Rechenbuch für technische Fachschulen und zum Selbstunterricht

Böhnig, D.

Holzminden, 1894

I. Abschnitt. Die Grundrechnungen mit ganzen Zahlen.

urn:nbn:de:hbz:466:1-77782

I. Abschnitt.

Die Grundrechnungen mit ganzen Zahlen.

§ 1. Das Schreiben und Lesen der Zahlen.

Das Rechnen ist die Lehre von den Zahlen und ihren Verbindungen mit einander. Eine Zahl entsteht durch Zählen, d. h. durch wiederholtes Setzen einer Einheit (z. B. ein Stein, ein Baum) sie ist also eine Bezeichnung für eine bestimmte Menge von Einheiten gleichartiger Dinge (z. B. sieben Steine, neun Bäume). Zur schriftlichen Darstellung der Zahlen bedient man sich bestimmter Zeichen, die Ziffern genannt werden. Die gebräuchlichsten Zeichen sind die arabischen Ziffern:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0.

Unser Zahlensystem beruht auf dem zehnteiligen (dekadischen) Gesetz, wonach 10 Einheiten (Einer) gleich einem Zehner, 10 Zehner gleich einem Hunderter sind. Dann folgen in demselben Verhältnis Tausender, Zehntausender und Hunderttausender. Dieselbe Anordnung wiederholt sich nun bei Millionen: Einer-, Zehner-, Hunderter-, Tausender-, Millionen usw. Darnach folgen in derselben Weise Billionen, Trillionen usw. Unser Zahlensystem beruht also darauf, daß man je zehn Einheiten zu einer neuen höheren Einheit zusammenfaßt. Eine solche Zusammenfassung von 10 Einheiten nennt man eine Zahlenordnung. Die niedrigste Zahlenordnung bilden demnach die Zehner. Eine Einheit einer Zahlenordnung hat darum den zehnfachen Wert einer Einheit der vorhergehenden Zahlenordnung.

Die Einer werden in die äußerste Stelle rechts, die Zehner daneben links, die Hunderter wieder links neben die Zehner gesetzt usw. Auf diese Weise drückt jede Ziffer einen zehnfach größeren Wert aus, als auf der folgenden Stelle nach rechts.

1) Schreibe folgende Zahlen mit Ziffern: fünfhundert vier und sechzig; dreitausend vierhundert fünf und zwanzig; vier und vierzigtausend achthundert drei und neunzig; sechshundert drei und vierzigtausend vierhundert fünf und achtzig.

2) Lies folgende Zahlen: 1923; 15643; 182356; 192345; 54213.

Soll eine Zahl, die nicht alle Zahlenordnungen enthält, mit Ziffern geschrieben werden, so muß an die Stelle der fehlenden Ordnung eine Null gesetzt werden. Dies gilt auch von den Einern.

3) Schreibe folgende Zahlen mit Ziffern: sechshundert; neuntausend; achtzigtausend; sechshunderttausend.

4) Wie viel Nullen hat jede Zahlenordnung bis zur Million?

5) Lies folgende Zahlen: 600; 8000; 90; 600000; 50000.

6) Schreibe folgende Zahlen mit Ziffern: vier und dreißigtausend; vierzigtausend achtzig; achtzehntausend sechshundert neun; vier und zwanzigtausend sechzehn; zwei und sechzigtausend dreihundert sieben.

7) **Lies folgende Zahlen: 1903; 15003; 180360; 19003; 54000.**

Soll man eine lange Reihe Ziffern aussprechen, so teilt man die Zahl von rechts nach links in Klassen von je drei oder sechs Ziffern. Da sechs Ziffern sich aber noch leicht übersehen lassen und die Einer, Millionen, Billionen usw. die Hauptabteilungen einer Zahlenreihe bilden, so genügt es, Zahlengruppen von je sechs Ziffern zu bilden.

Z. B. 4567„321954,456832. Das Zeichen für Million ist also ein Komma, für Billon zwei, Trillion drei Kommas.

8) Teile folgende Zahlen in sechsziffrige Klassen ab und schreibe sie mit Worten, wobei die Einer mit E., die Millionen mit M., die Billionen mit B. bezeichnet werden sollen.

Z. B. 3590„068948,030578 = 3590 B. 68948 M. 30578 E.
Ebenso: 987654321; 3042145; 1718192021;
20020000300; 456789012; 853000036800000142.

9) Folgende Zahlen sind nur mit Ziffern zu schreiben: 10 B. 35678 M. 1234 E.; 10456 B. 18 M. 15605 E.; 180 B. 1056 M. 13 E.

10) Teile folgende Zahlen in dreiziffrige Klassen ab und schreibe sie mit Worten, wobei die Einer mit E., die Tausender mit T., die Millionen mit M. usw. bezeichnet werden sollen.

Z. B. 5„123.405,006.789 = 5 B. 123 T. 405 M. 6 T. 789 E.
Ebenso: 2304006; 60085321425; 45678987030400.

11) Folgende Zahlen sind nur mit Ziffern zu schreiben: 843 B. 300 T. 2 M. 50 T. 67 E.; 4 B. 10 M. 3 E.; 160 T. 5 B. 847 M. 16 T. 325 E.

Häufig finden auch die römischen Ziffern noch Anwendung, z. B. bei Inschriften an Denkmälern und Häusern usw. Sämtliche Zahlen werden durch folgende Zeichen dargestellt:
I = 1, II = 2, III = 3, V = 5, X = 10, L = 50, C = 100, D = 500, M = 1000.

Dadurch, daß man ein Zeichen für kleinere Zahlen hinter das Zeichen für eine größere Zahl setzt, drückt man die Summe dieser Zahlen aus, z. B. VI = 6, VII = 7, LXI = 61, DC = 600, und dadurch, daß man das Zeichen für eine kleinere Zahl vor das Zeichen einer größeren Zahl setzt, drückt man die Differenz dieser Zahlen aus, z. B. IX = 9, XL = 40.

12) Lies folgende Zahlen und schreibe sie mit arabischen Ziffern:
MDCCLXX, MDCCCXCIV.

13) Schreibe folgende Zahlen mit römischen Ziffern: 375, 1866, 1813.

§ 2. Addition.

Addieren (zusammenzählen) heißt eine Zahl finden, die so viel Einheiten enthält, als mehrere gegebene Zahlen zusammen. Die zur Addition gegebenen Zahlen heißen die Summanden, Addenden oder Posten, und die durch die Addition derselben hervorgehende Zahl wird Summe genannt. Das Zeichen für die Addition ist ein stehendes Kreuz (+) und wird „plus" oder „und" gelesen. Das Zeichen für gleich (=) wird Gleichheitszeichen genannt.

14) Führe folgende Additionen aus:

a.		b.		c.		d.	
	325		2345		93		843206
	8649		678		4567		4080
					890		28709

15) Nach den Berichten der Gaswerke der Stadt Köln betrugen für die Betriebsjahre

Ausgaben:	1882/83	1886/87
Kohlen	430440 ℳ.	575551 ℳ.
Stocherlöhne	72135 „	95084 „
Gasreinigung	9128 „	12333 „
Untersuchung der Dampfkessel	10542 „	13174 „
Unterhaltung der Öfen	36435 „	87722 „
Sonstige Kosten	81836 „	202262 „
	Sa.	Sa.

Einnahmen:		
Koks	255387 ℳ.	294340 ℳ.
Teer	119773 „	31988 „
Ammoniak	133693 „	91281 „
Sonstige Einnahmen	19996 „	17293 „
	Sa.	Sa.

Es läßt sich die Addition am bequemsten ausführen, wenn man, wie vorhin geschehen ist, die Posten wohlgeordnet untereinander schreibt. Zuweilen stehen aber die Posten hintereinander, es ist dann erwünscht, die Addition auch ausführen zu können, ohne erst vorstehende Darstellung vornehmen zu müssen. Z. B. $628 + 1423 + 98 + 523 = 2672$.

16) Führe nachstehende Additionen aus, ohne die einzelnen Posten untereinander zu schreiben:
a. $817 + 314 + 666 + 955$; b. $328 + 64 + 987 + 48 + 125$; c. $2345 + 678 + 98 + 6784 + 389 + 54 + 2486$.

17) Wie groß ist die Summe aller ganzen Zahlen von 1 bis 100?
Ausrechn.: $1 + 100 = 101$; $2 + 99 = 101$; $3 + 98 = 101$ usw., auf diese Weise erhält man 50 Posten von je 101, also im ganzen $50 \cdot 101 = 5050$.

18) Wie groß ist die Summe aller ganzen Zahlen:
a. von 1 bis 1000? b. von 10 bis 89?
c. von 1 bis 79? ($39 \cdot 80 + 40$, oder $39\frac{1}{2} \cdot 80$)
d. von 18 bis 52? e. von 62 bis 88?

19) Wie groß ist die Summe aller geraden Zahlen:
a. von 8 bis 28? b. von 24 bis 72?
c. von 20 bis 80? d. von 42 bis 122?

20) Wie groß ist die Summe aller ungeraden Zahlen:
a. von 1 bis 49? b. von 11 bis 81?
c. von 25 bis 125? d. von 37 bis 87?

21) Auf einer Dachfläche befinden sich 42 Reihen Schiefer und zwar in der obersten Reihe 75, in der zweiten 77, in der dritten 79 usw. Schiefer. a. Wie viel Schiefer sind in der untersten Reihe? und b. wie viel in allen 42 Reihen zusammengenommen?

22) Auf einem Walmdache befinden sich auf jeder Dachfläche 80 Reihen Schiefer. Auf zwei Dachflächen befinden sich in der obersten Reihe 1, in der zweiten 2, überhaupt in jeder folgenden Reihe 1 Schiefer mehr, auf zwei Dachflächen hingegen befinden sich in der obersten Reihe 20 und in jeder folgenden 1 Schiefer mehr als in der vorhergehenden. Wie viel Schiefer sind auf dem Dache?

23) An dem einen Ende eines 300 m langen Weges befindet sich ein

Haufen Sand, von welchem aus ein Arbeiter mittels Schiebekarrens diesen Weg mit Sand überschütten soll; wenn nun für das lfd. m ein Karren Sand erforderlich ist, wie lang ist der Weg, den der Arbeiter gemacht hat, wenn er den ganzen Weg beschüttet hat?

24) Wie lang ist nach voriger Aufgabe der Weg, wenn an jedem Ende des Weges die Hälfte des Sandes liegt?

§ 3. Subtraktion.

Subtrahieren (abziehen) heißt eine Zahl finden, welche anzeigt, um wie viel die eine von zwei gegebenen Zahlen größer ist als die andere, oder auch den Unterschied zweier Zahlen finden.

Diejenige Zahl, von welcher subtrahiert wird, heißt der Minuend; diejenige Zahl, welche subtrahiert wird, der Subtrahend und die durch Subtraktion gefundene Zahl Differenz, oder Unterschied, oder Rest. Das Zeichen für die Subtraktion ist ein wagerechter Strich (—) und heißt „minus" oder „weniger".

25) Führe folgende Subtraktionen aus:

a.	b.	c.	d.
968	19454	44444	20186
642	8695	9876	19007

Im praktischen Leben kommt es häufig vor, daß man eine Subtraktion ausführt, ohne vorstehende Darstellung, die im allgemeinen die übliche ist, zu berücksichtigen. Führe darum nachstehende Subtraktionen aus, ohne eine Versetzung der Zahlen nach der vorhergehenden Darstellung vorzunehmen.

26) Der Subtrahend steht statt des Minuend oben:

a.	b.	c.	d.	e.
685	1098	2345	8608	8423
1234	8087	4321	10016	9211

27) Der Subtrahend steht hinter dem Minuend:
a. 4528 — 3259 = 1269; b. 9876 — 8765; c. 5427 — 3268;
d. 23002 — 8888; e. 18001 — 9256.

28) Der Subtrahend steht vor dem Minuend. Berechne den Unterschied zwischen: a. 624 und 976; b. 4526 und 8215; c. 14896 und 19325.

29) Wie viel giebt:
a. 2345 + 678 + 98765 + 4321 — 88888?
b. 888 + 7777 — (654 + 3210)?
c. (8434 — 987 + 34 + 5678) — (2389 — 1945 + 3473)?
d. (18532 + 1789 — 14598) — [4853 — (876 + 1539 + 987)]?

Bemerk. Ueber Auflösung der Klammern s. Algebra.

30) Rechne im Kopfe:
a. 63458 + 99986; b. 18415 + 2885; c. 98372 + 19997 — 7372;
d. 9997 + 9992 + 9998 + 9995 + 998;
e. 87768 — (8989 + 7768); f. 583291 — (99998 + 483291);
g. 37000 — (913 + 514 + 5573);
h. es soll 4548 um die Differenz der beiden Zahlen 3279 und 1452 vermindert werden;
i. es soll 1863 um die Differenz der beiden Zahlen 2000 und 763 vermehrt werden;
k. vermehre die Differenz der Zahlen 6483 und 4823 um die Differenz der Zahlen 3517 und 2177;

l. vermindere die Differenz der Zahlen 12185 und 6788 um die Differenz der Zahlen 4212 und 3815;
m. subtrahiere von 18375 die Differenz der Zahlen 8268 und 3625;
n. vermehre 17825 um die Differenz der Zahlen 8175 und 6775.

Bemerk. Wenn Aufgaben im Kopfe gerechnet werden, so ist von der Art, wie sie schriftlich gerechnet werden, meistens abzusehen. Es ist stets darauf zu achten, welche Erleichterungen sich darbieten. Z. B. bei a addiere zum ersten Posten zunächst 100000 und subtrahiere darnach wieder 14; bei c subtrahiere erst die letzte Zahl von der ersten und darnach führe wie bei a die Addition aus; bei h addiere erst die erste und dritte Zahl und subtrahiere darnach die zweite. Durch derartige Uebungen wird man ein gewandter Rechner. (Der Lehrer lasse sich bei jeder Aufgabe die benutzten Vorteile nennen).

31) Mit den Zahlen 6875, 3425, 2125 nimm folgende Berechnungen vor:
a. von der Summe der drei Zahlen subtrahiere die Summe der ersten und dritten Zahl;
b. von der Summe der beiden ersten Zahlen subtrahiere die Differenz der beiden letzten Zahlen;
c. zu der Differenz der beiden ersten Zahlen addiere die Differenz der beiden letzten Zahlen;
d. zu der Summe der ersten und letzten Zahl addiere die Differenz der beiden letzten Zahlen;
e. von der Differenz der ersten und letzten Zahl subtrahiere die Differenz der beiden letzten Zahlen;
f. von der Summe der beiden ersten Zahlen subtrahiere die Differenz der beiden letzten Zahlen und zu diesem Reste addiere die Differenz der ersten und dritten Zahl;
g. von der Differenz der ersten und dritten Zahl subtrahiere die Differenz der beiden letzten Zahlen und von diesem Reste subtrahiere die Differenz der beiden ersten Zahlen.

Bemerk. Drücke die Aufgaben durch Klammern aus, z. B.
b. $(6875 + 3425) - (3425 - 2125) = 6875 + 2125 = 9000.$

32) Ein Zimmermeister eröffnete 1875 sein Geschäft. 1875 hatte er einen reinen Gewinn von 684 ℳ, 1876 betrug derselbe 995 ℳ, 1877 desgl. 728 ℳ, 1878 und 1879 hat er mit Verlust gearbeitet, der im ersten Jahre 485 ℳ und im zweiten Jahre 528 ℳ betrug, 1880 betrug der Gewinn wieder 428 ℳ, 1881 sogar 1214 ℳ und 1882 887 ℳ. Jetzt hatte er ein Vermögen von 12723 ℳ, wie groß war dasselbe beim Beginne des Geschäfts?

33) Der Schlossermeister A. hatte, als er sein Geschäft begann, 12600 ℳ Vermögen; nachdem er dasselbe 10 Jahre betrieben, betrug sein Vermögen 16360 ℳ. Während dieser Zeit hat er 7 Jahre mit Gewinn gearbeitet und zwar betrug derselbe in den einzelnen Jahren: 675, 923, 288, 496, 1018, 827, 922 ℳ; drei Jahre hingegen hat er mit Verlust gearbeitet und dieser betrug im ersten Jahre 67 ℳ mehr und im dritten 62 ℳ weniger als im zweiten Jahre. Wie viel hat er in jedem der drei Jahre verloren?

34) Vier Baugewerkmeister A., B., C., D. haben sich bei einer Verdingung beteiligt, A. fordert 14366 ℳ und zwar 563 ℳ weniger als B., C. fordert 986 ℳ mehr als B., aber 283 ℳ weniger als D. Wie viel fordert jeder?

35) Von drei Maurern vermauert der erste täglich 582 Ziegelsteine, der zweite 126 mehr als der erste und der dritte 68 weniger als der zweite; in wie viel Tagen werden sie 32810 Stück vermauern?

36) 3040 ℳ sollen unter drei Personen A., B., C. so geteilt werden,

daß B. 200 ℳ mehr als A., C. aber 540 ℳ mehr als B. erhalte. Wie viel wird jeder bekommen?

37) Wieviel Vermögen hat jemand nach folgenden Angaben. Seine Gebäude haben einen Wert von 27500 ℳ, die übrigen unbeweglichen Vermögensteile sind 12350 ℳ niedriger als die Gebäude und das bewegliche Vermögen ist 21248 ℳ niedriger als das gesamte unbewegliche Vermögen geschätzt. Die Schulden betragen 8490 ℳ weniger als der Betrag für das bewegliche Vermögen.

38) 15900 ℳ sollen unter drei Brüder A., B., C. so verteilt werden, daß B. 550 ℳ weniger als A., C. aber 1250 ℳ mehr als B. erhalte. Wie viel wird jeder bekommen?

39) Ein Ziegeleibesitzer verkauft von seinem Vorrate Ziegelsteine an A. 56250 und an B. 17500 Stück, darauf kommen wieder 63750 und 58475 Stück hinzu, darnach verkauft er wieder an B. 29300, an C. 38750 und an D. 79500 Stück, jetzt sind noch 28500 Stück vorhanden. Wie viel Stück betrug der anfängliche Vorrat?

40) Zu drei Häusern sind 346020 Ziegelsteine verwandt und zwar zum ersten und zweiten 205630, zum zweiten und dritten 250670; wie viel zu jedem Hause?

41) Das erste und zweite dieser Häuser kostete 49825 ℳ, das erste und dritte 56410 ℳ und das zweite und dritte 59335 ℳ; wie viel kostet jedes Haus?

§ 4. Die Multiplikation.

Multiplizieren (vervielfachen, malnehmen) heißt eine gegebene Zahl so oft addieren, als eine andere gegebene Zahl anzeigt. Die Zahl, welche mehrmals addiert wird, heißt Multiplikandus, die Zahl, welche anzeigt, wie oft dies geschieht, Multiplikator und die durch Multiplikation gefundene Zahl Produkt. Da Multiplikator und Multiplikandes mit einander verwechselt werden können (9 . 8 = 8 . 9), so werden beide auch Faktoren genannt.

Das Zeichen für die Multiplikation ist ein liegendes Kreuz (×) oder ein Punkt (.). Setzt man den Multiplikator vor den Multiplikandus, so liest man dies Zeichen „mal"; setzt man aber den Multiplikandus vor den Multiplikator, so spricht man es durch „mit", d. h. „multizipliert mit" aus. Es ist gleich, ob man beim Multiplizieren bei der höchsten Stelle des Multiplikators oder bei den Einern desselben beginnt. Es versteht sich von selbst, daß man im ersten Falle die Teilprodukte rechts ausrücken und im letzteren Falle links einrücken muß. Der Multiplikator steht bei nachstehenden Aufgaben hinter dem Multiplikandus.

Z. B.: a.

```
234567.8943
-----------
1876536
 2111103
   938268
    703701
-----------
2097732681
```

b.

```
234567.8943
-----------
     703701
    938268
  2111103
 1876536
-----------
 2097732681
```

42) Führe folgende Multiplikationen nach Beispiel a und b aus.
a. 25896 . 87652; b. 84169 . 8563; c. 973542 . 85932.

43) Wie wird multipliziert:
a. mit 10, 100, 1000 usw.? (63 . 100 = 6300);
b. mit 20, 300, 6000 usw.? (724 . 20 = 14480).

44) Multipliziere:
a. 3724 . 10; b. 845 . 100; c. 3456 . 1000;
d. 425 . 200; e. 463 . 3000; f. 650 . 4000.

Wie multipliziert man auf die kürzeste Weise mit 11? Z. B. 465 . 11. Man schreibt das Resultat rückwärts sofort nieder. Die letzte Ziffer des Resultats ist die letzte Ziffer des Multiplikandus, also = 5; die folgende = 5 + 6 = 1; die folgende = 1 + 6 + 4 = 1, die folgende = 1 + 4 = 5. Demnach = 5115.

45) Multipliziere folgende Zahlen mit 11: 37, 234, 648, 4567.

Wie multipliziert man mit 101?

Man erhält als Teilprodukte so viel Hunderter wie Einer.

Z. B. 63 . 101 = 63 Hunderter und 63 Einer = 6363.

46) Multipliziere folgende Zahlen mit 101: 26, 78, 89, 612, 538.

Wie multipliziert man mit 1001?

Man erhält als Teilprodukte so viel Tausender wie Einer.

Z. B. 423 . 1001 = 423 Tausender und 423 Einer = 423423.

47) Multipliziere folgende Zahlen mit 1001: 628, 587, 59, 93, 4215, 3269.

Wie wird mit 16, 14, 41, 61, 183 usw. multipliziert? (Eine Ziffer des Multiplikators ist eine 1.)

Z. B.:			
	345 . 16	4567 . 51	8523 . 315
	2070	22835	42615
	5520	232917	25569
			2684745

48) Multipliziere: a. 287 . 19; b. 3456 . 16; c. 648 . 21; d. 8945 . 61; e. 2478 . 179; f. 4583 . 419; g. 8715 . 251; h. 9458 . 123.

49) Wie wird mit 25 multipliziert?

a. Im Kopfe: (25 = $^1/_4$ Hundert, also 33 . 25 = $^{33}/_4$ Hundert = $8^1/_4$ Hundert = 825).

Multipliziere im Kopfe folgende Zahlen mit 25: 17, 57, 63, 87, 93, 112.

b. Schriftlich: Man dividiere die Zahl durch 4 und setze an die Zehner- und Einerstelle zwei Nullen, wenn nichts übrig bleibt, aber 25 wenn 1, 50 wenn 2, 75 wenn 3 übrig bleibt.

Z. B.: a. 3248 . 25 = 81200; b. 3251 . 25 = 81275.

Multipliziere: a. 1652 . 25; b. 158329 . 25; c. 85234 . 25; d. 45679 . 25; e. 845103 . 25.

Wie wird im Kopfe mit 50 multipliziert? (50 = $^1/_2$ Hundert)

50) Multipliziere folgende Zahlen mit 50: 23, 39, 43, 67, 88, 112, 93, 843.

Wie wird im Kopfe mit 75 multipliziert? (75 = $^3/_4$ Hundert).

Z. B. 19 . 75 = 19 . $^3/_4$ Hundert = $^{57}/_4$ Hundert = 1425.

51) Multipliziere folgende Zahlen mit 75: 17, 23, 29, 33, 46, 64, 72.

Wie wird mit 125 multipliziert? (125 = $^1/_8$ Tausend)

Der Multiplikandus wird durch 8 dividiert, bleibt nichts übrig, so setzt man rechts an die Antwort drei Nullen, bleibt ein Rest, so multipliziert man denselben mit 125 und schreibt das Produkt an die Stelle jener 3 Nullen.

52) Multipliziere folgende Zahlen mit 125:
a. Im Kopfe: 48, 41, 85, 67, 93.
b. Schriftlich: 6544, 81234, 94215, 3458.

Wenn einer der Faktoren nahe an Zehn oder Hundert, oder an deren Vielfache grenzt, so verfährt man, wie an nachstehenden Beispielen gezeigt ist:
34 . 19 = 34 . 20 — 34 . 1 = 646; 31 . 23 = 30 . 23 + 1 . 23 = 713.

53) Rechne im Kopfe: a. 99.23; b. 49.36; c. 48.16; d. 17.29; e. 21.34; f. 42.18; g. 24.97; h. 215.98.
i. 1 kg kostet 5 ℳ 97 ₰, wie viel kosten 15 kg?
k. 1 m kostet 9 ℳ 96 ₰, wie viel kosten 22 m?

Zuweilen ist es angebracht, beide Faktoren abzurunden.

Z. B. $98 . 97 = (100 - 2) . (100 - 3) = 100 . 100 - 5 . 100 + 6 = 9506$; oder wie vorhin $97 . 100 - 200 + 6$.

54) Rechne im Kopfe: a. 95.98; b. 39.38; c. 67.79; d. 993.997; e. 57.59.

55) Um wie viel wird das Produkt 738.572 größer, wenn man jeden Faktor um 1 vergrößert? um wie viel kleiner, wenn man jeden Faktor um 1 vermindert?

56) Um wie viel wird das Produkt 843.697 kleiner, wenn man den ersten Faktor um 1 vergrößert, den zweiten um 1 vermindert?

57) Um wie viel wird das Produkt 918.882 größer, wenn man den ersten Faktor um 1 verkleinert, den zweiten um 1 vergrößert?

58) Um wie viel wird ein 654 m langer und 149 m breiter rechtwinkliger Bauplatz kleiner, wenn derselbe 5 m länger, aber 7 m schmäler gemacht wird?

59) Ein rechtwinkliges Dach hat 53 Reihen Ziegel und in jeder Reihe liegen 74 Stück; wie viel Stück wären mehr erforderlich, wenn eine Reihe weniger vorhanden wäre, aber in jeder Reihe 2 Stück mehr gelegt würden?

Zuweilen ist es vorteilhaft, wenn man die Faktoren gleich macht.

Z. B.: $46 . 54 = 50 . 50 - 4 . 4 = 2484$.

60) Rechne im Kopfe: 79.81; 88.92; 67.73; 85.95; 97.103; 298.302; 795.805.

61) Da die Reihenfolge der Faktoren gleichgiltig ist, so wähle die vorteilhafteste Reihenfolge bei folgenden Aufgaben und führe die Multiplikation im Kopfe aus:
a. 25.26.2; b. 28.2.3.5; c. 4.28.5.3.5; d. 8.64.125; e. 2.4.10.9.25; f. 4.7.5.250.5.4; g. 125.5.25.2.4.8.

62) Zerlege die Faktoren in andere Faktoren und verfahre wie vorhin.
a. 2.4.35.5; b. 32.375.75; c. 375.7.25.6.32;
d. 4.8.125.3.25.3. (z. B. b = 4.8.125.3.25.3).

63) Sondere gleiche Faktoren durch Klammern ab und führe dann erst die Multiplikation aus:
a. $1963 . 18 + 3037 . 18$; b. $29 . 101 + 52 . 101 + 16 . 101$;
c. $29 . 8 + 23 . 16 + 28 . 24 + 17 . 32 + 23 . 8 + 56 . 4$;
($23 . 16 = 46 . 8$ oder $56 . 4 = 28 . 8$) d. $2843 . 27 - 2843 . 16$;
e. $6443 . 18 - 1234 . 54$;
f. $2516 + 2516 . 18 + 1258 . 36 - (2516 . 8 + 5032 . 6)$;
g. Multipliziere die Summe der Produkte 288.24 und 144.44 mit der Differenz der Produkte 1846.25 und 639.50.
(z. B. a. $= (1963 + 3037) 18 =$).

Es kommt häufig vor, daß mehrere Multiplikationen auszuführen sind, deren Resultate addiert werden sollen, z. B. beim Veranschlagen ist dies häufig der Fall. Die Aufgabe $324 . 28 + 65 . 39 + 1218 . 45$ läßt sich am bequemsten in folgender Weise lösen:

$$\begin{array}{rr} 324.28 = & 2592 \\ & 648 \\ 65.39 = & 585 \\ & 195 \\ 1218.45 = & 6090 \\ & 4872 \\ \hline & 66417 \end{array}$$

64) Löse in derselben Weise folgende Aufgaben:
a. 954.27 + 1426.45; b. 728.38 + 89.43 + 234.256;
c. 8324.53 + 458.765 + 324.67 + 9423.9.

65) Die Brücke, die von New-York nach Brooklyn führt, wird von vier Kabeln getragen. Jedes Kabel ist 1090 m lang und ist aus 5282 Drähten von gleicher Länge hergestellt. Wie viel Meter Draht ist zu den 4 Kabeln verwandt?

66) Die Zahl der Neubauten hat in den 6 Jahren von 1877 bis 1882 in Berlin bezw. 476, 437, 342, 201, 169 und 233 betragen; die Bevölkerungszunahme hat in dem Zeitraume 196900 betragen. Wie viel mußten daher Unterkunft in den Häusern suchen, welche die Ueberproduktion der Vorjahre hervorgebracht hat, wenn man im Durchschnitt (leider!) 60 Einwohner auf je ein Berliner Haus rechnen muß?

67) Im Jahre 1873 wurden, als der Viadukt der Rheinischen Eisenbahn über das Ruhrthal bei Herdecke gebaut werden sollte, zwei Projekte ausgearbeitet: 1) 12 gewölbte Oeffnungen von je 20 m Spannweite und 2) 6 Oeffnungen mit Eisenkonstruktion von je 40 m Spannweite. Beim ersten Projekte war nach der Massenrechnung erforderlich: 1) Fundamente: Beton für 5 Strompfeiler 1800 cbm, Mauerwerk 2500 cbm, 2) aufgehendes Mauerwerk sämtlicher Pfeiler und Widerlager 14070 cbm, 3) Gewölbemauerwerk 5480 cbm und 4) Brüstungen und Gesimse 550 cbm. Als Preis für das fertige Mauerwerk jeglicher Art incl. der Betonfundamente wurde unter Berücksichtigung der erheblichen Kosten für Lehr- und Arbeitsgerüste der Durchschnittssatz von 30 ℳ pro cbm angenommen.

Beim zweiten Projekte waren erforderlich: 1) Betonfundamente für 3 Strompfeiler 840 cbm, sämtliches Mauerwerk für alle 5 Pfeiler 7760 cbm, à cbm wie vorhin 30 ℳ, 2) das Gewicht einer fertigen Eisenkonstruktion von 40 m Weite betrug für 2 Geleise rund 180000 kg. Der Preis betrug zur Zeit der Projekts-Aufstellung für 1000 kg 600 ℳ, 3) für Bohlenbelag und Geländer pro Oeffnung 4000 ℳ. Wie hoch stellten sich demnach die Gesamtkosten für jedes der beiden Projekte?

68) Bei dem Bau eines Fabrikgebäudes war als Bedingung gestellt, daß in einem großen Raume der Lichtraum zwischen zwei Säulen mindestens 4 m betragen soll. Es sollen eiserne Träger und Säulen verwandt werden. Um jener Bedingung zu genügen, sind die Träger und Säulen in vierfacher Weise angeordnet. Berechne nach folgenden Angaben die Kosten der erforderlichen Eisenteile für jedes Projekt. Es ist erforderlich:

1) Ein Trägergewicht von 51600 kg, einschließlich 21700 kg mit 1 ℳ und 24200 kg mit 6 ℳ Ueberpreis, Grundpreis 15 ℳ; ferner 8500 kg Säulengewicht zu 18 ℳ (die Preisangaben gelten für 100 kg).

2) Ein Trägergewicht von 48370 kg, einschließlich 12930 kg mit 1 ℳ, 26220 kg mit 3 ℳ Ueberpreis, Grundpreis 15 ℳ; ferner 8500 kg Säulengewicht zu 18 ℳ.

3) Ein Trägergewicht von 41150 kg, einschließlich 4650 kg mit 1 ℳ, 2190 kg mit 2 ℳ und 10670 kg mit 3 ℳ Ueberpreis, Grundpreis 15 ℳ; ferner 12420 kg Säulengewicht zu 18 ℳ.

4) Ein Trägergewicht von 40430 kg, einschließlich 2000 kg mit 1 ℳ, 10060 kg mit 3 ℳ Ueberpreis, Grundpreis 15 ℳ; ferner 12420 kg Säulengewicht zu 18 ℳ.

§ 5. Division.

Eine Zahl durch eine andere dividieren (teilen) heißt eine dritte Zahl finden, welche mit der letzteren multipliziert, die erste zum Produkte giebt. Die Zahl, welche dividiert werden soll, wird Dividendus, die Zahl, durch welche dividiert werden soll, Divisor und die durch die Division entstandene Zahl Quotient genannt. Das Zeichen für die Division ist ein Kolon (:) und heißt „dividiert durch“.

69) Führe folgende Divisionen aus:

a. 78532 : 126; b. 693470 : 239; c. 854697 : 497; d. 987654 : 789.

Anmerk. Ist der Divisor eine große Zahl, so verfährt man, wie nachfolgende ausgeführte Division zeigt.

51989238 : 8943 = 5813
44715
72742 — 51 : 9 = 5; 72 : 9 = 8; 11 : 9 = 1
71544
11983 — 30 : 9 = 3.
8943
30408
26829
3579 Rest

Wenn 8243 der Divisor wäre, so würde man zunächst mit 8 dividieren. Stelle die Regel auf!

70) Führe folgende Divisionen aus:

a. 2345678 : 9238; b. 123456789876 : 789845.

71) Führe folgende Divisionen aus, wie nachfolgende ausgeführte Division zeigt.

965384 : 23 = 41973
45
223
168
74
5 Rest

Die Produkte aus dem Divisor und den einzelnen Ordnungen des Quotienten sollen im Kopfe gebildet und subtrahiert und nur der Rest angeschrieben werden.

a. 84629 : 21; b. 1853172 : 16; c. 597531 : 52.

72) Führe folgende Divisionen aus, ohne die Produkte und Reste jedesmal anzuschreiben.

Z. B.: 91532 : 12 = 7627
8 Rest.

a. 4568 : 2; b. 56789 : 3; c. 2357 : 6; d. 16425 : 8; e. 1325667 : 8; f. 91532 : 7; g. 234567 : 11; h. 354832 : 15; i. 886999 : 12.

73) Führe folgende Divisionen aus:

a. (90 + 36) : 9; b. (48 + 32 + 80) : 80;
c. (23 + 18 + 49) : 9; d. (127 + 354 + 957) : 719;
e. (640 + 32) : 16; f. (2459 + 189 + 23 + 12345) : 628.
(Wie wird eine Summe durch eine Zahl dividiert?)

74) Führe folgende Divisionen aus:
a. (108 — 48) : 12; b. (170 — 51) : 17; c. (368 — 143) : 25;
d. (23497 — 6442) : 5; e. (19435 — 8765) : 15.
(Wie wird eine Differenz durch eine Zahl dividiert?)

75) Führe folgende Divisionen aus:
a. (7 . 91) : 13; b. (18 . 29) : 6; c. (18 . 12) : 8;
d. (18 . 5 . 11) : 9; e. (25 . 7 . 4 . 35 . 2) : 50;
f. (16 . 25 . 28 . 19) : 56; g. (37 . 43) : 4; h. (16 . 2 . 28) : 5.
(Wie wird ein Produkt durch eine Zahl dividiert?)

76) Führe folgende Divisionen aus:
a. (48 : 6) : 2; b. (1024 : 8) : 8; c. (924 : 5) : 2;
d. (333 : 7) : 9; e. (645684 : 4) : 25; f. (217 : 5) : 7.
(Wie wird ein Quotient durch eine Zahl dividiert?)

77) Führe folgende Divisionen aus:
a. (48 + 36) : (8 + 4); b. (69 + 31 + 17 + 29) : (25 + 6);
c. (118 + 55 — 63) : (43 — 18); d. (168 — 12 — 18) : (28 — 17).
(Wie wird eine Summe oder Differenz durch eine Summe oder Differenz dividiert?)

78) Führe folgende Divisionen aus:
a. 1026 : 6 . 9; b. 1456 : 7 . 8; c. 1984 : 8 . 3; d. 4937 : 6 . 7.
(Wie wird eine Zahl durch ein Produkt dividiert?)

79) Am Schlusse des Jahres 1840 waren in Deutschland 549 km Eisenbahnen, am Schlusse des Jahres 1890 aber 42869 km. a. Auf das Wievielfache sind die Bahnen innerhalb 50 Jahren gestiegen? b. Wie viel km sind also in einem Jahre durchschnittlich gebaut?

80) Nach 25jährigen statistischen Beobachtungen kamen bei Reisen mit der Post im Durchschnitt ein Getöteter auf 355000 Reisende und ein Verletzter auf 30000 Reisende. Dagegen kamen während der letzten 10 Jahre auf der Eisenbahn durchschnittlich ein Getöteter auf 7 Millionen Reisende und ein Verletzter auf 1750000 Reisende. Wie vielmal sicherer ist demnach das Reisen auf den Eisenbahnen, als auf den Landstraßen?

81) Im Jahre 1840 besaßen sämtliche Dampfmaschinen Preußens 12778 PS, im Jahre 1878 aber 3041838 PS. a. Auf das Wievielfache ist die Dampfkraft in diesem Zeitraume gestiegen? b. Um wie viel PS hat sich demnach die Dampfkraft im Durchschnitt jährlich vermehrt?

82) Vor der Kanalisierung des Mains betrug der Schiffahrtsverkehr auf demselben jährlich durchschnittlich 311586 tkm, nach der Kanalisierung desselben stieg der Verkehr im Jahre 1877 auf 15352452, 1888 auf 20551352, 1889 auf 29159283 und 1890 auf 34807411 tkm. Auf das Wievielfache hat sich also der Verkehr in jedem dieser vier Jahre gegen früher erhöht?

83) Seit 1873 hat sich der Straßenverkehr in Berlin wie folgt vermehrt: 1873 = 3783184, 1883 = 70554748 und 1889 = 134400431 Passagiere. Wie vielmal größer war der Straßenverkehr 1883 und 1889 als im Jahre 1873?

84) Nach dem Archiv für Eisenbahnwesen betrug 1887 die Gesamtlänge der auf der ganzen Erde im Betriebe befindlichen Eisenbahnen 547872 km, das gesamte Anlagekapital dafür beziffert sich auf 114052 Millionen *M*. Wie teuer kommt 1 km im Durchschnitt?

85) Deutschland besaß in demselben Jahre 39785 km, das Anlagekapital dafür betrug 9902 Mill. *M*. Wie teuer kommt 1 km im Durchschnitt?

86) Wie lange würde eine Kanonenkugel von der Erde bis zur Sonne fliegen, wenn die Geschwindigkeit zu 700 m in der Sekunde angenommen wird? Die Entfernung der Sonne von der Erde beträgt ungefähr 21 Millionen Meilen zu 7420 m.

87) Die im Jahre 1877 beginnende Zurückhaltung der Bauthätigkeit in Berlin führte eine fortschreitende Genesung der wirtschaftlichen Lage des Grundbesitzes herbei; denn im Jahre 1878 kamen 930 Miets-Erhöhungen und 23472 Miets-Ermäßigungen vor, im Jahre 1880 bezw. 1820 und 6861, im Jahre 1882 bezw. 3119 und 3074, im Jahre 1884 bezw. 8452 und 1709. Wie viel Miets-Ermäßigungen kamen in jedem der vier Jahre auf 100 Miets-Erhöhungen? (Worin hat dies nach Aufgabe 66 seinen Grund?)

88) Nachdem die Mosel kanalisiert ist, darf man auf einen jährlichen Thalverkehr von 2 Millionen t und auf einen Bergverkehr von 500000 t jährlich rechnen. Wieviel Durchschleusungen sind demnach thalwärts täglich erforderlich, wenn 250 Schiffahrtstage jährlich gerechnet werden, die mittlere Ladefähigkeit der Schiffe zu 500 t und als größter Tagesverkehr der vierte Teil über den Durchschnitt angenommen wird und wenn bergwärts ebensoviel Durchschleusungen wie thalwärts nötig sind?

89) Für eine Einzeldurchschleusung ist eine Wassermenge von 80 m Länge, 10 m Breite und 3 m Tiefe angenommen, die Mosel hat bei Mittelniedrigwasser 80 cbm/sek. Der wievielte Teil des Moselwassers wäre demnach zu den Durchschleusungen nach vorstehender Aufgabe erforderlich?

90) Nach einem speziellen Kostenanschlage sind zu einem Hause erforderlich: 284 cbm in Haufen aufgesetzter Kalksteine à 1800 kg, 45 cbm Sandsteine à 2400 kg, 98 cbm Tuffsteine à 750 cbm, 8400 Stück Backsteine à 1000 3600 kg, 12900 Stück Dachplatten à 100 150 kg, 35 cbm Ätzkalk à 1100 kg, 62 cbm Sand à 1700 kg, 70 cbm Holz à 600 kg. Diese Materialien müssen 5 km weit gefahren werden und es ist für die Fuhre zu 45 Zentner 4 *M* zu rechnen. Wie hoch belaufen sich die Transportkosten?

§ 6. Rechenprobe.

Ein Haupterfordernis des guten Rechnens ist das Richtigrechnen. Ist eine Rechnung ausgeführt, so möchte man darum gerne die Gewißheit haben, ob das erhaltene Resultat richtig ist. Es wird zu diesem Zwecke diese oder jene Rechenprobe empfohlen. Es sollen von diesen hier einige folgen. Eine allgemein empfohlene Probe ist: Man rechne jede Aufgabe zweimal, erhält man dann ein übereinstimmendes Resultat, so ist dies ein Beweis für die Richtigkeit der Rechnung. Gar leicht kommt es aber vor, daß man bei beiden Ausrechnungen denselben Fehler macht und darum in beiden Fällen dasselbe falsche Resultat erhält. Um dies zu vermeiden, ist zu empfehlen, daß man bei der zweiten Ausrechnung einen anderen Gang wie bei der ersten einschlägt, z. B. bei der Addition einmal die Posten von unten nach oben und darnach von oben nach unten addiert, oder bei der Multiplikation die Faktoren umsetzt.

Als sichere Multiplikationsprobe ist die Division zu empfehlen, aber diese ist umständlich. Man dividiere das Produkt durch einen der Faktoren, ist der Quotient dann gleich dem anderen Faktor, so ist die Multiplikation richtig ausgeführt. Eine sichere, aber ebenfalls umständliche Divisionsprobe ist die Multiplikation. Man multipliziere den Divisor mit dem Quotienten und zum Produkte addiere man den etwa verbliebenen Rest. Das erhaltene Resultat muß mit dem Dividendus übereinstimmen, wenn die Division richtig ausgeführt ist.

Kürzer ist die weniger bekannte Neunerprobe.

1. Bei der Addition. Man addiere die Quersummen*) aller Posten, dividiere die Summe durch 9, dividiere ebenfalls die Quersumme des Resultats der Addition durch 9, die bei diesen Divisionen verbleibenden Reste sind einander gleich, sobald die Addition richtig ausgeführt ist. Da es nur auf jene Reste der Quersummen ankommt, so kann man, wie bei folgendem Beispiele gezeigt wird, verfahren. $645 + 1819 + 49 + 6789 + 187 = 9489$.
   $6 + 4 = 1$; $1 + 5 + 1 + 8 = 6$; $6 + 1 + 4 = 2$, die 9 übergeht man ganz usw. So erhält man schließlich 3. Ebenfalls erhält man 3 beim Resultat. — Bei einiger Uebung ist diese Probe rascher ausgeführt, als eine nochmalige Addition und bietet mehr Sicherheit als diese.
2. Bei der Multiplikation. Beispiel: $6496 . 897 = 5826912$.
   Man suche wie bei der Addition die Quersumme jedes Faktors, d. h. die Reste wie vorhin (hier 7 und 6), multipliziere diese mit einander (hier $7 . 6 = 42$), dividiere wieder durch 9 (42:9) und merke sich den Rest. (Man konnte auch die Quersumme von jenem Produkte 42 nehmen, in beiden Fällen erhält man 6). Man suche darnach wie bei der Addition die Quersumme von dem Resultate der ausgeführten Multiplikation. Ist letztere richtig ausgeführt, so muß von der Quersumme derselbe Rest (hier 6) verbleiben, was auch der Fall ist. — Würde man bei einem oder beiden Faktoren keinen Rest behalten, so wäre das Endresultat $= 0$, alsdann darf bei der Quersumme des Produkts auch kein Rest verbleiben.
3. Bei der Division $\underline{5826935 : 6496 = 897}$
   23 Rest.
   Man multipliziere wie bei der Multiplikation die Quersumme des Divisors und Quotienten, addiere die Quersumme des Produktes zur Quersumme des Restes. Nach vorstehendem Beispiele also: $7 . 6 = 42 = 6$, $6 + 5 = 2$. Ist die Division richtig ausgeführt, so muß die Quersumme des Dividendus auch 2 als Rest ergeben, was auch der Fall ist.
   Wenn die Neunerprobe auch keine absolute Sicherheit bietet, so ist sie doch sehr zu empfehlen, besonders bei der Multiplikation und Division, weil sie wenig Zeit in Anspruch nimmt.

91) Vier Rechner haben die Zahlen 3494 und 6532 mit einander multipliziert und haben folgende Resultate erhalten: 22653808, 23922908, 22822808 und 24604918; welches Resultat kann nach der Neunerprobe nur richtig sein?

*) Die Summe der Zahlenwerte der einzelnen Ziffern einer Zahl ohne Rücksicht auf ihren Stellenwert wird Quersumme genannt, z. B. die Quersumme der Zahl 9426 ist $= 21$.

92) Drei Rechner haben 281842451 durch 36092 dividiert und haben folgende Resultate erhalten 7795 und 244 als Rest, 7929 und 56 als Rest, 7809 und 23 als Rest; welches Resultat kann nach der Neunerprobe nur richtig sein?

§ 7. Von der Teilbarkeit der Zahlen.

Eine gründliche Uebung dieses Kapitals ist für das Rechnen von großer Bedeutung; denn man lernt dadurch die Beziehungen der Zahlen zu einander kennen, und dies befähigt uns, viele Erleichterungen, die sich beim Rechnen darbieten, rasch zu erkennen.

Man sagt, eine ganze Zahl ist durch eine andere ganze Zahl teilbar, wenn die Division der ersteren durch die letztere keinen Rest läßt, also eine ganze Zahl als Quotient giebt.

Solche Zahlen, die durch keine Zahl außer 1 teilbar sind, nennt man Primzahlen (wirkliche Primzahlen), alle anderen zusammengesetzte Zahlen.

93) Nenne sämtliche Primzahlen:

a. zwischen 1 und 10; b. zwischen 10 und 50; c. zwischen 50 und 100.

Ob eine ganze Zahl durch eine andere ganze Zahl teilbar ist, kann in sehr vielen Fällen nur durch eine ausgeführte Division ermittelt werden; doch giebt es einige Kennzeichen der Teilbarkeit, die in folgendem angegeben sind. Eine Zahl ist teilbar:

I. durch 2, wenn die letzte Ziffer eine gerade Zahl, oder Null ist. (Was ist eine gerade, was eine ungerade Zahl?)

II. durch 4, wenn die zwei letzten Ziffern eine durch 4 teilbare Zahl bilden, oder Nullen sind.

III. durch 8, wenn die drei letzten Ziffern eine durch 8 teilbare Zahl bilden, oder Nullen sind.

(Eine Zahl ist durch 8 teibar, wenn die Hunderte eine gerade Zahl bilden und die beiden letzten Stellen sich durch 8 teilen lassen, oder wenn jene eine ungerade Zahl bilden und die beiden letzten Stellen, nachdem sie um 4 vermindert sind, sich durch 8 teilen lassen.)

IV. durch 5, wenn die letzte Ziffer eine Null, oder 5 ist.

V. durch 10, wenn die letzte Ziffer eine Null ist.

VI. durch 3, wenn ihre Quersumme durch 3 teilbar ist.

VII. durch 6, wenn ihre Quersumme durch 3 teilbar und die letzte Ziffer eine gerade Zahl, oder Null ist.

VIII. durch 9, wenn ihre Quersumme durch 9 teilbar ist.

IX. durch 11, wenn die Summe ihrer Ziffern auf den ungeraden Stellen = ist der Summe ihrer Ziffern auf den geraden Stellen, oder beide Summen um 11, oder ein Vielfaches von 11 differieren.

X. durch 25, wenn die zwei letzten Ziffern eine durch 25 teilbare Zahl bilden, oder Nullen sind.

XI. durch 125, wenn die drei letzten Ziffern eine durch 125 teilbare Zahl bilden, oder Nullen sind.

(Gieb den Grund für jedes der vorstehenden elf Kennzeichen der Teilbarkeit der Zahlen an.)

94) Bilde 4 fünfziffrige Zahlen, die durch 2 teilbar sind.

95) Bilde a. 4 vierziffrige Zahlen, die durch 4; b. 4 sechsziffrige Zahlen, die durch 8 teilbar sind.

96) Welche von folgenden Zahlen sind durch 8, 4 und 2, welche durch 4 und 2, und welche nur durch 2 teilbar?

a. 84564; b. 17248; c. 92528; d. 48900; e. 9406; f. 3454; g. 10208; h. 18722; i. 12344.

97) Bilde a. 4 fünfziffrige Zahlen, die durch 3; b. 4 sechsziffrige Zahlen, die durch 6 und c. 4 siebenziffrige Zahlen, die durch 9 teilbar sind.

98) Welche von folgenden Zahlen sind durch 9, 6 und 3, welche nur durch 9 und 3, welche nur durch 6 und 3, und welche nur durch 3 teilbar?

a. 675441; b. 642426; c. 987351; d. 98766; e. 12345675; f. 24684.

99) Bilde 4 fünfziffrige und 4 sechsziffrige Zahlen, die durch 11 teilbar sind.

100) Welche von folgenden Zahlen sind durch 11 teilbar?

a. 6567; b. 34567; c. 652586; d. 84394; e. 8463284562; f. 45678765; g. 1819070; h. 18081921.

101) Bilde a. 6 fünfziffrige Zahlen, die durch 25, b. 6 sechsziffrige, die durch 125 teilbar sind.

102) Welche von folgenden Zahlen sind durch 125, 25 und 5, welche durch 25 und 5 und welche nur durch 5 teilbar?

a. 678920; b. 45775; c. 876275; d. 843575; e. 84250; f. 98765.

Merke nachfolgende Sätze:

1. Ein Produkt aus mehreren Faktoren ist durch jeden Faktor teilbar. Z. B.: 2.3.5 = 30; 30 ist also durch jeden der drei Faktoren teilbar.

2. Ist eine Zahl durch mehrere Zahlen teilbar, so ist sie nicht immer durch das Produkt aus zwei oder mehreren dieser Faktoren teilbar. Z. B.: 54 ist teilbar durch 2, 3, 6, 9, 18 und 27; aber nicht durch 2.6 oder 2.18 usw.

3. Dies ist nur der Fall, wenn sämtliche Faktoren außer 1 keinen gemeinschaftlichen Faktor haben. Z. B.: 210 ist teilbar durch 2, 3, 5 und 7, darum auch durch 2.3, 3.5, 5.7, 2.3.5, 3.5.7, 2.5.7 usw.

103) Aus welchen Primfaktoren sind folgende Zahlen zusammengesetzt? 9, 12, 15, 16, 18, 20, 30, 48, 63, 75, 81, 91.

104) Zerlege folgende Zahlen in ihre Primfaktoren, wie das ausgeführte Beispiel zeigt.

324, 1000, 7200, 1536, 2880, 3448.

144

144	1
72	2
36	2
18	2
9	2
3	3
1	3

Primfaktoren.

105) Aus welchen Faktoren kann also jede der vorstehenden Zahlen gebildet werden? Z. B. 144: a. 144 . 1; b. 72 . 2; c. 36 . 2 . 2; d. 18.2.2.2; e. 9.2.2.2.2; f. 3.3.2.2.2.2; g. 36.4; h. 18.4.2; i. 18.8; k. 9.8.2; l. 9.4.4 usw.

106) Welche gemeinschaftliche Primfaktoren haben:

a. 224 und 336; b. 780 und 936; c. 384 und 448.

107) Welchen größten gemeinschaftlichen Faktor haben vorstehende Zahlenpaare? (Der größte gemeinschaftliche Faktor ist gleich dem Produkte der gemeinschaftlichen Faktoren.)

Der größte gemeinschaftliche Faktor läßt sich am bequemsten in folgender Weise finden. Man dividiere die kleinere Zahl in die größere und den jedesmaligen Rest in den vorhergehenden Divisor und setze dies fort, bis kein Rest mehr bleibt. Der letzte Divisor ist der größte gemeinschaftliche Faktor.

Beispiel: a. 1312 : 369 = 3
1107
369 : 205 = 1
205
205 : 164 = 1
164
164 : 41 = 4
164

b. 1155 : 442 = 2
884
442 : 271 = 1
271
271 : 171 = 1
171
171 : 100 = 1
100
100 : 71 = 1
71
71 : 29 = 2
58
29 : 13 = 2
26
13 : 3 = 4
12
1

Beispiel a. 41 ist der letzte Divisor und darum der größte gemeinschaftliche Faktor der beiden Zahlen 1312 und 369. (Beweis!) Beispiel b. Bleibt ein Rest 1, so haben die betreffenden Zahlen außer 1 keinen gemeinschaftlichen Faktor. Solche Zahlen nennt man bedingte Primzahlen. Z. B.: 4 und 9, oder 16, 25, 27, 49 sind bedingte Primzahlen, obwohl jede einzelne Zahl eine zusammengesetzte Zahl ist. Ob zwei Zahlen bedingte Primzahlen sind, erkennt man schon, wenn man nach dem angegebenen Verfahren auf einen Rest stößt, der eine wirkliche Primzahl ist und in dem vorhergehenden Divisor nicht aufgeht, und man hat dann nicht nötig, die Rechnung weiter fortzusetzen. Man hätte also die Rechnung bei dem Reste 71 abbrechen können, da man 71 leicht als wirkliche Primzahl erkennt.

108) Nenne 6 Zahlenpaare, die bedingte Primzahlen sind.

109) Welchen größten gemeinschaftlichen Faktor haben:

a. 11872 und 5984; b. 523 und 189; c. 133 und 231;
d. 1079 und 1743; e. 1278 und 2059; f. 276 und 893;

110) Dividiere das Produkt der Zahlen 45 und 616 durch das Produkt der Zahlen 99 und 35.

Ansatz: $\frac{45 . 616}{99 . 35}$ (Hier ist eine wagerechte Linie das Divisionszeichen. Diese Darstellung kommt besonders im technischen Rechnen häufig vor und wird darum, weil sie viele Vorteile bietet, später oft angewandt werden. Bevor vorstehende Rechnung ausgeführt wird, teile oder verkürze Dividendus und Divisor durch gemeinsame Faktoren.)

111) Berechne in derselben Weise: a. 14.495.221:110.819; b. 78.380.378.189:56.135.102.143.

112) Berechne folgende Zahlenausdrücke aus der Mechanik:

a. Widerstandsmoment $W = \frac{120 . 1000}{750}$;

b. $W = \frac{30 . 2400 + 70 . 1800}{750}$; c. $W = \frac{250 . 10392}{8 . 750}$;

d. $W = \frac{325\ (2704 + 2 . 6568)}{8 . 750}$; e. $W = \frac{50 . 3645 + 240 . 1825}{750}$;

f. $W = \frac{50 . 2370 + 155 . 1350 + 240 . 975}{750}$;

113) Berechne folgende Zahlenausdrücke:

a. $\frac{210}{77} : \frac{78}{143}$; b. $\left(\frac{102}{35} : \frac{52}{95}\right) . \left(\frac{52}{33} : \frac{34}{77}\right)$.

(Ansatz bei a.: $\frac{210 . 143}{77 . 78} = ?$ Beweis!)

II. Abschnitt.

Die Bruchrechnung.

I. Die gewöhnlichen Brüche.

Wenn man irgend ein Ganzes in gleiche Teile zerlegt und einen oder mehrere dieser Teile nimmt, so erhält man einen Bruch. Bei jedem Bruche kommen zwei Zahlen vor. Die eine sagt, in wie viel gleiche Teile das Ganze zerlegt ist, sie giebt an, welchen Namen die Teile führen und heißt deshalb der Nenner; die andere zeigt an, wie viel solcher Teile zu nehmen sind, sie zählt die Teile, deshalb heißt sie der Zähler.

Wie schreibt man einen Bruch?

Wenn ein Bruch weniger Teile als das Ganze hat, so wird er ein echter und wenn er eben so viel oder mehr Teile als das Ganze hat, so wird er ein unechter Bruch genannt. $^3/_4$ ist ein echter, $^5/_4$ ein unechter Bruch. Sind Ganze und ein Bruch verbunden, so hat man eine gemischte Zahl, z. B. $4^3/_4$.

§ 1. Addition der Brüche.

1) Was sind gleichnamige Brüche?
2) Wie werden diese addiert?
3) Addiere folgende Brüche:

a. $^5/_9 + ^3/_9$; b. $^3/_{16} + ^5/_{16} + ^7/_{16}$; c. $^4/_{23} + ^5/_{23} + ^6/_{23} + ^8/_{23}$; d. $^7/_{40} + ^9/_{40} + ^{13}/_{40} + ^{17}/_{40} + ^{19}/_{40}$; e. $^{28}/_{103} + ^{64}/_{103} + ^{45}/_{103} + ^{56}/_{103}$; f. $6^4/_9 + 8^1/_9 + 13^2/_9$; g. $16^{11}/_{12} + ^5/_{12} + 6^{11}/_{12} + ^7/_{12}$.

4) Was versteht man unter Heben oder Kürzen der Brüche?
5) Kürze folgende Brüche im Kopfe:

a. $^{12}/_{16}$; b. $^{18}/_{27}$; c. $^{24}/_{36}$; d. $^{35}/_{49}$; e. $^{400}/_{700}$; f. $^{33}/_{110}$; g. $^{75}/_{100}$; h. $^{81}/_{729}$; i. $^{44}/_{594}$; k. $^{234}/_{552}$; l. $^{120}/_{144}$; m. $^{26}/_{65}$; n. $^{48}/_{72}$; o. $^{52}/_{78}$; p. $^{216}/_{360}$; q. $^{125}/_{225}$.