Lehrbuch der Stereometrie

Hauck, Guido

Tübingen, 1893

A. Einleitung.

urn:nbn:de:hbz:466:1-77777

kante 5, Höhenkante 4 Längeneinheiten mißt). Diese Art der Darstellung (welche als allgemeine Kavalierperspektive bezeichnet wird) ist bei den meisten Abbildungen im folgenden benützt*).

Damit eine Ebene überhaupt dargestellt werden kann, denkt man sich aus ihr ein rechteckiges Stück ausgeschnitten und bildet dieses ab. Das hindert jedoch nicht, sich in der inneren Anschauung die Ebene unendlich ausgedehnt vorzustellen, wie sie in der That gedacht werden muß. — Diejenigen zwei Randlinien des Rechtecks, an denen die Dicke der Ebene sichtbar sein würde, wenn sie (etwa als Brett gedacht) eine endliche Dicke haben würde, werden, um eine plastische Wirkung zu erzielen, mit etwas stärkeren Strichen markiert (vgl. Fig. 2, S. 6).

Ist eine Linie durch einen vor ihr befindlichen Teil des räumlichen Gebildes verdeckt, so wird sie in der Abbildung meist punktiert gezeichnet, indem man sich den verdeckenden Teil des Gebildes halb-durchsichtig denkt (vgl. Fig. 1).

Erstes Buch.

Gerade und Ebenen im Raume.

A. Einleitung.

1—6: Lage-Beziehungen.

1. Axiom von der Geraden. Haben zwei Gerade zwei Punkte gemein, so haben sie sämtliche Punkte gemein.

*) Bei Fig. 1, wie überhaupt bei den meisten folgenden Figuren, ist das Verkürzungsverhältnis der Tiefendimensionen = 1/3, ihr Winkel mit der Breitenrichtung = 60° gewählt. — Dem Lernenden ist sehr zu empfehlen, in der Herstellung von Abbildungen nach dieser Methode sich möglichst rasch eine gewisse Fertigkeit zu erwerben durch Zeichnung einfacher Gegenstände (wie Haus, Tisch, Stuhl, Grabkreuz, Turm mit Zinnen, Treppe mit Wangen u. s. w.).

— Durch zwei Punkte läßt sich immer eine Gerade legen und nur eine, oder: eine Gerade ist bestimmt durch zwei Punkte.

2. Axiom von der Ebene. Hat eine Gerade mit einer Ebene zwei Punkte gemein, so liegt sie mit allen ihren Punkten in der Ebene. — Durch zwei Punkte lassen sich unendlich viele Ebenen legen; jede enthält auch die Verbindungsgerade der zwei Punkte.

3. a. Haben zwei Ebenen drei Punkte, die nicht in gerader Linie liegen, gemein, so haben sie sämtliche Punkte gemein. (Denn sie haben, nach 2, zunächst die drei Verbindungslinien der drei Punkte gemein. Zieht man nun durch einen beliebigen Punkt X der ersten Ebene in dieser eine Gerade, welche zwei von jenen Verbindungslinien schneidet, so gehören die zwei Schnittpunkte auch der zweiten Ebene an. Die Gerade hat also mit der zweiten Ebene zwei Punkte — und folglich auch jeden anderen Punkt, z. B. Punkt X, gemein.) — Durch drei Punkte, die nicht in gerader Linie liegen, läßt sich immer eine Ebene legen und nur eine, oder: eine Ebene ist bestimmt durch drei Punkte. Sie enthält auch die drei Verbindungsgeraden der drei Punkte.

b. Zwei Ebenen können immer zur Deckung gebracht werden. Denn (nach a) genügt hiezu, daß man die eine Ebene beliebig durch drei beliebige Punkte der andern legt. Da dies auf unendlich verschiedene Weise geschehen kann, so folgt weiter: Eine Ebene kann beliebig in sich selbst verschoben werden.

c. Aus a folgt ferner: Eine Ebene ist auch bestimmt durch eine Gerade und einen außerhalb derselben liegenden Punkt, desgleichen durch zwei sich schneidende Gerade oder durch einen Winkel. Eine Ebene kann erzeugt gedacht werden durch eine Gerade, die sich um einen festen Punkt dreht und gleichzeitig an einer festen Geraden hingleitet.

---

4. a. Zwei Gerade liegen entweder in der nämlichen Ebene oder nicht. — Im ersten Fall schneiden sie sich oder sind sie parallel. Doch können auch zwei

parallele Gerade aufgefaßt werden als Gerade, die sich schneiden, deren Schnittpunkt aber in unendliche Entfernung gerückt ist. — Im zweiten Fall schneiden sich die Geraden nicht und heißen windschief.

b. Da die durch einen Punkt mit einer Geraden gezogene Parallele (nach a) in der durch den Punkt und die Gerade bestimmten Ebene liegen muß, so ist auch im Raum durch einen Punkt mit einer Geraden nur eine Parallele möglich.

c. Ferner folgt: Eine Ebene ist bestimmt durch zwei parallele Gerade. Eine Ebene kann erzeugt gedacht werden durch eine Gerade, die an einer festen Geraden hingleitet und sich dabei beständig parallel bleibt.

d. Unter dem Winkel zweier windschiefen Geraden versteht man den Winkel, den zwei durch einen beliebigen Punkt zu den Windschiefen gezogene Parallelen einschließen. (Daß die Größe dieses Winkels eine vollkommen bestimmte, von der Wahl des Scheitelpunktes unabhängige ist, wird in B. 4. Zus. bewiesen werden.)

5. Eine Gerade und eine Ebene müssen entweder sich schneiden, oder zu einander parallel sein, oder muß die Gerade in der Ebene liegen. — Im ersten Fall haben sie nur einen Punkt gemein, welcher ihr Schnittpunkt oder Spurpunkt heißt; (denn hätten sie zwei Punkte gemein, so müßte die Gerade, nach 2, mit allen ihren Punkten in die Ebene fallen.) — Im zweiten Fall ist dieser Schnittpunkt in unendliche Entfernung gerückt; die Gerade und die Ebene haben keinen Punkt im Endlichen gemein.

6. a. Zwei Ebenen müssen entweder sich schneiden oder parallel sein. — Im ersten Fall haben sie eine Gerade gemein, welche ihre Schnittlinie oder Spurlinie heißt; (denn hätten sie drei nicht in gerader Linie liegende Punkte gemein, so müßten sie, nach 3. a, zusammenfallen.) — Im zweiten Fall ist diese Schnittlinie in unendliche Entfernung gerückt; die zwei Ebenen haben keinen Punkt in endlicher Entfernung gemein.

Anm. zu 4. a, 5 und 6. a. Insoferne man unendlich entfernte Punkte als uneigentliche Punkte betrachten kann, sagt man auch kurz: eine Gerade oder Ebene wird von einer ihr parallelen Geraden oder Ebene nicht geschnitten.

b. Schneiden sich zwei Ebenen, und liegt in einer von ihnen eine Gerade, so liegt deren Schnittpunkt mit der andern Ebene in der Schnittlinie beider Ebenen.

c. Sind zwei Ebenen parallel, so ist jede Gerade, die in der einen Ebene liegt, zu der andern parallel. (Denn sie kann mit dieser keinen Punkt gemein haben.)

d. Drei Ebenen haben im allgemeinen einen Punkt gemein, welcher ihr Schnittpunkt heißt. Durch ihn gehen die drei Geraden, nach denen sie sich je zu zweien schneiden.

7—9: Maß-Beziehungen.

7. a. Man sagt, eine Gerade stehe auf einer Ebene senkrecht, wenn sie senkrecht steht auf allen Geraden, die in der Ebene durch ihren Spurpunkt gezogen werden können. (Daß eine solche Stellung einer Geraden zu einer Ebene möglich ist, wird in B. 6. a bewiesen werden.) Der Spurpunkt der Senkrechten in der Ebene heißt ihr Fußpunkt. Man sagt auch, die Ebene sei auf der Geraden senkrecht.

b. Fällt man von einem Punkt außerhalb einer Ebene die Senkrechte auf die Ebene*), so bezeichnet man deren Fußpunkt auch als die Projektion des Punktes auf die Ebene. Die Ebene heißt dann die Projektionsebene, die Senkrechte heißt das projizierende Lot.

c. Unter der Entfernung eines Punktes von einer Ebene versteht man die Entfernung des Punktes von seiner Projektion auf die Ebene.

---

*) Daß nur eine Senkrechte möglich ist, wird in B. 7. a bewiesen werden.

d. Zwei Punkte, die auf verschiedenen Seiten einer Ebene auf der nämlichen Senkrechten zu ihr liegen und gleiche Entfernungen von ihr haben, heißen zu einander symmetrisch in Beziehung auf die Ebene; die Ebene heißt ihre Symmetralebene. Zwei räumliche Gebilde heißen zu einander symmetrisch in Beziehung auf eine Ebene, wenn jedem Punkt des einen Gebildes ein Punkt des andern Gebildes entspricht, der zu ihm symmetrisch in Bez. auf die Ebene ist.

8. a. Projiziert man einen beliebigen Punkt A (Fig. 2) einer Geraden AB auf eine Ebene M, und legt durch die Gerade und das projizierende Lot AF eine Ebene N, welche die Projektionsebene M nach FG schneidet: so bezeichnet man die Linie FG als die Projektion der Geraden auf die Ebene M. Die Ebene N heißt die projizierende Ebene. (Daß es gleichgültig ist, von welchem Punkt der Geraden das projizierende Lot gefällt wird, wird in B. 8. Zus. 3 bewiesen werden.) — Schneidet die Gerade die Projektionsebene, so geht (nach 6. b) ihre Projektion durch den Spurpunkt S.

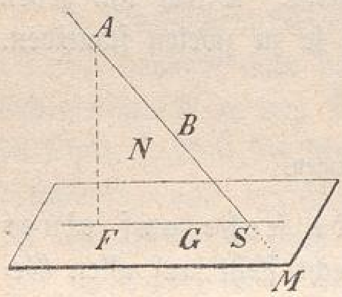

Fig. 2.

b. Eine Gerade heißt schief zu einer Ebene, wenn sie zu ihr weder parallel noch senkrecht ist. Unter dem Neigungswinkel der Geraden gegen die Ebene (oder auch der Ebene gegen die Gerade) versteht man dann den spitzen Winkel ASF (Fig. 2), den die Gerade mit ihrer Projektion auf die Ebene macht.

9. a. Zwei sich schneidende Ebenen M und M′ (Fig. 3) teilen den Raum in vier Teile, welche Keile oder Flächenwinkel heißen. Die Schnittlinie AB heißt ihre Keilkante oder Scheitelkante. Die durch die Keilkante begrenzten Ebenenstücke, die einen Keil einschließen, heißen

dessen **Keilblätter**. Ein Keil kann längs seiner Keilkante in sich selbst verschoben werden (nach 3. b).

Errichtet man in den zwei Keilblättern eines Keils im nämlichen Punkt C der Keilkante die Senkrechten CD und CD′ zur Keilkante, so heißt der von ihnen gebildete Winkel DCD′ der **Keilwinkel**. Für seine Größe ist die Wahl des Scheitelpunktes C gleichgültig. (Denn zwei Keilwinkel mit verschiedenen Scheitelpunkten können zur Deckung gebracht werden, indem der Keil in sich selbst verschoben wird.)

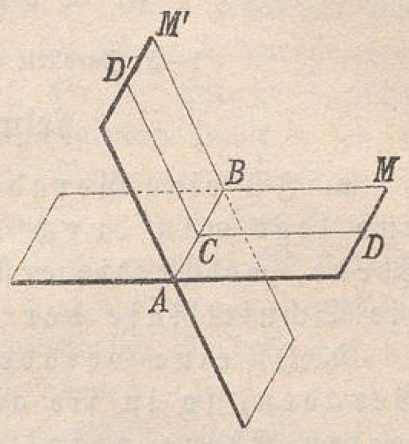

Fig. 3.

b. Zwei Keile heißen **gleich**, wenn sie zur Deckung gebracht werden können. Zwei gleiche Keile haben gleiche Keilwinkel; denn bringt man die Keile zur Deckung und konstruiert ihre Keilwinkel für den nämlichen Punkt C der gemeinschaftlichen Kante, so decken sich auch diese Winkel. (Daß der Satz auch umgekehrt gilt, wird in B. 7. Zus. bewiesen werden.)

c. Ein Keil hat seinen Keilwinkel zum **Maß**; er hat ebensoviel **Keilgrade** als sein Keilwinkel Winkelgrade. Der Keilwinkel ist zugleich das Maß für die Größe der Drehung um die Keilkante, durch die das eine Keilblatt in die Lage des anderen gebracht werden kann. Ein Keil heißt **spitz** oder **stumpf** oder ein **Rechter**, wenn sein Keilwinkel spitz oder stumpf oder ein Rechter ist. Zwei Keile heißen **Nebenkeile** oder **Scheitelkeile**, wenn ihre Keilwinkel Nebenwinkel oder Scheitelwinkel sind.

d. Unter dem **Neigungswinkel** einer Ebene gegen eine andere Ebene versteht man den Keilwinkel des von beiden Ebenen gebildeten **spitzen** Keils.

e. Zwei Ebenen stehen auf einander senkrecht, wenn einer der vier von ihnen gebildeten Keile ein Rechter ist. Auch die andern drei Keile sind dann Rechte.

B. Lehrsätze.

1—5: Parallele Gerade und Ebenen.

Lehrsatz 1.

a. Ist eine Gerade parallel einer Ebene, und legt man durch die Gerade eine zweite Ebene, welche die erste schneidet: so ist auch die Schnittlinie der Geraden parallel.

b. Ist eine Gerade parallel einer zweiten Geraden, so ist sie auch jeder durch diese gelegten Ebene parallel. Oder: Ist eine Gerade parallel einer in einer Ebene liegenden Geraden, so ist sie auch der Ebene parallel.

c. Ist eine Gerade parallel einer Ebene, und zieht man durch einen beliebigen Punkt der Ebene die Parallele zur Geraden, so muß diese ganz in die Ebene fallen.

Beweis. **a.** Die Gerade sei g (Fig. 4), die ihr parallele Ebene sei M; die durch g gelegte Ebene N schneide M

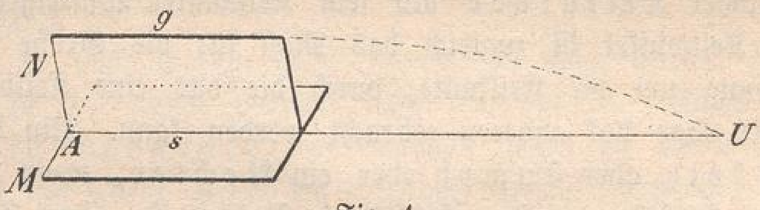

Fig. 4.

nach der Geraden s. Wäre nun s nicht $\parallel$ g, so müßten beide sich schneiden, weil sie in einer Ebene N liegen. Der Schnittpunkt U wäre aber dann ein gemeinsamer Punkt der Geraden g und der Ebene M, — was der Voraussetzung widerspricht. Folglich muß s $\parallel$ g sein.

b. Die zwei parallelen Geraden seien g und s (Fig. 4);