Lehrbuch der Stereometrie

Hauck, Guido

Tübingen, 1893

7 - 9: Maß-Beziehungen

Anm. zu 4. a, 5 und 6. a. Insoferne man unendlich entfernte Punkte als uneigentliche Punkte betrachten kann, sagt man auch kurz: eine Gerade oder Ebene wird von einer ihr parallelen Geraden oder Ebene nicht geschnitten.

b. Schneiden sich zwei Ebenen, und liegt in einer von ihnen eine Gerade, so liegt deren Schnittpunkt mit der andern Ebene in der Schnittlinie beider Ebenen.

c. Sind zwei Ebenen parallel, so ist jede Gerade, die in der einen Ebene liegt, zu der andern parallel. (Denn sie kann mit dieser keinen Punkt gemein haben.)

d. Drei Ebenen haben im allgemeinen einen Punkt gemein, welcher ihr Schnittpunkt heißt. Durch ihn gehen die drei Geraden, nach denen sie sich je zu zweien schneiden.

7—9: Maß-Beziehungen.

7. a. Man sagt, eine Gerade stehe auf einer Ebene senkrecht, wenn sie senkrecht steht auf allen Geraden, die in der Ebene durch ihren Spurpunkt gezogen werden können. (Daß eine solche Stellung einer Geraden zu einer Ebene möglich ist, wird in B. 6. a bewiesen werden.) Der Spurpunkt der Senkrechten in der Ebene heißt ihr Fußpunkt. Man sagt auch, die Ebene sei auf der Geraden senkrecht.

b. Fällt man von einem Punkt außerhalb einer Ebene die Senkrechte auf die Ebene*), so bezeichnet man deren Fußpunkt auch als die Projektion des Punktes auf die Ebene. Die Ebene heißt dann die Projektionsebene, die Senkrechte heißt das projizierende Lot.

c. Unter der Entfernung eines Punktes von einer Ebene versteht man die Entfernung des Punktes von seiner Projektion auf die Ebene.

*) Daß nur eine Senkrechte möglich ist, wird in B. 7. a bewiesen werden.

d. Zwei Punkte, die auf verschiedenen Seiten einer Ebene auf der nämlichen Senkrechten zu ihr liegen und gleiche Entfernungen von ihr haben, heißen *zu einander symmetrisch in Beziehung auf die Ebene*; die Ebene heißt ihre *Symmetralebene*. Zwei räumliche Gebilde heißen zu einander symmetrisch in Beziehung auf eine Ebene, wenn jedem Punkt des einen Gebildes ein Punkt des andern Gebildes entspricht, der zu ihm symmetrisch in Bez. auf die Ebene ist.

8. a. Projiziert man einen beliebigen Punkt A (Fig. 2) einer Geraden AB auf eine Ebene M, und legt durch die Gerade und das projizierende Lot AF eine Ebene N, welche die Projektionsebene M nach FG schneidet: so bezeichnet man die Linie FG als die *Projektion der Geraden auf die Ebene M*. Die Ebene N heißt die *projizierende Ebene*. (Daß es gleichgültig ist, von welchem Punkt der Geraden das projizierende Lot gefällt wird, wird in B. 8. Zus. 3 bewiesen werden.) — Schneidet die Gerade die Projektionsebene, so geht (nach 6. b) ihre Projektion durch den Spurpunkt S.

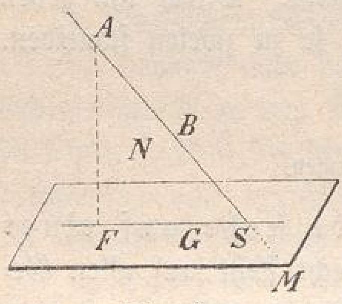

Fig. 2.

b. Eine Gerade heißt *schief* zu einer Ebene, wenn sie zu ihr weder parallel noch senkrecht ist. Unter dem *Neigungswinkel* der Geraden gegen die Ebene (oder auch der Ebene gegen die Gerade) versteht man dann den spitzen Winkel ASF (Fig. 2), den die Gerade mit ihrer Projektion auf die Ebene macht.

9. a. Zwei sich schneidende Ebenen M und M′ (Fig. 3) teilen den Raum in vier Teile, welche *Keile* oder *Flächenwinkel* heißen. Die Schnittlinie AB heißt ihre *Keilkante* oder *Scheitelkante*. Die durch die Keilkante begrenzten Ebenenstücke, die einen Keil einschließen, heißen

dessen Keilblätter. Ein Keil kann längs seiner Keilkante in sich selbst verschoben werden (nach 3. b).

Errichtet man in den zwei Keilblättern eines Keils im nämlichen Punkt C der Keilkante die Senkrechten CD und CD′ zur Keilkante, so heißt der von ihnen gebildete Winkel DCD′ der Keilwinkel. Für seine Größe ist die Wahl des Scheitelpunktes C gleichgültig. (Denn zwei Keilwinkel mit verschiedenen Scheitelpunkten können zur Deckung gebracht werden, indem der Keil in sich selbst verschoben wird.)

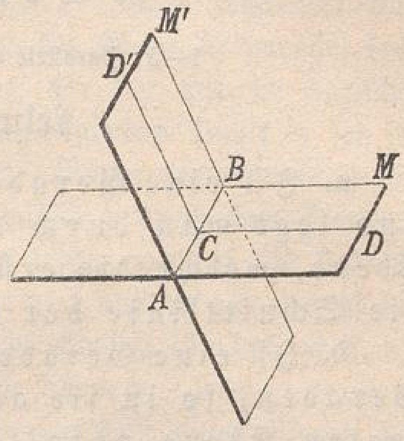

Fig. 3.

b. Zwei Keile heißen gleich, wenn sie zur Deckung gebracht werden können. Zwei gleiche Keile haben gleiche Keilwinkel; denn bringt man die Keile zur Deckung und konstruiert ihre Keilwinkel für den nämlichen Punkt C der gemeinschaftlichen Kante, so decken sich auch diese Winkel. (Daß der Satz auch umgekehrt gilt, wird in B. 7. Zus. bewiesen werden.)

c. Ein Keil hat seinen Keilwinkel zum Maß; er hat ebensoviel Keilgrade als sein Keilwinkel Winkelgrade. Der Keilwinkel ist zugleich das Maß für die Größe der Drehung um die Keilkante, durch die das eine Keilblatt in die Lage des anderen gebracht werden kann. Ein Keil heißt spitz oder stumpf oder ein Rechter, wenn sein Keilwinkel spitz oder stumpf oder ein Rechter ist. Zwei Keile heißen Nebenkeile oder Scheitelkeile, wenn ihre Keilwinkel Nebenwinkel oder Scheitelwinkel sind.

d. Unter dem Neigungswinkel einer Ebene gegen eine andere Ebene versteht man den Keilwinkel des von beiden Ebenen gebildeten spitzen Keils.

e. Zwei Ebenen stehen auf einander senkrecht, wenn einer der vier von ihnen gebildeten Keile ein Rechter ist. Auch die andern drei Keile sind dann Rechte.

B. Lehrsätze.

1—5: Parallele Gerade und Ebenen.

Lehrsatz 1.

a. Ist eine Gerade parallel einer Ebene, und legt man durch die Gerade eine zweite Ebene, welche die erste schneidet: so ist auch die Schnittlinie der Geraden parallel.

b. Ist eine Gerade parallel einer zweiten Geraden, so ist sie auch jeder durch diese gelegten Ebene parallel. Oder: Ist eine Gerade parallel einer in einer Ebene liegenden Geraden, so ist sie auch der Ebene parallel.

c. Ist eine Gerade parallel einer Ebene, und zieht man durch einen beliebigen Punkt der Ebene die Parallele zur Geraden, so muß diese ganz in die Ebene fallen.

Beweis. **a.** Die Gerade sei g (Fig. 4), die ihr parallele Ebene sci M; die durch g gelegte Ebene N schneide M

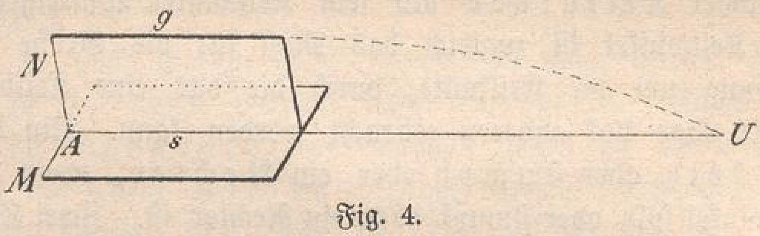

Fig. 4.

nach der Geraden s. Wäre nun s nicht $\parallel$ g, so müßten beide sich schneiden, weil sie in einer Ebene N liegen. Der Schnittpunkt U wäre aber dann ein gemeinsamer Punkt der Geraden g und der Ebene M, — was der Voraussetzung widerspricht. Folglich muß s $\parallel$ g sein.

b. Die zwei parallelen Geraden seien g und s (Fig. 4);