellen sich dann als Differenzen gleicher Polyederstücke dar.

b. Ist ABCD, A′B′C′D′ (Fig. 51) ein schiefwinkliges Parallelflach, und ist EFGH ein zur Kante AA′ senkrechter Querschnitt desselben, so ist EFGH (nach I. 2) ein Parallelogramm, das durch die Diagonale FH in zwei kongruente Dreiecke zerlegt wird. Nun sind (nach a) die zwei schiefen dreiseitigen Prismen ABD, A′B′D′ und CDB, C′D′B′, in die das Parallelflach durch den Diagonalschnitt BDD′B′ zerlegt wird, einzeln gleich den senkrechten Prismen, deren Grundflächen jene zwei kongruenten Dreiecke, und deren Höhen gleich AA′ sind. Diese senkrechten Prismen aber sind kon=

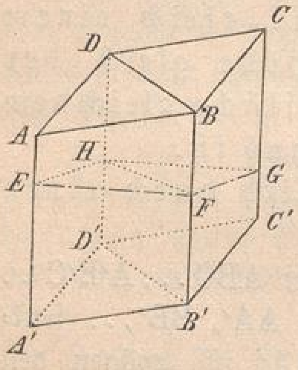

Fig. 51.

gruent (nach III. Einl. 3. a); folglich sind auch die schiefen Prismen einander gleich.

Lehrsatz 8.

a. Zwei Parallelflache, die eine Grundfläche gemein haben, und deren andere Grundflächen in derselben Ebene liegen, sind gleich.

b. Jedes Parallelflach läßt sich in einen Quader von inhaltsgleicher Grundfläche und gleicher Höhe verwandeln.

c. Der Inhalt eines Prismas ist gleich dem Produkt aus Grundfläche und Höhe.

Beweis. a. ABCD (Fig. 52) sei die gemeinschaftliche

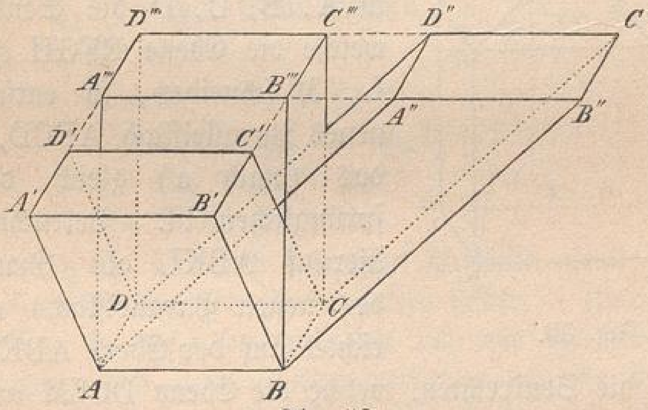

Fig. 52.

Grundfläche der zwei Parallelflache, A′B′C′D′ und A″B″C″D″ seien die zwei andern Grundflächen, die in der nämlichen Ebene liegen und kongruent sind. Verlängert man die Seiten A′D′, B′C′ und B″A″, C″D″ bis zu ihrem gegenseitigen Schnitt, so entsteht in derselben Ebene ein drittes Parallelogramm A‴B‴C‴D‴, das mit den zwei vorigen — und also auch mit ABCD kongruent ist. Weiter sind die Verbindungsstrecken der entsprechenden Ecken von A‴B‴C‴D‴ und ABCD parallel, (denn es ist z. B. AA‴ ∥ BB‴, weil AB ⋕ A‴B‴). Daher ist ABCD, A‴B‴C‴D‴ ebenfalls ein Parallelflach. — Nun sind die zwei dreiseitigen Prismen AA'A''', BB'B''' und DD'D''', CC'C''' gleich, da sie zur Deckung gebracht werden können, (denn bringt man die kongr. Grundflächen AA'A''' und DD'D''' zur Deckung, so müssen sich, nach II. Anh. 27, auch die Seitenkanten decken). Subtrahiert man jedes dieser dreiseitigen Prismen von dem vierseitigen Prisma ADD'''A', BCC'''B', so bleibt: Parallelflach ABCD, A'''B'''C'''D''' = ABCD, A'B'C'D'. Ebenso beweist man, daß ABCD, A'''B'''C'''D''' = ABCD, A''B''C''D'' ist. Folglich ist auch ABCD, A'B'C'D' = ABCD, A''B''C''D''.

b. ABCD, EFGH (Fig. 53) sei ein schiefwinkliges Parallelflach. Errichtet man auf der Ebene des als Grundfläche betrachteten Parallelogramms ABCD in A, B, C, D die Senkrechten, welche die Ebene EFGH in I, K, L, M schneiden, so entsteht ein neues Parallelflach ABCD, IKLM, das (nach a) gleich dem ursprünglichen ist. Betrachtet man hierauf ABKI als Grundfläche des neuen Parallelflachs und errichtet auf der Ebene ABKI in A, B, K, I die Senkrechten, welche die Ebene DCLM in O, N, P, Q schneiden, so entsteht ein drittes Parallelflach ABKI, ONPQ, das (nach a) gleich dem vorigen und also auch gleich dem ursprünglichen ist. Dieses dritte Parallelflach ist aber nach der Konstruktion ein Quader. Betrachtet man in ihm ABNO als Grundfläche, so ist diese gleich der Grundfläche ABCD des ursprünglichen Parallelflachs, und es sind die zugehörigen Höhen in Quader und Parallelflach gleich.

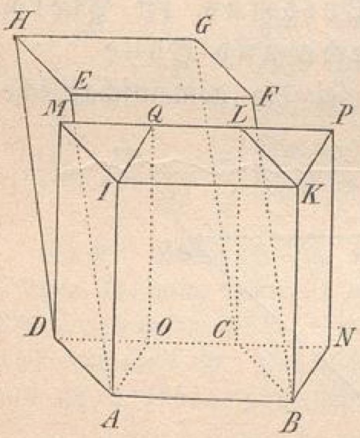

Fig. 53.

c. Die Grundfläche ABCD des Parallelflachs ABCD, EFGH (Fig. 53) sei = G, die zugehörige Höhe = h; dann ist:

Parallelfl. ABCD, EFGH = ABNO, IKPQ (nach b)
= AB . AO . AI (III. 6)
= G . h.

Folglich ist der Satz bewiesen für ein Parallelflach.

Hat man ferner ein dreiseitiges Prisma, dessen Grundfläche = G, Höhe = h ist: so ergänze man das Prisma zum Parallelflach, indem man seine dreieckige Grundfläche zum Parallelogramm ergänzt. Das letztere ist dann = 2 G, folglich das Parallelflach = 2 G . h. Der Inhalt des dreiseitigen Prismas ist aber halb so groß (III. 7. b), also = G . h.

Ein mehrseitiges Prisma endlich, dessen Grundfläche = G, Höhe = h, Inhalt = K ist, läßt sich durch Diagonalschnitte, die durch eine Seitenkante gelegt werden, in lauter dreiseitige Prismen von der Höhe h zerlegen. Sind nun $g_1, g_2, g_3 \ldots$ ihre Grundflächen, $k_1, k_2, k_3 \ldots$ ihre Inhalte, so ist:

$$\begin{aligned} K &= k_1 + k_2 + k_3 + \ldots \\ &= g_1 h + g_2 h + g_3 h + \ldots \\ &= (g_1 + g_2 + g_3 + \ldots) h \\ &= G . h. \end{aligned}$$

Zusatz 1. Demnach sind zwei Prismen gleich, wenn sie gleiche Grundflächen und gleiche Höhen haben. — Zwei Prismen von gleichen Grundflächen verhalten sich wie ihre Höhen, und zwei Prismen von gleichen Höhen verhalten sich wie ihre Grundflächen. — In zwei gleichen Prismen verhalten sich die Grundflächen umgekehrt wie die Höhen; und: verhalten sich in zwei Prismen die Grundflächen umgekehrt wie die Höhen, so sind sie gleich.

Zusatz 2. Der Inhalt eines Prismas ist gleich dem Produkt aus Querschnitt und Seitenkante (III. 7. a).

Lehrsatz 9.

Ist der Halbmesser eines Cylinders = r, seine Höhe = h, so ist

a. der Inhalt: $K = r^2 \pi h$,
b. der Mantel: $M = 2 r \pi h$,
c. die Oberfläche: $O = 2 r \pi (r + h)$.

Beweis. a. Der Cylinder kann als Prisma betrachtet werden, dessen Grundfläche $= r^2 \pi$ ist (III. Einl. 3. d). Daher ist sein Inhalt (III. 8. c):

$$K = r^2 \pi h .$$

b. Der Mantel ist (nach III. Einl. 3. d) gleich einem Rechteck, dessen eine Seite $= 2 r \pi$, dessen andere Seite $= h$ ist; folglich ist:

$$M = 2 r \pi h .$$

c. Die Oberfläche setzt sich zusammen aus dem Mantel und den zwei Grundkreisen; folglich ist:

$$\begin{aligned} O &= 2 r \pi h + 2 r^2 \pi \\ &= 2 r \pi (r + h) . \end{aligned}$$

Zusatz 1. Die Oberfläche eines Cylinders ist (nach c) gleich dem Mantel eines um den Halbmesser erhöhten Cylinders. — Ist bei einem Cylinder die Höhe gleich dem Halbmesser, so ist sein Mantel gleich der Summe der zwei Grundflächen oder gleich der Hälfte der Oberfläche.

Zusatz 2. Bezeichnet man bei einer cylindrischen Röhre die Höhe mit h, die Halbmesser der zwei konzentrischen Grundkreise mit R und r, die Dicke mit d, so ist der (massive) Inhalt der Röhre:

$$\begin{aligned} K &= (R^2 - r^2) \pi h = (R + r)(R - r) \pi h \\ &= (2 r + d) d \pi h . \end{aligned}$$

Lehrsatz 10.

a. Jeder Parallelschnitt einer Pyramide ist ein ihrer Grundfläche ähnliches Vieleck.

b. Parallelschnitt und Grundfläche verhalten sich zu einander wie die Quadrate ihrer Entfernungen — oder der Entfernungen entsprechender Ecken — von der Spitze der Pyramide.

Beweis. a. Die Pyramide sei S,ABCD . . (Fig. 54), der Parallelschnitt sei A′B′C′D′ . . . Nach I. 2 sind je zwei entsprechende Seiten des Parallelschnittes und der Grundfläche parallel, daher (nach I. 4. b) je zwei entsprechende Winkel gleich. Ferner folgt aus der Parallelität der Seiten: $\frac{A'B'}{AB} = \frac{SB'}{SB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{SC'}{SC} = \frac{C'D'}{CD}$ u. s. f. Die zwei Vielecke haben also die Winkel einzeln gleich und die entsprechenden Seiten proportioniert, sind folglich ähnlich.

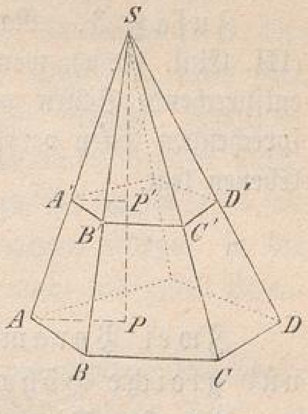

Fig. 54.

b. Sind SP und SP′ die Entfernungen der Spitze von der Grundfläche und vom Parallelschnitt, so ist: $\frac{SA'}{SA} = \frac{SP'}{SP}$ (I. 14. Zus. 3). Da nun A′B′C′D′ . . ∽ ABCD . ., so ist:
$$\frac{A'B'C'D' \ldots}{ABCD \ldots} = \frac{A'B'^2}{AB^2} = \frac{SA'^2}{SA^2} = \frac{SP'^2}{SP^2}.$$

Zusatz 1. Beide Sätze bleiben gültig, auch wenn die mit der Grundfläche parallele Schnittebene nicht die Kanten selbst, sondern deren Verlängerungen über die Spitze schneidet. Es sind dann die einzelnen Seiten der Schnittfigur mit den entsprechenden Seiten der Grundfläche parallel und *entgegengesetzt-gerichtet*.

Zusatz 2. Satz a gilt auch umgekehrt: *Liegen* zwei ähnliche Vielecke *ähnlich*, d. h. so, daß ihre entsprechenden Seiten parallel sind, so schneiden sich die Verbindungslinien sämtlicher Paare entsprechender Ecken in *einem* Punkt, welcher der *Ähnlichkeitspunkt* der zwei Vielecke heißt. Seine Entfernungen von je zwei entsprechenden Ecken verhalten sich wie zwei entsprechende Seiten. Je nachdem die entsprechenden Seiten gleich- oder entgegengesetzt-gerichtet sind, liegt der Ähnlichkeitspunkt außerhalb der Verbindungsstrecken der entsprechenden Ecken oder innerhalb, und heißt demgemäß **äußerer Ähnlichkeitspunkt** oder **innerer Ähnlichkeitspunkt**.

Zusatz 3. Nach Zus. 2 entsteht ein Pyramidenrumpf (III. Einl. 10. a), wenn man von zwei ähnlichen Vielecken, deren entsprechende Seiten parallel und gleich-gerichtet sind, die entsprechenden Ecken verbindet und durch die entsprechenden Seiten Ebenen legt.

Lehrsatz 11.

Zwei Pyramiden, die gleiche Grundflächen und gleiche Höhen haben, sind an Raum gleich.

Beweis. Die zwei Pyramiden (Fig. 55) können zwischen

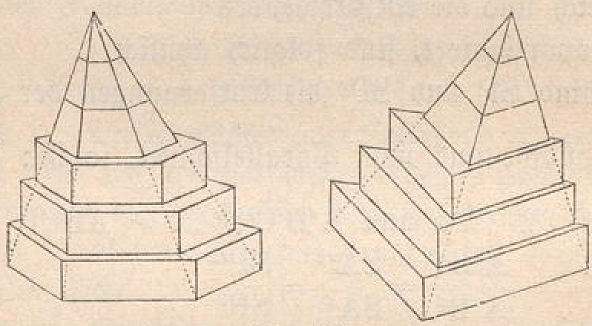

Fig. 55.

zwei parallele Ebenen gelegt werden, so daß die Grundflächen in der einen, die Spitzen in der andern liegen. Teilt man dann die Pyramidenhöhe H in n gleiche Teile und legt durch jeden Teilpunkt eine zu jenen Ebenen parallele Ebene, so erzeugt jede derselben in den zwei Pyramiden Parallelschnitte von gleicher Größe. Denn sind die Grundflächen $= G$ und G', die Parallelschnitte $= g$ und g', und ist deren Entfernung von den Spitzen $= h$, so ist: $\frac{g}{G} = \frac{h^2}{H^2} = \frac{g'}{G'}$ (III. 10. b); da aber $G = G'$, so ist auch $g = g'$. — Man denke sich nun in jeder Pyramide zwischen je zwei aufeinanderfolgenden Parallelschnitt-Ebenen ein senkrechtes Prisma errichtet, dessen Grundfläche immer der größere der zwei Parallelschnitte sei; dadurch entstehen zwei aus je n Prismen zusammengesetzte staffelförmige Körper, deren Kerne die zwei Pyramiden bilden. Jedes Prisma der einen Pyramide ist (nach III. 8. Zus. 1) gleich dem zwischen denselben Parallelebenen liegenden Prisma der andern Pyramide; also sind auch ihre Summen, d. h. die zwei staffelförmigen Körper einander gleich. Dies gilt, wie groß auch n genommen werden mag; die zwei Körper sind also auch noch gleich, wenn $n = \infty$ wird. Dann aber gehen die staffelförmigen Körper in die Pyramiden selbst über; folglich sind auch die zwei Pyramiden gleich.

Zusatz. Der obige Beweis kann unmittelbar übertragen werden auf zwei Körper von irgend welcher andern Form, so daß man den allgemeinen Satz hat (Satz des Cavalieri): Liegen zwei Körper zwischen denselben zwei parallelen Ebenen, und werden sie von jeder beliebigen dritten Ebene, die den zwei ersten parallel ist, nach flächengleichen Figuren geschnitten, so sind sie an Raum gleich. Es sind ferner nicht bloß die ganzen Körper gleich, sondern auch irgend zwei Schichten derselben, die zwischen den nämlichen Parallelschnitt-Ebenen liegen. — Auch wenn die Schnittfiguren keine Vielecke, sondern krummlinige Figuren (z. B. Kreise) sind, bleibt der Satz gültig; denn jede krummlinige Figur kann als Vieleck von unendl. vielen unendl. kleinen Seiten angesehen werden.

Lehrsatz 12.

a. Jedes dreiseitige Prisma läßt sich in drei gleiche Pyramiden zerlegen.

b. Der Inhalt einer Pyramide ist der dritte Teil des Inhaltes eines Prismas, das gleiche Grundfläche und gleiche Höhe mit ihr hat.

c. Der Inhalt einer Pyramide ist der dritte Teil des Produktes aus Grundfläche und Höhe.

Beweis. a. Das dreiseitige Prisma sei ABC, A′B′C′

(Fig. 56). Legt man durch die drei Ecken A, B′, C eine Ebene, so schneidet diese von dem Prisma eine dreiseitige Pyramide B′, ABC ab, und es bleibt eine vierseitige Pyramide übrig, deren Spitze B′, und deren Grundfläche das Parallelogramm AA′C′C ist. Diese vierseitige Pyramide wird durch den Diagonalschnitt AC′B′ in zwei dreiseitige Pyramiden B′, AA′C′ und B′, C′CA zerlegt, welche gleiche Grundflächen AA′C′ = C′CA und gemeinschaftliche Spitze B′, also gleiche Höhen haben, und daher an Raum gleich sind (III. 11). Um weiter zu beweisen, daß auch die zuerst abgeschnittene Pyramide B′, ABC gleich einer der zwei letzteren, z. B. gleich B′, C′CA ist, betrachte man in beiden die Ecke A als Spitze; dann haben sie gleiche Grundflächen CBB′ = B′C′C und gemeinschaftliche Spitze A, sind folglich gleich (III. 11). Das Prisma ist somit in drei gleiche Pyramiden zerlegt; jede Pyramide ist gleich dem dritten Teil des Prismas.

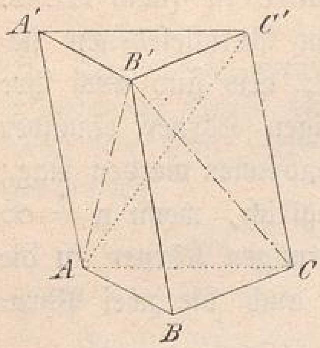

Fig. 56.

b. Die Pyramide sei A′, ABCD . . (Fig. 57). Man lege durch A′ eine Ebene parallel zur Grundfläche und ziehe durch B, C, D . . die Parallelen zu AA′, welche die Ebene schneiden in B′, C′, D′ . . . Dadurch entsteht ein Prisma ABCD . ., A′B′C′D′ . ., das dieselbe Grundfläche und gleiche Höhe wie die Pyramide hat. Die durch AA′ gelegten Diagonalebenen des Prismas sind auch Diagonalebenen der Pyramide und teilen sie in lauter dreiseitige Pyramiden. Von diesen ist jede (nach a) der dritte Teil des dreiseitigen Prismas, das mit ihr die nämliche Grundfläche hat. Daher ist auch die Summe aller Pyramiden der

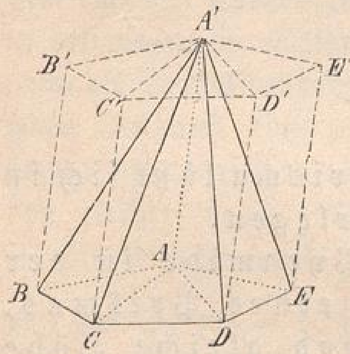

Fig. 57.

dritte Teil der Summe aller Prismen, oder: Pyramide A′, ABCD . . = $\frac{1}{3}$ Prisma ABCD . . , A′B′C′D′ . . . Dann aber ist die Pyramide auch der dritte Teil jedes andern Prismas, das gleiche Grundfläche und gleiche Höhe mit ihr hat (III. 8. Zus. 1).

c. Ist der Inhalt der Pyramide = K, die Grundfläche = G, die Höhe = h, so ist der Inhalt eines Prismas von gleicher Grundfläche und gleicher Höhe = G h (III. 8. c), folglich (nach b) der Inhalt der Pyramide:

$$K = \tfrac{1}{3} G h .$$

Zusatz 1. Zwei Pyramiden von gleichen Grundflächen und gleichen Höhen sind gleich. — Zwei Pyramiden von gleichen Grundflächen verhalten sich wie ihre Höhen, und zwei Pyramiden von gleichen Höhen verhalten sich wie ihre Grundflächen. — In zwei gleichen Pyramiden verhalten sich die Grundflächen umgekehrt wie die Höhen; und: zwei Pyramiden sind gleich, wenn sich die Grundflächen umgekehrt wie die Höhen verhalten.

Zusatz 2. In zwei ähnlichen Pyramiden sind sämtliche Paare entsprechender Strecken proportioniert. Sind daher die Grundflächen = G und G′, die Höhen = h und h′, und irgend zwei entsprechende Strecken = a und a′, so ist:

$$\frac{h}{h'} = \frac{a}{a'} \text{ und } \frac{G}{G'} = \frac{a^2}{a'^2}; \text{ daher: } \frac{K}{K'} = \frac{\frac{1}{3} G h}{\frac{1}{3} G' h'} = \frac{a^3}{a'^3} .$$

D. h.: Die Inhalte ähnlicher Pyramiden verhalten sich wie die Kuben entsprechender Strecken.

Zusatz 3. Hat man zwei ähnliche Polyeder und zerlegt sie von zwei entsprechenden Ecken aus in Pyramiden (III. Einl. 9), so sind von diesen je zwei entsprechende ähnlich; Zus. 2 gilt also für je zwei entsprechende Pyramiden, folglich auch für ihre Summen, d. h.: Die Inhalte ähnlicher Polyeder verhalten sich wie die Kuben entsprechender Strecken. — Da ferner die Flächeninhalte je zweier entsprechenden Flächen sich verhalten wie die Quadrate entsprechender Strecken, so gilt dies auch für ihre Summen, d. h.: Die Oberflächen ähnlicher Polyeder verhalten sich wie die Quadrate entsprechender Strecken. Dies gilt sowohl für Polyeder, die gleichstimmig ähnlich, als für solche, die un=

gleichstimmig ähnlich sind. Namentlich folgt: Zwei symmetrische Polyeder haben gleichen Rauminhalt und gleiche Oberfläche.

Lehrsatz 13.

Ist der Halbmesser des Grundkreises eines Kegels $= r$, seine Höhe $= h$, seine Mantellinie $= s$, so ist

a. der Inhalt: $K = \frac{1}{3} r^2 \pi h$,

b. der Mantel: $M = r\pi s = r\pi \sqrt{r^2 + h^2}$,

c. die Oberfläche: $O = r\pi(r + s)$.

Beweis. a. Der Kegel kann als Pyramide betrachtet werden, deren Grundfläche $= r^2\pi$ ist (III. Einl. 8. d). Daher ist sein Inhalt (III. 12. c):

$$K = \tfrac{1}{3} r^2 \pi . h.$$

b. Der Mantel des Kegels wird bei der Abwicklung ein Kreisausschnitt (III. Einl. 8. d), dessen Halbmesser $= s$, und dessen Bogen $= 2r\pi$ ist. Somit ist:

$$M = \frac{2r\pi . s}{2} = r\pi s,$$

oder, da $s = \sqrt{r^2 + h^2}$ ist:

$$M = r\pi \sqrt{r^2 + h^2}.$$

c. Die Oberfläche ist gleich Grundkreis plus Mantel, also:

$$O = r^2\pi + r\pi s$$
$$= r\pi(r + s).$$

Lehrsatz 14.

Sind die Grundflächen eines Pyramidenrumpfes $= G$ und G', und ist seine Höhe $= h$, so ist sein Inhalt:

$$K = \frac{h}{3}\left(G + \sqrt{GG'} + G'\right).$$

Beweis. Ergänzt man den Pyramidenrumpf ABC . ., A′B′C′ . . (Fig. 54, S. 145) zur Pyramide und bezeichnet die Höhe SP der ganzen Pyramide mit x, die Höhe SP′ der Ergänzungspyramide mit y, so hat man zur Bestimmung von x und y die zwei Gleichungen:

$$\frac{x}{y} = \frac{\sqrt{G}}{\sqrt{G'}} \qquad \text{(III. 10. b)},$$

$$x - y = h.$$

Hieraus folgt:

$$\frac{x}{h} = \frac{\sqrt{G}}{\sqrt{G} - \sqrt{G'}} \qquad \frac{y}{h} = \frac{\sqrt{G'}}{\sqrt{G} - \sqrt{G'}}$$

$$x = h\frac{\sqrt{G}}{\sqrt{G} - \sqrt{G'}} \qquad y = h\frac{\sqrt{G'}}{\sqrt{G} - \sqrt{G'}}.$$

Nun ist (nach III. 12. c):

$$K = \frac{Gx}{3} - \frac{G'y}{3}$$

$$= \frac{h}{3}\,\frac{G\sqrt{G} - G'\sqrt{G'}}{\sqrt{G} - \sqrt{G'}}$$

$$= \frac{h}{3}\left(G + \sqrt{GG'} + G'\right).$$

Zusatz. Demnach sind zwei Pyramidenrümpfe gleich, wenn ihre Grundflächen und Höhen bezw. gleich sind.

Lehrsatz 15.

Die Halbmesser der Grundkreise eines Kegelrumpfes seien $= r$ und r', seine Mantellinie sei $= s$, die Strecke des Mittellotes der Mantellinie zwischen dieser und der Achse $= p$; dann ist

a. der Inhalt: $K = \frac{\pi h}{3}\left(r^2 + rr' + r'^2\right)$, (1)

b. der Mantel: $M = (r + r')\pi s$, (2)

oder $M = 2p\pi h$. (3)

Beweis. a. Der Kegelrumpf kann als Pyramidenrumpf angesehen werden, in welchem $G = r^2\pi$, $G' = r'^2\pi$, also $\sqrt{GG'} = rr'\pi$ ist. Daher ist (nach III. 14):

$$K = \frac{\pi h}{3}\left(r^2 + rr' + r'^2\right). \quad (1)$$

b. Ergänzt man den Kegelrumpf zum Kegel und bezeichnet die Mantellinie des ganzen Kegels mit x, diejenige des Ergänzungskegels mit y, so ist:

$$\frac{x}{y} = \frac{r}{r'}$$

$$x - y = s,$$

woraus folgt:

$$\frac{x}{s} = \frac{r}{r - r'} \qquad \frac{y}{s} = \frac{r'}{r - r'}$$

$$x = s\frac{r}{r - r'} \qquad y = s\frac{r'}{r - r'}.$$

Nun ist (nach III. 13. b):

$$M = r\pi x - r'\pi y = s\pi\frac{r^2 - r'^2}{r - r'}$$

$$= (r + r')\pi s. \quad (2)$$

Ist ferner ABB'A' (Fig. 58) der halbe Achsenschnitt des Kegelrumpfes ($AB = r$, $A'B' = r'$, $AA' = h$, $BB' = s$), und errichtet man auf BB' in N das Mittellot, das die Achse AA' in P schneidet, so ist $NP = p$. Fällt man $B'C \perp AB$ und $NM \perp AA'$, so ist $\triangle MNP \backsim CB'B$, daher: $\frac{MN}{NP} = \frac{CB'}{B'B}$, oder: $\frac{\frac{1}{2}(r + r')}{p} = \frac{h}{s}$, $(r + r')s = 2ph$.

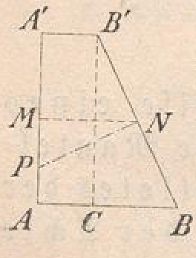

Fig. 58.

Dies eingesetzt in (2) giebt:

$$M = 2p\pi h. \quad (3)$$

Zusatz 1. Gleichung (3) gilt auch für den ganzen Kegel; denn ein Kegel kann angesehen werden als Kegelrumpf, dessen einer Grundkreis Null ist.

Zusatz 2. Gleichung (2), in der Form: $M = 2\frac{r + r'}{2}\pi s$ geschrieben, besagt (vgl. III. 9. b), daß der Mantel des Kegelrumpfes gleich dem Mantel eines Cylinders ist, dessen Höhe gleich der Mantellinie, und dessen Halbmesser gleich dem arithmetischen Mittel der Grundkreis-Halbmesser des Kegelrumpfes ist. — Gleichung (3) lehrt ferner, daß der Mantel des Kegelrumpfes gleich dem Mantel eines Cylinders ist, der die gleiche Höhe, und das Mittellot der Mantellinie zum Halbmesser hat.

Zusatz 3. Soll der Mantel in der Höhe und den zwei Grundkreis-Halbmessern ausgedrückt werden, so ist in Gleichung (2) für s zu setzen:

$$s = \sqrt{h^2 + (r - r')^2}.$$

Lehrsatz 16.

Sind die Grundflächen eines Prismatoides $= G$ und G', und ist der Mittelschnitt $= M$, die Höhe $= h$, so ist der Inhalt:

$$K = \frac{h}{6}\left(G + G' + 4\,M\right).$$

Beweis. Die Grundflächen seien (Fig. 59) $ABC.. = G$ und $FGH.. = G'$, der Mittelschnitt sei $KLM.. = M$. Man zerlege den Mittelschnitt von einem in seinem Innern beliebig gewählten Punkt T aus in die Dreiecke $TKL = \triangle_1$, $TLM = \triangle_2$, u. s. f. Zerlegt man ferner das Prismatoid von demselben Punkt T aus in Pyramiden (III. Einl. 9), so zerfällt es in 3 Hauptteile:

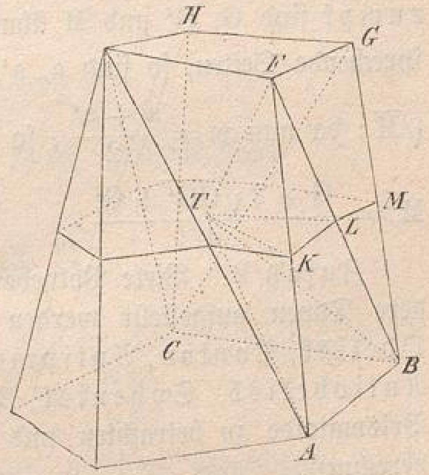

Fig. 59.

1) Pyr. $T,ABC.. = \frac{1}{3}G\frac{h}{2}$,

2) Pyr. $T,FGH.. = \frac{1}{3}G'\frac{h}{2}$,

3) alle dreiseitigen Pyramiden, deren Grundflächen die

Seitenflächen des Prismatoides bilden. Eine dieser letzteren Pyramiden sei T, ABF; von ihrer Grundfläche ABF wird durch die Seite KL des Mittelschnittes ein ähnliches Dreieck KLF mit halb so großen Seiten abgeschnitten; daher ist $\triangle$ ABF $= 4 . \triangle$ KLF, und folglich Pyr. T, ABF $= 4$. Pyr. T, KLF (III. 12. Zus. 1). Betrachtet man nun in Pyr. T, KLF das Dreieck TKL $= \triangle_1$ als Grundfläche, so ergiebt sich ihr Inhalt $= \frac{1}{3} \triangle_1 \frac{h}{2}$; folglich ist Pyr. T, ABF $= 4 . \frac{1}{3} \triangle_1 \frac{h}{2} = \frac{2}{3} \triangle_1 h$. Die Summe aller dreiseitigen Pyramiden ist daher $= \frac{2}{3} (\triangle_1 + \triangle_2 + ..) h = \frac{2}{3} M h$. — Der Inhalt des ganzen Prismatoides ist somit:

$$K = \frac{1}{3} G \frac{h}{2} + \frac{1}{3} G' \frac{h}{2} + \frac{2}{3} M h$$
$$= \frac{h}{6} \left(G + G' + 4 M\right).$$

Zusatz 1. In dieser Formel sind alle im vorangehenden bewiesenen Inhaltsformeln als spezielle Fälle enthalten (vgl. III. Einl. 12). Beim Prisma ist $G = G' = M$. — Bei der Pyramide ist $G' = 0$, $M = \frac{G}{4}$ (III. 10. b). — Beim Pyramidenrumpf sind G, G' und M ähnlich; sind also a, a', m drei entsprechende Seiten, so sind a, a', m proportioniert mit $\sqrt{G}$, $\sqrt{G'}$, $\sqrt{M}$; da nun $m = \frac{a + a'}{2}$, so ist auch $\sqrt{M} = \frac{\sqrt{G} + \sqrt{G'}}{2}$, also $M = \frac{G + 2\sqrt{GG'} + G'}{4}$.

Zusatz 2. Viele Polyederformen, die zuweilen als besondere Typen aufgestellt werden (z. B. mit den Benennungen: Obelisk, Ponton, Antiprisma, Antipyramidenrumpf, Antiobelisk, Sphenisk, Walm, u. s. f.) sind als einfache Prismatoide zu betrachten und nach der Prismatoid-Formel zu berechnen.

Als Beispiel für die Berechnung diene das schiefabgeschnittene dreiseitige Prisma. Sind von ihm geg.: die drei Parallelkanten a, b, c und der zu ihnen senkrechte Querschnitt Q, so betrachte man das Trapez mit den Seiten a und b als Grundfläche G, die Kante c als Grundfläche G'. Bezeichnet man die Entfernung der Kanten a und b mit e, und die Entfernung der Kante c von der Trapezfläche G mit h, so stellt h die Höhe des Prismatoides vor, und es ist: $Q = \frac{eh}{2}$.

Die Grundflächen des Prismatoides sind: $G = \frac{a+b}{2}e$, $G' = 0$; der Mittelschnitt M ist ein Trapez mit den Parallelseiten $\frac{a+c}{2}$ und $\frac{b+c}{2}$ und der Höhe $\frac{e}{2}$ also ist: $M = \frac{a+b+2c}{4} \cdot \frac{e}{2}$. Hiernach ergiebt sich:

$$K = \frac{h}{6}\left(\frac{a+b}{2}e + (a+b+2c)\frac{e}{2}\right)$$
$$= \frac{he}{6}(a+b+c)$$
$$= Q\frac{a+b+c}{3}.$$

Das schiefabgeschnittene dreiseitige Prisma ist also gleich einem senkrechten Prisma, dessen Grundfläche der Querschnitt, und dessen Höhe das arithmetische Mittel zwischen den Parallelkanten des schiefabgeschnittenen Prismas ist.

17—20: **Berechnung der Kugel. Guldins Regel.**

Lehrsatz 17.

Ist der Halbmesser einer Kugel $= R$, so ist

a. der Inhalt: $K = \frac{4}{3}R^3\pi$,

b. die Oberfläche: $O = 4R^2\pi$.

Beweis. a. Man denke sich auf dem Grundkreis einer von der Kugel abgeschnittenen Halbkugel einen Cylinder errichtet, dessen Höhe gleich dem Halbmesser ist. Auf dem andern Grundkreis des Cylinders, dessen Ebene die Halbkugel berührt, denke man sich einen Kegel errichtet, dessen Spitze im Mittelpunkt der Kugel liegt. Fig. 60*) stellt einen

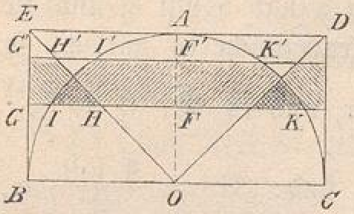

Fig. 60.

durch die gemeinschaftliche Achse OA der drei Körper gelegten Achsenschnitt vor: Halbkr. BAC ist der Achsenschnitt der Halbkugel, Rechteck BCDE — des Cylinders, Dreieck DEO — des Kegels. Die Differenz von Cylinder und Kegel ist ein Umdrehungskörper, dessen Halbmeridian $\triangle$ OBE ist.

Ein beliebiger Parallelschnitt des Cylinders, dessen Entfernung OF vom Kugelmittelpunkt $= x$ sei, erzeugt als Schnittfigur des Umdrehungskörpers einen Kreisring, als Schnittfigur der Halbkugel einen Kugelkreis. Die zwei Halbmesser des Kreisringes sind: $FG = R$, $FH = x$ (weil W. $FOH = \frac{1}{2}R$); folglich ist der Inhalt des Ringes $= (R^2 - x^2)\pi$. Der Halbmesser des Kugelkreises ist: $FI = \sqrt{OI^2 - OF^2} = \sqrt{R^2 - x^2}$, folglich sein Inhalt: $= (R^2 - x^2)\pi$. Es haben somit die von jeder beliebigen Parallelschnitt-Ebene erzeugten Schnittfiguren des Umdrehungskörpers und der Halbkugel gleichen Flächeninhalt. Hieraus folgt (nach III. 11. Zus.), daß die Halbkugel gleich dem Umdrehungskörper ist; (die im Beweise von III. 11 betrachteten, zwischen je zwei Parallelschnitten errichteten senkrechten Prismen sind bei der Halbkugel Cylinder, bei dem Umdrehungskörper cylindrische Röhren.) Nun ist der Inhalt des Cylinders $= R^3\pi$ (III. 9. a), der Inhalt des Kegels $= \frac{1}{3} R^3\pi$ (III. 13. a), daher der Inhalt des Umdrehungskörpers $= \frac{2}{3} R^3\pi$. Der Inhalt der Halbkugel hat denselben Wert; folglich ist der Inhalt der ganzen Kugel:

$$K = \frac{4}{3} R^3\pi.$$

*) Man denke sich in Fig. 60 die Linie G'H'I'F'K' sowie die Schraffierstriche hinweg.

b. Teilt man einen Halbkreis PAP′ (Fig. 61) in eine beliebige Anzahl gleicher Teile, verbindet die einzelnen Teilpunkte durch Sehnen, und fällt von den Teilpunkten die Senkrechten auf den Durchmesser PP′: so erhält man dadurch in den Halbkreis ein Vieleck einbeschrieben, das aus lauter rechtw. Trapezen und zwei rechtw. Dreiecken zusammengesetzt ist. Dreht man das ganze Gebilde um den Durchmesser PP′, so beschreibt der Halbkreis eine Kugel, jedes der zwei Dreiecke einen Kegel, und jedes Trapez einen Kegelrumpf. Sämtliche Kegelrümpfe und

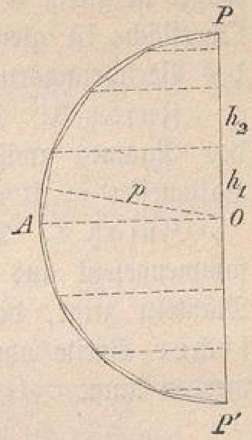

Fig. 61.

Kegel bilden zusammen einen der Kugel einbeschriebenen Umdrehungskörper. Ist p die Entfernung der gleichen Sehnen vom Mittelpunkt des Halbkreises, so sind die Mittellote der Mantellinien der einzelnen Kegelrümpfe und Kegel sämtlich gleich p. Bezeichnet man daher die Höhen der einzelnen Kegelrümpfe und Kegel mit h_1, $h_2 \ldots$, die Oberfläche des einbeschriebenen Umdrehungskörpers mit O_i und den Halbmesser der Kugel mit R, so ist (nach III. 15. b u. Zus. 1):

$$O_i = 2p\pi h_1 + 2p\pi h_2 + \ldots$$
$$= 2p\pi(h_1 + h_2 + \ldots) = 2p\pi . 2R.$$

Läßt man nun die Sehnen unendlich klein werden, so wird $p = R$, der Halbmeridian des Umdrehungskörpers geht in den Halbkreis, also die Oberfläche des Umdrehungskörpers in die Oberfläche der Kugel über; man erhält daher:

$$O = 4R^2\pi.$$

Zusatz 1. Die Inhalte zweier Kugeln verhalten sich wie die Kuben —, die Oberflächen wie die Quadrate ihrer Halbmesser. (Vgl. III. 12. Zus. 3.)

Zusatz 2. Die Oberfläche einer Kugel ist gleich dem Vierfachen eines Großkreises. — Da der Inhalt des Berührungscylinders der Kugel (im engeren Sinn, vgl. II. Einl. 9. d) $= 2R^3\pi$, sein Mantel $= 4R^2\pi$, seine Oberfläche $= 6R^2\pi$ ist

(III. 9), so kann man den Satz aussprechen: Der Inhalt der Kugel ist gleich $\frac{2}{3}$ des Inhalts ihres Berührungscylinders, ihre Oberfläche ist gleich dem Mantel oder gleich $\frac{2}{3}$ der Oberfläche des Berührungscylinders.

Zusatz 3. Der massive Inhalt einer Hohlkugel, d. i. des Raumes zwischen zwei konzentrischen Kugelflächen, deren Halbmesser $= R$ und r sind, ist $= \frac{4}{3}(R^3 - r^3)\pi$.

Zusatz 4. Die Betrachtung der Kugeloberfläche als zusammengesetzt aus unendl. vielen unendl. schmalen Kegelrumpf-Mänteln zeigt, daß ein Stück der Kugeloberfläche von endlicher Breite ohne Dehnung nicht in eine Ebene abgewickelt werden kann.

Lehrsatz 18.

a. Befindet sich in einer Kugel vom Halbmesser R eine Kugelzone, deren Höhe $= h$ ist, und deren Grundkreise die Halbmesser r und r' und die Entfernungen e und $e-h$ vom Kugelmittelpunkt haben, so ist der Inhalt der Kugelzone:

$$K_z = \frac{\pi h}{3}\left(3R^2 - 3e^2 + 3eh - h^2\right). \qquad (1)$$

$$K_z = \frac{\pi h}{6}\left(3r^2 + 3r'^2 + h^2\right). \qquad (2)$$

b. Befindet sich in einer Kugel vom Halbmesser R ein Kugelabschnitt, dessen Höhe $= h$, und dessen Grundkreis-Halbmesser $= r$ ist, so ist der Inhalt des Kugelabschnittes:

$$K_a = \frac{\pi h^2}{3}\left(3R - h\right). \qquad (3)$$

$$K_a = \frac{\pi h}{6}\left(3r^2 + h^2\right). \qquad (4)$$

c. Mit Zugrundelegung derselben Bezeichnungen ist die krumme Oberfläche der

Kugelzone und ebenso des Kugelabschnittes oder der Kugelhaube:

$$O = 2R\pi h. \qquad (5)$$

Beweis. a. Es sei (Fig. 62) FF′ die Achse, JKK′J′ der Achsenschnitt der Kugelzone, A der Pol ihrer Grundkreise, O der Mittelpunkt ihrer Kugel. Dann ist: $OA = R$, $FF' = h$, $OF' = e$, $OF = e - h$, $FJ = r$, $F'J' = r'$. Man denke sich den zu den Grundkreisen

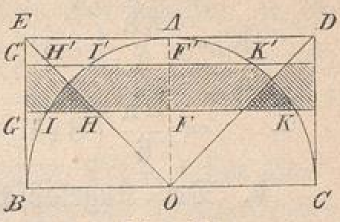

Fig. 62.

der Kugelzone parallelen Großkreis der Kugel, und über ihm die nämliche Konstruktion ausgeführt wie im Beweis von III. 17. a. Dann folgt aus III. 11. Zus. und aus dem Beweise von III. 17. a, daß die Kugelzone gleich ist dem zwischen ihren zwei Grundkreis-Ebenen enthaltenen Teile des in III. 17. a betrachteten Umdrehungskörpers. In Fig. 62 stellt das Trapez GHH′G′ den halben Achsenschnitt dieses Teiles vor. Er kann berechnet werden als Differenz eines Cylinders und eines Kegelrumpfes: der Cylinder hat die Höhe $FF' = h$ und den Halbmesser $FG = R$; der Kegelrumpf hat die Höhe $FF' = h$ und die Grundkreis-Halbmesser $F'H' = e$, $FH = e - h$. Daher ist (gemäß III. 9. a und 15. a):

$$K_z = R^2\pi h - \frac{\pi h}{3}\left(e^2 + e(e-h) + (e-h)^2\right)$$

$$= R^2\pi h - \frac{\pi h}{3}\left(3e^2 - 3eh + h^2\right)$$

$$= \frac{\pi h}{3}\left(3R^2 - 3e^2 + 3eh - h^2\right). \qquad (1)$$

Aus Gleichung (1) ergiebt sich weiter Gleichung (2), wenn R und e in r und r′ ausgedrückt werden. Zu diesem Behufe liefern die zwei rechtw. Dreiecke OFJ und OF′J′:

$$r^2 = R^2 - (e-h)^2,$$

$$r'^2 = R^2 - e^2,$$

$$\text{subtr.:} \quad r^2 - r'^2 = 2eh - h^2,$$

also: $$e\,h = \frac{r^2 - r'^2 + h^2}{2};$$

ferner folgt: $3\,R^2 - 3\,e^2 = 3\,r'^2$.

Werden diese zwei Werte in (1) eingesetzt, so erhält man:

$$K_z = \frac{\pi h}{3}\left(3\,r'^2 + \frac{3\,(r^2 - r'^2 + h^2)}{2} - h^2\right)$$

$$= \frac{\pi h}{6}\left(3\,r^2 + 3\,r'^2 + h^2\right). \qquad (2)$$

b. Der Kugelabschnitt kann als Kugelzone angesehen werden, in der ein Grundkreis $= 0$, also $e = R$ ist. Setzt man daher in den Gleichungen (1) und (2): $e = R$ und $r' = 0$, so erhält man:

$$K_a = \frac{\pi h^2}{3}\left(3\,R - h\right). \qquad (3)$$

$$K_a = \frac{\pi h}{6}\left(3\,r^2 + h^2\right). \qquad (4)$$

c. Teilt man den Bogen des halben Achsenschnittes der Kugelzone oder Kugelhaube in eine beliebige Anzahl gleicher Teile und verfährt im übrigen ganz ebenso wie im Beweise von III. 17. b, so ergiebt sich:

$$O = 2\,R\pi h. \qquad (5)$$

Anm. Sämtliche fünf Formeln gelten auch für den Fall, daß der Kugelmittelpunkt im Innern der Kugelzone oder des Kugelabschnittes liegt. Um dies für Formel (1), worin dann $h > e$ ist, nachzuweisen, teile man die Kugelzone durch den zu ihren Grundkreisen parallelen Großkreis in zwei Teile, deren Höhen e und $h - e$ sind, und addiere die nach (1) berechneten Inhalte beider Teile. — Formel (2) ergiebt sich sodann aus Formel (1) in derselben Weise wie oben (mit $h - e$ statt $e - h$).

Zusatz 1. Aus (5) folgt: *Ist einer Kugel ein Berührungscylinder umbeschrieben, so schneiden irgend zwei Parallelschnitte des Cylinders von der Kugeloberfläche und vom Cylindermantel flächengleiche Zonen ab.*

Mit Beziehung auf III. 15, Gleichung (3) folgt ferner: die krumme Oberfläche einer Kugelzone oder einer Kugelhaube ist gleich dem Mantel eines Kegelrumpfes, der mit ihr die Achse gemein hat, und dessen Mantel die Zone oder Haube nach demjenigen Parallelkreis berührt, dessen Ebene die Achse halbiert.

Zusatz 2. Ist s die geradlinige Entfernung des Pols einer Kugelhaube von der Peripherie ihres Grundkreises, so ist: $s^2 = 2Rh$, also:

$$O_a = s^2\pi$$
$$= (r^2 + h^2)\pi.$$

In Worten: die Kugelhaube ist gleich einem Kreis, dessen Halbmesser gleich der Entfernung ihres Pols von der Peripherie des Grundkreises ist.

Lehrsatz 19.

Befindet sich in einer Kugel vom Halbmesser R ein Kugelausschnitt, dessen zugehöriger Kugelabschnitt die Höhe h hat, so ist der Inhalt des Kugelausschnittes:

$$K = \tfrac{2}{3} R^2\pi h.$$

Beweis. Man denke sich in den Kugelausschnitt ein Polyeder einbeschrieben, bestehend aus lauter Pyramiden, deren Spitzen im Mittelpunkt der Kugel, und deren Grundecken sämtlich auf der Haubenfläche des Kugelausschnittes liegen. Sind $g_1, g_2 \ldots$ die Grundflächen, $h_1, h_2 \ldots$ die zugehörigen Höhen dieser Pyramiden, so ist der Inhalt des einbeschriebenen Polyeders $= \frac{1}{3}(g_1 h_1 + g_2 h_2 + \ldots)$ (III. 12. c). Werden nun die Grundflächen unendlich klein gedacht, so werden die Pyramidenhöhen $h_1, h_2 \ldots$ sämtlich $= R$, die Summe der Grundflächen wird gleich der Haube des Kugelausschnittes, und das Polyeder geht in den Kugelausschnitt über. Man hat daher:

$$K = \frac{R}{3}\cdot\left(g_1 + g_2 + \ldots\right) = \frac{R}{3}\cdot 2R\pi h$$
$$= \tfrac{2}{3} R^2\pi h.$$

Anm. Die Formel gilt auch für einen solchen Kugelausschnitt, der größer als die Halbkugel ist (vgl. II. Einl. 12. a).

Zusatz 1. Auf diesem Wege hätte auch der Inhalt der Kugel berechnet werden können; denn die Kugel kann als Kugelausschnitt angesehen werden (II. Einl. 12. c). Hiernach ist ihr Inhalt gleich einer Pyramide, deren Grundfläche gleich der Kugeloberfläche, und deren Höhe gleich dem Kugelhalbmesser ist. — Der Kugelabschnitt hätte als Differenz eines Kugelausschnittes und eines Kegels, und hierauf die Kugelzone als Differenz zweier Kugelabschnitte berechnet werden können.

Zusatz 2. Auf dieselbe Weise läßt sich das Stück einer Kugel berechnen, das von einem sphär. Vieleck und dem zugehörigen Vielkant begrenzt ist. Der Inhalt eines solchen Körpers ist gleich einer Pyramide, deren Grundfläche gleichen Flächeninhalt mit dem sphär. Vieleck hat (II. 16), und deren Höhe gleich dem Halbmesser der Kugel ist.

Zusatz 3. Zwei Kugelausschnitte gleicher Kugeln verhalten sich dem Inhalte nach wie die Höhen der zugehörigen Kugelabschnitte.

Zusatz 4. Ein Hohlkugelausschnitt (Kugelgewölbe) ist die Differenz zweier Kugelausschnitte, welche konzentrischen Kugeln angehören und die Achse und den erzeugenden Winkel gemein haben. Die Halbmesser der zwei Kugeln seien = R und r, die Höhen der zugehörigen Kugelabschnitte = H und h (die „lichte" Höhe = h). Ist nun O (Fig. 63) der Mittelpunkt der zwei Kugeln, AOB der Achsenschnitt des größeren —, aOb der Achsenschnitt des kleineren Kugelausschnittes, sind ferner CD und cd die Höhen der zugehörigen Kugelabschnitte, und zieht man AC und ac: so ist $\triangle ACD \backsim acd$, also:

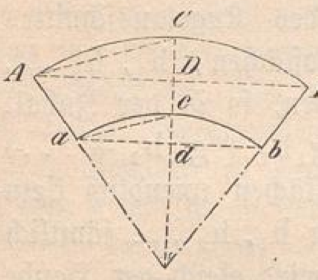

Fig. 63.

$$\frac{H}{h} = \frac{AD}{ad} = \frac{R}{r}; \quad H = \frac{Rh}{r}.$$

Der Inhalt des Hohlkugelausschnittes ist folglich:

$$K = \frac{2}{3} R^2 \pi H - \frac{2}{3} r^2 \pi h = \frac{2\pi}{3} \left(\frac{R^3 h}{r} - r^2 h \right)$$

$$= \frac{2\pi h (R^3 - r^3)}{3r}.$$

Lehrsatz 20.

Guldins Regel: Wird durch Drehung einer ebenen Figur um eine in ihrer Ebene liegende und die Figur nicht schneidende Achse ein Umdrehungskörper erzeugt, so ist:

a. dessen Inhalt gleich dem Inhalt eines senkrechten Prismas, das die gedrehte Figur zur Grundfläche, und die Länge der vom Schwerpunkt ihrer Fläche beschriebenen Kreisperipherie zur Höhe hat.

b. Die Oberfläche ist gleich dem Mantel eines senkrechten Prismas, das die gedrehte Figur zur Grundfläche, und die Länge der vom Schwerpunkt ihres Umfanges beschriebenen Kreisperipherie zur Höhe hat.

Beweis. a. Um den Satz zunächst für den Fall zu beweisen, daß die gedrehte Figur ein Dreieck ist, fälle man von dessen Ecken A, B, C (Fig. 64) die Senkrechten AA′, BB′, CC′ auf die Drehachse. Ist O ein beliebiger Punkt der Drehachse, so bezeichne man die Strecken OA′, OB′, OC′ (Abscissen) mit a, b, c, und die Senkrechten AA′, BB′, CC′ (Ordinaten) mit a′, b′, c′. Der Inhalt des Dreiecks läßt sich nun als algebraische Summe von drei rechtw. Trapezen berechnen, deren Höhen A′B′, B′C′, C′A′ sind. Der Inhalt ist also:

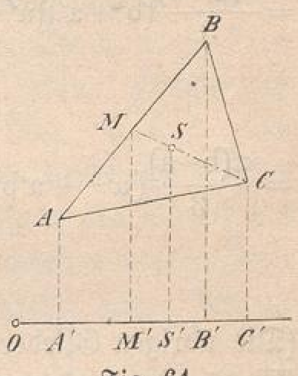

Fig. 64.

$$J = (b - a)\frac{b' + a'}{2} + (c - b)\frac{c' + b'}{2} + (a - c)\frac{a' + c'}{2},$$

und zwar gilt diese Gleichung, wie auch immer das Dreieck gegen die Drehachse liegen mag.

Der Flächenschwerpunkt S des Dreiecks liegt auf einer der

Schwerlinien CM so, daß CS = 2 SM ist. Um seine Entfernung SS' von der Drehachse zu finden, benütze man den Satz der ebenen Geom., daß, wenn in einem Trapez ABB'A' eine zu den parallelen Seiten AA' und BB' parallele Gerade MM' die nicht parallelen Seiten AB und A'B' im Verhältnis $\frac{AM}{MB} = \frac{\alpha}{\beta}$ teilt: $MM' = \frac{\beta \,.\, AA' + \alpha \,.\, BB'}{\alpha + \beta}$ ist. Mit Hilfe dieses Satzes erhält man:

$$SS' = \frac{a' + b' + c'}{3}.$$

Dies ist nun der Halbmesser des vom Schwerpunkt beschriebenen Kreises. Der Inhalt des senkrechten Prismas, welches das Dreieck zur Grundfläche und die Länge der Kreisperipherie zur Höhe hat, ist daher:

$$K = J \,.\, 2\, SS' \pi$$

$$= \left[(b-a)\frac{b'+a'}{2} + (c-b)\frac{c'+b'}{2} + (a-c)\frac{a'+c'}{2}\right]\frac{2(a'+b'+c')\pi}{3}$$

$$= \frac{\pi(b-a)}{3}(b'+a')(a'+b'+c') + \frac{\pi(c-b)}{3}(c'+b')(a'+b'+c') + \frac{\pi(a-c)}{3}(a'+c')(a'+b'+c')$$

$$= \frac{\pi(b-a)}{3}(a'^2 + a'b' + b'^2) + \frac{\pi(c-b)}{3}(b'^2 + b'c' + c'^2) + \frac{\pi(a-c)}{3}(c'^2 + c'a' + a'^2).$$

(Die übrigen Glieder heben sich weg.) Dies stellt aber (nach III. 15. a) die algebraische Summe der Inhalte der von den einzelnen Seiten des Dreiecks beschriebenen Kegelrümpfe, d. h. den Inhalt des von dem Dreieck beschriebenen Umdrehungskörpers vor. Der Satz ist also bewiesen für ein Dreieck.

Ist die gedrehte Figur ein Viereck, so teile man dasselbe durch eine Diagonale in zwei Dreiecke, deren Inhalte $= i_1$ u. i_2, und deren Schwerpunkte s_1 u. s_2 seien. Man erhält dann den Schwerpunkt S des Vierecks, wenn man die Strecke $s_1 s_2$ im Verhältnis $\frac{s_1 S}{S s_2} = \frac{i_2}{i_1}$ teilt. Fällt man daher von s_1, s_2, S die Senkrechten $s_1 s_1'$, $s_2 s_2'$, SS′ auf die Drehachse, so ist nach dem oben erwähnten Trapez-Satze:

$$SS' = \frac{i_1 . s_1 s_1' + i_2 . s_2 s_2'}{i_1 + i_2};$$

folglich ist der Inhalt des senkrechten Prismas, welches das Viereck zur Grundfläche und die Länge der von SS′ beschriebenen Kreisperipherie zur Höhe hat:

$$K = (i_1 + i_2) \frac{2\,(i_1 . s_1 s_1' + i_2 . s_2 s_2')\,\pi}{i_1 + i_2}$$
$$= i_1 . 2\,s_1 s_1'\pi + i_2 . 2\,s_2 s_2'\pi.$$

Dies stellt aber (nach dem ersten Teil des Beweises) die Summe der von den zwei einzelnen Dreiecken beschriebenen Umdrehungskörper, d. h. den Inhalt des von dem ganzen Viereck beschriebenen Umdrehungskörpers vor.

Ist die gedrehte Figur ein Fünfeck, so teile man dasselbe durch eine Diagonale in ein Dreieck und ein Viereck, deren Inhalte = i_1 u. i_2, deren Schwerpunkte s_1 u. s_2 seien, und mache den nämlichen Schluß wie oben. Ebenso geht man dann vom Fünfeck zum Sechseck über, u. s. f. Der Satz gilt also für ein Vieleck von jeder beliebigen Seitenzahl. — Da ferner eine krummlinige Figur als Vieleck von unendl. vielen unendl. kleinen Seiten angesehen werden kann, so gilt der Satz auch, wenn die gedrehte Figur krummlinig ist.

b. ABCDE . . . (Fig. 65) sei das gedrehte Vieleck. Man erhält den Schwerpunkt seines Umfanges dadurch, daß man die Seiten AB, BC, CD, DE . . . in den Punkten H, J, K, L . . . halbiert, HJ zieht und HJ im Punkt O im Verhältnis $\frac{HO}{OJ} = \frac{BC}{AB}$ teilt, ferner OK zieht und OK im Punkt P im Verhältnis $\frac{OP}{PK} = \frac{CD}{AB + BC}$ teilt, ferner PL zieht und

PL im Punkt Q im Verhältnis DE zu AB + BC + CD teilt, u. s. f. Der letzte Teilpunkt S ist dann der Schwer-

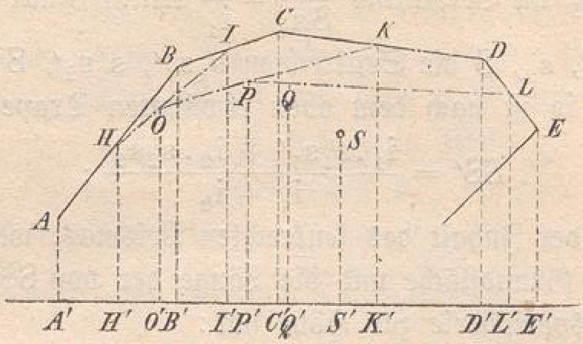

Fig. 65.

punkt. Fällt man von sämtlichen Punkten die Senkrechten AA', BB', ... HH', JJ', ... OO,' PP', ... SS' auf die Drehachse und bezeichnet deren Längen mit a', b', ... h', i', ... o', p', ... s': so ist nach dem in a) erwähnten Trapez-Satze:

$$o' = \frac{AB \,.\, h' + BC \,.\, i'}{AB + BC},$$

$$p' = \frac{(AB + BC)\, o' + CD \,.\, k'}{AB + BC + CD} = \frac{AB \,.\, h' + BC \,.\, i' + CD \,.\, k'}{AB + BC + CD},$$

$$q' = \frac{(AB + BC + CD) p' + DE \,.\, l'}{AB + BC + CD + DE} = \frac{AB.h' + BC.i' + CD.k' + DE.l'}{AB + BC + CD + DE},$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$s' = \frac{AB \,.\, h' + BC \,.\, i' + CD \,.\, k' + \ldots}{AB + BC + CD + \ldots}$$

$$= \frac{AB \,.\, \frac{a' + b'}{2} + BC \,.\, \frac{b' + c'}{2} + CD \,.\, \frac{c' + d'}{2} + \ldots}{AB + BC + CD + \cdots}.$$

Der Mantel des senkrechten Primas, welches das Vieleck zur Grundfläche und die Länge der von S beschriebenen Kreisperipherie zur Höhe hat, ist nun:

$$M = (AB + BC + CD + \ldots) \,.\, 2\, s'\pi$$
$$= (a' + b')\pi \,.\, AB + (b' + c')\pi \,.\, BC + (c' + d')\pi \,.\, CD + \ldots.$$

Dies stellt aber (nach III. 15. b) die Summe der Mäntel der von den einzelnen Seiten des Vielecks beschriebenen Kegelrümpfe, d. h. die Oberfläche des Umdrehungskörpers vor. Der Satz ist also bewiesen für ein Vieleck von beliebig vielen Seiten. Da ferner eine krummlinige Figur als Vieleck von unendl. vielen unendl. kleinen Seiten betrachtet werden kann, so gilt der Satz auch, wenn die gedrehte Figur krummlinig ist.

Anm. Beide Beweise bleiben gültig, auch wenn eine Seite des gedrehten Vielecks in die Drehachse fällt. — Satz b gilt auch für den Fall, daß die gedrehte Figur ein nicht geschlossener polygonaler Zug (oder Kurvenbogen) ist.

Zusatz. Mittels dieser Sätze läßt sich Inhalt und Oberfläche von jedem Umdrehungskörper berechnen, sobald der Flächen-Schwerpunkt und Umfangs-Schwerpunkt des Halbmeridians bekannt ist. (Z. B. bestimme man hiernach Inhalt, Mantel und Oberfläche von Cylinder, Kegel und Kegelrumpf.) Die Sätze können aber auch umgekehrt verwendet werden, um die Schwerpunkte einer ebenen Figur zu bestimmen, sobald der Rauminhalt, bezw. die Oberfläche eines Körpers bekannt ist, der durch Drehung der Figur entstanden gedacht werden kann. Um z. B. Flächen-Schwerpunkt, Bogen-Schwerpunkt und Umfangs-Schwerpunkt eines Halbkreises zu bestimmen, verwende man die Kugel. Alle drei Punkte liegen auf dem zum Durchmesser des Halbkreises senkrechten Halbmesser. Bezeichnet man ihre Entfernungen vom Durchmesser bezw. mit x_f, x_b, x_u, und ist R der Halbmesser des Halbkreises, so hat man:

$$\frac{R^2\pi}{2} \cdot 2x_f\pi = \frac{4}{3}R^3\pi, \text{ woraus: } x_f = \frac{4R}{3\pi}.$$

$$R\pi \,.\, 2x_b\pi = 4R^2\pi, \quad \text{„} \quad x_b = \frac{2R}{\pi}.$$

$$(R\pi + 2R) \,.\, 2x_u\pi = 4R^2\pi, \quad \text{„} \quad x_u = \frac{2R}{2+\pi}.$$

C. Aufgaben.

Vorbemerkung.

Bei der algebraischen Behandlung von stereometrischen Aufgaben tritt nicht selten der Fall ein, daß das Resultat nur näherungsweise mit Zirkel und Lineal konstruiert werden kann, oder daß man sich mit dem bloßen Auftragen des numerischen Rechnungsresultates begnügen muß. Denn es lassen sich mit Zirkel und Lineal nur solche algebraische Ausdrücke konstruieren, die rational sind oder Quadratwurzeln enthalten, nicht aber solche mit Kubikwurzeln, wie sie bei stereometrischen Aufgaben häufig vorkommen. Ferner läßt sich die Länge eines Kreisbogens auf einer Geraden oder auf einer andern Kreislinie nur mittels einer Näherungskonstruktion auftragen.

1—10: Beispiele von Aufgaben mit algebraischer Lösung.

Aufgabe 1.

Die Höhe eines Cylinders zu bestimmen, dessen Halbmesser gegeben ist, und dessen Mantel einen geg. Flächeninhalt habe.

Auflösung. Der geg. Halbmesser sei r, der Flächeninhalt q^2, die gesuchte Höhe werde mit x bezeichnet. Dann muß sein. (III. 9. b):

$$2 r \pi x = q^2, \qquad \text{woraus folgt:}$$

$$x = \frac{q^2}{2 r \pi}.$$

Man hat daher den Kreis vom Halbmesser r zu rektifizieren, und zu seinem Umfang und q die dritte Proportionale zu bestimmen: so ist diese die gesuchte Höhe. Oder man berechnet aus den geg. Zahlenwerten von r und q^2 den Zahlenwert von x.

Aufgabe 2.

Einen Cylinder zu konstruieren, dessen Höhe gegeben ist, und der mit einem geg. Cylinder gleichen Rauminhalt habe.

Auflösung. Der geg. Cylinder habe den Halbmesser r

und die Höhe h, der gesuchte Cylinder habe die geg. Höhe h′ und den Halbmesser x. Dann muß sein (III. 9. a):

$$x^2 \pi h' = r^2 \pi h,$$

$$x^2 = \frac{r^2 h}{h'}.$$

Dieses Resultat, in der Form: $x^2 = r \cdot \frac{rh}{h'}$ geschrieben, besagt, daß x das geom. Mittel ist zwischen r und der vierten Proportionalen zu h′, r und h. Hiernach hat man für x folgende Konstruktion: Ist in einem Achsenschnitt des geg. Cylinders (Fig. 66) AB = h, BC = r, so trage man auf BA die Strecke BD = h′ auf, ziehe DC, und durch A die Parallele zu DC, welche BC in E schneidet; dann ist BE die vierte Proportionale zu h′, r und h. Beschreibt man hierauf über BE als Durchmesser einen Halbkreis, welcher die auf BE in C errichtete Senkrechte in F schneidet: so ist BF das geom. Mittel zwischen r und BE, also = x. Trägt man daher auf BE die Strecke BG = BF auf, so ist das Rechteck aus BD und BG das erzeugende Rechteck des gesuchten Cylinders.

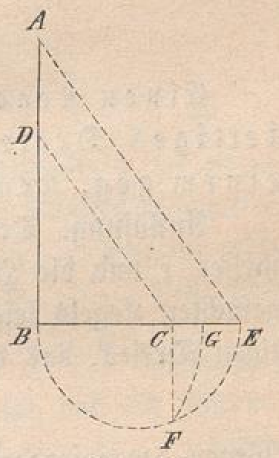

Fig. 66.

Aufgabe 3.

Einen Würfel zu konstruieren, der gleich einem geg. Quader sei.

Auflösung. Sind l, m, n die dreierlei Kanten des Quaders, und bezeichnet x die Kante des gesuchten Würfels, so muß sein (III. 6):

$$x^3 = l\,m\,n, \qquad \text{woraus folgt:}$$

$$x = \sqrt[3]{l\,m\,n}.$$

Hiefür giebt es keine Konstruktion mit Zirkel und Lineal. Man muß daher l, m, n in Zahlen von Längeneinheiten ausdrücken, aus ihrem Produkt die Kubikwurzel ausziehen, die gefundene Zahl von Längeneinheiten auf einer Geraden auftragen, und aus der erhaltenen Strecke als Kante den gesuchten Würfel konstruieren.

Zusatz. Auf dieselbe Weise kann jeder Körper, dessen Inhalt sich überhaupt berechnen läßt, in einen Würfel verwandelt werden.

Aufgabe 4.

Einen Kegel zu ermitteln, der ein gleichseitiges Dreieck als Achsenschnitt habe und einem geg. Kegel gleich sei.

Auflösung. Der geg. Kegel habe den Grundkreis-Halbmesser r und die Höhe h; die entsprechenden Strecken des gesuchten Kegels seien x und y. Dann ist in dem gleichseitigen Dreieck, das den Achsenschnitt des letzteren vorstellt:

$$y = x\sqrt{3}.$$

Wegen der geforderten Gleichheit der zwei Kegel muß ferner sein (III. 13. a):

$$\tfrac{1}{3}x^2\pi y = \tfrac{1}{3}r^2\pi h.$$

Aus diesen beiden Gleichungen folgt:

$$x = \sqrt[3]{\frac{r^2h}{\sqrt{3}}} \qquad y = \sqrt[3]{3r^2h}.$$

Hieraus bestimmen sich x und y als Zahlenwerte.

Aufgabe 5.

Eine Pyramide durch Parallelschnitte in n gleiche Teile zu teilen.

Auflösung. Die Höhe der Pyramide sei h. Die gesuchten Parallelschnitte, die von der Spitze die Entfernungen x_1, x_2 ... (x_1 die kleinste) haben mögen, schneiden von der Pyramide Teil-Pyramiden ab, die der ganzen Pyramide ähnlich sind. Bezeichnet man also ihre Inhalte bezw. mit p_1, p_2 . . ., und den Inhalt der ganzen Pyramide mit P, so ist (III. 12. Zus. 2):

$$\frac{x_1^3}{h^3} = \frac{p_1}{P} = \frac{1}{n},$$

$$\frac{x_2^3}{h^3} = \frac{p_2}{P} = \frac{2}{n}, \text{ u. s. f.}$$

folglich:

$$x_1 = h\sqrt[3]{\frac{1}{n}},$$

$$x_2 = h\sqrt[3]{\frac{2}{n}}, \text{ u. s. f.}$$

Zusatz 1. Wird eine beliebige Seitenkante k der Pyramide von den einzelnen Parallelschnitten in Punkten geschnitten, deren Entfernungen von der Spitze = y_1, y_2 . . . sind, so geben die obigen Gleichungen die Werte von y_1, y_2 . . ., wenn man in ihnen h durch k ersetzt.

Zusatz 2. Da die Werte von x_1, x_2 . . . unabhängig von der Größe der Grundfläche sind, so folgt, daß alle Pyramiden von gleichen Höhen gleiche Werte von x_1, x_2 . . . haben, und daß bei Pyramiden von ungleichen Höhen die Werte von x_1, x_2 . . . das nämliche Verhältnis haben.

Aufgabe 6.

Einen Pyramidenrumpf durch Parallelschnitte in n gleiche Teile zu teilen.

Auflösung. Die beiden Grundflächen seien G und g, die Höhe sei h. Ergänzt man den Pyramidenrumpf zur Pyramide und bezeichnet die Höhe der ganzen Pyramide mit X, diejenige der Ergänzungspyramide mit x, so ist (vgl. Bew. von III. 14):

$$X = h\frac{\sqrt{G}}{\sqrt{G}-\sqrt{g}}, \quad x = h\frac{\sqrt{g}}{\sqrt{G}-\sqrt{g}}.$$

Die Entfernungen der Parallelschnitte von der Spitze der Ergänzungspyramide seien $x_1, x_2 \ldots$ (x_1 die kleinste). Bezeichnet man nun die Inhalte der einzelnen Pyramiden, deren Höhen $x, x_1, x_2 \ldots X$ sind, bezw. mit $p, p_1, p_2 \ldots P$, so hat man die Gleichungen:

$$\frac{p_1 - p}{P - p} = \frac{1}{n}, \quad \frac{p_2 - p}{P - p} = \frac{2}{n}, \quad \text{u. s. f.}$$

Da aber die Pyramiden alle unter sich ähnlich sind, so sind sie den Größen $x^3, x_1{}^3, x_2{}^3 \ldots X^3$ proportioniert (III. 12. Zus. 2). Daher ist auch:

$$\frac{x_1{}^3 - x^3}{X^3 - x^3} = \frac{1}{n}, \quad \frac{x_2{}^3 - x^3}{X^3 - x^3} = \frac{2}{n}, \quad \text{u. s. f.}$$

Hieraus folgt:

$$x_1{}^3 = \frac{1}{n}\left(X^3 - x^3\right) + x^3 = \frac{X^3 + (n-1)x^3}{n},$$

oder, wenn man die obigen Werte von X und x einsetzt:

$$x_1{}^3 = \frac{h^3 (G\sqrt{G} + (n-1)g\sqrt{g})}{n(\sqrt{G} - \sqrt{g})^3},$$

$$x_1 = \frac{h}{\sqrt{G} - \sqrt{g}} \sqrt[3]{\frac{G\sqrt{G} + (n-1)\,g\sqrt{g}}{n}}.$$

Ebenso findet man:

$$x_2 = \frac{h}{\sqrt{G} - \sqrt{g}} \sqrt[3]{\frac{2G\sqrt{G} + (n-2)\,g\sqrt{g}}{n}}.$$

u. s. f.

Zusatz 1. Zus. 1 der vor. Aufg. findet auch auf diese Aufgabe Anwendung.

Zusatz 2. Ist der Körper ein Kegelrumpf, dessen Grundkreis-Halbmesser = R und r sind, so ergiebt sich:

$$x_1 = \frac{h}{R - r} \sqrt[3]{\frac{R^3 + (n-1)r^3}{n}}.$$

$$x_2 = \frac{h}{R - r} \sqrt[3]{\frac{2\,R^3 + (n-2)r^3}{n}}. \quad \text{u. s. f.}$$

Aufgabe 7.

Die Abwicklungsfigur des Mantels eines Kegelrumpfes zu konstruieren, dessen Achsenschnitt gegeben ist.

Auflösung. ABCD (Fig. 67) sei der halbe geg. Achsenschnitt des Kegelrumpfes, AB die Achse. Schneiden sich BA und CD verlängert in S, so ist S die Spitze des Ergänzungskegels. Beschreibt man ferner aus B mit Halbmesser BC den Quadranten BCE, so stellt dieser den vierten Teil des unteren Grundkreises des Kegelrumpfes vor. Man schlage nun aus S mit den Halbmessern SC und SD Kreise, trage die Länge des Quadrantenbogens CE mit Hilfe einer kleinen Zirkelöffnung nach und nach auf die Peripherie des mit SC beschriebenen Kreises von C nach F auf, und mache auf derselben Peripherie den Bogen CG = 4 CF. Zieht man dann SG, welche die Peripherie des mit SD beschriebenen Kreises in H schneidet, so ist der Kreisring-Ausschnitt CDHG die verlangte Abwicklungsfigur (III. Einl. 8. d und 10. c).

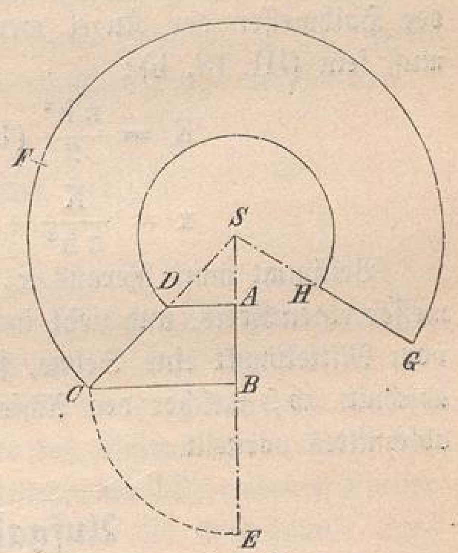

Fig. 67.

Anm. Sind die Bestimmungselemente des Achsenschnittes in Zahlen von Längeneinheiten gegeben, so kann man den Punkt G auch mit Hilfe des Transporteurs finden. Ist nämlich BC = r, AD = r′, DC = s, so ist: $SC = s \frac{r}{r - r'}$ (vgl. Bew. von III. 15. b).

Beträgt nun der (in Fig. 67 überstumpfe) Zentriwinkel CSG x Grade, so ist: $\frac{x}{360} = \frac{2 r \pi}{2 SC \pi} = \frac{r - r'}{s}$,

$$x = \frac{r - r'}{s} 360.$$

Aufgabe 8.

Einen Kugelabschnitt zu konstruieren, dessen Höhe und Inhalt gegeben sind.

Auflösung. Der geg. Inhalt sei K, die geg. Höhe h; der Halbmesser der Kugel werde mit x bezeichnet. Dann muß sein (III. 18. b):

$$K = \frac{\pi h^2}{3} (3x - h), \quad \text{woraus folgt:}$$

$$x = \frac{K}{\pi h^2} + \frac{h}{3}.$$

Bestimmt man hieraus x, beschreibt mit x als Halbmesser einen Kreis, und zieht in ihm in der Entfernung $x - h$ vom Mittelpunkt eine Sehne, so schneidet diese einen Kreisabschnitt ab, welcher den Achsenschnitt des gesuchten Kugelabschnittes vorstellt.

Aufgabe 9.

Einen Kugelausschnitt zu konstruieren, dessen Inhalt und Haubenfläche gegeben sind.

Auflösung. Der geg. Inhalt sei K, die geg. Haubenfläche O; der Halbmesser der zugehörigen Kugel werde mit x, die Höhe der Kugelhaube mit y bezeichnet. Dann muß sein (III. 19 und 18. c.):

$$K = \tfrac{2}{3} x^2 \pi y, \qquad O = 2 x \pi y.$$

Hieraus folgt:

$$x = 3 \frac{K}{O}, \qquad y = \frac{O^2}{6 K \pi}.$$

Ist also $O = p^2$, $K = q^3$, und sind p und q als Strecken geg., so hat man die zwei Gleichungen:

$$x = 3\frac{q^3}{p^2} = 3\frac{\frac{q^4}{p^2}}{q}, \quad y = \frac{p^2}{2x\pi},$$

welche folgende Konstruktion veranlassen: Man bestimme (mittels rechtw. Dreiecke aus Segm. und Höhe) zu p und q die dritte Proportionale r, hierauf zu q und r die dritte Proportionale s: so ist $x = 3s$. Man beschreibe sodann mit Halbm. $OA = x$ einen Kreis und bestimme zu dessen Umfang und zu p die dritte Proportionale y. Schneidet man nun von Halbm. OA ein Stück $AB = y$ ab, legt durch B die zu OA senkrechte Sehne CD, und zieht OC u. OD: so ist OCAD der Achsenschnitt des verlangten Kugelausschnittes.

Aufgabe 10.

Einen Wulst*) zu ermitteln, der den gleichen Inhalt und eine n-mal so große Oberfläche habe wie eine geg. Kugel.

Auflösung. Der Halbmesser der geg. Kugel sei R, der Halbmesser des Meridiankreises des Wulstes werde mit x, der Halbmesser des von seinem Mittelpunkt beschriebenen Kreises („Mittelkreises") mit y bezeichnet. Da der Mittelpunkt eines Kreises sowohl dessen Flächen-Schwerpunkt als Umfangs-Schwerpunkt vorstellt, so muß sein (III. 20):

$$x^2\pi \, . \, 2y\pi = \tfrac{4}{3}R^3\pi,$$
$$2x\pi \, . \, 2y\pi = n \, . \, 4R^2\pi.$$

Aus diesen zwei Gleichungen folgt:

$$x = \frac{2}{3n}R, \qquad y = \frac{3n^2}{2\pi}R.$$

Hiernach kann x genau —, y durch eine Näherungskonstruktion gefunden werden.

---

*) D. i. ein Umdrehungskörper, der durch Drehung eines Kreises um eine in seiner Ebene liegende und ihn nicht schneidende Gerade entsteht.

D. Anhang

von Lehrsätzen und Aufgaben.

I. Lehrsätze.

1—5: Allgemeine Polyedersätze.

1. a. Die 3-fache Flächenzahl oder Eckenzahl eines Polyeders liegt zwischen der 2-fachen Kantenzahl und der um 6 vermehrten einfachen Kantenzahl:

$$2K \geqq 3F \geqq K + 6.$$

$$2K \geqq 3E \geqq K + 6.$$

(Da jede Fläche mindestens 3-seitig und jede Ecke mindestens 3-kantig ist, so ist W oder $2K \geqq 3F$ und $\geqq 3E$. Das übrige durch Kombinierung dieser Ungleichungen mit III. 1.)

b. Die 2-fache Flächenzahl eines Polyeders liegt zwischen der um 8 verminderten 4-fachen Eckenzahl und der um 4 vermehrten einfachen Eckenzahl. — Die 2-fache Eckenzahl eines Polyeders liegt zwischen der um 8 verminderten 4-fachen Flächenzahl und der um 4 vermehrten einfachen Flächenzahl:

$$4E - 8 \geqq 2F \geqq E + 4.$$

$$4F - 8 \geqq 2E \geqq F + 4.$$

2. a. Es giebt kein Polyeder, in dem alle Flächen mehr als 5-seitig sind, oder in dem alle Ecken mehr als 5-kantig sind. (III. Anh. 1. a.)

b. Es giebt kein Polyeder mit 7 Kanten. (III. Anh. 1. a.)

† 3. Bildet man von einem Polyeder ein ebenes Netz und fügt dieses wieder zu einer geschlossenen Polyederoberfläche so zusammen, daß je zwei Randlinien des Netzes, die vorher zu einer Kante vereinigt waren, wieder zu einer Kante vereinigt werden, daß aber die vorherige Außenseite der Polyederoberfläche nunmehr zur Innenseite wird: so ist das neu entstandene Polyeder zu dem ursprünglichen symmetrisch. Aus jedem ebenen Netz lassen sich also zwei symmetrische Polyederformen herstellen.

4. a. Zieht man von sämtlichen Ecken eines Polyeders in derselben Richtung parallele und gleiche Strecken, so bestimmen

deren Endpunkte die Ecken eines zweiten Polyeders, das mit dem ersten kongruent ist.

b. Zieht man von den Ecken eines Polyeders nach einem Punkte Strecken und verlängert jede über den Punkt um sich selbst, so bestimmen die Endpunkte der Verlängerungen die Ecken eines zweiten Polyeders, das mit dem ersten symmetrisch ist.

c. Fällt man von den Ecken eines Polyeders die Senkrechten auf eine gerade Linie und verlängert jede über ihren Fußpunkt um sich selbst, so bestimmen die Endpunkte der Verlängerungen die Ecken eines zweiten Polyeders, das mit dem ersten kongruent ist.

† 5. a. Zieht man von einem Punkt S nach den Ecken eines Polyeders Strecken und teilt diese sämtlich in dem nämlichen Verhältnis, so bestimmen die Teilpunkte die Ecken eines zweiten Polyeders, das mit dem ersten ähnlich ist, und zwar gleichstimmig ähnlich oder ungleichstimmig ähnlich, je nachdem die Teilpunkte auf derselben Seite vom Punkt S angenommen werden, auf der das ursprüngl. Polyeder liegt, oder auf der entgegengesetzten Seite. Zwei entsprechende Kanten der zwei Polyeder verhalten sich wie die Entfernungen zweier entsprechenden Ecken vom Punkt S. (Vgl. II. Anh. 18.)

† b. Der Satz: III. 10. Zus. 2 gilt auch für ähnliche und ähnlich liegende Polyeder. Je nachdem die zwei Polyeder gleichstimmig ähnlich oder ungleichstimmig ähnlich sind, sind bei der ähnlichen Lage je zwei entsprechende Kanten gleich-gerichtet oder entgegengesetzt-gerichtet, und ist der Ähnlichkeitspunkt ein äußerer oder ein innerer.

c. Drei ähnliche und ähnlich liegende Vielecke oder Polyeder haben zusammen drei Ähnlichkeitspunkte (und zwar entweder drei äußere oder einen äußeren und zwei innere), welche in gerader Linie liegen (äußere oder innere Ähnlichkeitsachse). (Vgl. II. Anh. 19. — Man beweise, daß die drei Ähnlichkeitspunkte in zwei Ebenen, und folglich in deren Schnittlinie liegen müssen.)

6—13: Prisma.

6. a. Der Rauminhalt eines Würfels, dessen Kante die Summe zweier Strecken a und b ist, ist gleich dem Würfel aus

der Kante a, plus dem dreifachen Quader aus a, a und b, plus dem dreifachen Quader aus a, b und b, plus dem Würfel aus b.

b. Analoger Satz für einen Würfel, dessen Kante die Differenz zweier Strecken ist.

7. a. In jedem Quader ist das Quadrat einer Diagonale gleich der Summe der Quadrate dreier von einer Ecke ausgehenden Kanten.

b. Projiziert man eine Strecke auf die drei Kanten eines Oktanten (indem man von den Endpunkten der Strecke die Senkrechten auf die Kanten fällt), so ist das Quadrat der Strecke gleich der Summe der Quadrate ihrer drei Projektionen.

8. a. Die Summe der Quadrate der vier Diagonalen eines Parallelflachs ist gleich der Summe der Quadrate der zwölf Kanten.

b. Die Summe der Quadrate der sechs Diagonalflächen eines Parallelflachs ist gleich der doppelten Summe der Quadrate der sechs Seitenflächen. (Man stelle zuerst eine Beziehung auf zwischen 2 Diagonalflächen und 4 Seitenflächen, die zwischen den nämlichen vier Parallelkanten liegen.)

9. a. Jede durch den Mittelpunkt eines Parallelflachs oder den Mittelpunkt der Achse eines regul. Prismas von gerader Seitenzahl (Cylinders) gezogene und von der Oberfläche begrenzte Strecke wird in jenem Mittelpunkt halbiert.

b. Jede durch den Mittelpunkt gelegte Schnittebene teilt den Körper in zwei symmetrische Teile.

c. Schneidet man einen Cylinder durch zwei beliebige Ebenen (die sich selbst nicht innerhalb des Cylinders schneiden), so hat das zwischen ihnen enthaltene Cylinderstück gleichen Inhalt und gleiche Mantelfläche mit einer Zone des Cylinders, die das Stück der Achse zwischen den zwei Schnittebenen zur Höhe hat. (Vgl. auch III. Anh. 12. c.)

10. a. Jedem Quader läßt sich eine Kugel um beschreiben.

b. Jedem Rhomboeder*) läßt sich eine Kugel ein beschreiben.

11. a. Jedes Rhomboeder kann in ein reguläres sechsseitiges Prismatoid und zwei kongruente dreiseitige Pyramiden, die

---

*) Unter „Rhomboeder" ist hier und im folgenden stets ein Rhomboeder im engeren Sinne (vgl. III. Einl. 5. b) verstanden.

mit dem Prismatoid die Grundflächen gemein haben, zerlegt werden. Die Seitenflächen des Prismatoids und der Pyramiden sind kongruent, die Höhen sind gleich und fallen in die Hauptdiagonale des Rhomboeders. Das Prismatoid ist $= \frac{2}{3}$, jede Pyramide $= \frac{1}{6}$ des Rhomboeders.

b. Die Mitten von sechs Kanten eines Würfels, die nicht durch die nämlichen zwei gegenüberliegenden Ecken gehen, liegen in einer Ebene und bilden die Ecken eines regulären Sechsecks.

12. a. Schneidet man ein Prisma durch eine beliebige Ebene, so liegt der Flächen-Schwerpunkt der Schnittfigur auf der Verbindungslinie der Schwerpunkte der zwei Grundflächen. (Man bew. den Satz zuerst für ein dreiseitiges Prisma, zerlege ein mehrseitiges Prisma in lauter dreiseitige, und konstr. die Schwerpunkte der Flächen wie im Bew. von III. 20. a. — Die Teildreiecke der Schnittfigur sind nach I. Anh. 31 denen der Grundflächen proportioniert.)

b. Der Schwerpunkt einer ebenen Figur projiziert sich als Schwerpunkt der Projektionsfigur.

c. Der Inhalt eines schiefabgeschnittenen mehrseitigen Prismas ist gleich dem Inhalt eines senkrechten Prismas, das den gleichen Querschnitt, und die Strecke zwischen den Schwerpunkten der Endpolygone zur Höhe hat. (Man berechne den Inhalt mittels III. 16. Zus. 2, und die Strecke zwischen den zwei Schwerpunkten mittels des S. 164 erwähnten Trapez-Satzes.)

13. Ein Prisma wird von zwei Ebenen, deren Medianebene senkrecht zu den Seitenkanten ist, nach kongruenten Vielecken geschnitten (Wechselschnitte).

14—29: Vierflach. Schwerpunkt.

14. Die Summe der sechs Keile eines Vierflachs liegt zwischen 4 R und 6 R. (Die Summe der sphär. Exzesse der Dreikante an den vier Ecken muß > 0 und < 4 R sein. Zum Bew. bringe man die Spitzen der vier Dreikante durch Parallelverschiebung in den Mittelpunkt einer Kugel.)

15. Die Mittellotebenen der 6 Kanten eines Vierflachs schneiden sich zu je dreien nach 4 Geraden (den Mittelloten der Flächen) und gehen alle 6 durch einen Punkt, welcher

der Mittelpunkt der dem Vierflach umbeschriebenen Kugel ist.

16. a. Die inneren Medianebenen der sechs Kanten eines Vierflachs schneiden sich zu je dreien nach vier Geraden (den 4 inneren Medianen) und gehen alle sechs durch einen Punkt, welcher der Mittelpunkt der dem Vierflach einbeschriebenen Kugel ist. (II. Anh. 36.)

b. Die äußeren Medianebenen dreier in einer Fläche liegenden Kanten und die inneren Medianebenen der drei übrigen Kanten schneiden sich zu je dreien nach vier Geraden und gehen alle sechs durch einen Punkt, welcher der Mittelpunkt der dem Vierflach an jene Fläche anbeschriebenen Kugel ist. Von den vier Geraden ist eine eine innere Mediane, die drei andern sind äußere Medianen. Es giebt 12 äußere Medianen und 4 anbeschriebene Kugeln.

c. Die inneren Medianebenen zweier gegenüberliegenden Kanten und die äußeren Medianebenen der vier übrigen Kanten schneiden sich zu je dreien nach vier Geraden (äußeren Medianen) und gehen alle sechs durch einen Punkt. Dieser ist der Mittelpunkt einer Berührungskugel, die dem zweieckigen Scheitelkeilraum des Vierflachs an einer der zwei gegenüberliegenden Kanten einbeschrieben ist. Es giebt im allgem. 3 solcher Kugeln.

d. Von den 4 inneren und 12 äußeren Medianen eines Vierflachs schneiden sich also a) die 4 inneren —, b) 4mal 3 äußere und 1e innere —, c) 3mal 4 äußere in je einem Punkt.

(Eine analoge Lage wie die 8 Kugelmittelpunkte haben die 8 Punkte in I. Anh. Aufg. 10. b.)

17. a. Jede (innere oder äußere) Medianebene einer Kante eines Vierflachs teilt die gegenüberliegende Kante in zwei Teile, die sich verhalten wie die der ersten Kante anliegenden Flächen. (III. 12. Zus. 1 und I. Anh. 20.)

b. Jede (innere oder äußere) Mediane eines Vierflachs schneidet die gegenüberliegende Fläche in einem Punkte, dessen Verbindungslinien mit den drei Ecken der Fläche diese in drei Teile teilen, die sich verhalten wie die drei anliegenden Flächen.

18. a. Läßt sich in einem Vierflach eine Kugel beschreiben, die sämtliche sechs Kanten innerhalb der Kanten berührt, so sind die drei Summen je zweier Gegenkanten gleich.

b. Sind die drei Summen je zweier Gegenkanten eines Vierflachs gleich, so schneiden sich die Senkrechten, die auf den vier Flächen in den Mittelpunkten ihrer einbeschriebenen Kreise errichtet werden, in einem Punkt, welcher der Mittelpunkt der in diesem Falle vorhandenen kantenberührenden Innenkugel ist. Außerdem gibt es sechs Kugeln, von denen jede eine Kante und die Verlängerungen der vier anliegenden Kanten berührt.

19. a. Ein Vierflach wird von einer zu zwei Gegenkanten parallelen Ebene nach einem Parallelogramm geschnitten, das die von den zwei Kanten gebildeten Winkel enthält. Insbesondere bilden die Mittelpunkte der vier geschnittenen Kanten die Ecken eines Parallelogramms, dessen Seiten die Hälften der zwei Gegenkanten sind. Jedes Vierflach hat 3 solche Mittelparallelogramme. (Vgl. I. Anh. 14 und 13. a.)

b. Die drei Mitteltransversalen (d. s. die Verbindungsstrecken der Mitten zweier Gegenkanten) eines Vierflachs schneiden sich in einem Punkt und halbieren sich in demselben gegenseitig. (Sie bilden die Diagonalen der drei Mittelparallelogramme.) — Die Mittelpunkte aller zu zwei Gegenkanten parallelen Schnittparallelogramme liegen auf der zugehörigen Mitteltransversale.

c. Zieht man in jeder der vier Flächen eines Vierflachs die drei Verbindungsstrecken der Kantenmitten, so bilden diese 12 Strecken die Kanten eines dem Vierflach einbeschriebenen Achtflachs (Oktaeders im weiteren Sinn), das die drei Mittelparallelogramme zu Diagonalflächen und die drei Mitteltransversalen zu Diagonalen hat. Es kann als 6-seitiges Prismatoid, und zwar mit jeder seiner acht Flächen als Grundfläche, betrachtet werden. — Das Vierflach bildet den Halbflächner des Achtflachs; es kann nämlich aus dem Achtflach entstanden gedacht werden dadurch, daß von dessen 8 Flächen 4 nicht in einer Kante zusammenstoßende unterdrückt, und die 4 übrigen (die den vier ersten einzeln parallel sind) erweitert werden, bis sie sich schneiden.

d. Jedem Vierflach kann ein Parallelflach umbeschrieben werden, indem durch jede Kante eine Ebene parallel zu ihrer Gegenkante gelegt wird. Die Kanten des Parallelflachs sind gleich und parallel den Mitteltransversalen des Vierflachs. —

Umgekehrt können jedem Parallelflach zwei Vierflache einbeschrieben werden, deren Kanten die Diagonalen der Flächen des Parallelflachs sind. Sie haben die Mitteltransversalen und die Mittelparallelogramme gemein und stellen die 2 Halbflächner des ihren gemeinschaftlichen Kern bildenden einbeschriebenen Achtflachs vor, dessen Ecken die Mittelpunkte der Flächen des Parallelflachs bilden, und das dem Parallelflach zugeordnet heißt. Die zwei Vierflache, von denen jedes das Gegenvierflach des andern heißt, sind entsprechend-gleich, und zwar symmetrisch; sie liegen ähnlich und haben den Schnittpunkt der Mitteltransversalen zum Ähnlichkeitspunkt (III. Anh. 4. b). Jedes ist gleich dem dritten Teil des Parallelflachs.

e. Legt man durch die Mitte jeder Kante eines Vierflachs eine Ebene senkrecht zu ihrer Gegenkante, so schneiden sich diese sechs Ebenen in einem Punkt, welcher symmetrisch liegt mit dem Mittelpunkt der umbeschriebenen Kugel in Beziehung auf den Schnittpunkt der Mitteltransversalen. (Satz von Monge. — Bew. mit Hilfe des Gegenvierflachs.)

20. Die Schwerpunkte aller Parallelschnitte einer Pyramide liegen in einer Geraden, welche die Spitze mit dem Schwerpunkt der Grundfläche verbindet und die Schwerlinie der Pyramide heißt.

21. a. Die sechs Schwerebenen eines Vierflachs (d. i. die durch je eine Kante und die Mitte der Gegenkante gelegten Ebenen) schneiden sich zu je dreien nach den vier Schwerlinien des Vierflachs und gehen alle sechs durch einen Punkt, welcher der Schwerpunkt des Vierflachs heißt. Die vier Schwerlinien teilen sich im Schwerpunkt gegenseitig im Verhältnis 3 zu 1, so daß die größeren Abschnitte an die Ecken stoßen. — Die vier Pyramiden, in die das Vierflach vom Schwerpunkt aus zerlegt werden kann, haben gleichen Inhalt.

b. Der Schwerpunkt ist identisch mit dem Schnittpunkt der drei Mitteltransversalen, und also identisch mit dem Mittelpunkt des einbeschriebenen Achtflachs und des umbeschriebenen Parallelflachs.

Anm. Besteht ein Körper aus zwei Teilen, deren Rauminhalte $= k_1$ und k_2, und deren Schwerpunkte s_1 und s_2 sind, so erhält man den Schwerpunkt S des ganzen Körpers, wenn man $s_1 s_2$ im Verh. $s_1 S : S s_2 = k_2 : k_1$ teilt.

† 22. Teilt man die Schwerlinie (III. Anh. 20) einer mehrseitigen Pyramide im Verhältnis 3 zu 1 so, daß der größere Abschnitt an die Spitze stößt, so ist der Teilpunkt der Schwerpunkt der Pyramide. (Satz von Lionardo da Vinci. — Man zerlege die Pyramide durch Diagonalschnitte in Vierflache.)

Mittels dieses Satzes kann man gemäß der vorstehenden Anm. von jedem Polyeder den Schwerpunkt konstruieren, indem man es in Pyramiden zerlegt (III. Einl. 9).

23. a. Die Summe der Quadrate zweier Gegenkanten eines Vierflachs vermehrt um das 4-fache Quadrat der zugehörigen Mitteltransversale ist gleich der Summe der Quadrate der vier andern Kanten.

b. Die Summe der Quadrate der drei Mitteltransversalen ist gleich $\frac{1}{4}$ der Quadratsumme der sechs Kanten.

24. a. Das Quadrat einer Schwerlinie eines Vierflachs ist gleich $\frac{1}{3}$ der Quadratsumme der von der nämlichen Ecke ausgehenden drei Kanten weniger $\frac{1}{9}$ der Quadratsumme der drei übrigen Kanten. (Ist in einem $\triangle$ ABC die S. BC in M im Verh. $BM : MC = 1:2$ geteilt, so ist: $2\,AB^2 + AC^2 = 3\,AM^2 + 6\,BM^2$.)

b. Die 9-fache Quadratsumme der vier Schwerlinien ist gleich der 4-fachen Quadratsumme der sechs Kanten.

c. Die Quadratsumme der Entfernungen des Schwerpunktes von den vier Ecken ist gleich der Quadratsumme der drei Mitteltransversalen. (III. Anh. 23. b.)

25. a. Der Inhalt eines Vierflachs ist doppelt so groß als der Inhalt einer Pyramide, die ein Mittelparallelogramm zur Grundfläche und die kürzeste Entfernung der zwei ihm parallelen Gegenkanten zur Höhe hat. (III. 16.)

b. Jede durch eine Mitteltransversale eines Vierflachs gelegte Schnittebene teilt das Vierflach in zwei gleiche Teile. (Satz von Bobillier. — Die zwei Pyramiden, die zwischen der Schnittebene und einem durch die Mitteltransversale gehenden Mittelparallelogramm liegen, sind gleich.)

26. a. Das rhombische Vierflach oder Sphenoid. Haben in einem Vierflach je zwei gegenüberliegende Kanten gleiche Länge, so sind alle vier Flächen kongruent, und die Dreikante an allen vier Ecken kongruent; das Vierflach ist also gleicheckig-

gleichflächig und heißt Sphenoid. Das Netz eines solchen erhält man, wenn man durch die Ecken eines beliebigen, als Seitenfläche gewählten Dreiecks die Parallelen zu den Gegenseiten zieht. Im Sphenoid sind die drei Mittelparallelogramme Rhomben, (daher auch die Bezeichnung: rhombisches Vierflach). Die drei Mitteltransversalen stehen auf einander senkrecht. Das einbeschriebene Achtflach (III. Anh. 19. c) hat lauter kongruente Flächen. Das umbeschriebene Parallelflach (III. Anh. 19. d) ist ein Quader.

b. Das symmetrische Sphenoid hat kongr. gleichschenklige Dreiecke zu Flächen. Es hat also 4 gleiche Kanten (Gegenkanten-Paare); die zwei andern Kanten sind zu einander rechtwinklig. Die Dreikante sind gleichschenklig. Ein Mittelparallelogramm ist quadratisch, die zwei andern sind kongruent. Zwei Mitteltransversalen sind gleich.

27. a. Das Oblong-Vierflach. Bilden in einem Vierflach zwei Kanten mit ihren Gegenkanten rechte Winkel, so ist dies auch für das dritte Kantenpaar der Fall. Die drei Mittelparallelogramme sind Rechtecke, (daher die Bez.: Oblong-Vierflach). Die drei Mitteltransversalen sind gleich. Die Summe der Quadrate je zweier Gegenkanten ist konstant. Das einbeschriebene Achtflach besitzt eine umbeschriebene Kugel. Das umbeschriebene Parallelflach ist ein Rhomboeder (im weiteren Sinn).

b. Im Oblong-Vierflach schneiden sich die vier Höhen in einem Punkt (was beim allgemeinen Vierflach nicht der Fall ist). Durch diesen Punkt gehen auch die kürzesten Entfernungen der drei Paare von Gegenkanten.

c. Im Oblong-Vierflach liegen die Fußpunkte der vier Höhen, die Schwerpunkte der vier Seitenflächen, sowie die Punkte, welche die oberen Abschnitte der vier Höhen vom Höhenschnittpunkt aus im Verhältnis 1 : 2 teilen, auf einer Kugelfläche (Feuerbach'sche Kugel), deren Halbmesser gleich $\frac{1}{3}$ des Halbmessers der umbeschriebenen Kugel ist, und deren Mittelpunkt die Verbindungsstrecke von Höhenschnittpunkt und Mittelpunkt der umbeschriebenen Kugel im Verhältnis 1:2 teilt. (Satz von H. Vogt. — Die Teilpunkte zweier Höhenabschnitte und die Schwerpunkte der zugehörigen zwei Seitenflächen bilden die Ecken eines Rechtecks, dessen Mittelpunkt der Mittelpunkt der Kugel ist. Das durch die vier Teilpunkte der Höhenabschnitte bestimmte Vierflach ist mit dem Haupt-Vierflach ähnlich und ähnlich liegend.)

28. In jedem Vierflach ist der reziproke Wert des Halbmessers der einbeschriebenen Kugel gleich der Summe der reziproken Werte der vier Höhen und gleich der halben Summe der reziproken Werte der vier Halbmesser der anbeschriebenen Kugeln. (Sind a_1, a_2, a_3, a_4 die vier Seitenflächen, h_1, h_2, h_3, h_4 die zugehörigen Höhen, r_1, r_2, r_3, r_4 die Halbmesser der anbeschriebenen Kugeln, r der Halbm. der einbeschriebenen Kugel, so ist:

$$\frac{a_1}{\frac{1}{h_1}} = \frac{a_2}{\frac{1}{h_2}} = \frac{a_3}{\frac{1}{h_3}} = \frac{a_4}{\frac{1}{h_4}} = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4}{\frac{1}{r}} = \frac{a_1 + a_2 + a_3 - a_4}{\frac{1}{r_4}} \text{ u. s. w.)}$$

29. a. Zieht man in einem Vierflach von den Ecken A, B, C, D nach den gegenüberliegenden Flächen vier Strecken AA′, BB′, CC′, DD′, die sich in einem Punkte O schneiden, so ist:

$$\frac{OA'}{AA'} + \frac{OB'}{BB'} + \frac{OC'}{CC'} + \frac{OD'}{DD'} = 1, \text{ und: } \frac{AO}{AA'} + \frac{BO}{BB'} + \frac{CO}{CC'} + \frac{DO}{DD'} = 3.$$

(Mittels der Verh. der vier Teilpyramiden zum ganzen Vierflach.)

b. Fällt man von einem beliebigen Punkt im Innern eines Vierflachs die Senkrechten auf die Flächen, so ist die Summe der vier Verhältnisse aus je einer Senkrechten und der ihr parallelen Höhe = 1.

c. Die Summe der Entfernungen eines beliebigen Punktes im Innern eines regul. Tetraeders von den vier Flächen ist konstant, und zwar gleich der Höhe des Tetraeders.

30—37: Pyramide und Kegel, Pyramiden- und Kegelrumpf.

30. a. In einer dreiseitigen Pyramide, deren Dreikant an der Spitze ein Oktant ist, sind die Winkel der Grundfläche alle spitz; die Projektionen der Seitenkanten auf die Grundfläche fallen in die Höhen der Grundfläche, die Projektion der Spitze fällt in den Schnittpunkt der Höhen.

b. Das Quadrat der Grundfläche ist gleich der Summe der Quadrate der Seitenflächen.

31. a. Um jede reguläre Pyramide und in jede reguläre Pyramide läßt sich eine Kugel beschreiben.

b. Um jeden regul. Pyramidenrumpf läßt sich eine Kugel beschreiben.

c. In einen Kegelrumpf läßt sich eine Kugel beschreiben, wenn die Mantellinie gleich der Summe der Grundkreis-Halbmesser ist.

32. a. Stellt man das Netz einer Pyramide dadurch her, daß man längs den Seitenkanten aufschneidet und die Seitenflächen durch Drehung um die Grundkanten in die Ebene der Grundfläche umlegt, so schneiden sich in dieser Netzfigur die Senkrechten, die von den freien Ecken der Seitenflächen auf die zugehörigen Grundkanten gefällt werden, in einem Punkt, welcher den Fußpunkt der Höhe der Pyramide vorstellt.

b. In jeder Pyramide ist die Summe der Seitenflächen größer als die Grundfläche.

c. Legt man in einem Prisma oder Pyramidenrumpf zwei Seitenflächen, die eine Seitenkante BB' gemein haben, durch Drehung um die Grundkanten AB und BC in die Ebene der unteren Grundfläche um, so schneiden sich die Senkrechten, die von den zwei Umlegungen des Punktes B' auf die entsprechenden Grundkanten gefällt werden, in einem Punkt, der die Projektion der Ecke B' auf die untere Grundfläche vorstellt.

33. Die Abwicklungsfigur des Mantels eines Kegels, dessen Achsenschnitt ein gleichseitiges Dreieck ist, ist ein Halbkreis.

34. Wird eine reguläre quadratische Pyramide von einer durch eine Grundkante gelegten Schnittebene halbiert, so werden zwei Seitenkanten von ihr golden geschnitten. (III. 16. Zus. 2.)

35. Der Rauminhalt eines Polyeders, in das sich eine Kugel einbeschreiben läßt, ist gleich $\frac{1}{3}$ mal Oberfläche mal Halbmesser der einbeschriebenen Kugel.

36. Haben zwei dreiseitige Pyramiden an den Spitzen entsprechend-gleiche Dreikante, so verhalten sich ihre Inhalte wie die Produkte ihrer Seitenkanten.

37. a. Verhalten sich in einem Pyramidenrumpf zwei entsprechende Seiten der Grundflächen G und G' wie m zu m', und teilt ein Parallelschnitt die Höhe im Verhältnis $\sqrt{m}$ zu $\sqrt{m'}$, so daß der größere Abschnitt an die größere Grundfläche stößt, so ist die Schnittfigur: $S = \sqrt{GG'}$. Der Inhalt des Pyramidenrumpfes ist also gleich der Summe der drei Pyramiden, welche die drei Flächen G, G', S zu Grundflächen und die Höhe des Pyramidenrumpfes zur Höhe haben.

b. Der Rauminhalt eines Kegelrumpfes ist gleich einem Cylinder von der gleichen Höhe und einem Halbmesser gleich der halben Summe der Grundkreis-Halbmesser des Rumpfes, plus einem Kegel von der gleichen Höhe und einem Grundkreis-Halbmesser gleich der halben Differenz der Grundkreis-Halbmesser des Rumpfes.

38—39: **Prismatoid.**

38. a. Der Inhalt eines Prismas, dessen Grundflächen Trapeze sind, ist gleich dem arithm. Mittel zwischen den zwei parallelen Seitenflächen — mal ihrer Entfernung.

b. Der Inhalt eines schiefabgeschnittenen Parallelflachs ist gleich dem arithm. Mittel zwischen den vier Parallelkanten oder zwischen zwei gegenüberliegenden Parallelkanten — mal dem zu ihnen senkrechten Querschnitt. (III. 16. Zus. 2.)

39. a. Ein Prismatoid werde auf die Ebene seiner unteren Grundfläche G projiziert; die obere Grundfläche (Deckfläche) sei D. Die algebr. Summe der Projektionen derjenigen Seitenflächen, die mit D eine Kante gemein haben, (Oberdreiecke) werde durch O, diejenige der übrigen Seitenflächen (Unterdreiecke) durch U bezeichnet; so zwar, daß in den zwei algebr. Summen jede Fläche mit positivem oder negativem Vorzeichen versehen wird, je nachdem sie sich mit obenliegender Außenseite oder Innenseite projiziert. Man hat dann stets: $D + O + U = G$. Ist die Höhe des Prismatoids $= h$, so ist sein Inhalt: $K = \frac{h}{3}(3D + 2O + U)$ oder $= \frac{h}{3}(2D + G + O)$. (Satz von C. Gusserow.) (Man berücksichtige auch den Fall, daß zwei Seitenflächen, die einen einspringenden Keil einschließen, in der Projektion auf die nämliche Seite der Keilkante zu liegen kommen, so daß in der Nähe der Kante die Polyederoberfläche von einer zur Grundfläche senkrechten Linie in vier Punkten geschnitten wird.)

b. Ist die Höhe eines Prismatoides $= h$, eine Grundfläche $= G$, und derjenige Parallelschnitt, der von G eine Entfernung $= \frac{h}{3}$ hat, $= S$, so ist der Inhalt: $K = \frac{h}{4}(G + 3S)$.

40—46: Kugel und Umdrehungskörper.

† 40. Werden zwei Körper von verschiedenen Höhen durch jedes Paar Ebenen, die zu den Höhen senkrecht sind und sie im nämlichen Verhältnis teilen, nach flächengleichen Figuren geschnitten, so verhalten sich die Rauminhalte der zwei Körper wie ihre Höhen. (Bew. ähnlich wie III. 11, mittels III. 8. Zus. 1.)

41. a. Wird ein Kreisabschnitt um den mit seiner Sehne parallelen Kreisdurchmesser gedreht, so entsteht ein Umdrehungskörper, der den gleichen Inhalt hat wie die über der Sehne als Durchmesser beschriebene Kugel. (III. 11. Zus.)

b. Wird ein Kreisabschnitt um einen beliebigen, ihn nicht schneidenden Durchmesser seines Kreises gedreht, so entsteht ein Umdrehungskörper, der sich zu der über der Sehne als Durchmesser beschriebenen Kugel verhält wie die Projektion der Sehne auf die Drehachse zur Sehne. (III. Anh. 40.)

42. Beschreibt man einer Kugel einen Kegelrumpf um, so daß sie von den beiden Grundkreisen und dem Mantel berührt wird, so ist der Raum zwischen den Oberflächen der Kugel und des Kegelrumpfes gleich der Summe der zwei Kegel, welche die Grundkreise des Kegelrumpfes zu Grundkreisen und den Mittelpunkt des Berührungskreises zur gemeinschaftlichen Spitze haben. (Verallgemeinerung von III. 17. a, Beweis.)

43. Zieht man in den zwei Grundkreisen einer Kugelzone zwei parallele Durchmesser und bezeichnet die Verbindungsstrecken der zwei Endpunkte des einen Durchmessers mit einem Endpunkt des andern durch s und s', so ist die krumme Oberfläche der Zone $= s s' \pi$. (Verallgem. von III. 18. Zus. 2.)

44. a. Berühren zwei zu einander senkrechte windschiefe Gerade eine Kugel in den Endpunkten eines Durchmessers, und schneidet man auf einer derselben eine Strecke gleich dem Durchmesser, auf der andern eine Strecke gleich der Großkreis-Peripherie der Kugel beliebig ab, so werden das durch die vier Endpunkte der Strecken bestimmte Vierflach und die Kugel von jeder zum Berührungsdurchmesser senkrechten Ebene nach flächengleichen Figuren geschnitten (Satz von A. Schmidt. — Hiernach Berechnung von Kugel, Kugelzone und Kugelabschnitt.)

b. Ein Kreuzsatteldach entsteht dadurch, daß zwei kongruente Satteldächer mit gleichschenkl. Dreiecken als Stirnflächen auf gemeinschaftl. quadratischer Basis ruhen und sich so durchdringen, daß die Firstkanten sich rechtwinklig schneiden und gegenseitig halbieren. Ist die Grundfläche des Kreuzsatteldaches gleich dem Grundkreis, und seine Höhe gleich dem Halbmesser einer Halbkugel, so haben irgend zwei Parallelschnitte beider Körper in gleichen Abständen von den Grundflächen — gleichen Flächeninhalt. (Man betrachte das Kreuzsatteldach als Differenz eines Quaders und vier quadratischer Pyramiden.)

c. Die Prismatoidformel (III. 16) gilt auch für Kugel, Kugelzone und Kugelabschnitt.

d. Hat ein Faß- oder Kessel-förmiger Körper zu einer Kugelzone, bezw. einem Kugelabschnitt eine solche Beziehung, daß die zwei Körper von jedem Paar Ebenen, die zu den beiderseitigen Höhen senkrecht sind und sie im nämlichen Verhältnis teilen, nach flächengleichen Figuren geschnitten werden, so gilt für den Körper die Prismatoidformel. (III. Anh. 40.) Daher giebt die Prismatoidformel brauchbare Näherungswerte für die Berechnung von Fässern und Kesseln, deren krumme Oberfläche geometrisch nicht genau definiert ist. Ist also die (innere) Höhe eines Fasses $= h$, der Bodendurchmesser $= d$, der Spunddurchmesser $= D$, so kann man setzen: $K = \frac{\pi h}{12}(d^2 + 2D^2)$.

45. Dreht man ein Dreieck um eine seiner Schwerlinien als Achse, so beschreiben seine beiden Teile gleich große Rotationskörper. — Die Inhalte der drei durch Drehung um die drei Schwerlinien erzeugten Rotationskörper verhalten sich wie die reziproken Werte der Schwerlinien.

46. Dreht man eine ebene Figur, die aus zwei symmetrischen Hälften besteht, um eine sie nicht schneidende Achse, die parallel zur Symmetralachse ist, so ist die halbe Differenz der Inhalte oder Oberflächen der von den zwei Hälften beschriebenen Umdrehungskörper gleich dem Inhalt oder der Oberfläche des Umdrehungskörpers, der durch Drehung der Figur um ihre Symmetralachse entsteht.

47—63: Reguläre und halbreguläre Polyeder. Regul. Krystallsystem.

47. a. Je zwei Gegenkanten eines regul. Tetraeders sind zu einander senkrecht. Die Verbindungsstrecke ihrer Mittelpunkte stellt ihre kürzeste Entfernung vor.

b. Bei Dodekaeder und Ikosaeder sind 5 Gruppen von je 3 Paaren paralleler Kanten vorhanden, deren Richtungen zu einander senkrecht sind.

48. Für jedes regul. Polyeder läßt sich eine Kugel konstruieren, die sämtliche Kanten in deren Halbierungspunkten berührt. Ihr Mittelpunkt fällt mit dem Mittelpunkt der ein- und der umbeschriebenen Kugel zusammen.

49. a. Die Mittelpunkte der Flächen eines regul. Polyeders bilden die Ecken eines andern, dem ersten zugeordneten regul. Polyeders. (Vgl. III. 4. Zus.)

b. Ist einer Kugel ein regul. Polyeder einbeschrieben, und legt man in seinen Ecken die Berührungsebenen an die Kugel, so schließen diese ein zweites, dem ersten zugeordnetes regul. Polyeder ein; und umgekehrt.

c. Die Ebenen, die durch die Endpunkte der von je einer Ecke ausgehenden Kanten eines regul. Polyeders — oder durch Punkte dieser Kanten, die von der Ecke gleich weit abstehen — gelegt werden, schließen ein zweites, dem ersten zugeordnetes regul. Polyeder ein.

Man sagt daher, die Flächen des einen von zwei zugeordneten regul. Polyedern stumpfen die Ecken des andern ab.

50. Die Ecken jedes der in II. Anh. Aufg. 61 besprochenen fünf Netze von regul. sphär. Vielecken auf einer Kugeloberfläche bilden die Ecken eines der Kugel einbeschriebenen — oder die Berührungspunkte der Flächen eines der Kugel umbeschriebenen regul. Polyeders. (Hiernach kann man auch von der Sphärik aus zu den regul. Polyedern gelangen, und zwar reichen hiezu die drei regul. Dreiecksnetze aus.)

51. Haben zwei einander zugeordnete regul. Polyeder gleiche Halbmesser der umbeschriebenen Kugeln, so haben sie auch

a. gleiche Halbmesser der ihren Flächen umbeschriebenen Kreise, und daher auch gleiche Halbmesser der einbeschriebenen Kugeln. (Die sphär. Mittelpunkte der den Flächen des einen umbeschr. Kreise bilden die Ecken eines mit dem andern kongr. Polyeders.)

b. Das Produkt der Halbmesser der kantenberührenden Kugeln ist gleich dem Produkt der Halbmesser der einbeschriebenen und der umbeschriebenen Kugel: $\rho\rho' = \mathrm{r}\,\mathrm{R}$. (Bei der in a. angedeuteten Lage liegt je ein ρ und ein R des einen Pol. bezw. mit einem ρ' und einem r des andern in der nämlichen Geraden.)

c. Die Rauminhalte der zwei Polyeder verhalten sich wie die Halbmesser ihrer kantenberührenden Kugeln. (Satz von Dostor.)

52. a. Unter den Ecken eines Würfels sind 2 Gruppen von je 4 Ecken vorhanden, die zugleich Ecken eines regul. Tetraeders sind; die Tetraederkanten werden durch Quadratdiagonalen vorgestellt. (Vgl. III. Anh. 19. d.)

b. Unter den Ecken eines Dodekaeders sind 5 Gruppen von je 8 Ecken vorhanden, die zugleich Ecken eines Würfels sind; die Würfelkanten werden durch Fünfecksdiagonalen vorgestellt (III. Anh. 47. b). Das Dodekaeder kann aufgefaßt werden als Würfel, auf dessen sechs Flächen kongruente Walmdächer aufsitzen; jede Dreiecksfläche eines Walmdaches bildet mit einer Trapezfläche eines andern zusammen ein regul. Fünfeck.

53. a. Unter den Flächen eines regul. Oktaeders sind 2 Gruppen von je 4 Flächen vorhanden, die (erweitert gedacht) zugleich Flächen eines regul. Tetraeders sind. (Vgl. III. Anh. 19. c und d.)

b. Unter den Flächen eines Ikosaeders sind 5 Gruppen von je 8 Flächen vorhanden, die zugleich Flächen eines Oktaeders sind. (III. Anh. 52. b und 49. b.)

54. a. Die Mitten der 6 Kanten eines Tetraeders bilden die Ecken eines Oktaeders. (Vgl. III. Anh. 19. c.)

b. Die Mitten der 12 Kanten eines Würfels oder eines Oktaeders bilden die Ecken des nämlichen gleicheckig-halbregul. Polyeders, dessen Oberfläche aus 8 kongr. regul. Dreiecken und 6 kongr. Quadraten besteht, und an dessen Ecken sich kongr. Vierkante befinden.

c. Die Mitten der 30 Kanten eines Dodekaeders oder eines Ikosaeders bilden die Ecken des nämlichen gleicheckig-halbregul. Polyeders, dessen Oberfläche aus 20 kongr. regul. Dreiecken und

12 kongr. regul. Fünfecken besteht, und an dessen Ecken sich kongr. Vierkante befinden.

Durch Erweiterung der Flächen der in a, b, c genannten Polyeder erhält man je zwei zugeordnete regul. Polyeder in sternförmiger Durchdringung (zwei zugeordnete regul. Polyeder „im Gleichgewicht“.)

55. Legt man durch jede Kante eines regul. Polyeders eine Ebene, die mit den anstoßenden Flächen gleiche Keile bildet und das Polyeder nicht schneidet, so umschließen diese Ebenen

a. beim Tetraeder die Flächen eines Würfels. (Vgl. III. Anh. 52. a.)

b. Beim Würfel und beim Oktaeder umschießen die 12 Ebenen das nämliche gleichflächig-halbregul. Polyeder, welches Rhomben-Dodekaeder oder Granatoeder heißt. Seine Oberfläche besteht aus 12 kongr. Rhomben, deren kleinere Diagonalen die Würfelkanten, deren größere Diagonalen die Oktaederkanten sind. Es hat 14 Ecken; an den 8 Würfelecken befinden sich kongr. regul. Dreikante, an den 6 Oktaederecken kongr. regul. Vierkante.

c. Beim Dodekaeder und beim Ikosaeder umschließen die durch die 30 Kanten gelegten Ebenen das nämliche gleichflächig-halbregul. Polyeder, welches Rhomben-Triakontaeder oder ikosaedrisches Granatoeder heißt. Seine Oberfläche besteht aus 30 kongr. Rhomben, deren kleinere Diagonalen die Dodekaederkanten, deren größere die Ikosaederkanten sind. Es hat 32 Ecken; an den 20 Dodekaederecken befinden sich kongr. regul. Dreikante, an den 12 Ikosaederecken kongr. regul. Fünfkante.

Man sagt, die in a, b, c genannten Polyeder stumpfen die Kanten der ursprüngl. Polyeder ab. — Die beiden Granatoeder heißen auch Keplerische Körper.

56. Die Flächen der in 55. a, b, c genannten Polyeder berühren die kantenberührende Kugel des ursprünglichen Polyeders; die Berührungspunkte fallen in die Mittelpunkte der Flächen und bilden die Ecken der in 54. a, b, c genannten Körper, (die Flächen der ersteren stumpfen die Ecken der letzteren ab). Die Diagonalen der Flächen der in 55 genannten Polyeder bilden die scharfen Kanten der in 54 (Schlußbemerkung) genannten sternförmigen Körper.

57. a. Das oktaedr. Granatoeder kann in 4 kongr. stumpfe Rhomboeder (vgl. III. Einl. 5. b) zerlegt werden. (4 Würfelecken des Granatoeders, die zugleich Tetraederecken sind, stellen von jedem Rhomboeder eine Hauptecke vor, die 4 andern Hauptecken liegen im Mittelpunkt.)

b. Die 6 Granatoederflächen, welche an dem als 6-seitiges Prismatoid aufgefaßten Oktaeder die Seitenkanten abstumpfen, gehören einem regul. 6-seitigen Prismenmantel an, dessen 6 Kanten der Prismatoid-Höhe parallel sind. Das Granatoeder kann (in 4-facher Weise) aufgefaßt werden als 6-seitiges Prisma, das durch je 3 Flächen oben und unten dachförmig (rhomboedrisch) zugespitzt ist. Sämtliche Keile sind $= 120^\circ$.

Beim ikosaedr. Granatoeder sind 6 Gruppen von je 10 Flächen vorhanden, die einem regul. 10-seitigen Prismenmantel angehören. Jeder Keil ist $= 144^\circ$.

c. Verbindet man in einem regulären 6-seitigen Prisma einen auf der oberen Verlängerung der Prismenachse beliebig gewählten Punkt mit drei nicht auf einander folgenden Ecken der oberen Grundfläche und legt durch je zwei Verbindungslinien eine Ebene, so schließen diese drei Ebenen zusammen mit dem Prismenmantel und der untern Grundfläche einen Körper ein, der von 3 kongr. Rhomben, 6 kongr. Trapezen und einem regul. Sechseck begrenzt ist. Er hat stets den gleichen Rauminhalt, wie auch der Punkt auf der Achse angenommen werden mag. Die Oberfläche dagegen ist veränderlich; sie ist am kleinsten für diejenige Annahme, welche mit der Granatoederform übereinstimmt. (Form der Bienenzellen.)

---

58. Die 6 Ecken eines Oktaeders seien mit A, die Mittelpunkte seiner 8 Flächen mit f, die Mittelpunkte seiner 12 Kanten mit k bezeichnet, sein Mittelpunkt sei O. Auf den 6 Strahlen OA seien ferner 6 gleiche Strecken $OB > OA$ abgeschnitten. Die 6 Strahlen OA bilden die Kanten von 8 Oktanten. 3 Punkte A oder B, die auf verschiedenen Kanten des nämlichen Oktanten liegen, werden im folgenden diesem Oktanten zugehörig genannt. Ein Punkt, der auf einem Strahl Of oder Ok liegt, wird mit F oder K bezeichnet.

a. Legt man durch je 3 Punkte A, A und B, die dem nämlichen Oktanten zugehören, eine Ebene, so umschließen die 24 auf diese Weise möglichen Ebenen ein Polyeder, das Pyramidenoktaeder heißt*). Es kann nämlich aufgefaßt werden als Oktaeder, auf dessen 8 Flächen kongr. regul. Pyramiden aufgesetzt sind. Die Spitzen F dieser Pyramiden liegen auf den Strahlen Of und bilden die Ecken eines Würfels. Die 24 Flächen des Körpers sind kongr. gleichschenklige Dreiecke. An den 8 Würfelecken F befinden sich kongr. regul. 3-kante, an den 6 Oktaederecken A: kongr. (nicht regul.) 8-kante. — Ist OB gleich OA plus der Oktaederkante, so sind auch die 8-kante regulär, der Körper gehört also dann zu den gleichflächig-halbregulären Polyedern. — Wird OB = ∞ gewählt, so fallen je zwei an eine Oktaederkante anstoßende Dreiecksflächen in eine Ebene: das Pyramidenoktaeder geht in das Granatoeder über.

b. Legt man durch je 3 Punkte A, B und B, die dem nämlichen Oktanten zugehören, eine Ebene, so umschließen die 24 auf diese Weise möglichen Ebenen ein Polyeder, das Leuzitoeder heißt. Die 24 Flächen des Körpers sind kongr. Deltoide (Vierecke, die in Beziehung auf eine Diagonale symmetrisch sind). Der Körper hat 26 Ecken von 3erlei Art, nämlich: 6 Oktaederecken A, 8 Ecken F (Würfelecken), 12 Ecken K (welche die Ecken des in Anh. 54. b genannten Körpers bilden). Die 48 Kanten sind von 2erlei Art; die 24 Kanten AK können als gebrochene Oktaederkanten, die 24 Kanten FK als gebrochene Würfelkanten bezeichnet werden. An den Ecken A befinden sich kongr. regul. 4-kante, an den Ecken F: kongr. regul. 3-kante, an den Ecken K: kongr. (nicht regul.) 4-kante. — Ist OB gleich OA plus der Oktaederkante, so sind auch die letztgenannten 4-kante regul., das Polyeder ist also gleichflächig-halbregulär. — Ist OB = 2 OA, so bilden die Hauptdiagonalen der Deltoide die Kanten eines Granatoeders, der Körper stumpft alsdann die Kanten des Granatoeders ab. — Wird OB = ∞ gewählt, so geht das Leuzitoeder in den Würfel über.

c. Legt man durch je 2 dem nämlichen Oktanten zugehörige Punkte A und B parallel zu seiner dritten Kante eine

*) Um hier und im folgenden rasch eine Vorstellung von dem fraglichen Körper zu gewinnen, betrachte man jedesmal zunächst nur die zu einem Oktanten gehörigen Ebenen.

Ebene, so umschließen die 24 auf diese Weise möglichen Ebenen ein Polyeder, das Pyramidenwürfel heißt und aufgefaßt werden kann als Würfel, auf dessen 6 Flächen kongr. regul. Pyramiden aufgesetzt sind. Die 24 Flächen sind kongr. gleichschenklige Dreiecke. Der Körper hat 6 Ecken A und 8 Ecken F (Würfelecken). An den Ecken A befinden sich kongr. regul. 4-kante, an den Ecken F: kongr. (nicht regul.) 6-kante. — Ist $OB = 2\,OA$, so ist der Körper gleichflächig-halbregulär, (Krystallform von Gold und Silber). — Ist $OB = OA$, so geht der Pyramidenwürfel in das Granatoeder über.

Die Flächen des (allgem.) Pyramidenwürfels stumpfen die gebrochenen Oktaederkanten eines Leuzitoeders ab. Umgekehrt stumpfen die Flächen des Leuzitoeders die Pyramidenkanten eines Pyramidenwürfels ab.

59. Auf den 6 Halbdiagonalen OA eines Oktaeders seien 6 gleiche Strecken OB und 6 gleiche Strecken OC abgeschnitten, und zwar sei $OC > OB > OA$. Im übrigen mögen die nämlichen Bezeichnungen gelten wie in 58. — Legt man durch je 3 Punkte A, B, C die dem nämlichen Oktanten zugehören, eine Ebene, so umschließen die 48 auf diese Weise möglichen Ebenen ein Polyeder, das Achtundvierzigflächner oder Diamantoeder heißt. Die 48 Flächen sind kongr. ungleichseitige Dreiecke. Der Körper hat 26 Ecken, und zwar von dem nämlichen Charakter wie das Leuzitoeder (6 Ecken A, 8 Ecken F, 12 Ecken K). Vergleicht man das Diamantoeder mit dem Leuzitoeder, so erscheinen die Deltoidflächen des letzteren längs ihren Hauptdiagonalen gebrochen. — Für den Fall, daß $\frac{1}{OB} + \frac{1}{OC} = \frac{1}{OA}$ ist, liegen je zwei Ecken A mit zwei Ecken F in einer Ebene und bilden die Ecken eines Rhombus; man hat dann die spezielle Form des Pyramidengranatoeders. — Die 72 Kanten des Diamantoeders sind von 3erlei Art: die 24 Kanten AK können als gebrochene Oktaederkanten, die 24 Kanten FK als gebrochene Würfelkanten, die 24 Kanten AF als Pyramidenoktaeder- oder Pyramidenwürfel-Kanten (eventuell als Granatoederkanten) bezeichnet werden. An den Ecken A befinden sich kongr. (nicht regul.) 8-kante, an den Ecken F — 6-kante, an den Ecken K — 4-kante. — Ist OB gleich 3 OA minus der Oktaederkante, und OC gleich

OA plus der doppelten Oktaederkante: so ist der Körper gleichflächig-halbregulär. (Zum Beweis betrachte man die Schnittfigur einer durch zwei Strahlen OA und Of gelegten Ebene. In dieser seien A, F, K drei auf einander folgende Ecken. Macht man kl parallel und gleich-gerichtet mit OA und gleich der halben Oktaederkante, so muß KF durch l gehen, wenn das Vierkant bei K regul. sein soll. Schneiden sich ferner FK und Ak in m, so muß Fm = FA sein, wenn das 6-kant bei F regul. sein soll. Da sich nun Ak und OF in f schneiden, und fk = $\frac{1}{2}$ fA ist, so muß sein: km = $\frac{1}{3}$ Ak; folglich, wenn OA und KF sich in B schneiden: OB — OA = 4 kl, u. s. w.)

Anm. Oktaeder, Pyramidenoktaeder, Granatoeder, Leuzitoeder, Würfel, Pyramidenwürfel, Diamantoeder stellen die 7 einzig möglichen (vollständigen) Formen des regulären Krystallsystems vor. Das Diamantoeder ist die allgemeinste Form, von der die 6 übrigen als spezielle Fälle angesehen werden können. — Uebrigens sind krystallographisch nur solche Formen möglich, für welche die Achsenabschnitte OA, OB, OC in rationalem Verhältnis stehen. Es haben daher die in 58. a. u. b und in 59 erwähnten halbregulären Formen nur geometrisches Interesse.

60. a. Unterdrückt man bei einem Pyramidenwürfel die Hälfte der Flächen und läßt die andere Hälfte bis zu ihrem gegenseitigen Schnitt sich ausdehnen, so zwar, daß immer drei solche Flächen unterdrückt werden, die mit einer bleibenden Fläche eine Kante gemein haben, und umgekehrt: so entsteht (als Halbflächner des Pyramidenwürfels) ein von 12 Fünfecken begrenzter Körper, welcher Pyritoeder heißt (Krystallform des Schwefelkies mit OB = 2 OA). Ist im ursprüngl. Pyramidenwürfel OB = $\frac{1}{2}$ OA $(1+\sqrt{5})$, so ist der Körper identisch mit dem regul. Dodekaeder. Andernfalls sind die 12 Fünfecke nicht regulär, aber symmetrisch gestaltet. Der allgem. Körper kann (wie das regul. Dodekaeder, vgl. III. Anh. 52. b) aufgefaßt werden als Würfel, auf dessen 6 Flächen kongr. Walmdächer aufsitzen; doch haben deren Firstkanten eine andere Länge als die übrigen unter sich gleichen Kanten. — Läßt man die seither unterdrückten Flächen des Pyramidenwürfels bis zu ihrem gegenseitigen Schnitt sich ausdehnen, so entsteht ein zweites, dem ersten kongr. Pyritoeder, welches das erste so durchdringt, daß je zwei

Firstkanten sich rechtwinklig durchschneiden und gegenseitig halbieren. („Zwilling des eisernen Kreuzes.")

b. Verfährt man beim Diamantoeder ebenso wie in a), so erhält man als Halbflächner einen von 24 (unsymmetr.) Fünfecken begrenzten Körper, welcher G y r o e d e r heißt. Geht man zunächst vom Pyramidengranatoeder aus, so verhält sich dessen Halbflächner zum Granatoeder ähnlich wie das Pyritoeder zum Würfel: er kann aufgefaßt werden als Granatoeder, auf dessen 12 Flächen rhombische (schief-symmetrisch gestaltete) Walmdächer aufsitzen. Beim allgemeinen Gyroeder erscheint die Grundfläche jedes Walmdaches längs einer Diagonale gebrochen. Der Körper hat 38 Ecken; die 6 Ecken A und 8 Ecken F des Diamantoeders sind geblieben, dazu kommen als neue Ecken (anstatt der 12 Ecken K) die 24 Endpunkte E der Firstkanten. An den Ecken A befinden sich regul. 4-kante, an F: regul. 3-kante, an E: nicht regul. 3-kante. Die 60 Kanten haben 3erlei Längen*).

61. a. Setzt man zwei kongruente regul. Pyramiden so an einander, daß die Grundflächen sich decken, so heißt der entstehende Körper eine D o p p e l p y r a m i d e. Sind die Keile an den Grundkanten der Pyramiden halb so groß als die Keile an den Seitenkanten, so ist der Körper gleichflächig-halbregulär.

b. Sind die zwei Pyramiden 2n-seitig, und wendet man auf die Doppelpyramide dasselbe Verfahren an wie in 60, so erhält man als Halbflächner ein von 2n kongr. Deltoiden umschlossenes Polyeder, welches T r a p e z o e d e r heißt. Dasselbe entsteht auch, wenn man in einem regul. 2n-seitigen Prismatoid die Grundflächen unterdrückt und die Seitenflächen sich pyramidal erweitern läßt. — Ist in den zwei ursprüngl. Pyramiden die Grundkante $= a$, der Halbmesser des der Grundfläche umbeschriebenen Kreises $= R$, der Halbmesser der den zwei Pyramiden-Mänteln aus dem Mittelpunkt der Grundfläche einbeschriebenen Berührungskugel

---

*) Es giebt auch eine gleichflächig-halbreguläre Form des Gyroeders. Sie entsteht, wenn in dem ursprüngl. Diamantoeder zwischen $OA = a$, $OB = b$, $OC = c$ die zwei Beziehungen gelten:

$$b^3 - ab^2 - a^2b - a^3 = 0, \qquad c^3 - 3ac^2 - a^2c - a^3 = 0.$$

Doch bietet die Ableitung dieser Beziehungen auf e l e m e n t a r e m Wege Schwierigkeiten.

$= r$, und besteht die Beziehung: $r = \frac{R^2}{\sqrt{R^2 + a^2}}$, so ist das Trapezoeder gleichflächig-halbregulär. (Man drücke aus, daß die Berührungspunkte der Kugel mit drei an eine Fläche anstoßenden Flächen der Doppelpyramide die Ecken eines gleichseitigen Dreiecks bilden müssen. — Das 10-seitige halbregul. Trapezoeder ergiebt sich leicht aus dem regul. Dodekaeder.)

62. a. Um jedes gleich e c k i g - halbregul. Polyeder und i n jedes gleich f l ä c h i g - halbregul. Polyeder läßt sich eine Kugel beschreiben. (Man betrachte, wie in III. 5, die je aus einer Fläche und deren Nachbarflächen — bezw. die je aus einer Ecke und deren Nachbarecken — bestehenden Gebilde.)

b. Ist einem gleich e c k i g - halbregul. Polyeder eine Kugel u m beschrieben, und legt man an sie in sämtlichen Ecken die Berührungsebenen, so umschließen diese ein gleich f l ä c h i g - halbregul. Polyeder, das dem ursprünglichen z u g e o r d n e t oder r e z i p r o k heißt. Hat das ursprüngl. Polyeder ν regul. n-ecke, ν' n'-ecke, ν'' n''-ecke und π entspr.-gleiche p-kante, so hat das reziproke Polyeder ν regul. n-kante, ν' n'-kante, ν'' n''-kante und π kongr. p-ecke. — Umgekehrt: Ist einem gleich f l ä c h i g - halbregul. Polyeder eine Kugel e i n beschrieben, so bilden die Berührungspunkte die Ecken des ihm reziproken gleich e c k i g - halbregul. Polyeders. — Zu jedem halbregul. Polyeder der einen Gattung ist daher ein bestimmtes ihm reziprokes der andern Gattung vorhanden; jede Gattung kann aus der andern abgeleitet werden.

c. Die entsprechend - gleichen Vielkante eines gleich e c k i g - halbregul. Polyeders sind solche, u m welche sich Kegelflächen beschreiben lassen. — Die kongr. Vielecke eines gleich f l ä c h i g - halbregul. Polyeders sind solche, i n welche sich Kreise beschreiben lassen.

63. a. Reziprok zu den in 61 genannten gleichflächig-halbregul. Doppelpyramiden und Trapezoedern sind die regul. Prismen mit quadratischen Seitenflächen und die regul. Prismatoide mit regul. Dreiecken als Seitenflächen. Außer diesen Körpern, deren Anzahl unbegrenzt ist, giebt es (und k a n n nur geben) von jeder Gattung der halbregul. Polyeder noch 13 Individuen. Ein Teil von ihnen ist im vorangehenden aufgeführt, die übrigen können auf ähnliche Weise erzeugt werden wie jene. Man kann

nämlich zu Pyramidenoktaeder und Pyramidenwürfel auch für die übrigen regul. Polyeder Analoga konstruieren. Ferner kann man die in 58, 59 und 60. b für das Oktaeder besprochenen Konstruktionen auch auf das Ikosaeder (Ecken A, Mittelpunkt O) anwenden, indem man mit Bez. auf die 20 von den Strahlen OA gebildeten Dreikante genau ebenso verfährt, wie beim Oktaeder mit Bez. auf die 8 Oktanten verfahren wurde. Die 13 gleichflächig-halbregul. Polyeder sind hiernach folgende: Pyramiden-Tetraeder, -Würfel, -Oktaeder, -Dodekaeder, -Ikosaeder; oktaedrisches Granatoeder, -Leuzitoeder, -Diamantoeder, -Gyroeder; ikosaedrisches Granatoeder, -Leuzitoeder, -Diamantoeder, -Gyroeder.

b. Hiemit sind (nach 62. b) zugleich auch die 13 möglichen gleicheckig-halbregul. Formen gefunden. Sie lassen sich übrigens auch direkt aus den regul. Polyedern durch regelmäßiges Abstumpfen ihrer Ecken und Kanten erzeugen, wozu in III. Anh. Aufg. 18. b die Anleitung gegeben wird. (Von ihnen auszugehen und aus ihnen die gleichflächig-halbregul. Formen nach 62. b abzuleiten, ist eigentlich der leichtere Weg. Doch bieten die letzteren das größere Interesse.)

II. Konstruktions-Aufgaben.

1—21: Konstruktionen von Polyedern und Polyedernetzen.

1. Von einer Pyramide sind die Grundfläche und zwei Seitenflächen gegeben. Es sollen die übrigen Seitenflächen, ferner die Höhe und sämtliche Keilwinkel durch Konstruktion in einer Ebene gefunden werden. (Die Seitenflächen findet man mit Hilfe von III. Anh. 32. a, die Höhe und die Keilwinkel an den Grundkanten mittels rechtw. Dreiecke, die Keilwinkel an den Seitenkanten wie W. α in II. Aufg. 6.)

2. a. Von einem Prisma sind geg: die Grundfläche und α) zwei an einander stoßende — β) zwei nicht an einander stoßende Seitenflächen. Es sollen die übrigen Seitenflächen, ferner die Höhe und sämtliche Keilwinkel durch Konstruktion in einer

Ebene gefunden werden. (III. Anh. 32. c. Im übrigen wie bei der vor. Aufg. — β führe man auf α zurück, indem man die den zwei geg. Seitenflächen angehörigen Grundkanten bis zu ihrem Schnitt verlängert. Letztere dürfen nicht parallel sein, wenn die Aufg. bestimmt sein soll.)

b. Die gleiche Aufgabe für einen Pyramidenrumpf.

3. Einen dreiseitigen Pyramidenrumpf zu konstr., wenn geg. sind: eine Grundfläche, eine Seite der andern Grundfläche, und die drei Seitenkanten.

4. Ueber einem geg. (spitzwinkligen) Dreieck als Grundfläche eine Pyramide zu errichten, deren Dreikant an der Spitze ein Oktant sei. (II. Anh. 10 u. II. Aufg. 2. c führen auf die nämliche Lösung wie III. Anh. 30. a.)

5. Ein Vierflach zu konstr., von dessen Flächen die eine einem geg. Dreieck kongruent, eine zweite einem geg. Dreieck ähnlich, eine dritte mit einem geg. Dreieck inhaltsgleich sei.

6. Ein Vierflach zu konstr., von dem zwei Flächen geg. sind, und dessen Inhalt gleich einem geg. Würfel sei.

7. Ein Vierflach zu konstr., von dem eine Fläche und drei Höhen geg. sind. (Zwei Fälle zu berücksichtigen.)

8. Ein Vierflach zu konstr., von dem geg. sind: eine Fläche, die zugehörige Schwerlinie, und die Verhältnisse der von derselben Ecke ausgehenden Kanten. (II. Anh. 11. b.)

9. Eine Pyramide zu konstr., wenn geg. sind: die rechteckige Grundfläche, die Höhe, und die von je zwei gegenüberliegenden Seitenflächen gebildeten Keile. (II. Anh. 9.)

10. Eine Pyramide zu konstr., wenn geg. sind: die Grundfläche, der Rauminhalt, die Länge einer Seitenkante, und der Grundneigungswinkel einer zweiten Seitenkante.

11. Eine Pyramide zu konstr., wenn geg. sind: die Grundfläche und die Grundneigungswinkel einer Seitenfläche und der in dieser liegenden zwei Seitenkanten.

12. Von einem Parallelflach sind die Längen der von einer Ecke ausgehenden drei Kanten und die an ihnen befindlichen Keilwinkel gegeben. Es sollen die vier Diagonalen durch Konstruktion in einer Ebene gefunden werden.

13. Ein Rhomboeder zu konstr., von dem die Hauptdiagonale und ein Rhombenwinkel geg. sind. (2 Lösungen.)

14. In einem durch seine drei Seiten geg. Dreikant werden von den Kanten drei geg. Strecken abgeschnitten und durch die Endpunkte Ebenen senkrecht zu den Kanten gelegt. Von dem durch diese drei Ebenen aus dem Dreikant ausgeschnittenen Körper soll das Netz konstr. werden. (Vgl. II. 5, zweiter Bew.)

---

15. Die Netze der fünf regul. Polyeder zu konstr.

16. a. Die Schnittfigur eines durch seine Kantenlänge geg. Dodekaeders oder Ikosaeders mit einer Ebene zu konstr., die durch zwei parallele Kanten geht. (Vgl. III. Anh. 47. b.)

b. Von jedem der fünf regul. Polyeder die Halbmesser der umbeschriebenen, der einbeschriebenen und der kantenberührenden Kugel, sowie den Keilwinkel an den Kanten durch Konstruktion in einer Ebene zu finden, wenn die Kantenlänge geg. ist. (Für Dodek. und Ikos. enthält die Schnittfigur der Aufg. a sämtliche gesuchten Stücke.)

17. Die Gestalt der Flächen der in III. Anh. 58, 59 und 60 aufgeführten Polyeder zu konstr., wenn die Achsenabschnitte OA, OB, OC geg. sind.

18. a. Die 13 gleich e c k i g - halbregulären Polyeder, die zu den in III. Anh. 63. a aufgezählten gleich f l ä c h i g - halbregulären reziprok sind, zu diskutieren. (III. Anh. 62. b.)

b. Diese Polyeder zu konstr. durch Abstumpfung der Ecken und Kanten der regul. Polyeder. (Stumpft man die Ecken von Tetraeder, Oktaeder, Würfel, Ikosaeder, Dodekaeder so ab, daß aus jeder ursprünglichen Fläche ein regul. Vieleck von doppelter Seitenzahl wird, so erhält man die bezw. mit Pyramiden-Tetraeder, -Würfel, -Oktaeder, -Dodekaeder, -Ikosaeder reziproken. — Mit den beiden Granatoedern sind reziprok die Körper in III. Anh. 54. b u. c, vgl. 56. — Das mit dem oktaedr., bezw. ikosaedr. Leuzitoeder reziproke erhält man, wenn man Ecken und Kanten eines Würfels oder Oktaeders, bezw. Dodekaeders oder Ikosaeders, so abstumpft, daß in jeder Fläche ein mit ihr ähnliches und konzentrisch-ähnlich liegendes Vieleck entsteht, von dem immer zwei Ecken mit zwei Ecken eines benachbarten Vielecks die Ecken eines Quadrates bilden. — Stumpft man so ab, daß in jeder Fläche ein mit ihr konzentrisches Vieleck von doppelter Seitenzahl entsteht, und beobachtet im übrigen das nämliche wie vorhin, so erhält man die mit den beiden Diamantoedern reziproken*). — Zeichnet man in jeder Fläche eines Würfels oder Oktaeders, bezw. Dodekaeders oder Ikosaeders, ein mit ihr ähnliches und konzentrisch=verdreht liegendes Vieleck von solcher Größe und Lage, daß immer zwei Ecken eines Vielecks mit zwei Ecken des in einer Nachbarfläche liegenden Vielecks ein aus zwei regul. Dreiecken bestehendes wind=schiefes Viereck bilden: so erhält man das mit dem oktaedr., bezw. ikosaedr. Gyroeder reziproke.)

c. Die Netze der in b aufgeführten 13 Polyeder zu konstr., wenn die Kantenlänge geg. ist.

d. Die Kantenlängen der in b aufgeführten 13 Polyeder zu konstr., wenn der Halbmesser der umbeschriebenen Kugel geg. ist.

e. Die Flächengestalt der 13 gleich f l ä ch i g = halbregul. Polyeder zu konstr., wenn der Halbmesser der einbeschriebenen Kugel geg. ist.

f. Für sämtliche halbregul. Polyeder die Keilwinkel an den Kanten durch ebene Konstr. zu finden.

19. a. Zwei kongr. Würfel von geg. Kantenlänge durch=dringen sich so, daß sie eine Diagonale gemeinsam haben und um 180° gegen einander verdreht sind. Aus jeder Fläche des einen ragt eine Ecke des andern als dreiseitige Pyramide her=vor. Schneidet man diese zwölf kongr. Pyramiden weg, so bleibt als Kern eine aus zwei regul. sechsseit. Pyram. bestehende Doppel=pyramide übrig. Von diesem Kern, sowie von den zwölf Pyra=miden sollen die Netze konstr. werden. (Salmiak=Zwilling.)

b. Zwei kongr. Oktaeder durchdringen sich so, daß, wenn sie als Prismatoide betrachtet werden, ihre Grundflächen in der nämlichen Ebene konzentrisch und um 180° gegen einander ver=dreht liegen. Es soll der beiden Körpern gemeinschaftliche Kern diskutiert und sein Netz konstruiert werden.

20. Zwei kongr. regul. sechsseitige Prismen, durch deren Achsen je eine Ebene senkrecht zu zwei parallelen Seitenflächen

*) Die mit den beiden Leuzitoedern und Diamantoedern reziproken kann man auch durch Abstumpfen der beiden Granatoeder erhalten, indem man in jeden Rhombus ein Quadrat einzeichnet, dessen Seiten den Rhombendiagonalen parallel sind, und dessen Ecken 1) auf den Rhombenseiten, 2) innerhalb der Rhomben liegen.

geht, werden so gelegt, daß diese zwei Ebenen zusammenfallen und die Achsen sich rechtwinklig schneiden. Es soll eine der zwei (ebenen) Schnittfiguren der Prismenmäntel in wahrer Größe gezeichnet und das Netz des den Prismen gemeinschaftlichen Kerns konstruiert werden.

21. Ein geg. stumpfes Rhomboeder wird durchdrungen von einem spitzen Rhomboeder, das mit dem stumpfen den Mittelpunkt, die Richtung der Hauptdiagonale und die einbeschriebene Kugel gemein hat, und dessen von einer Hauptecke ausgehende Kanten parallel sind mit den von der entsprechenden Hauptecke ausgehenden Rhombendiagonalen des stumpfen. Es soll der beiden Körpern gemeinschaftl. Kern ermittelt und dessen Netz gezeichnet werden. (Die Hauptecken des stumpfen Rhomboeders gehören auch dem Kernkörper an. In den 2 mal 6 Flächen der zwei Rhomboeder entstehen als Flächen des Kernkörpers 2 mal 6 symmetrisch gestaltete Fünfecke von zweierlei Art. Im stumpfen Rhomboeder sind zwei Fünfecksseiten parallel mit einer Rhombendiagonale; im spitzen fallen zwei Fünfecksseiten in Kanten, zwei andere sind diesen parallel. Mittels einer in einem gemeinschaftl. Diagonalschnitt beider Rhomboeder gezeichneten Hilfsfigur lassen sich in die beiderlei Rhomboederflächen die bezügl. Fünfecke leicht einzeichnen.)

22—35: Konstruktionen an Polyedern. Ebene Schnitte.

22. Im Innern eines geg. Vierflachs einen Punkt zu finden von der Eigenschaft, daß seine Verbindungsebenen mit den 6 Kanten das Vierflach in vier dreiseitige Pyramiden teilen, deren Rauminhalte sich verhalten wie $m:n:p:q$.

23. a. Den Schwerpunkt eines Pyramidenrumpfes —

b. eines Körpers zu bestimmen, der aus zwei verschiedenen Kegelrümpfen mit gemeinschaftlicher Grundfläche zusammengesetzt ist. (III. Anh. 21. Anm.)

24. Den Mantel a) eines Kegels — b) eines Kegelrumpfes durch Parallelkreise in n gleiche Teile zu teilen.

25. a. Den Halbmesser einer Kugel zu finden, deren Oberfläche gleich der Summe der Oberflächen zweier geg. Kugeln sei.

b. Die Halbmesser zweier Kugeln zu finden, wenn die

Summe ihrer Oberflächen gleich der Oberfläche einer geg. Kugel sein soll, und wenn die Summe oder die Differenz oder das Verhältnis beider Halbmesser geg. ist.

Anm. Die folgenden Aufgaben 26—29 über ebene Schnitte von Polyedern sollen ohne Benützung von I. Aufg. 6. durch bloßes Ziehen von geraden Linien gelöst werden (I. Einl. 6. d).

26. Auf drei Kanten eines Parallelflachs, von denen a) je zwei — b) keine zwei der nämlichen Fläche angehören, sind drei Punkte gegeben. Die Schnittfigur der durch sie gelegten Ebene zu konstr. (Je zwei Seiten des Schnittpolygons schneiden sich verlängert auf der Schnittkante der zwei Flächen, in denen sie liegen. Bei b schneide man ein Stück von dem Parallelflach weg, indem man durch zwei geg. Punkte und die Kante, auf der einer von ihnen liegt, einen Schnitt führt, und betrachte zunächst den Restkörper.)

27. Die Schnittfigur einer mehrseitigen Pyramide mit einer Ebene zu zeichnen, welche drei a) auf einander folgende — b) nicht auf einander folgende Seitenkanten nach geg. Verhältnissen schneide. (Mittels der Schnittlinien von je zwei nicht an einander stoßenden Seitenflächen oder Diagonalschnitten.)

28. Die Schnittfigur einer Pyramide mit einer Ebene zu zeichnen, die durch eine in der Ebene der Grundfläche geg. Gerade und durch einen auf einer Seitenkante geg. Punkt gehe. (Die Seiten des Schnittpolygons und der Grundfläche schneiden sich je zu zweien auf der geg. Geraden.)

29. Geg. ein senkrechtes Prisma und eine in der Ebene seiner Grundfläche liegende Gerade. Das Prisma durch eine Ebene, die durch die Gerade gehe, so zu schneiden, daß die Schnittfigur einen geg. Winkel enthalte, dessen Spitze auf einer bestimmten Seitenkante liege. (Das von der Spitze des Winkels und den Spurpunkten seiner Schenkel gebildete Dreieck kann in umgelegter Lage leicht gezeichnet werden.)

30. Eine geg. vierseitige Pyramide nach einem gleichschenkligen Trapez zu schneiden, von dessen parallelen Seiten die eine in einer bestimmten Seitenfläche liege, die andere in der Grundfläche liege und eine geg. Länge habe.

31. Ein geg. Vierkant durch eine Ebene so zu schneiden, daß die Schnittfigur ein Parallelogramm von geg. Inhalt sei.

32. Einen Oktanten durch eine Ebene so zu schneiden, daß das Schnittdreieck einem geg. Dreieck kongruent sei. (Man findet die in den Seitenflächen liegenden rechtwinkl. Dreiecke entweder durch III. Anh. Aufg. 4 oder direkt durch Bestimmung ihrer Katheten.)

33. In einer Fläche eines regul. Tetraeders ist eine Gerade parallel einer Kante geg. Durch dieselbe eine Ebene so zu legen, daß sie das Tetraeder nach einem Trapez schneide, in das sich ein Kreis einbeschreiben läßt. (Die zwei Verbindungslinien der Mittelpunkte der Gegenseiten eines jeden durch die Gerade gehenden Schnitttrapezes liegen in zwei festen Ebenen.)

34. In einem geg. Sechseck sind die sechs Winkel gleich, und die erste, dritte und fünfte Seite haben gleiche Länge; es soll a) ein Oktaeder, b) ein Würfel gefunden werden, dem das Sechseck als Schnittfigur angehört.

35. Dieselbe Aufg. für ein Dodekaeder. (Wann erhält man 1, 2, 3 Lösungen?)

36—60: Ein- und umbeschriebene Polyeder.

(Lösung meist mit Hilfe von Ähnlichkeitspunkten oder dadurch, daß man sich zuerst durch Lösung der umgekehrten Aufgabe ein dem gesuchten ähnliches Gebilde verschafft.)

36. Einem geg. Kegel a) einen Würfel, b) ein Oktaeder einzubeschreiben, so daß eine Fläche in der Grundfläche des Kegels liege, die übrigen Ecken auf seinem Mantel liegen.

37. Einem geg. Kugelabschnitt a) ein gleicheckig-halbregul. n-seitiges Prisma, b) ein gleicheckig-halbregul. 2n-seitiges Prismatoid einzubeschreiben, so daß eine Grundfläche in der Grundkreisebene des Kugelabschnittes liege, die übrigen Ecken auf seiner Haubenfläche liegen. (Vgl. III. Anh. 63. a.)

38. In ein geg. Vierflach einen Würfel einzubeschreiben, so daß in einer Fläche des Vierflachs vier Würfelecken liegen, in einer zweiten Fläche zwei, in den zwei übrigen Flächen je eine.

39. In einen geg. Kugeloktanten einen Würfel einzubeschreiben, so daß eine seiner Flächen in einer Seitenfläche des Oktanten liege, zwei Kanten in den zwei andern Seitenflächen, und zwei Ecken auf der Kugelfläche.

40. Einen Kegelrumpf, von dem der Grundneigungswinkel der Mantellinien und a) das Verhältnis der Grundkreise, b) die Höhe geg. ist, in einen geg. Kugeloktanten so einzubeschreiben, daß ein Grundkreis auf der Kugeloberfläche liege, der andere Grundkreis die drei Seitenflächen des Oktanten berühre.

41. Einer geg. Kugel ein Vierflach einzubeschreiben, a) das einem geg. Vierflach ähnlich sei, b) dessen Flächen mit vier geg. Ebenen parallel seien.

42. Einer geg. Kugel a) ein gleicheckig-halbregul. 2n-seitiges Prismatoid einzubeschreiben, b) ein gleichflächig-halbregul. 2n-seitiges Trapezoeder umzubeschreiben. (Vgl. III. Anh. 61. b.)

43. Ein Vierflach zu konstr., das einem geg. Vierflach ähnlich sei, und von dessen Ecken jede auf der Oberfläche einer von vier geg. konzentrischen Kugeln liege. (II. Anh. 11. a.)

44. Einem geg. Vierflach einen Wulst (vgl. III. Aufg. 10) von geg. Verhältnis der Halbmesser des Meridiankreises und des Mittelkreises so einzubeschreiben, daß er jede Fläche berühre, und daß seine Achse einer geg. Geraden parallel sei.

45. In eine geg. Kugel acht gleiche Kugeln so einzubeschreiben, daß ihre Mittelpunkte die Ecken eines Würfels bilden, und daß jede die geg. Kugel und drei der übrigen Kugeln berühre.

46. Einer geg. Kugel vier andere Kugeln, von denen drei gleich groß seien und der Halbmesser der vierten zum Halbmesser der drei ersten ein geg. Verhältnis habe, so einzubeschreiben, daß jede die andern drei sowie die geg. Kugel berühre.

47. Einem geg. Würfel a) zwei gleiche Kugeln, b) zwei Kugeln, deren Halbmesser ein geg. Verhältnis haben, so einzubeschreiben, daß ihre Mittelpunkte auf einer Würfeldiagonale liegen, und daß sie einander und je drei in einer Ecke zusammenstoßende Flächen berühren.

48. Einem geg. Rhomboeder ein Oktaeder so einzubeschreiben, daß in jeder Rhomboederfläche eine Oktaederecke liege.

49. Einem Rhomboeder, von dem die Kantenlänge und ein Rhombenwinkel geg. ist, ist ein Cylinder von geg. Verhältnis des Halbmessers zur Höhe so einbeschrieben, daß seine Achse in die Hauptdiagonale des Rhomboeders fällt und die zwei Grundkreise je drei Rhomboederflächen berühren. Es soll der Achsenschnitt des Cylinders durch ebene Konstr. gefunden werden.

50. Ein Rhomboeder zu konstr., das so in einen geg. Cylinder gelegt werden kann, daß seine Hauptecken in die Grundkreis-Ebenen, die übrigen Ecken auf die Mantelfläche zu liegen kommen. — Wie müssen sich Höhe und Halbmesser des Cylinders verhalten, damit das Rhomboeder zum Würfel werde?

51. Einer geg. Kugel ein Rhomboeder umzubeschreiben, von dem ein Rhombenwinkel geg. ist.

52. Einem geg. Oktaeder einen Würfel so einzubeschreiben, daß seine acht Ecken auf den von zwei gegenüberliegenden Ecken ausgehenden Kanten des Oktaeders liegen.

53. Einem geg. Oktaeder ein Tetraeder so einzubeschreiben, daß eine Mitteltransversale des Tetraeders in eine Oktaederdiagonale falle, und daß seine Ecken a) in vier Oktaederflächen, b) auf vier Oktaederkanten liegen. (III. Anh. 52. a, 49. a und vor. Aufg.)

54. a. Einem geg. Tetraeder einen Würfel so einzubeschreiben, daß in jeder Tetraederfläche eine Würfelecke liege. (Entw. direkt od. durch III. Anh. 53. a und 49. a.)

b. Einem geg. Dodekaeder ein Oktaeder so umzubeschreiben, daß die acht Oktaederflächen durch acht Ecken des Dodekaeders gehen. (III. Anh. 52. b oder 53. b.)

c. Einem geg. Würfel ein Ikosaeder so umzubeschreiben, daß acht Flächen des Ikosaeders durch die acht Würfelecken gehen.

55. a. Ein Körper, der aus einem Cylinder und aus zwei auf dessen Grundflächen aufgesetzten kongr. Kegeln besteht, kann so in ein oktaedr. Granatoeder einbeschrieben werden, α) daß der Cylinder 4, und jeder Kegel 4 Flächen berührt, β) daß der Cylinder 6, und jeder Kegel 3 Flächen berührt. Es soll beidemal der Achsenschnitt des Körpers gezeichnet werden.

b. Ein Körper, der aus einem Cylinder, aus zwei auf dessen Grundflächen aufgesetzten kongr. Kegelrümpfen, und aus zwei auf die andern Grundflächen der Kegelrümpfe aufgesetzten kongr. Kegeln besteht, kann so in ein ikosaedr. Granatoeder einbeschrieben werden, daß der Cylinder 10, jeder Kegelrumpf und jeder Kegel 5 Flächen berührt. Es soll der Achsenschnitt des Körpers gezeichnet werden. (Ein Großkreis der dem Granatoeder einbeschriebenen Kugel muß die Seiten des Achsenschnittes berühren. Sämtliche Berührungsmantellinien fallen in Rhomben=diagonalen.)

56. Aus einem geg. Pyramidentetraeder ein Leuzitoeder auszuschneiden, so daß in jeder Fläche des Pyramidentetraeders eine Fläche des Leuzitoeders liege. (Die Mittelpunkte der Tetraederkanten bilden die Oktaederecken des Leuzitoeders.)

57. Einem geg. Wulst ein regul. 10=seitiges Prismatoid berührend umzubeschreiben, dessen Höhe gleich dem Durchmesser des Meridiankreises sei. Grundfläche und Seitenfläche sollen durch ebene Konstruktion gefunden werden, wenn die Halbmesser des Meridiankreises und des Mittelkreises geg. sind.

58. Ein Kegel hat mit einem Cylinder den Grundkreis gemein, und seine Spitze liegt im Mittelpunkt des andern Grundkreises des Cylinders. In den Raum zwischen Kegelmantel, Cylindermantel und Cylindergrundkreis sind a) sechs — b) fünf gleiche Berührungskugeln so einbeschrieben, daß jede ihre zwei Nachbarkugeln berührt. Es soll der Achsenschnitt des Cylinders konstr. werden, wenn der Halbmesser der Kugeln geg. ist.

59. a. Einer geg. Kugel einen Kegelrumpf einzubeschreiben, der gleiche Höhe und gleiche Mantelfläche mit einem geg. Cylinder habe.

b. Einer geg. Kugel einen Kegelrumpf umzubeschreiben, dessen Mantel gleich einem geg. Kreis sei.

60. Einer geg. Kugel einen Kegelrumpf einzubeschreiben, wenn die Verhältnisse der Mantelfläche zu den zwei Grundkreisen geg. sind.

III. Berechnungs=Aufgaben.

Vorbemerkung.

Bei der Anwendung der Körperberechnung auf praktische Beispiele kommt auch das Gewicht in Betracht. Zu seiner Bestimmung ist die Kenntnis des spezifischen Gewichtes des Stoffes, woraus der betreffende Körper besteht, erforderlich.

Unter dem spezifischen Gewichte eines Stoffes versteht man diejenige Zahl, die angiebt, wie vielmal ein aus dem Stoff bestehender

Körper von beliebigem Volumen schwerer ist als ein gleich großes Volumen Wasser. Man erhält also das spez. Gewicht, wenn man das Gewicht des Körpers dividiert durch das Gewicht des gleichen Volumens Wasser. Tab. 1 (S. 224) giebt ein Verzeichnis der spezifischen Gewichte der am häufigsten vorkommenden Stoffe.

Ist V das Volumen eines Körpers, S sein spezifisches Gewicht, W das Gewicht der Kubikeinheit Wasser, so bestimmt sich hieraus das Gewicht P des Körpers auf folgende Weise:

Bezeichnet man mit p das Gewicht der Kubikeinheit des Stoffes, so ist nach obiger Erklärung: $S = \frac{p}{W}$, also $p = SW$. Dies ist das Gewicht der Volumeinheit, folglich ist das Gewicht des Volumens V: $P = V.p$, oder:

$$P = VSW.$$

Man erhält also das Gewicht durch Multiplikation des Volumens mit dem spezifischen Gewicht und dem Gewicht der Kubikeinheit Wasser.

Im metrischen Maßsystem besteht zwischen Gewichtsmaß und Längenmaß die Beziehung, daß das Gramm das Gewicht eines Kubik-Centimeters —, also das Kilogramm das Gewicht eines Kubik-Dezimeters (oder Liters) Wasser ist. Wird daher als Längeneinheit das Centimeter und gleichzeitig als Gewichtseinheit das Gramm, oder als Längeneinheit das Dezimeter und gleichzeitig als Gewichtseinheit das Kilogramm gewählt, so ist beidemal: $W = 1$. Das spezifische Gewicht ist also dann gleich dem Gewicht der Kubikeinheit des betr. Stoffes, und das Gewicht des Volumens V ist:

$$P = VS.$$

Tab. 2 (S. 225) giebt die Maße und Gewichte der Länder, in denen das metrische Maßsystem noch nicht eingeführt ist, verglichen mit dem letzteren.

1—8: Würfel.

1. Ein Würfel hält K (423,03) englische Kubikfuß. a) Wie viel hält er in Kubikmetern? b) Wie groß ist seine Oberfläche in Quadratmetern? — Antw.: a) 11,978 cbm, b) 31,411 qm.

2. Wie groß ist das Gewicht W der Kubikeinheit Wasser in den verschiedenen Maßsystemen? (Vgl. Tab. 2, S. 225.) — Antw.:
Im metr. Maßsystem (1 cbm) . . W.= 1000 kg.

In England }
„ Nordamerika } (1 Kub.-Fuß) . . W = 62,424 Pfund.
„ Rußland „ . . W = 69,144 „

3. Die Diagonale eines Würfels ist d (= 4,58 dm); wie groß ist sein Volumen? — Antw.: 18,489 cdm.

4. Der Diagonalschnitt eines Würfels ist S (= 17,235 qcm); wie groß ist seine Oberfläche? — Antw.: 73,122 qcm.

5. Die Oberflächen zweier Würfel verhalten sich wie m zu n (9 zu 20); wie verhalten sich ihre Inhalte? — Antw.: Wie 0,30187 zu 1.

6. Ein Würfel von Sandstein wiegt P (180) kg; wie groß ist seine Kante? — Antw.: 4,16 dm.

7. Ein messingner Würfel vom Gewicht P (= 1,5 kg) soll vergoldet werden; wieviel kostet die Vergoldung, wenn die Vergoldung des Quadratmeters m (60) Mark kostet? — Antw.: 1,14 Mark.

8. Die Kante eines gußeisernen Würfels ist a (= 20,8 cm); wie lang ist die Kante eines gleich schweren Würfels von Tannenholz? — Antw.: 50,7 cm.

9—13: Quader.

9. Die Kanten eines Quaders verhalten sich wie die Zahlen l, m, n (7, 9, 13), seine Diagonale ist d (= 25,7 m); wie groß ist sein Volumen? — Antw.: 2688,9 cbm.

10. Zwei Balken von quadratischem Querschnitt haben gleiches Volumen; ihre Längen verhalten sich wie m zu n (8 zu 11); wie verhalten sich die Seiten der Querschnittsquadrate? — Antw.: Wie 1,1726 zu 1.

11. Wieviel qm Blech braucht man zu einer Wanne ohne Deckel, die K (1440) Liter halten soll, wenn der Boden l (1,2) m lang und b (0,8) m breit werden soll? — Antw.: 6,96.

12. Wie schwer ist eine Kiste von Tannenholz samt Deckel, deren Kanten im lichten die Längen l, m, n (= 60, 80, 100 cm), und deren Wände die Dicke d (= 2,5 cm) haben? Wieviel Kilogramm dürfen in sie gelegt werden, wenn sie im Wasser bis zur Mitte der mit l parallelen äußeren Kante einsinken soll?*)

*) Bei Aufgaben über schwimmende Körper kommt der Satz („Ar-

— Antw.: Gew. der Kiste = 50,06 kg; Belastung = 240 kg.

13. Wieviel kosten die Backsteine zu einem quadratischen Turm, der eine Breite b (= 4,2 m), eine Höhe h (= 10,8 m), und eine Mauerdicke d (= 0,6 m) hat, wenn ein Backstein die Dimensionen l, m, n (= 24, 12, 6 cm) hat, wenn das Hundert Backsteine k (3) Mark kostet, und wenn wegen des Abfalls p (8) Prozent mehr genommen werden müssen? — Antw.: 1749,60 Mark.

14—18: Prisma.

14. Wie groß ist der Inhalt eines regulären dreiseitigen Prismas, in dem jede Kante die Länge a (= 6,2 cm) hat? — Antw.: 103,2 ccm.

15. Ein reguläres fünfseitiges Prisma, dessen Höhe das Dreifache einer Grundkante ist, hat den Inhalt K (= 248 cdm). Wie lang ist seine Grundkante? — Antw.: 3,635 dm.

16. Wie groß ist der Inhalt K eines spitzen bezw. stumpfen Rhomboeders, wenn die von den Hauptecken ausgehenden Rhombendiagonalen die Länge d (= 3 cm, bezw. 2 cm), die übrigen Rhombendiagonalen die Länge d' (= 2 cm, bezw. 3 cm) haben? (III. Anh. 11. a). — Antw.: $K = \frac{1}{4} d'^2 \sqrt{3\, d^2 - d'^2} = 4{,}796$ ccm, bezw. 3,897 ccm.

17. Wie groß ist das Gewicht eines Dachsparrens von Tannenholz, der als Querschnitt ein Quadrat von der Seitenlänge a (= 16 cm) hat und an beiden Enden durch rechteckige Flächen so abgeschrägt ist, daß zwei parallele Seitenflächen des Sparrens gleichschenklige Trapeze sind, in denen der spitze Winkel $\frac{1}{2}$ R beträgt und die größere Parallelseite die Länge l (= 5 m) hat? — Antw.: 61,95 kg.

18. Eine gußeiserne hohle Säule von der Form eines regul. sechsseitigen Prismas hat die Höhe h (= 10 Fuß), die äußere Grundkante a (= 6 Zoll) und die Dicke d (= 10 Lin.). Wie groß ist ihr Gewicht? — Antw.: In Nordamerika 867 Pfund.

---

chimedisches Prinzip") zur Anwendung, daß das Gewicht des schwimmenden Körpers gleich ist dem Gewichte der von ihm verdrängten Flüssigkeitsmasse.

19—28: Cylinder.

19. Der Inhalt eines Cylinders ist K (= 33 cdm), der Halbmesser seines Grundkreises r (= 2,6 dm); wie groß ist seine Höhe und sein Mantel? — Antw.: Höhe = 1,554 dm, Mantel = 25,385 qdm.

20. Die Wandfläche eines cylindrischen Innenraumes ist M (= 160 qm), seine Höhe ist gleich dem Durchmesser der Grundfläche; wie groß ist sein Rauminhalt? — Antw.: 285,46 cbm.

21. In eine cylindrische Glasröhre werden P (1,5) Gramm Quecksilber gebracht und nehmen darin einen Raum von der Länge l (= 168 mm) ein. Wie groß ist der innere Durchmesser der Röhre? — Antw.: 0,91 mm.

22. Der Mantel eines cylindrischen Blechgefässes ist M (= 27 qdm), sein Inhalt K (= 30 l); wie groß ist seine Höhe und sein Halbmesser? — Antw.: Höhe = 1,934 dm, Halbm. = 2,222 dm.

23. Aus einem Blechstreifen gehämmerten Silbers werden runde Stücke zu Münzen geschlagen; der Streifen hat die Länge l (= 60 cm), die Breite b (= 4,5 cm), die Dicke d (= 0,25 cm), der Durchmesser einer Münze ist 2 r (= 4,25 cm). Wieviel wiegt der Abfall des Streifens, wenn die Löcher von den Längenkanten und von einander gleich weit entfernt sind? — Antw.: 227,21 g.

24. Ein Gewichtsystem von Messing besteht aus lauter Cylindern, in denen die Höhe das anderthalbfache des Durchmessers der Grundfläche ist; wie groß sind die Höhen der einzelnen Gewichtstücke, wenn diese 1, 2, 3 u. s. w. Kilogramm halten sollen? — Antw.: 1) 6,99 cm, 2) $6{,}99 \sqrt[3]{2} = 8{,}80$ cm, 3) $6{,}99 \sqrt[3]{3} = 10{,}08$ cm, u. s. f.

25. Wie schwer ist ein cylindrischer Mühlstein aus Sandstein, von dem die Höhe h (= 63 cm), der äußere Durchmesser 2 R (= 176 cm), und der Lochdurchmesser 2 r (= 20 cm) geg. ist? — Antw.: 3782 kg.

26. Zu dem Guß von 10 gleichen eisernen Röhren von der Länge l (= 12 Fuß) und dem lichten Durchmesser 2 r (= 6 Zoll) werden P (5700) Pfund Eisen verwendet; es bleibt ein Rückstand

von P' (154) Pfund übrig. Wie dick werden die Röhren? — Antw.: In England: 8,4 Lin.

27. Ein Silberdraht von 1 (2) Meter Länge und P (10,8) Gramm Gewicht soll mit P' (3) Gramm Gold vergoldet werden. a) Wie dick ist der Silberdraht? b) Wie dick wird die Vergoldung? — Antw.: a) 0,8 mm, b) 0,03 mm.

28. Ein Cylinder vom Halbmesser r (= 2 cm) wird durch eine zu seiner Achse schiefe Ebene so geschnitten, daß das eine Teilstück den Inhalt K (= 160 ccm) und die Gesamtoberfläche (Mantel + Grundkreis + Schnittellipse) O (= 200 qcm) hat. Wie groß sind die zwei parallelen Seiten des Trapezes, das den zur Schnittebene senkrechten Achsenschnitt des Teilstückes bildet? (Vgl. III. Anh. 9. c und II. Anh. 22. c.) — Antw.: 16,614 cm und 8,851 cm.

29—34: Pyramide.

29. Eine Pyramide hat den Inhalt K (= 365 cbm) und die Grundfläche G (= 22,5 qm). Wie groß ist ihre Höhe? — Antw.: 48,67 m.

30. Eine reguläre achteckige Pyramide hat die Grundkante a (= 7 cm), ihre Höhe ist gleich dem Durchmesser des der Grundfläche umbeschriebenen Kreises; wie groß ist ihr Inhalt? — Antw.: 1442,6 ccm.

31. Ein Parallelschnitt einer Pyramide ist die Hälfte der Grundfläche; wie verhält sich seine Entfernung von der Spitze zur Höhe der Pyramide? — Antw.: Wie 1 zu $\sqrt{2}$.

32. Eine reguläre vierseitige Pyramide, deren Seitenkanten gleich den Grundkanten sind, hat den Inhalt K (= 126,59 cbm); wie lang sind die Kanten? — Antw.: 8,128 m.

33. Wie groß ist der Inhalt eines Sphenoids (vgl. III. Anh. 26. a), dessen drei Kanten die Längen a, b, c (= 4, 5, 6 cm) haben? (III. Anh. 19. d). — Antw.:

$$K = \frac{1}{6}\sqrt{\frac{1}{2}(a^2+b^2-c^2)(b^2+c^2-a^2)(c^2+a^2-b^2)} = 9{,}1855 \text{ ccm}.$$

34. Aus K (1) cdm Thon wird das gleicheckig-halbregul. Polyeder modelliert, dessen Ecken die Mitten der Oktaederkanten bilden (vgl. III. Anh. 54. b). Wie groß wird die Kantenlänge des Polyeders? — Antw.: 7,5 cm.

35—41: Kegel.

35. Ein kegelförmiges Turmdach hat das Volumen V (= 11,9 cbm) und die Höhe h (= 6,7 m); wie groß ist der Halbmesser der Grundfläche? — Antw.: 1,3 m.

36. Der Achsenschnitt eines Kegels ist ein gleichseitiges Dreieck von der Seitenlänge s (= 15 cm); wie groß ist der Mantel und der Inhalt des Kegels? — Antw.: M = 353,43 qcm, K = 765,20 ccm.

37. Das Zelttuch eines kegelförmigen Zeltdaches mißt M (100) qm; sein Achsenschnitt ist ein gleichschenklig-rechtwinkliges Dreieck; wie groß ist sein Rauminhalt? — Antw.: 111,82 cbm.

38. Ein bleierner Kegel hat den Grundkreis-Halbmesser r (= 3 cm); wie groß ist der Halbmesser eines gleich hohen und gleich schweren Kegels von Gußeisen? — Antw.: 3,76 cm.

39. In einen Kegel ist ein Cylinder einbeschrieben, dessen Höhe gleich der halben Höhe des Kegels ist; wie verhalten sich die Inhalte beider Körper? — Antw.: Wie 8 zu 3.

40. Die Oberfläche eines Kegels ist O (= 5 qm), der Halbmesser seines Grundkreises r (= 1 dm); wieviel Grade mißt der Kreisausschnitt, der die Abwicklung des Mantels vorstellt? — Antw.: $2^\circ\ 16'\ 34''$.

41. Ein kreisförmiges Stück Filtrierpapier wird nach zwei zu einander senkrechten Durchmessern gebrochen, zu einem Quadranten zusammengefaltet und derart zu einem kegelförmigen Filter geöffnet, daß die eine Hälfte des Mantels aus einer, die andere Hälfte aus drei Lagen Papier besteht. a) Wie groß muß die Öffnung eines kegelförmigen Glastrichters sein, damit sich das Papierfilter an seine Innenwand längs deren ganzen Ausdehnung glatt anlegen kann? b) Wie groß muß der Durchmesser des ursprünglichen Papierblattes mindestens sein, damit das Filter 1 Liter Flüssigkeit fassen kann? — Antw.: a) 60°, b) 32,8 cm.

42—50: Pyramiden- und Kegelrumpf.

42. Ein Pyramidenrumpf hat den Inhalt K (= 230 cbm), seine Grundflächen sind Quadrate von den Seitenlängen a und a'

(= 6,94 und 3,55 m); wie groß ist seine Höhe, und wie groß die Höhe seiner Ergänzungspyramide? — Antw.: 8,08 m, und 8,46 m.

43. Ein Monument aus Sandstein hat die Form eines regulären dreiseitigen Pyramidenrumpfes; die untere Grundkante ist a (= 90 cm), die obere a′ (= 50 cm), die Seitenkante k (= 180 cm). Wie groß ist das Gewicht des Monumentes? — Antw.: 972,7 kg.

44. In einem Pyramidenrumpf mit den Grundflächen G und G′ (= 27 und 16 qdm) halbiert ein Parallelschnitt die Höhe; wie groß ist dieser Parallelschnitt? — Antw.: 21,142 qdm.

45. Wie viele Fuhren Erde, jede zu F (1,5) cbm, müssen fortgeschafft werden, wenn in den Boden eine kreisförmige Grube gegraben wird, die eine Tiefe h (= 2 m), einen oberen Durchmesser 2 R (= 40 m), und einen Böschungswinkel von 45° erhalten soll? — Antw.: 1513,6.

46. Ein papierner Lampenschirm soll die Höhe h (= 9 cm) und die Grundkreis-Durchmesser 2 R u. 2 r (= 15 u. 7,5 cm) bekommen. Wie groß werden die zwei Halbmesser der Abwicklungsfigur, und wieviel Grade messen ihre Bögen? — Antw.: Halbm. = 19,5 und 9,75 cm, Bogen = 138° 27′ 41″.

47. Eine irdene Schüssel soll ein Liter Flüssigkeit halten, der innere Bodendurchmesser soll 2 r (= 7 cm), die lichte Höhe — h (= 4 cm) sein. Wie groß muß der lichte Randdurchmesser werden? — Antw.: 26,8 cm.

48. Ein Cylinder vom Halbmesser r (= 50 cm) wird konisch ausgebohrt, so daß die mit den Grundkreisen des Cylinders konzentrischen, kreisförmigen Öffnungen sich verhalten wie m zu n (1 zu 2), und daß das Gewicht des durchbohrten Körpers die Hälfte von dem Gewichte des Vollcylinders ist; wie groß werden die Durchmesser der Öffnungen? — Antw.: 58,29 cm und 82,44 cm.

49. Ein runder Turm von der Höhe h (= 18 m) hat oben den Durchmesser 2 r (= 4,2 m), unten den Durchmesser 2 R (= 5,7 m). Wieviel kostet das Übertünchen des Turmes, wenn pro Quadratmeter m (4) Mark gerechnet werden? — Antw.: 1120,63 Mark.

50. Ein Cylinder und ein Kegelrumpf haben gleiche Höhe

h (= 5 cm) und konzentrische Grundflächen, ihre Mäntel durchschneiden sich in der Mitte der Höhe, die Grundkreishalbmesser des Kegelrumpfes sind R und r (= 15 cm und 9 cm). a) Wie verhalten sich die Inhalte, b) wie die Mäntel beider Körper? c) in welcher Höhe müßten sich die Mäntel schneiden, wenn die Inhalte — d) in welcher Höhe, wenn die Mäntel gleich sein sollten? — Antw.: a) Wie 48 zu 49, b) wie 0,64 zu 1, c) 2,40 cm, d) — 3,12 cm.

51—56: Prismatoid.

51. Von einem regulären dreiseitigen Prisma, dessen Grundkanten und Seitenkanten die Längen g und s (= 3,7 und 20 dm) haben, werden an beiden Enden Stücke weggeschnitten. Die eine Schnittebene schneidet von den drei Seitenkanten unten die Strecken l, m, n (= 1, 2, 3 dm) ab, die andere Schnittebene geht durch den oberen Endpunkt der ersten Seitenkante und schneidet von den zwei anderen die Strecken m' und n' (= 3 und 5 dm) ab. Wie groß ist der Inhalt des schiefabgeschnittenen Prismas? — Antw.: 90,895 cdm.

52. Ein reguläres 12-seitiges Prismatoid hat die Grundkante a und die Höhe h. α) Wie groß ist sein Inhalt? β) Wie groß ist der Inhalt des 12-seitigen Trapezoeders, das durch Erweitern der Seitenflächen des Prismatoides entsteht (vgl. III. Anh. 61. b)? γ) Wie verhält sich das Trapezoeder zu der Doppelpyramide, deren Halbflächner es vorstellt? — Antw.: α) $a^2h(1+\sqrt{3})$. β) $a^2h(7+4\sqrt{3})$. γ) Wie $4(2-\sqrt{3}):1$.

53. Wie groß ist der Inhalt eines Walmdaches, dessen Grundfläche ein Rechteck mit den Seiten l und b (= 50 und 20 m) ist, dessen Firstkante gleich der Differenz von l und b ist, und dessen Dreiecksflächen gleichseitig sind? — Antw.: 6128,3 cbm.

54. Ein Grabstein aus Granit kann in einen Obelisken mit rechteckigen Grundflächen und trapezförmigen Seitenflächen — und in ein Walmdach zerlegt werden. Das untere Grundrechteck des Obelisken hat die Seiten a und b (= 125 und 75 cm), das obere hat die Seiten a' und b' (= 75 und 50 cm), die Höhe ist h (= 200 cm). Das Walmdach hat das obere Rechteck zur Grundfläche; seine Trapezflächen stoßen an die kürzeren Rechtecksseiten, seine

Dreiecksflächen liegen in denselben Ebenen mit den breiteren Trapezflächen des Obelisken und bilden mit diesen zusammen zwei symmetrische Fünfecke; die Höhe des Walmdaches ist h' (= 25 cm). Wie groß ist das Gewicht des Grabsteines? — Antw.: 3884,4 kg.

55. Das Ufer eines Wasserbeckens hat die Gestalt eines rechtwinkligen Trapezes; die zwei parallelen Uferkanten sind a und b (= 20 und 14 m), die zu ihnen senkrechte Uferkante ist c (= 8 m); die Tiefe des Beckens ist h (= 2 m); die Böschungen haben eine Neigung von 45°. Wieviel Wasser enthält das Becken, wenn der Wasserstand um $\frac{1}{n}$ h (n = 4) niedriger ist als das Ufer? — Antw.: 1183 hl.

56. Ein Faß hat eine (innere) Höhe h (= 100 cm), einen Bodendurchmesser d (= 70 cm), einen Spunddurchmesser D (= 85 cm). Wieviel Liter hält es? (III. Anh. 44. d.) — Antw.: 506,6 Liter.

57—63: Reguläre Polyeder.

57. Bei jedem der fünf regul. Polyeder bezeichne: a die Kantenlänge, R den Halbmesser der umbeschr. Kugel, r — der einbeschr. Kugel, ρ — der kantenberührenden Kugel, O die Oberfläche, K den Inhalt. Wie groß sind R, r, ρ, O, K, ausgedrückt in a? — Antw.: in der nachstehenden Tabelle:

	Tetraeder.	Hexaeder.	Oktaeder.	Dodekaeder.	Ikosaeder.
R =	$\frac{a}{4}\sqrt{6}$	$\frac{a}{2}\sqrt{3}$	$\frac{a}{\sqrt{2}}$	$\frac{a}{4}\left(\sqrt{15}+\sqrt{3}\right)$	$\frac{a}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$
r =	$\frac{a}{2\sqrt{6}}$	$\frac{a}{2}$	$\frac{a}{\sqrt{6}}$	$\frac{a}{2}\sqrt{\frac{25+11\sqrt{5}}{10}}$	$\frac{a}{4}\,\frac{3+\sqrt{5}}{\sqrt{3}}$
ρ =	$\frac{a}{2\sqrt{2}}$	$\frac{a}{\sqrt{2}}$	$\frac{a}{2}$	$\frac{a}{4}\left(3+\sqrt{5}\right)$	$\frac{a}{4}\left(1+\sqrt{5}\right)$
O =	$a^2\sqrt{3}$	$6\,a^2$	$2a^2\sqrt{3}$	$3\,a^2\sqrt{5(5+2\sqrt{5})}$	$5\,a^2\sqrt{3}$
K =	$\frac{a^3}{12}\sqrt{2}$	a^3	$\frac{a^3}{3}\sqrt{2}$	$\frac{a^3}{4}\left(15+7\sqrt{5}\right)$	$\frac{5\,a^3}{12}\left(3+\sqrt{5}\right)$

(Bei Dodek. und Ikos. berechne man zuerst 2ρ als Diagonale einer Grundfläche der in III. Einl. 15. b und c erwähnten Prismatoide, hierauf $2R$ als Diagon. eines Rechtecks aus a und 2ρ. Zerlegt man sodann das Polyeder vom Mittelpunkt aus in Pyramiden, so sind diese regul. und kongr., eine Seitenkante $= R$, die Höhe $= r$, die Summe aller Pyr. $= K$.) — Durch Elimination von a aus je zweien der obigen Formeln, die dem nämlichen Polyeder angehören, kann von den Größen R, r, ρ, O, K jede in jeder andern ausgedrückt werden.

58. Wie verhält sich der Würfel a) zu dem ihm einbeschriebenen Oktaeder, b) zu dem ihm umbeschriebenen Oktaeder (dessen Flächen durch die Würfelecken gehen), c) zu dem Oktaeder, dessen Kanten die Würfelkanten in deren Mitten schneiden (vgl. III. Anh. 54. Schlußbem.)? — Antw.: a) Wie 6 zu 1, b) wie 2 zu 9, c) wie 3 zu 4.

59. Wie verhält sich das Tetraeder a) zu dem ihm einbeschriebenen Oktaeder (vgl. III. Anh. 54. a), b) zu dem ihm umbeschriebenen Oktaeder (vgl. III. Anh. 52. a und 49. a)? — Antw.: a) Wie 2 zu 1, b) wie 2 zu 27.

60. Ein hohles Ikosaeder von Zinkblech, dessen Wände die Dicke d (= 0,5 mm) haben, wiegt P (198,1) g. Wie groß ist seine äußere Kante? — Antw.: 8 cm.

61. Wie groß sind die zwei regul. Pyramidenrümpfe und das Prismatoid, in die ein Dodekaeder von der Kantenlänge a zerlegt werden kann? — Antw.: Die drei Teile haben gleiche Größe: $K = \frac{a^3}{12}(15 + 7\sqrt{5})$.

62. Wie groß ist der Inhalt des oktaedrischen und des ikosaedrischen Granatoeders, ausgedrückt α) in der Granatoederkante g, β) im Halbmesser der einbeschr. Kugel r, γ) in den Kanten o und w, bezw. i und d des zugehörigen Oktaeders und Würfels, bezw. Ikosaeders und Dodekaeders? (III. Anh. 55. b und c). — Antw.:

$$K_o = \frac{16}{9} g^3\sqrt{3} = 4r^3\sqrt{2} = \tfrac{1}{2} o^3\sqrt{2} = 2\,w^3.$$

$$K_i = 4\,g^3\sqrt{5+2\sqrt{5}} = 20\,r^3(\sqrt{5}-2) = \tfrac{5}{2} i^3 = \tfrac{5}{2} d^3(\sqrt{5} + 2).$$

63. Ein Tetraeder von Holz schwimmt im Wasser so, daß die außerhalb des Wassers befindliche Kante horizontal ist. Die Länge der Kante ist a (= 6 cm), die Entfernung der horizontalen

Kante vom Wasserspiegel e (= 1,5 cm). Wie groß ist das spezifische Gewicht des Holzes? — Antw.: 0,713.

64—82: Kugel und Kugelteile.

64. Wie groß ist der Halbmesser einer Kugel vom Inhalt K (= 324 ccm)? — Antw.: 4,26 cm.

65. Die Inhalte zweier Kugeln verhalten sich wie m zu n (3 zu 10); wie verhalten sich ihre Oberflächen? — Antw.: Wie 0,44814 zu 1.

66. Aus drei Kugeln von den Halbmessern r_1, r_2, r_3 (= 7, 9, 15 cm) wird eine einzige gegossen; wie groß wird ihr Halbmesser? — Antw.: 16,4 cm.

67. Eine halbkugelförmige Schale von Gußeisen hat den äußeren Durchmesser 2 R (= 20 cm) und die Dicke d (= 1,5 cm). a) Wie groß ist ihr Gewicht? b) Wie groß dürfte die Dicke höchstens sein, damit die Schale in Wasser schwimmen könnte? — Antw.: a) 5,860 kg; b) 0,48 cm.

68. Aus einem kugelförmigen Tropfen Seifenwasser vom Durchmesser d (= 4 mm) wird eine Seifenblase vom Durchmesser D (= 6 cm) geblasen. Wie dick ist die Blase? — Antw.: 0,003 mm.

69. Wie viele Kugeln lassen sich aus P (82) russ. Pfund Blei gießen, wenn der Durchmesser einer jeden 2 r (4) russ. Lin. mißt? — Antw.: 9269.

70. Ein Gefäß, dessen Innenraum die Form eines regulären sechsseitigen Prismas von der Grundkante a (= 5 cm) hat, enthält Wasser. Darin wird eine Kugel untergetaucht, welche die Wände berührt. Um wieviel steigt dadurch der Wasserspiegel? — Antw.: Um 5,24 cm.

71. a) Um wieviel Kilogramm ist ein mit Wasserstoff gefüllter kugelförmiger Luftballon leichter als die Luft, die er verdrängt, wenn der Durchmesser des Ballons 2 r (25) Meter mißt, und wenn das Quadratmeter der Hülle P (0,03) Kilogramm wiegt? b) Wie groß ist das spezifische Gewicht der Luft in derjenigen Höhe, wo der Ballon dasselbe Gewicht hat wie die verdrängte Luftkugel? — Antw.: a) 9842,8; b) 0,000097.

72. Wie verhält sich der Inhalt einer Kugel zu dem In-

halt des einbeschriebenen und des umbeschriebenen Tetraeders, Würfels, Oktaeders, Dodekaeders, Ikosaeders?

Antw.: Ist K der Inhalt der Kugel, T_i der des einbeschr. —, T_u der des umbeschr. Tetraeders u. s. w., so ist:

$$\frac{K}{T_i} = \frac{3\pi\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{0,12252}. \qquad \frac{K}{T_u} = \frac{\pi}{6\sqrt{3}} = \frac{1}{3,30797}.$$

$$\frac{K}{H_i} = \frac{\pi\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{0,36755}. \qquad \frac{K}{H_u} = \frac{\pi}{6} = \frac{1}{1,90986}.$$

$$\frac{K}{O_i} = \pi = \frac{1}{0,31831}. \qquad \frac{K}{O_u} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}} = \frac{1}{1,65399}.$$

$$\frac{K}{D_i} = \frac{\pi\sqrt{3}(5-\sqrt{5})}{10} = \frac{1}{0,66491}. \qquad \frac{K}{D_u} = \frac{\pi\sqrt{65+29\sqrt{5}}}{15\sqrt{10}} = \frac{1}{1,32503}.$$

$$\frac{K}{J_i} = \pi\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}} = \frac{1}{0,60546}. \qquad \frac{K}{J_u} = \frac{\pi(3+\sqrt{5})^2}{60\sqrt{3}} = \frac{1}{1,20657}.$$

73. Eine Kugel vom Durchmesser 2 R (= 15 cm) wird durch zwei parallele Kugelkreise in eine Zone und zwei Kugelabschnitte geteilt. Wie groß sind die Inhalte dieser drei Teile, wenn ihre Höhen sich verhalten wie l : m : n (3 : 4 : 5)? — Antw.: 276,12 ccm, 826,30 ccm und 664,73 ccm.

74. Eine hölzerne Kegelkugel schwimmt im Wasser, so daß die benetzte Kugelhaube größer als die Halbkugel ist. Durch Anwendung von II. Aufg. 10. a und b wird der ebene Halbmesser des nassen Randkreises r (= 5,2 cm) und der Kugelhalbmesser R (= 6 cm) gefunden. Wie groß ist das spez. Gewicht der Kugel? — Antw.: 0,843.

75. In welchem Verhältnis wird die Achse eines Kugelausschnittes durch den zugehörigen Kugelkreis geteilt, a) wenn der Kugelkreis den Inhalt — b) wenn er die Oberfläche halbiert? — Antw.: a) Im Verh. des goldenen Schnittes $\frac{1}{2}(1+\sqrt{5}) : 1 = 1,618 : 1$; b) Im Verh. 3 : 2.

76. Auf der Oberfläche einer Kugel vom Halbmesser R (= 10 cm) befindet sich ein sphär. Dreieck mit den Winkeln α, β, γ (= 93° 40′, 67° 32′ 16″, 105° 36′ 44″). Wie groß ist der Inhalt des Körpers, der von dem zugehör. Dreikant aus der Kugel ausgeschnitten wird? — Antw.: 505,08 ccm.

77. a) Wie groß ist der Flächenraum, der von einer Höhe

h (= 1 geogr. Meile) über der Erdoberfläche überschaut werden kann? b) Wie hoch muß man sich über die Erdoberfläche erheben, um eine Fläche von 1000 Quadratmeilen überschauen zu können? (Erddurchmesser = 1719 geogr. Meilen.) — Antw.: a) 5394 Quadratmeilen; b) 0,1852 Meilen = 1,374 km.

78. Die krumme Oberfläche einer Kugelzone, deren Grundkreise gleich sind, soll mit einem einzigen Papierstreifen ohne Falten überklebt werden, so daß längs den Grundkreisen keine —, längs dem zugehörigen Aequator die größte Dehnung des Papiers stattfindet. Wie groß darf die Höhe der Zone höchstens sein, wenn die Längenausdehnungsfähigkeit des feuchten Papiers $\frac{1}{n}\left(=\frac{1}{24}\right)$ ist? — Antw.: $\frac{\sqrt{2n+1}}{n+1} = 0{,}28$ des Kugeldurchm.

79. Eine Kugel vom Halbmesser R (= 20 cm) wird cylindrisch ausgebohrt, so daß die Cylinderachse durch den Mittelpunkt geht und der Halbmesser des Loches r (= 8 cm) ist. Wie groß ist der Inhalt des ausgehöhlten Körpers? (III. Anh. 41. a.) — Antw.: 25799 ccm.

80. Die Grundflächen eines Kegelrumpfes haben die Halbmesser r und r′ (= 4 und 3 cm), seine Höhe ist h (= 2 cm); a) wie groß ist der Halbmesser der dem Kegelrumpf umbeschriebenen Kugel? b) wie verhält sich der Inhalt des Kegelrumpfes zum Inhalt der umbeschriebenen Kugelzone? c) wie verhält sich der Mantel des Kegelrumpfes zur krummen Oberfläche der Zone? — Antw.: a) 4,0697 cm; b) wie 74 zu 79; c) wie 0,96155 zu 1.

81. In eine Kugel vom Halbmesser R (= 6 cm), sind vier gleiche Berührungskugeln so einbeschrieben, daß alle einander berühren; wie groß ist ihr Halbmesser? — Antw.: 2,697 cm.

82. Wie schwer ist eine gläserne Bikonvexlinse, deren Oberfläche aus zwei Kugelhauben mit gemeinsamem Grundkreis besteht, wenn die zugehör. Kugeln die Halbm. R u. R′ (= 50 u. 30 cm) haben, und wenn die Linse die (längs der Achse gemessene) Dicke a (= 0,5 cm) hat? — Antw.: 44,06 g.

83—90: Umdrehungskörper.

83. Eine Kette von Schmiedeisen besteht aus n (100) gleichen wulstförmigen Ringen. Wird sie geradlinig ausgespannt,

so daß sich die Ringe paarweise berühren, und daß ihre Berührungspunkte und Mittelpunkte alle in gerader Linie liegen, so befindet sich zwischen jedem ersten und dritten Ring ein Spielraum gleich der Dicke eines Ringes, und beträgt die Gesamtlänge der Kette (zwischen den zwei äußersten Punkten gemessen) 1 (3,02) Meter. Wie groß ist das Gewicht der Kette? — Antwort: 7,686 kg.

84. Ein Dreieck ABC wird um eine zu AB parallele Gerade MN gedreht. In welchen Abständen von AB muß MN angenommen werden, wenn der Inhalt des erzeugten Umdrehungskörpers 2, 3, ... n-mal so groß sein soll als der Inhalt des durch Drehung des Dreiecks um AB erzeugten Umdrehungskörpers? — Antw.: In den Abständen: $\frac{1}{3}h$, $\frac{2}{3}h$, ... $\frac{n-1}{3}h$, wenn h die zu AB gehörige Höhe des Dreiecks ist.

85. Die Ecken eines Dreiecks ABC haben von einer in seiner Ebene liegenden Geraden MN die Entfernungen a, b, c (= 13, 9, 2). Von der Ecke A soll eine Transversale AT so gezogen werden, daß, wenn das Dreieck um MN als Achse gedreht wird, die von den beiden Teildreiecken ATB und ATC beschriebenen Umdrehungskörper einander gleich sind. In welchem Verhältnis ist BC im Punkt T zu teilen? (Vgl. Bew. von III. 20. a.) — Antw.: Im Verh. $\frac{\sqrt{(a+b+c)^2+(b-c)^2}-(b-c)}{a+b+c}=\frac{3}{4}$.

86. Der Bogen eines Kreisabschnittes mißt 120°, sein Halbmesser ist R (= 6 cm). Wie groß ist a) die Entfernung des Flächenschwerpunktes des Kreisabschnittes von seiner Sehne, b) der Inhalt des durch Drehung des Kreisabschnittes um seine Sehne erzeugten Umdrehungskörpers? (Mittels III. Anh. 41. a.) — Antw.: a) 1,23 cm. b) 170,895 ccm.

87. In einem Wulst vom Mittelkreishalbmesser R (= 4 cm) und Meridianhalbmesser r (= 2 cm) wird durch die zwei Parallelkreise, die gleich dem Mittelkreis sind, eine Kugelfläche gelegt. Wie groß sind die zwei ringförmigen Teile, in die der Wulst durch sie geteilt wird? — Antw.: Jeder ist gleich der Hälfte des Wulstes $= R r^2 \pi^2 = 157{,}914$ ccm.

88. Auf einer Geraden sind folgende Strecken abgetragen: ab = 6, bc = 5, cd = 1, de = $1\frac{1}{2}$, ef = $10\frac{1}{2}$; in den

Punkten a, b, c . . . sind auf der Geraden nach der nämlichen Seite hin die Senkrechten errichtet: $aA = bB = 16\frac{1}{2}$, $bB' = cC' = 14$, $cC = dD = eE' = 13\frac{1}{2}$, $eE = fF = 12$; endlich ist AB gezogen, über B'C' nach außen ein Halbkreis errichtet, CD gezogen, E mit D durch einen Viertelskreis verbunden, dessen Mittelpunkt E' ist, und EF gezogen. Die hiedurch entstandene Figur bildet den halben Achsenschnitt eines Toskanischen Säulenfußes, dessen unterster Teil eine quadratische Platte (mit aA als halber Grundkante und ab als Höhe) ist, und dessen übrige Teile durch Drehung der übrigen Figur um bf als Achse entstehen. Wie groß ist das Gewicht des in Sandstein ausgeführten Säulenfußes, wenn die obigen Maße als Dezimeter verstanden werden? — Antw.: 41451 kg.

89. Wie groß ist der Inhalt eines gestreckten Umdrehungsellipsoides, das durch Drehung einer Ellipse von den Halbachsen a u. b (= 4 u. 3 cm) um die große Achse 2a entsteht? (Vgl. II. Anh. 22. c u. III. Anh. 40.) — Antw.: $\frac{4}{3}ab^2\pi = 150{,}8$ ccm.

90. Wie groß ist der Inhalt eines abgeplatteten Umdrehungsellipsoides, das durch Drehung einer Ellipse von den Halbachsen a u. b um die kleine Achse 2b entsteht? (Vgl. II. Anh. 22. c, III. Anh. 12. b, III. 20. Zus.) — Was ist der Rauminhalt des als abgeplattetes Rotationsellipsoid aufgefaßten Erdkörpers, wenn die Abplattung $\frac{a-b}{a} = \frac{1}{299}$, und ein Grad des Aequators gleich 15 geogr. Meilen ist? — Antw. $\frac{4}{3}a^2b\pi = 1\,082\,840$ Millionen Kubikkilometer.

IV. Tabellen.

Tab. 1. Spezifische Gewichte.

	Spez. Gew.	log.
Wasser	1	0,00 000
Blei	11,4	1,05 690
Eisen (Gußeisen)	7,251	0,86 040
„ (Schmiedeisen) . . .	7,788	0,89 143
Glas (gemeines)	2,6	0,41 497
„ (Kristallglas)	3,0	0,47 712
Gold (gegossen)	19,26	1,28 466
„ (gehämmert)	19,36	1,28 691
Granit	2,95	0,46 982
Holz (Kork)	0,24	0,38 021—1
„ (trockenes Tannenholz) .	0,5	0,69 897—1
„ (trockenes Eichenholz) . .	0,8	0,90 309—1
Kalkstein, Marmor	2,72	0,43 457
Kupfer (gegossen)	8,788	0,94 389
„ (gehämmert)	9,0	0,95 424
Luft (v. 0° Temp. b. 770 mm Barometerst.)	0,0013	0,11 394—3
Messing	8,4	0,92 428
Platin	21,314	1,32 866
Quecksilber	13,597	1,13 344
Sandstein	2,5	0,39 794
Silber (gegossen)	10,47	1,01 995
„ (gehämmert)	10,62	1,02 612
Wasserstoffgas	0,0000897	0,95 279—5
Zink	7,213	0,85 812
Zinn	7,291	0,86 279

Tab. 2. Verschiedene Maße und Gewichte,

verglichen mit Meter und Kilogramm.

		Meter			Kilogr.
1 englischer 1 nordamer. 1 russischer	Fuß (à 12 Zoll à 12 Lin.)	= 0,3048	1 englisches 1 nordamer.	Pfd.	= 0,4536
			1 russisches	„	= 0,4095

1 geograph. Meile ($= \frac{1}{15}{}^{0}$ des Aeq.) = 7420,44.

Tab. 3. Stereometrische Formeln.

Körper.	Bestimmungselemente.	Inhalt.	Mantel.	Oberfläche.
Quader.	Die drei von einer Ecke ausgehenden Kanten = l, m, n.	lmn.	—	$2(lm+mn+nl)$.
Prisma.	Grundfläche = G, Höhe = h.	Gh.	—	—
Cylinder.	Halbmesser = r, Höhe = h.	$r^2\pi h$.	$2r\pi h$.	$2r\pi(r+h)$.
Pyramide.	Grundfläche = G, Höhe = h.	$\frac{1}{3}G\,h$.	—	—
Kegel.	Halbmesser des Grundkreises = r, Höhe = h, Mantellinie = s = $\sqrt{r^2+h^2}$, Mittellot der Mantellinie (zwischen Mantellinie und Achse) = p.	$\frac{1}{3}r^2\pi h$.	$r\pi s$. $2p\pi h$.	$r\pi(r+s)$.
Pyramidenrumpf.	Grundflächen = G und G′, Höhe = h.	$\frac{h}{3}\left(G^2+\sqrt{GG'}+G'\right)$.	—	—
Kegelrumpf.	Halbmesser der Grundkreise = r und r′, Höhe = h, Mantellinie = s = $\sqrt{h^2+(r-r')^2}$, Mittellot der Mantellinie (zwischen Mantellinie und Achse) = p.	$\frac{\pi h}{3}\left(r^2+rr'+r'^2\right)$.	$(r+r')\pi s$. $2p\pi h$.	—
Prismatoid.	Grundflächen = G und G′, Mittelschnitt = M, Höhe = h.	$\frac{h}{6}\left(G+G'+4M\right)$.	—	—
Kugel.	Halbmesser = R.	$\frac{4}{3}R^3\pi$.	—	$4R^2\pi$.
Kugelzone.	Halbmesser der Kugel = R, Halbmesser der Grundkreise = r und r′, Entfernungen der Grundkreise vom Mittelpunkt = e und e − h, Höhe = h.	$\frac{\pi h}{3}\left(3R^2-3e^2+3eh-h^2\right)$. $\frac{\pi h}{6}\left(3r^2+3r'^2+h^2\right)$.	$2R\pi h$.	—
Kugelabschnitt (Kugelhaube).	Halbmesser der Kugel = R, Halbmesser des Grundkreises = r, Höhe = h.	$\frac{\pi h^2}{3}\left(3R-h\right)$. $\frac{\pi h}{6}\left(3r^2+h^2\right)$.	$2R\pi h$. $(r^2+h^2)\pi$.	—
Kugelausschnitt.	Halbmesser der Kugel = R, Höhe des zugehörigen Kugelabschnittes = h.	$\frac{2}{3}R^2\pi h$.	—	—