Rechenbuch für technische Fachschulen und zum Selbstunterricht

Böhnig, D.

Holzminden, 1894

§ 1. Die Zinseszinsrechnung.

urn:nbn:de:hbz:466:1-77782

100) Ein Zementfabrikant will 2 Sorten Zement so mischen, daß die Druckfestigkeit des Zements 240 kg beträgt. Wie viel Tonnen à 300 kg Druckfestigkeit muß er zu 60 Tonnen à 175 kg Druckfestigkeit mischen?

101) Jemand hat drei Sorten Zement, deren Druckfestigkeit nach einer gewissen Zeit bezw. 280, 360 und 420 kg beträgt. In welchem Verhältnisse müssen die drei Sorten gemischt werden, wenn die Mischung eine Druckfestigkeit von 340 kg haben soll und wenn von den beiden besseren Sorten ein gleiches Quantum genommen werden soll?

102) Es sollen aus den drei Sorten Zement der vorigen Aufg. 1000 Tonnen von 340 kg Druckfestigkeit gemischt und von der zweiten Sorte nur 120 Tonnen verwandt werden. Wie viel Tonnen müssen von den beiden andern Sorten genommen werden?

103) Wie würde sich das Resultat der vorigen Aufg. stellen, wenn a. von der dritten Sorte nur 120 Tonnen und b. von der ersten Sorte 480 Tonnen zu der Mischung verwandt würden?

XII. Abschnitt.

Die Zinseszins- und Rentenrechnung.

Diese Rechnungsarten sind für das Baugewerbe, wie aus den unten gelösten Aufgaben hervorgeht, von der größten Bedeutung. Jeder Bautechniker sollte mit denselben vertraut sein. Daß dies nicht der Fall ist, darf ich wohl daraus folgern, daß laut der Schulberichte diese Rechnungsarten in manchen bautechnischen Schulen nicht gelehrt werden. Wenn nun der eine oder der andere Techniker, veranlaßt durch die Praxis, diese Lücke ausgefüllt hat, so ist dies jedenfalls vielfach mit Schwierigkeiten verknüpft gewesen; denn viele werden sich in ihrem Wohnorte nach jemandem, der ihnen diese Rechnungsarten klarlegen konnte, vergeblich umgesehen haben, und sie mußten sich durch das Studium eines algebraischen Werkes selbst belehren. Die Auseinandersetzungen in derartigen Werken sind aber häufig so abstrakt gehalten, daß gewiß mancher sein Ziel nicht erreicht hat. Diese Rechnungsarten sind ferner fast allgemein so wenig auf das Baufach bezogen, daß viele Techniker die Wichtigkeit derselben nicht voll erkannt haben.

§ 1. Die Zinseszinsrechnung.

Ein Kapital steht auf Zinseszinsen, wenn die am Ende jedes Termins, z. B. eines Jahres, fälligen Zinsen zum Kapital geschlagen und mitverzinst werden. An einem einfachen Beispiele soll die Grundformel dieser Rechnungsart entwickelt werden.

Aufg.: Zu welchem Kapitale wachsen 500 ℳ an, die zu 4% jährlich 4 Jahre auf Zinseszins verliehen sind?

Ausrechnung: Nach der Kettenregel ist das Endkapital

$$= \frac{500 \,.\, 104 \,.\, 104 \,.\, 104 \,.\, 104}{100 \,.\, 100 \,.\, 100 \,.\, 100} = 500 \,.\, 1{,}04 \,.\, 1{,}04 \,.\, 1{,}04 \,.\, 1{,}04 = 500 \,.\, 1{,}04^4 =$$

Bezeichnen wir das Endkapital mit s, das Anfangskapital (hier 500) mit a, 1,04, also die Zahl, zu der 1 in einem gewissen Zeitraume (hier in einem Jahre) anwächst, mit p, die Anzahl gleicher Zeiträume (hier Jahre) mit n; so erhalten wir die Formel:

$$1 \,.\, s = ap^n$$

Durch Umformung dieser Formel erhalten wir:

$$2.\ a = \frac{s}{p^n};\quad 3.\ p = \sqrt[n]{\frac{s}{a}};\quad 4.\ n = \frac{\log s - \log a}{\log p}$$

Entwickelung der letzten Formel: $ap^n = s$; $p^n = \frac{s}{a}$;

$$n \log p = \log s - \log a;\ n = \frac{\log s - \log a}{\log p}.$$

Wenn drei von den vier Größen s, a, p und n gegeben sind, so läßt sich die vierte berechnen.

Bemerk. Bei der Zinseszins- wie Rentenrechnung ist die Bekanntschaft mit den Logarithmen erforderlich. Ohne Logarithmen lassen sich viele Aufgaben nur mit vieler Mühe, andere überhaupt nicht lösen.

1) Zu welcher Summe wachsen 25000 ℳ bei 4% Zinseszinsen in 50 Jahren an?

Ansatz: $s = ap^n = 25000 \,.\, 1{,}04^{50}$.

2) Ein Landwirt will auf einer größeren Fläche Ackerlandes, die von seinem Gehöfte weit abgelegen ist, eine Scheune bauen lassen. Ein Baugewerkmeister legt ihm zwei Projekte vor, die beide rücksichtlich des Rauminhalts usw. den Anforderungen entsprechen, die sich aber in der Ausführung unterscheiden. Das eine Projekt beansprucht ein Baukapital von 9000 ℳ, das andere ein solches von 6280 ℳ. Zugleich fügt der Baugewerkmeister eine Rentabilitätsrechnung zum finanziellen Vergleich beider Projekte mit an. Bei dem ersten Projekte ist auf eine Dauer der Scheune von 80 Jahren, bei dem zweiten aber nur auf eine Dauer von 40 Jahren zu rechnen. Die jährlichen Kosten für Reparaturen, Versicherung usw. sollen in beiden Fällen gleich sein. Es ist also zu untersuchen, zu welcher Summe die Minderausgabe von 2720 ℳ beim zweiten Projekte bei 3% Zinsen p. a. in 40 Jahren, wo ein Neubau stattfinden müßte, anwächst. Würden nur einfache Zinsen gerechnet, so würden die Zinsen für 40 Jahre betragen: $27{,}2 \,.\, 3 \,.\, 40 = 3264$ ℳ. Es ständen zum Neubau also nur $3264 + 2720 = 5984$ ℳ zur Verfügung, es wäre also ein Fehlbetrag von 296 ℳ zu verzeichnen.

Diese Berechnung ist aber mangelhaft, es müssen hier jedenfalls Zinseszinsen zur Anwendung kommen. In diesem Falle wachsen die 2720 ℳ an zu:

$$s = ap^n = 2720 \,.\, 1{,}03^{40} = 8875 \text{ ℳ}.$$

Der Landwirt erzielt also beim zweiten Projekte innerhalb der 40 Jahre einen Nutzen von $8875 - 6280 = 2595$ ℳ. Wenn nun noch hinzukommt, daß er das Baukapital anleihen muß, daß seine Schuldenlast also beim ersten Projekte um 2720 ℳ größer wird, so wird er sich für das zweite Projekt erklären.

3) Zu welcher Summe wächst mit Zinsen und Zinseszinsen an: a. 12000 ℳ zu 4% in 30 Jahren? b. 8520 ℳ zu $4^1/_2$% in 40 Jahren? c. 20500 ℳ zu $4^3/_4$% in 50 Jahren?

4) In einer Stadt von 8354 Einwohnern soll ein Schulhaus gebaut werden, das bei einer Bevölkerungszunahme von $1^3/_4$% für die nächsten 30 Jahre ausreichen soll. Auf wie viel Schulkinder ist beim Bau zu rechnen, wenn man 18% der Einwohnerzahl als schulpflichtige Kinder annimmt?

5) Ein Bauunternehmer erhielt von der Budapester Stadtverwaltung für 1 qm Straßenpflaster aus Keramitsteinen 13 ℳ. Von dieser Summe erhielt er die Hälfte nach 3 Jahren, 30 % nach 5 Jahren und den Rest nach 15 Jahren ohne Zinsenvergütung. Welcher Barsumme bei 4 % Zinseszinsen sind diese Zahlungsleistungen gleichzusetzen?

Ansatz: $a = \frac{s}{p^n} = \frac{6,50}{1,04^3} + \frac{3,90}{1,04^5} + \frac{2,60}{1,04^{15}} =$

Bei einfacher Zinsrechnung würde sich das Resultat ergeben:

$a = 13 - (0,065 . 4 . 3 + 0,039 . 4 . 5 + 0,026 . 4 . 15) =$

6) Welches Kapital wächst bei $5^1/_4$ % in 100 Jahren zu einer Million Mark an?

7) Jemand erhält laut eines Testaments nach 12 Jahren 5000 ℳ ausgezahlt. Wie viel ist diese Summe bar wert, wenn 5 % Zinseszinsen gerechnet werden? (Siehe Aufg. 35 Abschn. X.)

8) Wie groß muß ein Kapital sein, welches zu 4 % steht, wenn dasselbe nach 15 Jahren ebensoviel wert sein soll, als 4500 ℳ zu 6 % nach 9 Jahren?

9) Ein Waldbestand, der vor 20 Jahren zu 15000 Festmeter abgeschätzt war, ist jetzt zu 25000 Festmeter abgeschätzt. Um wie viel Proz. jährlich hat sich der Holzbestand vermehrt?

Ausrechnung: $p = \sqrt[n]{\frac{s}{a}} = \sqrt[20]{\frac{25000}{15000}} = \sqrt[20]{\frac{5}{3}} = 1,026$

1 ist zu 1,026 in einem Jahre angewachsen, also
100 sind „ 102,6 „ „ „ „ , folgl. 2,6 %

Bei einfacher Zinsrechnung würde sich das Resultat ergeben:

$\text{Proz.} = \frac{10000 . 100}{15000 . 20} = 3^1/_3 \%$

10) Da das Holz des Waldbestandes nach voriger Aufg. an Stärke bedeutend zugenommen hat, so ist der Wert desselben 10 % gegen früher höher anzusetzen. Welche Resultate werden sich jetzt ergeben?

Ausrechnung:

Die 25000 Festm. sind = 25000 + 2500 = 27500 zu rechnen.

Also $p = \sqrt[20]{\frac{27500}{15000}} = \sqrt[20]{\frac{11}{6}} = 1,031$, folgl. = 3,1 %.

Bei einfacher Zinsrechnung würde sich das Resultat ergeben:

$\text{Proz.} = \frac{12500 . 100}{15000 . 20} = 4,25 \%.$

11) Ein Tischlermeister kauft von einem Privatmann das cbm 80 mm starker Stammbohlen, die vor 30 Jahren schon geschnitten und nachher gut aufbewahrt sind, zu 60 ℳ. Vor 30 Jahren hatten sie einen Wert von 24 ℳ pro cbm. Mit wie viel Proz. Zinseszins hat sich das Kapital verzinst?

12) Ein Wucherer verleiht 600 ℳ und läßt sich darüber einen Schuldschein von 800 ℳ, nach drei Jahren ohne Zinsen zahlbar, ausstellen. Wie viel Proz. erhält er, wenn Zinseszinsen in Rechnung gezogen werden?

13) Zu wie viel Proz. steht ein Kapital, das sich in 20 Jahren verdreifacht und zwar a. bei Zinsenszinsen und b. bei einfachen Zinsen?

14) In wie viel Jahren verdreifacht sich ein Kapital bei 3% Zinsen jährlich und zwar a. bei Zinseszinsen und b. bei einfachen Zinsen?

Ausrechnung:

$$a.\ n = \frac{\log s - \log a}{\log p} = \frac{\log 3 - \log 1}{\log 1{,}03} = \frac{0{,}47712}{0{,}01284} = 37{,}2 \text{ Jahre.}$$

$$b.\ n = \frac{200}{3} = 66{,}7 \text{ Jahre.}$$

15) In wie viel Jahren verdoppelt sich ein Kapital, das a. zu 4%, b. zu 5% steht?

16) Jemand schenkte einer Stadt 30000 ℳ unter der Bedingung, daß das Kapital erst dann zum Nutzen der Stadt verwandt werden soll, wenn es durch die Zinsen zu 3000000 ℳ angewachsen ist. Nach wie viel Jahren wird dies der Fall sein, wenn a. 4% Zinseszinsen, b. 4% einfache Zinsen gerechnet werden?

§ 2. Die Rentenrechnung.

Unter einer Rente versteht man eine mehrmals in gleichen Terminen zu zahlende Summe. Eine Rente, die bis zum Tode des Empfängers gezahlt wird, heißt eine Leibrente. Auch hier soll die Grundformel an einem Beispiele entwickelt werden.

Nehmen wir den Fall an, jemand bezöge sechs Jahre am Schlusse eines jeden Jahres eine Rente von 500 ℳ, er verabredete mit dem, der die Rente zu zahlen hat, dieselbe solle für alle sechs Jahre erst am Schlusse des sechsten Jahres ausgezahlt werden, bis dahin aber mit 4% Zinseszinsen verzinst werden. Zu welchem Kapitale wird die Rente anwachsen?

Die erste Rente würde 5, die zweite 4, die dritte 3, die vierte 2, die fünfte 1 Jahr und die letzte keine Zinsen bringen. Das Kapital (s) würde also nach der Zinseszinsrechnung sein:

$$s = 500 \cdot 1{,}04^5 + 500 \cdot 1{,}04^4 + 500 \cdot 1{,}04^3 + 500 \cdot 1{,}04^2 + 500 \cdot 1{,}04 + 500$$

Es würde umständlich sein, besonders bei einer noch größeren Anzahl von Jahren, die einzelnen Posten zu berechnen. Durch folgende einfache Operation kommen wir zu einer einfachen Formel. Vorstehende Gleichung werde mit 1,04 multipliziert und von dieser die ursprüngliche Gleichung subtrahiert. Also:

$$\begin{array}{l} s \cdot 1{,}04 = 500 \cdot 1{,}04^6 + 500 \cdot 1{,}04^5 + 500 \cdot 1{,}04^4 + 500 \cdot 1{,}04^3 + 500 \cdot 1{,}04^2 + 500 \cdot 1{,}04 \\ \quad\ \ s \quad\ = 500 \cdot 1{,}04^5 + 500 \cdot 1{,}04^4 + 500 \cdot 1{,}04^3 + 500 \cdot 1{,}04^2 + 500 \cdot 1{,}04 + 500 \\ \hline s \cdot 1{,}04 - s = 500 \cdot 1{,}04^6 - 500, \text{ oder} \\ s\,(1{,}04 - 1) = 500\,(1{,}04^6 - 1), \text{ mithin} \\ \qquad s = \dfrac{500\,(1{,}04^6 - 1)}{1{,}04 - 1} \end{array}$$

Um diese Formel allgemein zu fassen, werde die Rente von 500 ℳ mit r, 1,04 (siehe Zinseszinsrechnung) mit p und 6, die Anzahl Jahre, mit n bezeichnet, dann heißt die Formel: $s = \frac{r\,(p^n - 1)}{p - 1}$

Wenn drei von den vier Größen s, r, p und n gegeben sind, so läßt sich die vierte berechnen.