Rechenbuch für technische Fachschulen und zum Selbstunterricht

Böhnig, D.

Holzminden, 1894

XII. Abschnitt. Die Zinseszins- und Rentenrechnung.

urn:nbn:de:hbz:466:1-77782

100) Ein Zementfabrikant will 2 Sorten Zement so mischen, daß die Druckfestigkeit des Zements 240 kg beträgt. Wie viel Tonnen à 300 kg Druckfestigkeit muß er zu 60 Tonnen à 175 kg Druckfestigkeit mischen?

101) Jemand hat drei Sorten Zement, deren Druckfestigkeit nach einer gewissen Zeit bezw. 280, 360 und 420 kg beträgt. In welchem Verhältnisse müssen die drei Sorten gemischt werden, wenn die Mischung eine Druckfestigkeit von 340 kg haben soll und wenn von den beiden besseren Sorten ein gleiches Quantum genommen werden soll?

102) Es sollen aus den drei Sorten Zement der vorigen Aufg. 1000 Tonnen von 340 kg Druckfestigkeit gemischt und von der zweiten Sorte nur 120 Tonnen verwandt werden. Wie viel Tonnen müssen von den beiden andern Sorten genommen werden?

103) Wie würde sich das Resultat der vorigen Aufg. stellen, wenn a. von der dritten Sorte nur 120 Tonnen und b. von der ersten Sorte 480 Tonnen zu der Mischung verwandt würden?

XII. Abschnitt.

Die Zinseszins- und Rentenrechnung.

Diese Rechnungsarten sind für das Baugewerbe, wie aus den unten gelösten Aufgaben hervorgeht, von der größten Bedeutung. Jeder Bautechniker sollte mit denselben vertraut sein. Daß dies nicht der Fall ist, darf ich wohl daraus folgern, daß laut der Schulberichte diese Rechnungsarten in manchen bautechnischen Schulen nicht gelehrt werden. Wenn nun der eine oder der andere Techniker, veranlaßt durch die Praxis, diese Lücke ausgefüllt hat, so ist dies jedenfalls vielfach mit Schwierigkeiten verknüpft gewesen; denn viele werden sich in ihrem Wohnorte nach jemandem, der ihnen diese Rechnungsarten klarlegen konnte, vergeblich umgesehen haben, und sie mußten sich durch das Studium eines algebraischen Werkes selbst belehren. Die Auseinandersetzungen in derartigen Werken sind aber häufig so abstrakt gehalten, daß gewiß mancher sein Ziel nicht erreicht hat. Diese Rechnungsarten sind ferner fast allgemein so wenig auf das Baufach bezogen, daß viele Techniker die Wichtigkeit derselben nicht voll erkannt haben.

§ 1. Die Zinseszinsrechnung.

Ein Kapital steht auf Zinseszinsen, wenn die am Ende jedes Termins, z. B. eines Jahres, fälligen Zinsen zum Kapital geschlagen und mitverzinst werden. An einem einfachen Beispiele soll die Grundformel dieser Rechnungsart entwickelt werden.

Aufg.: Zu welchem Kapitale wachsen 500 ℳ an, die zu 4% jährlich 4 Jahre auf Zinseszins verliehen sind?

Ausrechnung: Nach der Kettenregel ist das Endkapital

$$=\frac{500\,.\,104\,.\,104\,.\,104\,.\,104}{100\,.\,100\,.\,100\,.\,100}=500\,.\,1{,}04\,.\,1{,}04\,.\,1{,}04\,.\,1{,}04=500\,.\,1{,}04^4=$$

Bezeichnen wir das Endkapital mit s, das Anfangskapital (hier 500) mit a, 1,04, also die Zahl, zu der 1 in einem gewissen Zeitraume (hier in einem Jahre) anwächst, mit p, die Anzahl gleicher Zeiträume (hier Jahre) mit n; so erhalten wir die Formel:

$$1\,.\; s = ap^n$$

Durch Umformung dieser Formel erhalten wir:

$$2.\ a = \frac{s}{p^n};\quad 3.\ p = \sqrt[n]{\frac{s}{a}};\quad 4.\ n = \frac{\log s - \log a}{\log p}$$

Entwickelung der letzten Formel: $ap^n = s$; $p^n = \frac{s}{a}$;

$$n \log p = \log s - \log a;\ n = \frac{\log s - \log a}{\log p}.$$

Wenn drei von den vier Größen s, a, p und n gegeben sind, so läßt sich die vierte berechnen.

Bemerk. Bei der Zinseszins- wie Rentenrechnung ist die Bekanntschaft mit den Logarithmen erforderlich. Ohne Logarithmen lassen sich viele Aufgaben nur mit vieler Mühe, andere überhaupt nicht lösen.

1) Zu welcher Summe wachsen 25000 ℳ bei 4% Zinseszinsen in 50 Jahren an?

Ansatz: $s = ap^n = 25000 . 1{,}04^{50}$.

2) Ein Landwirt will auf einer größeren Fläche Ackerlandes, die von seinem Gehöfte weit abgelegen ist, eine Scheune bauen lassen. Ein Baugewerkmeister legt ihm zwei Projekte vor, die beide rücksichtlich des Rauminhalts usw. den Anforderungen entsprechen, die sich aber in der Ausführung unterscheiden. Das eine Projekt beansprucht ein Baukapital von 9000 ℳ, das andere ein solches von 6280 ℳ. Zugleich fügt der Baugewerkmeister eine Rentabilitätsrechnung zum finanziellen Vergleich beider Projekte mit an. Bei dem ersten Projekte ist auf eine Dauer der Scheune von 80 Jahren, bei dem zweiten aber nur auf eine Dauer von 40 Jahren zu rechnen. Die jährlichen Kosten für Reparaturen, Versicherung usw. sollen in beiden Fällen gleich sein. Es ist also zu untersuchen, zu welcher Summe die Minderausgabe von 2720 ℳ beim zweiten Projekte bei 3% Zinsen p. a. in 40 Jahren, wo ein Neubau stattfinden müßte, anwächst. Würden nur einfache Zinsen gerechnet, so würden die Zinsen für 40 Jahre betragen: $27{,}2 . 3 . 40 = 3264$ ℳ. Es ständen zum Neubau also nur $3264 + 2720 = 5984$ ℳ zur Verfügung, es wäre also ein Fehlbetrag von 296 ℳ zu verzeichnen.

Diese Berechnung ist aber mangelhaft, es müssen hier jedenfalls Zinseszinsen zur Anwendung kommen. In diesem Falle wachsen die 2720 ℳ an zu:

$$s = ap^n = 2720 . 1{,}03^{40} = 8875\ ℳ.$$

Der Landwirt erzielt also beim zweiten Projekte innerhalb der 40 Jahre einen Nutzen von $8875 - 6280 = 2595$ ℳ. Wenn nun noch hinzukommt, daß er das Baukapital anleihen muß, daß seine Schuldenlast also beim ersten Projekte um 2720 ℳ größer wird, so wird er sich für das zweite Projekt erklären.

3) Zu welcher Summe wächst mit Zinsen und Zinseszinsen an: a. 12000 ℳ zu 4% in 30 Jahren? b. 8520 ℳ zu $4^1/_2$% in 40 Jahren? c. 20500 ℳ zu $4^3/_4$% in 50 Jahren?

4) In einer Stadt von 8354 Einwohnern soll ein Schulhaus gebaut werden, das bei einer Bevölkerungszunahme von $1^3/_4$% für die nächsten 30 Jahre ausreichen soll. Auf wie viel Schulkinder ist beim Bau zu rechnen, wenn man 18% der Einwohnerzahl als schulpflichtige Kinder annimmt?

5) Ein Bauunternehmer erhielt von der Budapester Stadtverwaltung für 1 qm Straßenpflaster aus Keramitsteinen 13 ℳ. Von dieser Summe erhielt er die Hälfte nach 3 Jahren, 30% nach 5 Jahren und den Rest nach 15 Jahren ohne Zinsenvergütung. Welcher Barsumme bei 4% Zinseszinsen sind diese Zahlungsleistungen gleichzusetzen?

Ansatz: $a = \frac{s}{p^n} = \frac{6{,}50}{1{,}04^3} + \frac{3{,}90}{1{,}04^5} + \frac{2{,}60}{1{,}04^{15}} =$

Bei einfacher Zinsrechnung würde sich das Resultat ergeben:

$a = 13 - (0{,}065 \,.\, 4 \,.\, 3 + 0{,}039 \,.\, 4 \,.\, 5 + 0{,}026 \,.\, 4 \,.\, 15) =$

6) Welches Kapital wächst bei $5^1/_4$% in 100 Jahren zu einer Million Mark an?

7) Jemand erhält laut eines Testaments nach 12 Jahren 5000 ℳ ausgezahlt. Wie viel ist diese Summe bar wert, wenn 5% Zinseszinsen gerechnet werden? (Siehe Aufg. 35 Abschn. X.)

8) Wie groß muß ein Kapital sein, welches zu 4% steht, wenn dasselbe nach 15 Jahren ebensoviel wert sein soll, als 4500 ℳ zu 6% nach 9 Jahren?

9) Ein Waldbestand, der vor 20 Jahren zu 15000 Festmeter abgeschätzt war, ist jetzt zu 25000 Festmeter abgeschätzt. Um wie viel Proz. jährlich hat sich der Holzbestand vermehrt?

Ausrechnung: $p = \sqrt[n]{\frac{s}{a}} = \sqrt[20]{\frac{25000}{15000}} = \sqrt[20]{\frac{5}{3}} = 1{,}026$

1 ist zu 1,026 in einem Jahre angewachsen, also
100 sind „ 102,6 „ „ „ „ , folgl. 2,6%

Bei einfacher Zinsrechnung würde sich das Resultat ergeben:

$\text{Proz.} = \frac{10000 \,.\, 100}{15000 \,.\, 20} = 3^1/_3\%$

10) Da das Holz des Waldbestandes nach voriger Aufg. an Stärke bedeutend zugenommen hat, so ist der Wert desselben 10% gegen früher höher anzusetzen. Welche Resultate werden sich jetzt ergeben?

Ausrechnung:

Die 25000 Festm. sind $= 25000 + 2500 = 27500$ zu rechnen.

Also $p = \sqrt[20]{\frac{27500}{15000}} = \sqrt[20]{\frac{11}{6}} = 1{,}031$, folgl. $= 3{,}1\%$.

Bei einfacher Zinsrechnung würde sich das Resultat ergeben:

$\text{Proz.} = \frac{12500 \,.\, 100}{15000 \,.\, 20} = 4{,}25\%$.

11) Ein Tischlermeister kauft von einem Privatmann das cbm 80 mm starker Stammbohlen, die vor 30 Jahren schon geschnitten und nachher gut aufbewahrt sind, zu 60 ℳ. Vor 30 Jahren hatten sie einen Wert von 24 ℳ pro cbm. Mit wie viel Proz. Zinseszins hat sich das Kapital verzinst?

12) Ein Wucherer verleiht 600 ℳ und läßt sich darüber einen Schuldschein von 800 ℳ, nach drei Jahren ohne Zinsen zahlbar, ausstellen. Wie viel Proz. erhält er, wenn Zinseszinsen in Rechnung gezogen werden?

13) Zu wie viel Proz. steht ein Kapital, das sich in 20 Jahren verdreifacht und zwar a. bei Zinsenszinsen und b. bei einfachen Zinsen?

14) In wie viel Jahren verdreifacht sich ein Kapital bei 3 % Zinsen jährlich und zwar a. bei Zinseszinsen und b. bei einfachen Zinsen?

Ausrechnung:

$$\text{a. } n = \frac{\log s - \log a}{\log p} = \frac{\log 3 - \log 1}{\log 1{,}03} = \frac{0{,}47712}{0{,}01284} = 37{,}2 \text{ Jahre.}$$

$$\text{b. } n = \frac{200}{3} = 66{,}7 \text{ Jahre.}$$

15) In wie viel Jahren verdoppelt sich ein Kapital, das a. zu 4 %, b. zu 5 % steht?

16) Jemand schenkte einer Stadt 30000 ℳ unter der Bedingung, daß das Kapital erst dann zum Nutzen der Stadt verwandt werden soll, wenn es durch die Zinsen zu 3000000 ℳ angewachsen ist. Nach wie viel Jahren wird dies der Fall sein, wenn a. 4 % Zinseszinsen, b. 4 % einfache Zinsen gerechnet werden?

§ 2. Die Rentenrechnung.

Unter einer Rente versteht man eine mehrmals in gleichen Terminen zu zahlende Summe. Eine Rente, die bis zum Tode des Empfängers gezahlt wird, heißt eine Leibrente. Auch hier soll die Grundformel an einem Beispiele entwickelt werden.

Nehmen wir den Fall an, jemand bezöge sechs Jahre am Schlusse eines jeden Jahres eine Rente von 500 ℳ, er verabredete mit dem, der die Rente zu zahlen hat, dieselbe solle für alle sechs Jahre erst am Schlusse des sechsten Jahres ausgezahlt werden, bis dahin aber mit 4 % Zinseszinsen verzinst werden. Zu welchem Kapitale wird die Rente anwachsen?

Die erste Rente würde 5, die zweite 4, die dritte 3, die vierte 2, die fünfte 1 Jahr und die letzte keine Zinsen bringen. Das Kapital (s) würde also nach der Zinseszinsrechnung sein:

$$s = 500 . 1{,}04^5 + 500 . 1{,}04^4 + 500 . 1{,}04^3 + 500 . 1{,}04^2 + 500 . 1{,}04 + 500$$

Es würde umständlich sein, besonders bei einer noch größeren Anzahl von Jahren, die einzelnen Posten zu berechnen. Durch folgende einfache Operation kommen wir zu einer einfachen Formel. Vorstehende Gleichung werde mit 1,04 multipliziert und von dieser die ursprüngliche Gleichung subtrahiert. Also:

$$\begin{aligned} s . 1{,}04 &= 500 . 1{,}04^6 + 500 . 1{,}04^5 + 500 . 1{,}04^4 + 500 . 1{,}04^3 + 500 . 1{,}04^2 + 500 . 1{,}04 \\ s &= 500 . 1{,}04^5 + 500 . 1{,}04^4 + 500 . 1{,}04^3 + 500 . 1{,}04^2 + 500 . 1{,}04 + 500 \\ \hline s . 1{,}04 - s &= 500 . 1{,}04^6 - 500, \text{ oder} \\ s\,(1{,}04 - 1) &= 500\,(1{,}04^6 - 1), \text{ mithin} \\ s &= \frac{500\,(1{,}04^6 - 1)}{1{,}04 - 1} \end{aligned}$$

Um diese Formel allgemein zu fassen, werde die Rente von 500 ℳ mit r, 1,04 (siehe Zinseszinsrechnung) mit p und 6, die Anzahl Jahre, mit n bezeichnet, dann heißt die Formel: $s = \frac{r\,(p^n - 1)}{p - 1}$

Wenn drei von den vier Größen s, r, p und n gegeben sind, so läßt sich die vierte berechnen.

17) Zu welcher Summe wächst die Rente von 500 ℳ nach vorstehendem Beispiele innerhalb der 6 Jahre an?

Ansatz:

$$s = \frac{r\,(p^n - 1)}{p - 1} = \frac{500\,(1{,}04^6 - 1)}{1{,}04 - 1} = \frac{500\,(1{,}04^6 - 1)}{0{,}04} = 12500\,(1{,}04^6 - 1) =$$

18) Wenn eine Rentabilitätsrechnung, z. B. über ein Wohnhaus angestellt wird, dann muß ein Betrag für die Tilgung des Baukapitals in Ausgabe gestellt werden. Um diesen Betrag in Proz. festzustellen, teilt man mit der Dauer, die man für das Gebäude nach der Art der Ausführung annehmen darf, in 100. An Bequemlichkeit läßt diese Rechnung nichts zu wünschen übrig, wohl aber an Genauigkeit. Ein Beispiel wird dies zeigen. Die Dauer eines gut ausgeführten Wohnhauses ist auf 200 Jahre geschätzt, das Baukapital beträgt 30000 ℳ. Der Tilgungsbetrag ist demnach $^1/_2$% von 30000 ℳ = 150 ℳ. Wenn diese 150 ℳ jedes Jahr in den Geldkasten gelegt würden, dann hätte man nach 200 Jahren das Baukapital wieder angesammelt. Diese Thorheit wird jedoch niemand begehen, sondern man wird das Geld zinslich belegen. Zu welcher Summe wächst aber dieser Tilgungsbetrag von jährlich 150 ℳ bei 3% Zinseszinsen in 200 Jahren an?

Ausrechnung:

$$s = \frac{r\,(p^n - 1)}{p - 1} = \frac{150\,(1{,}03^{200} - 1)}{1{,}03 - 1} = \frac{150\,(1{,}03^{200} - 1)}{0{,}03} = 5000\,(1{,}03^{200} - 1) =$$
$$5000\,.\,1{,}03^{200} - 5000 = 1849130 - 5000 = 1844130 \text{ ℳ}.$$

Diese Summe ist aber rd. das 60fache des Baukapitals. Der Tilgungsbetrag darf darum nicht zu $^1/_2$%, sondern zu $^1/_{120}$% des Baukapitals, also nicht zu 150 ℳ, sondern zu 2,50 ℳ angenommen werden.

Bei einem höheren Zinsfuß stellt sich ein noch größerer Unterschied heraus, z. B. bei 5% Zinseszinsen würden die 150 ℳ zu rd. 51900000 ℳ, also zum 1730fachen des Baukapitals anwachsen.

Wenn man bei Rentabilitätsberechnungen auch nur von ganz sicheren Annahmen ausgehen soll, so ist im vorliegenden Falle die oben angegebene Rechnungsweise doch so sehr von einer genauen Rechnung abweichend, daß man sie verwerfen muß.

19) Jemand legt jährlich von seinem Einkommen 500 ℳ zurück. Wie groß wird sein Ersparnis nach 30 Jahren sein bei $3^1/_2$% Zinseszinsen?

20) A. bezieht jährlich ein Gehalt von 3000 ℳ, B. von 3600 ℳ. Jeder gebraucht jährlich zu seinem Unterhalte 2400 ℳ. Wie viel würde B. nach 40 Jahren mehr als A. haben, wenn beide ihren Überschuß auf Zinseszinsen gegeben hätten, diese zu $3^1/_2$% gerechnet?

21) Wie würde sich das Resultat nach voriger Aufg. stellen, wenn A. seinen Überschuß mit 5%, B. aber nur mit 3% Zinsenszinsen angelegt hätte?

22) Jemand hat sein Leben zu 1000 ℳ versichert. Diese Summe soll nach seinem Tode an seine Erben ausgezahlt werden. Er muß zu Anfang jeden Jahres 2,5% Prämie zahlen. Am Schlusse des 20. Jahres stirbt er. Zu welcher Summe ist die Prämie bei $3^1/_2$% Zinseszinsen p. a. angewachsen?

Ausrechnung: Da die Prämie am Anfange jedes Jahres bezahlt werden muß, so sind für jede Prämie die Zinsen 1 Jahr länger, als oben bei der Entwickelung der Rentenformel angenommen ist, zu berechnen. Es ergiebt sich demnach die Formel:

$$s = \frac{rp(p^n - 1)}{p - 1}, \text{ also}$$

$$s = \frac{25 \,.\, 1{,}035\,(1{,}035^{20} - 1)}{1{,}035 - 1} = \frac{25 \,.\, 1{,}035\,(1{,}035^{20} - 1)}{0{,}035} = 714{,}29 \,.\, 1{,}035\,(1{,}035^{20} - 1)$$
$$= 714{,}29 \,.\, 1{,}035^{21} - 714{,}249 \,.\, 1{,}035 =$$

23) Jemand hat unter derselben Bedingung wie nach voriger Aufg. sein Leben zu 7500 ℳ versichert. Er muß, da er noch jünger als jener ist, nur 2,2 % Prämie jährlich zahlen. Er stirbt am Ende des 35. Jahres. Zu welcher Summe ist die Prämie bei 3½ % Zinzeszinsen angewachsen?

24) Jemand hat auf seinem Hause eine Hypothekschuld von 15000 ℳ stehen, die er mit 4 % verzinsen muß. Der Gläubiger ist damit einverstanden, daß er jährlich außer den Zinsen für das ganze Kapital noch 500 ℳ bezahlt, die vom Kapital abgesetzt werden. Am Schluß des 15. Jahres zahlt er außer der bisher gezahlten Summe noch den Rest der Schuld. Wie viel beträgt dieser?

Ansatz: $15000 - \frac{500\,(1{,}04^{15} - 1)}{1{,}04 - 1} =$

25) Jemand hat ein Kapital von 6000 ℳ zu 3½ % in einer Sparkasse belegt. Am Ende eines jeden Jahres werden außer den Zinsen noch 500 ℳ zum Kapital gelegt. Wie groß wird das Kapital nach 25 Jahren sein?

Ansatz: $ap^n + \frac{r(p^n - 1)}{p - 1} = 6000 \,.\, 1{,}035^{25} + \frac{500\,(1{,}035^{25} - 1)}{1{,}035 - 1} =$

26) Ein Waldbestand ist zu 20000 Festmeter und dessen Zuwachs zu 3 % jährlich abgeschätzt. Wie viel Festmeter wird der Bestand nach 20 Jahren haben, wenn jährlich 400 Festmeter gehauen werden?

Ansatz: $20000 \,.\, 1{,}03^{20} - \frac{400\,(1{,}03^{20} - 1)}{1{,}03 - 1} =$

27) A. erleidet durch B. einen Verlust an seinem Grundstücke. Dieser wird durch Sachverständige auf jährlich 9,04 ℳ geschätzt. B. will diese Entschädigung gleich für 50 Jahre auf einmal zahlen. A., der damit einverstanden ist, fragt bei einer bautechnischen Zeitung an, welche Summe er beanspruchen könne. Die Zeitschrift giebt ihm die Antwort, daß er sich bei 5 % Zinseszinsen 1892 ℳ, bei 4 % 1380 ℳ und bei 3 % 931 bis 932 ℳ auszahlen lassen müsse. Es liegt auf der Hand, daß diese Summen viel zu hoch sind. Es ist irrtümlicher Weise berechnet, wozu die Rente von 9,04 ℳ bei bezw. 5, 4 und 3 % Zinseszinsen innerhalb 50 Jahre anwachsen würde, wenn B. am Schlusse des 50. Jahres für den ganzen Zeitraum bezahlen würde. Die richtige Lösung ist folgende. Das Kapital, das B. zahlt, muß so groß sein, daß es innerhalb 50 Jahren mit Zinseszinsen zu derselben Summe anwächst, wozu auch die Rente unter denselben Umständen anwachsen würde. Nennen wir dies Kapital a, so würde es nach der Zinseszinsformel zu ap^n und die Rente zu $\frac{r(p^n - 1)}{p - 1}$ anwachsen.

Es ergiebt sich also die Gleichung:

$$ap^n = \frac{r(p^n - 1)}{p - 1} \text{ mithin}$$

$$a = \frac{r(p^n - 1)}{p^n(p - 1)}, \text{ also bei } 5\%$$

$$a = \frac{9{,}04\,(1{,}05^{50} - 1)}{1{,}05^{50}\,(1{,}05 - 1)} = \frac{9{,}04\,(1{,}05^{50} - 1)}{1{,}05^{50}.\,0{,}05} =$$

Bemerk. Der Rechner der Zeitschrift ist noch in einem zweiten Irrtume befangen gewesen. Er schreibt: „Es ist nun allerdings nicht anzunehmen, daß von seiten des Gerichts ein Zinsfuß von 5% angenommen wird, da ein solcher in Wirklichkeit zu hoch sein würde. Wir lassen deshalb noch die Resultate für einen Zinsfuß von 4% und 3% folgen.“ Die Resultate sind oben angegeben. Bei dieser irrtümlichen Lösung ist das richtig; aber bei der richtigen Lösung ist das Gegenteil der Fall; je niedriger der Zinsfuß, desto höher muß die Abfindungssumme sein. A. hat also keine Ursache, darauf zu bestehen, daß der Berechnung ein hoher Zinsfuß zugrunde gelegt wird.

28) Welche Resultate würden sich nach voriger Aufg. bei 4% und 5% ergeben?

29) Das Baukapital eines Hauses beträgt 20000 ℳ, die Dauer des Hauses ist auf 100 Jahre geschätzt. Wie hoch ist der jährliche Tilgungsbetrag bei 2% Zinseszinsen anzunehmen?

Bemerk. Da jede Sparkasse auch die kleinsten Beträge mit mindestens 2% verzinst, so ist der Zinsfuß gewiß nicht zu hoch angenommen.

Ausrechnung: Durch Umformung der oben entwickelten Rentenformel erhält man:

$$r = \frac{s(p - 1)}{p^n - 1} = \frac{20000\,(1{,}02 - 1)}{1{,}02^{100} - 1} = \frac{400}{7{,}244 - 1} = \frac{400}{6{,}244} = \text{rd. } 64 \text{ ℳ}.$$

Oder in Proz. ausgedrückt: $\frac{64}{200} = 0{,}32\%$ des Baukapitals.

30) Jemand will sein Leben so versichern, daß die Erben nach seinem Tode 10000 ℳ erhalten. Wie viel Proz. Prämie muß er jedes Jahr zahlen, wenn dieselbe a. nach Ablauf jedes Jahres, b. am Anfang jedes Jahres zu zahlen wäre, wenn er ferner nach den Sterblichkeits-(Mortalitäts-)Tabellen noch 25 Jahre zu leben hat und der Berechnung 3% Zinsen zugrunde gelegt werden?

Ansatz für b.: Nach der Formel unter Aufg. 21 ist:

$$r = \frac{s(p - 1)}{p(p^n - 1)}$$

31) Ein alleinstehender Mann von 60 Jahren hat die Zinsen von 30000 ℳ, die er zu $3\frac{1}{2}\%$ verliehen hat, zu verzehren. Da es ihm schwer wird, mit dieser Einnahme auszukommen, fragt er bei einer Lebensversicherungs-Gesellschaft an, eine wie hohe Rente sie ihm zu Anfang jedes Jahres bis an sein Lebensende gegen Überweisung seines Kapitals zahlen will. Die Gesellschaft erbietet sich, ihm eine Rente zu zahlen, die sich ergiebt, wenn nach der Sterblichkeitstabelle noch auf ein Leben von 12 Jahren zu rechnen ist und 3% Zinsen gerechnet werden. Welche Rente würde er somit erhalten?

Ansatz: $\frac{rp(p^n - 1)}{p - 1} = ap^n$, also $r = \frac{ap^n(p - 1)}{p(p^n - 1)}$

32) Bei Beurteilung verschiedener Bauausführung spielt meistens der Kostenpunkt eine Hauptrolle. Es soll beispielsweise durch genaue Berechnung festgestellt werden, welches von folgenden drei Dächern in ökonomischer Beziehung das vorteilhafteste ist.

Art der Eindachung	Herstellungskosten pro qm	Jährl. Unterhaltung pro qm	Dauer
Ziegel= Dach	3 ℳ	0,03 ℳ	50 Jahre
Schiefer= "	5 "	0,02 "	75 "
Zink= "	6 "	0,02 "	100 "

Der Berechnung sollen 4% Zinsen zugrunde gelegt werden.

Ausrechnung: Die Aufg. wird am bequemsten gelöst, wenn die Kosten eines jeden Daches pro Jahr berechnet werden. Diese setzen sich zusammen aus den Zinsen für die Herstellungskosten, aus den Kosten für die Unterhaltung und endlich aus dem Betrage, der jährlich zurückgelegt werden muß, um die Summe, die zur Erneuerung des Daches erforderlich ist, anzusammeln.

Dieser letzte Posten beträgt für das qm

Ziegel = Dach: $\frac{r\,(1{,}04^{50}-1)}{1{,}04-1} = 3$

Schiefer= " $\frac{r\,(1{,}04^{75}-1)}{1{,}04-1} = 5$

Zink= " $\frac{r\,(1{,}04^{100}-1)}{1{,}04-1} = 6$

Bemerk. Meistens berechnet man vorstehende Posten, indem man mit der Dauer in die Herstellungskosten dividiert. Wie verkehrt dies ist, ersieht man daraus, daß man dann bezw. 6, $6\frac{2}{3}$ und 6 ₰ als Resultat erhalten würde.

Die jährlichen Kosten des Ziegeldaches betragen demnach: Zinsen $= 3 \cdot 4$ ₰ $= 12$ ₰, Unterhaltungskosten $= 3$ ₰ und Tilgungsbetrag $= 2$ ₰, also zusammen $= 17$ ₰. Berechne die Kosten für die beiden andern Dächer.

Bemerk. Berücksichtigt man aber, daß bei einem Schieferdache die Dachneigung geringer als bei einem Ziegeldache und bei einem Zinkdache geringer als bei einem Schieferdache sein kann, dann stellen sich die vorhin berechneten Resultate wesentlich anders. Betrüge die Dachneigung bezw. 45°, 25° und 10°, so käme auf 1 qm horizontaler Fläche bezw. 1,42, 1,1 und 1,015 qm Dachfläche. Würde dies berücksichtigt, so müßten die vorhin berechneten Kosten mit diesen Zahlen multipliziert werden, um richtige Verhältniszahlen zu erhalten. Ferner ist noch zu berücksichtigen, daß die Konstruktionsteile des Daches um so geringer sind, je geringer die Dachneigung ist.

33) Berechne nach folgenden Angaben, ob es in ökonomischer Beziehung vorteihafter ist, bei einer Brücke hölzerne oder eiserne Träger zu wählen. Die Konstruktion in Eisen kostet 4500 ℳ und dieselbe in Holz 3600 ℳ, der alle drei Jahre vorzunehmende Anstrich des Eisens kostet 105 ℳ, die jährlichen Unterhaltungskosten des Holzes betragen 75 ℳ, und der Bau in Eisen ist nach 100 Jahren, der in Holz aber schon nach 30 Jahren zu erneuern. Der Berechnung sollen 4% Zinsen zugrunde gelegt werden. Löse diese Aufg. wie die vorige.

34) Nach den Beobachtungen der Verwaltung der hannoverschen Eisenbahn darf die durchschnittliche Dauer der imprägnierten Eichenschwellen zu 22 Jahren und der imprägnierten Buchenschwellen zu 14,8 Jahren angenommen werden. Nimmt man den Preis einer Eichenschwelle zu 6,10 ℳ, das Imprägnieren derselben zu 0,25 ℳ und die Auswechselung einer Schwelle zu 0,50 ℳ an, für eine Buchenschwelle bezw. 3,35 ℳ, 0,50 ℳ und 0,50 ℳ; wie hoch stellen sich dann die jährlichen Kosten für jede der beiden Schwellenarten bei $3^1/_2$% Zinseszinsen?

35) Stelle nach folgenden Angaben einen finanziellen Vergleich zwischen zwei Pflasterungen an. Die Herstellungskosten betragen für die eine Sorte pro qm 15 ℳ, für die andere 8 ℳ, die 1. Sorte erfordert an jährlichen Unterhaltungskosten 0,40 ℳ, die 2. Sorte 0,80 ℳ, die Dauer der 1. Sorte bis zur Umpflasterung sei 40 Jahre, die der 2. Sorte 20 Jahre und es koste die Umpflasterung der 1. Sorte 3 ℳ, die der 2. Sorte 1,50 ℳ. Es sind 4% Zinseszinsen zu rechnen.

Andeutung der Ausrechnung. Berechne, zu welcher Summe die Kosten (incl. der Umpflasterungskosten) innerhalb 40 Jahren anwachsen.

Ansatz für die 1. Sorte: $15 \,.\, 1{,}04^{40} + \frac{0{,}4\,(1{,}04^{40} - 1)}{1{,}04 - 1} + 3 =$

" " " 2. " $8 \,.\, 1{,}04^{20} + \frac{0{,}8\,(1{,}04^{20} - 1)}{1{,}04 - 1} + 1{,}5 =$

Letzteres ergiebt die Kosten der 2. Sorte für die ersten 20 Jahre. Bezeichnen wir diese mit k, so sind die Kosten für die letzten 20 Jahre:

$$k \,.\, 1{,}04^{20} + \frac{0{,}8\,(1{,}04^{20} - 1)}{1{,}04 - 1} + 1{,}5 =$$

36) Als die Eisenbahnbrücke über den roten Main bei Neuenreuth in den siebziger Jahren erbaut werden sollte, wurden behufs definitiver Feststellung des Brückenprojekts verschiedene Projekte zur Auswahl aufgestellt und veranschlagt. Zwischen zwei von diesen stelle nach folgenden Angaben einen finanziellen Vergleich an. Es sollen 4% Zinsen gerechnet werden. Nach dem einen Projekt sollte eine massive steinerne Brücke von 77,5 m Länge mit 5 halbkreisförmigen gewölbten Oeffnungen von je 12 m Spannweite gebaut werden, deren Kostenbetrag sich auf 93000 ℳ bezifferte. Nach dem andern Projekt sollte eine aus 4 Oeffnungen bestehende Brücke mit steinernen Pfeilern und schmiedeeiserner Fachwerkkonstruktion zu je 16 m Stützweite gebaut werden, deren Kosten sich auf 72500 ℳ bezifferte. Für Lieferung und Aufstellung der Eisenkonstruktion incl. Oelfarbenanstrich waren 23681 ℳ und für Lieferung und Aufbringung der eichenen Querschwellen, sowie der Bedielung der Fahrbahn waren 3210 ℳ angesetzt. Die Dauer der Eisenkonstruktion ist zu 80 Jahren und die des zur Fahrbahn verwandten Holzes zu 12 Jahren anzunehmen. Jede 5 Jahre ist ein Oelanstrich erforderlich, der zu 800 ℳ veranschlagt ist.

Andeutung der Ausrechnung. Berechne: a. den jährlichen Tilgungs- oder Erneuerungsbetrag für die Eisenkonstruktion und das Eichenholz und b. die Kosten für den Ölanstrich pro Jahr. Die sich ergebende Summe kapitalisiere mit 4% und addiere dieses Kapital zu den gesamten Baukosten der Brücke.

37) A. hat auf seinem Hause eine Hypothekschuld von 20000 ℳ, die mit 4% verzinst wird. Der Gläubiger ist damit einverstanden, daß A. jährlich 1500 ℳ zur Deckung der Zinsen und Tilgung des Kapitals zahlt. In wie viel Jahren wird das Kapital getilgt sein?

Ausrechnung: A. muß jährlich 800 ℳ Zinsen zahlen, er zahlt also jährlich 700 ℳ, um das Kapital zu tilgen. Letzteres ist erreicht, sobald die Rente bei 4% Zinseszinsen zu der Höhe des Kapitals angewachsen ist. Es ergiebt sich also nachstehender Ansatz:

$$\frac{700\,(1{,}04^n - 1)}{1{,}04 - 1} = 20000;\ 1{,}04^n - 1 = \frac{800}{700} = {}^8/_7;$$

$$1{,}04^n = {}^8/_7 + 1 = {}^{15}/_7;\ n\,.\log.1{,}04 = \log 15 - \log 7;$$

$$n = \frac{\log 15 - \log 7}{\log 1{,}04} = \frac{1{,}17609 - 0{,}84510}{0{,}01703} = \frac{0{,}33099}{0{,}01703} = 19{,}43 \text{ Jahre.}$$

Bemerk. Wenn A. 19 Jahre die Rente gezahlt hat, dann ist zu berechnen, wie viel A. noch schuldig ist. Den Rest könnte er dann sofort oder mit 4% Zinsen am Ende des 20. Jahres bezahlen.

38) Berechne wie viel A. nach voriger Aufg. am Ende des 19. Jahres, nachdem er die 19. Rente bezahlt hat, noch schuldig ist.

Ansatz: $20000 - \frac{700\,(1{,}04^{19} - 1)}{1{,}04 - 1} =$

39) Einige Kapitalisten lassen Arbeitshäuser bauen, die sie unter folgenden Bedingungen an Arbeiter verkaufen wollen. Der Kaufpreis beträgt 3000 ℳ (Selbstkostenpreis), beim Abschluß des Kaufkontraktes müssen 15% von der Kaufsumme eingezahlt werden, vom Restbetrage müssen jährlich 5% eingezahlt werden und zwar $3^1/_2$% Zinsen und $1^1/_2$% zur Tilgung der Schuld. Nach wie viel Jahren ist die Schuld getilgt?

40) Eine Stadt hat eine Anleihe von 500000 ℳ, die mit $3^1/_2$% verzinst wird, aufgenommen. (Es sind ähnliche Schuldscheine wie Staatspapiere ausgestellt.) Die Regierung hat die Stadt verpflichtet, jährlich $4^1/_2$% von der ganzen Schuld in den Ausgabeetat einzustellen. Der Betrag, den die Stadt über die Zinsen hinaus jährlich zahlt, soll zur Tilgung der Schuld dienen, und es werden am Schlusse jedes Jahres eine Anzahl Schuldscheine in der Höhe des über die Zinsen hinausgehenden Betrages ausgelost. In wie viel Jahren wird die Anleihe getilgt?

41) Man sagt nach voriger Aufg., die Schuld wird mit 1% getilgt (amortisiert). In wie viel Jahren wird eine Schuld bei 2% getilgt, wenn der Berechnung a. $3^1/_2$%, b. 4% zugrunde gelegt werden?

Ansatz für a.: $\frac{2\,(1{,}035^n - 1)}{1{,}035 - 1} = 100$

42) Wie viel Proz. des Restbetrages müßte nach Aufg. 39 der Käufer jährlich zahlen, wenn die Tilgung desselben in 25 Jahren erreicht werden sollte?

Ausrechnung: Man berechne zunächst die Rente, die jährlich gezahlt werden muß, um 100 ℳ zu tilgen.

Ansatz: $\frac{r\,(1{,}035^{25} - 1)}{1{,}035 - 1} = 100$

43) A. hat auf seinem Hause eine Hypothekschuld, die er in 20 Jahren tilgen möchte. Wie viel Proz. von der Schuld hat er a. bei $3^1/_2$% und b. 4% Zinseszinsen jährlich abzutragen?

44) Die Dauer einer Dampfmaschine ist auf 15 Jahre geschätzt. a. Wie viel Proz. müssen jährlich abgeschrieben werden, wenn $3^1/_2$% Zinseszinsen gerechnet werden? b. Wie viel beträgt der Prozentbetrag, wenn die Maschine 12850 ℳ gekostet hat?