Die Ingenieur-Mathematik in elementarer Behandlung

Das Potential und seine Anwendung auf die Theorien der Gravitation, des Magnetismus, der Elektrizitaet, der Waerme und der Hydrodynamik

Holzmüller, Gustav

Leipzig, 1898

Kapitel XVI. Anhang B. Von den Einheiten und Dimensionen.

urn:nbn:de:hbz:466:1-77934

Kapitel XVI. Anhang B.

Von den Einheiten und Dimensionen.

Früher betrachtete man gewisse Gewichte als die Krafteinheiten und leitete aus ihnen die Massen mit Hilfe der Gleichung $m = \frac{p}{g}$ ab, wo $g = 9{,}81$ die Freifallbeschleunigung im luftleeren Raume bedeutet. Das Gewicht eines Kilogrammstückes schwankt aber auf der Erdoberfläche sehr bedeutend, erstens wegen der Drehung der Erde, die am Äquator eine Centrifugalkraft hervorruft, durch welche die Schwerkraft vermindert wird, zweitens infolge der mit dieser Drehung zusammenhängenden Abplattung, welche die Schwere ebenfalls vom Äquator nach den Polen hin abnehmen läfst. Auf Grund genauer Messungen hat man für die geographische Breite φ die Formel

$$g = 978{,}009 + 5{,}190 \sin^2 \varphi$$

aufgestellt. Nach Sabine handelt es sich um Schwankungen zwischen 978,009 und 983,089. Darüber vergleiche man die physikalischen Lehrbücher. Ein Kilogrammgewicht übt also auf eine Federwage am Pol eine andere Wirkung aus, als am Äquator, es ist also für feinere Messungen eine veränderliche Krafteinheit. Auch mit der Meereshöhe und in der Tiefe der Schachte ändert sich das Gewicht.

Bedenkt man ferner, dafs auf der Sonnenoberfläche dasselbe Kilogrammstück das 28,3 fache Gewicht angiebt, auf dem Monde das 0,16 fache, so sieht man wohl ein, dafs das Gewicht ein bedenklicher Ausgangspunkt für die Krafteinheiten der Wissenschaft ist.

Schon Gaufs fühlte sich veranlafst, an Stelle des gebräuchlichen Systems von Einheiten ein solches zu setzen, welches für das gesamte Weltall und für alle denkbaren Verhältnisse passen sollte. Er nannte es wegen seiner Allgemeingültigkeit das absolute Mafssystem. Da dieses von der Elektrotechnik neuerdings allgemein angenommen worden ist, und da es auch die neueren physikalischen Lehrbücher beherrscht, kann es nicht mehr entbehrt werden. Auch in diesem Buche ist es vielfach zur Sprache gekommen.

Wir setzen die Einheiten für die Zeit, die Länge und für die Masse als Grundeinheiten fest und leiten die übrigen daraus ab. Dabei wird sich aber zeigen, daſs die Feststellung der Einheiten eine recht schwierige Aufgabe ist.

A. Die wichtigsten Einheiten der Mechanik.

a) Die Grundeinheiten.

1) Die Zeiteinheit.

Die allgemein gebräuchliche Zeiteinheit ist die Sekunde. Sie ist eine der am schwierigsten zu bestimmenden Einheiten. Es handelt sich um den 86400$^{\text{sten}}$ Teil des mittleren Sonnentages. Die Zeitdauer von einer Kulmination der Sonne zur andern wechselt nämlich im Laufe des Jahres ganz beträchtlich, erstens deshalb, weil sich die Sonnenentfernung ändert, zweitens deshalb, weil die Wanderung der Erde mit veränderlicher Geschwindigkeit vor sich geht. Daher ist der Unterschied zwischen dem Sonnentage und dem fast konstanten Sterntage bald gröſser, bald kleiner. Die mittlere Länge des Sonnentages erhält man, indem man die Zeit des tropischen Jahres, d. h. 366,2422 Sterntage in 365,2422 gleich lange mittlere Tage einteilt, so daſs ein Sterntag gleich 23 Std. 56 Min. 4,091 Sek. mittlerer Zeit ist, dagegen ein mittlerer Tag = 24 Std. 3 Min. 56,555 Sek. Sternzeit. Der Unterschied zwischen wahrer und mittlerer Zeit ergiebt sich aus der sogenannten Zeitgleichung, die uns sagt, um wie viel eine das ganze Jahr hindurch gleichmäſsig und richtig gehende Uhr täglich falsch geht, ein bekanntes scheinbares Paradoxon. Vgl. Nr. 23.

Dazu kommt noch, daſs die neuere Astronomie sogar die altehrwürdige Sekunde aus dem Reiche der Unveränderlichkeit verwiesen hat, da auch der Sterntag nicht konstant geblieben ist. Seit den Zeiten des Hipparch, also seit etwa 2000 Jahren, hat sich, wie aus der Theorie der Mondbewegung hervorgeht, der Sterntag um $\frac{1}{81}$ Sek. verlängert, also die Erddrehung entsprechend verlangsamt. Der Hauptgrund dafür ergiebt sich aus der feineren Theorie der Gezeiten (Ebbe und Flut). Vgl. Nr. 40. Auſserdem würde auch die etwaige Erkaltung der Erde, aus der wahrscheinlich eine Zusammenziehung folgen müſste, auf die Drehungsgeschwindigkeit einwirken, und zwar beschleunigend. Streng genommen übt auch jeder Meteorsteinfall eine allerdings geringfügige Wirkung aus. Bei astronomischen Rechnungen, die sich, wie die Rückwärtsbestimmungen der Sonnenfinsternisse, auf Jahrtausende erstrecken können, summieren sich nun allerdings diese kleinen Unterschiede zu erheblichen Gröſsen. Für technische Zwecke kann man sich aber bei der obigen Definition der Sekunde beruhigen und gegebenenfalls jeder Spitzfindigkeit dadurch begegnen, dafs man sie als den 86 400$^{\text{sten}}$ Teil des jetzigen mittleren Sonnentages erklärt. Sonstige Zeiteinheiten werden hier nicht zur Sprache kommen.

2) Die Längeneinheit.

In Frankreich wurde durch Beschlufs vom 25. Juni 1800 der 10millionste Teil eines Quadranten des Erdmeridians als Einheit des Längenmafses gesetzlich vorgeschrieben und zwar auf Grund von Messungen und Berechnungen (Laplace) über die Abplattung der Erde. Der deutsche Astronom Bessel hat nachträglich in den Rechnungen einen Fehler nachgewiesen, der das Meter um ein weniges zu klein gemacht hat. (In Wahrheit hat der Meridianumfang der Erde nicht 40 000 000 m, sondern 40 003 423 m, der Äquatorumfang 40 070 368 m). Ein Platinstab, der bei 0° C diese Länge angiebt, ist in Paris als Normalmeter aufbewahrt. Seit 1889 ist in Paris noch ein Platin-Iridiumstab, mit entsprechenden Marken versehen, aufbewahrt worden. Kopien befinden sich in den Archiven der Länder, die sich seit 1867 dem metrischen System angeschlossen haben. — Jedenfalls war es praktischer, dieses leicht zu kontrollierende Mafs zu Grunde zu legen, als den Erdumfang, der auf jedem Meridian ein anderer sein kann (das Geoid ist durchaus kein genaues Drehungsellipsoid), und der sich aufserdem bei jeder Senkung von Kontinenten und ebenso bei dem etwaigen Abkühlungsprozefs der Erde mit den Jahrtausenden ändern wird. Von Interesse ist aber, dafs der Pariser Normalstab genau auf die Temperatur des schmelzenden Eises bei normalem Luftdruck gebracht werden mufs, um das richtige Mafs anzugeben, so dafs in Wirklichkeit die Wärmemessung zur Kontrolle der Raummessung heranzuziehen ist. Die aus dem Meter decimal abgeleiteten Einheiten sollen als bekannt vorausgesetzt werden, ebenso die Flächen- und Raumeinheiten.

3) Die Masseneinheit.

Als Einheit der Masse ist von dem zur Regelung der elektrischen Einheiten nach Paris berufenen Kongrefs am 21. September 1881 die Masse des als Gramm bekannten Gewichtsstückes angenommen worden. Es handelt sich um die Masse, die sich bezüglich der Anziehung durch die Erde an allen Orten ebenso verhält, wie die Masse eines Kubikcentimeters chemisch reinen Wassers im Zustande gröfster Dichtigkeit (fast genau 4° C). Also auch hier wird die Wärmemessung und sogar die Chemie zur Prüfung herangezogen. Auch für die Grammmasse hat man in Paris ein Urgramm aufbewahrt, an dem sich die Messungen leichter bewerkstelligen lassen. Nach genauesten Messungen hat 1 cm^3 Wasser 1,000013 Urgrammmassen.

In gleicher Weise wird aus dem Kubikmeter die Masse der Tonne, aus dem Kubikdecimeter die des Kilogramms, aus dem Kubikmillimeter die des Milligramms abgeleitet.

(Da diese Ausdrücke im praktischen Leben als Gewichte aufgefafst werden, so soll hier stets, wenn es notwendig sein sollte, zwischen Massengramm und Gewichtsgramm u. s. w. geschieden werden.)

Aus den genannten drei Grundeinheiten läfst sich alles übrige ableiten.

Innerhalb des absoluten Mafssystems kommen also für die Physik und Technik im ganzen vier Möglichkeiten in Betracht:

a) das Meter-Tonnen-Sekunden-System,
b) das Decimeter-Kilogramm-Sekunden-System,
c) das Centimeter-Gramm-Sekunden-System,
d) das Millimeter-Milligramm-Sekunden-System.

Sämtliche sind gleichberechtigt, und mit der Einführung eines jeden von ihnen sind die übrigen miteingeführt, da ihre Mafse sich untereinander nur um Potenzen von 10 unterscheiden. Man wird das eine oder das andere anwenden, je nachdem Grofses oder Kleines zu messen ist.

Die Elektrotechnik hat das Centimeter-Gramm-Sekunden-System bereits eingeführt. Das auf noch kleinere Verhältnisse berechnete System unter d), welches von Gaufs und Weber für die elektrischen Mafsbestimmungen benutzt wurde, kann für die Technik aufser acht bleiben.

b) Die abgeleiteten Einheiten.

1) Die Geschwindigkeit ist bei gleichförmiger Bewegung der auf die Sekunde zurückgeführte Weg, also

$$\text{Geschwindigkeit} = \frac{\text{Weg}}{\text{Zeit}}.$$

Ist die Bewegung ungleichmäfsig, so ist für jeden Augenblick der unendlich kleine Weg durch die unendlich kleine Zeit zu dividieren. Der Ausdruck giebt an, wie weit sich der Punkt bezw. Körper in einer Zeiteinheit bewegen würde, wenn von jetzt ab die Bewegung konstant sein würde. Jedenfalls wird stets eine Anzahl von Längeneinheiten durch eine Anzahl von Zeiteinheiten dividiert. Sind die beiden Zahlen gleich, so ist die Geschwindigkeit $v = 1$, d. h. gleich der Einheit der Geschwindigkeit. Der obige Ausdruck bedeutet also folgendes:

$$\text{Anzahl der Geschwindigkeitseinheiten} = \frac{\text{Anzahl der Längeneinheiten}}{\text{Anzahl der Zeiteinheiten}}.$$

Es ist also stes

$$v = \frac{l}{t} = lt^{-1}.$$

Man nennt den Ausdruck lt^{-1} die Dimension der Geschwindigkeit. Mit den Benennungen l und t wird ebenso gerechnet, wie mit arithmetischen Zahlen a, b, c, x, u. s. w.

2) Die Beschleunigung. Bewegt sich ein Körper so, dafs seine Geschwindigkeit in gleichen Zeitteilchen gleiche Zunahmen erfährt, so sagt man, die Beschleunigung sei eine gleichmäfsige. Ist v_1 die Anfangs-, v_2 die Endgeschwindigkeit und dividiert man $v_2 - v_1$ durch die Anzahl der Sekunden, d. h. durch t, so erhält man die Geschwindigkeitszunahme für die Zeiteinheit; sie ist

$$g = \frac{v_2 - v_1}{t}.$$

Ist die Beschleunigung ungleichförmig, so handelt es sich für jeden Augenblick um eine unendlich kleine Geschwindigkeitsdifferenz, dividiert durch eine unendlich kleine Zeit. Die Dimension der Beschleunigung ist zu erkennen aus

$$\frac{v}{t} = \frac{\left(\frac{l}{t}\right)}{t} = \frac{l}{t^2} = lt^{-2}.$$

Sind die Zahlen im Zähler und Nenner gleich, so wird $g = 1$ und man hat die Einheit der Beschleunigung.

3) Die Kraft. Hat ein Körper die Masse m und wirkt auf ihn eine Kraft, die ihm, wenn keine Hindernisse vorhanden sind, in der Sekunde die Beschleunigung g giebt, so sagt man, die Gröfse der Kraft sei $p = mg$, also

Kraft = Masse mal Beschleunigung.

Ist $m = 1$ und $g = 1$, so wird die Kraft gleich 1. Die Krafteinheit ist also diejenige Kraft, die der Masse 1 in der Zeit 1 die Beschleunigung 1 erteilt. Im C. G. S.-System ist die Krafteinheit die Kraft, die der Masse eines Gramms die Beschleunigung 1 cm erteilt. Diese Kraft wird nach Clausius Vorschlag als eine Dyne oder ein Dyn (von δύναμις, Kraft) bezeichnet.

Die Schwerkraft giebt bei uns jedem Körper im luftleeren Raume die Beschleunigung 9,81 m = 981 cm. Das Dyn giebt ihm die Beschleunigung 1 cm, also ist die Krafteinheit Dyn der 981te Teil des alten Gewichtsgramms.

Die Dimension der Kraft ergiebt sich aus $m \cdot (lt^{-2}) = lmt^{-2}$.

4) Die Arbeit. Wird eine Kraft p längs eines in ihrer Richtung liegenden Weges w überwunden, so sagt man, es sei die Arbeit $A = pw$ geleistet worden. Also:

Arbeit = Kraft mal Kraftweg.

Ist $p = 1$ und $w = 1$, so ist die Arbeit $A = 1$. Also:

Die Arbeitseinheit ist die Arbeit, die geleistet wird, wenn der Widerstand 1 Dyn längs des Weges 1 cm überwunden wird. Diese Arbeit wird nach Clausius als 1 Erg (von ἔργον, Werk) bezeichnet.

Die frühere Arbeitseinheit Meterkilogramm war gleich 100000 Centimetergramm, also, da jedes Gewichtsgramm gleich 981 Dyn ist,

$$1 \text{ mkg} = 981 \cdot 10^5 \text{ Dyn}.$$

Die Dimension der Arbeit ergiebt sich aus pw als $(mlt^{-2})\,l$ oder l^2mt^{-2}.

5) Die Leistung. Wird in t Sekunden gleichmäſsig die Arbeit A geleistet, so kommt auf jede Sekunde die Leistung $L = \frac{A}{t}$. Unter Leistungsfähigkeit oder Leistung soll also stets die auf die Sekunde reduzierte Arbeit verstanden werden. Ist $A = 1$ und $t = 1$, so hat man die Leistung 1. Also:

Die Einheit der Leistung ist die sekundliche Arbeit von der Gröſse eines Erg. Sie wird als Sekundenerg bezeichnet.

Die Pferdestärke der Technik bedeutet eine sekundliche Leistung von 75 Meterkilogramm, sie ist also gleich $75 \cdot 10^5 \cdot 981$ Sekundenerg.

Die Dimension von $L = \frac{A}{t}$ ergiebt sich aus $\frac{l^2mt^{-2}}{t}$ als l^2mt^{-3}.

Die sind die wichtigsten Einheiten der Mechanik.

Bisweilen sieht man sich veranlaſst, von einem der absoluten Maſssysteme zum andern überzugehen. Läſst man das Millimeter-Milligramm-Sekunden-System beiseite, und geht man vom C.G.S.-System nur zum Gröſseren, also zu dem in m über, so ergiebt sich folgende Tabelle:

Die Längenmaſse	verhalten sich wie	$1 : 10 : 10^2$
„ Flächenmaſse	„ „ „	$1 : 10^2 : 10^4$
„ Raummaſse und „ Masseneinheiten	„ „ „	$1 : 10^3 : 10^6$

Die Kraftmafse	verhalten sich wie	$1 : 10^4 : 10^8$
„ Arbeitsmafse und „ Leistungsmafse	„ „ „	$1 : 10^5 : 10^{10}$.

Durch diese Potenzen von 10 sind die sogenannten Verwandler gegeben. Sie lassen sich aus den Ausdrücken für die Dimensionen ableiten.

Bemerkungen. Die Elektriker haben auf dem Pariser Kongrefs eine Anzahl von Einheiten eingeführt, die leider aus dieser allgemeinen Tabelle heraustreten. Unter Megadyn (Grofsdyn) versteht man 10^6 Dyn, unter Mikrodyn (Kleindyn) 10^{-6} Dyn. Ebenso ist das Megerg (Grofserg) $= 10^6$ Erg, das Mikrerg (Kleinerg) $= 10^{-6}$ Erg. Ferner ist 1 Joule $= 10$ Megerg $= 10^7$ Erg, 1 Watt $= 1$ Sekunden-Joule $= 10^7$ Sekundenerg, so dafs eine Pferdestärke abgerundet gleich 736 Watt ist.

Aufgabe. Für verschiedene Begriffe der Mechanik sollen die Dimensionen festgestellt werden.

Statisches Moment einer Kraft. Kraft mal Hebelarm giebt $(lmt^{-2})\, l = l^2 mt^{-2}$. Vgl. Begriff der Arbeit.

Statisches Moment einer Masse. Masse mal Hebelarm giebt $ml = lm$.

Statisches Moment eines mathem. Körpers = (Inhalt l^3) mal Hebelarm giebt $l^3 \cdot l = l^4$.

Statisches Moment einer mathem. Fläche = (Fläche l^2) mal Hebelarm giebt $l^2 \cdot l = l^3$.

Statisches Moment einer mathem. Linie = (Länge l^1) mal Hebelarm giebt $l \cdot l = l^2$.

Statisches Moment eines mathem. Punktes = (l^0) mal Hebelarm giebt $l^0 \cdot l = l^1$.

Trägheitsmoment eines physischen Körpers (Masse). Masse mal Quadrat des Trägheitsradius giebt $ml^2 = l^2 m$.

Trägheitsmoment	des	mathem.	Körpers	giebt	$l^3 \cdot l^2 = l^5$.
„	der	„	Fläche	„	$l^2 \cdot l^2 = l^4$.
„	„	„	Linie	„	$l \cdot l^2 = l^3$.
„	des	„	Punktes	„	$l^0 \cdot l^2 = l^2$.

Flächendruck $= \frac{\text{Kraft}}{\text{Fläche}}$ giebt $\frac{lmt^{-2}}{l^2} = l^{-1}mt^{-2}$ z. B. Zugspannung, Druckspannung, Tragmodul, Elastizitätsmodul, hydrostatischer Bodendruck, Seitendruck, Dampfdruck und dgl., alles auf die Flächeneinheit reduziert.

Dichte $= \frac{\text{Masse}}{\text{Volumen}}$ giebt $\frac{m}{l^3} = l^{-3}m$.

Widerstandsmoment einer Fläche (Querschnittsmodul) also $\frac{\text{Trägheitsmoment}}{\text{Abstand}}$ giebt $\frac{l^4}{l} = l^3$.

Gravitationskonstante. Aus $p = \varkappa \frac{m \cdot m_1}{r^2}$ = Kraft folgt $\varkappa = \frac{pr^2}{mm_1}$.

Dies giebt $\frac{(lmt^{-2})\, l^2}{m^2} = l^3 m^{-1} t^{-2}$.

Potential zwischen zwei Körpern $\frac{mm_1}{r} = \frac{pr}{\varkappa}$ giebt $l^{-1} m^2$.

Bei Berücksichtigung von $\varkappa$ erhält man $\varkappa \frac{mm_1}{r}$, was die Dimension einer Arbeit giebt, denn $(l^3 m^{-1} t^{-2}) \cdot \frac{m^2}{l} = l^2 m t^{-2}$.

Potentialfunktion. Aus $\frac{m}{r}$ folgt als Dimension $l^{-1} m$. Dabei ist die Dimension von $\varkappa$ und die der angezogenen Masseneinheit vernachlässigt. Oft wird diese Funktion kurz als Potential bezeichnet.

Bemerkung. Gleichungen der Mechanik müssen beiderseits homogen oder äquivalent sein, d. h. die Dimensionen müssen rechts und links übereinstimmen oder sich durcheinander ersetzen lassen (z. B. Wärmeeinheit = 425 mkg, also $W = l^2 m t^{-2}$).

Beispiel: Die Traggleichung für Biegungsfestigkeit $Pl = SZ$ hat links statisches Moment $l^2 m t^{-2}$, rechts Spannung mal Widerstandsmoment, also $(l^{-1} m t^{-2})\, l^3 = l^2 m t^{-2}$. Beides stimmt überein.

Bemerkung. 1 Cal $= 4{,}2 \cdot 10^7$ Erg; 1 Erg $= 2{,}4 \cdot 10^{-8}$ Cal.; 1 Watt $= 10^7$ Sek. Erg $= 0{,}24$ Cal. auf die Sekunde $= 0{,}00136$ Pferdestärke.

B. Die Einheiten des Magnetismus und ihre Dimensionen.

1) Magnetische Menge.

Die magnetischen Kräfte gehorchen der Gleichung $p = \varkappa \frac{\mu_1 \mu_2}{r^2}$. Links steht die Anziehungs- oder Abstoſsungskraft. Rechts bedeuten μ_1 und μ_2 nicht ponderable, sondern magnetische Massen und Mengen. Man kann ihre Einheiten so bestimmen, daſs $\varkappa = 1$ ist. Dann wird $\frac{\mu_1 \mu_2}{r^2} = p$, also $\mu_1 \mu_2 = pr^2$. Sind die Mengen gleich, so folgt $\mu^2 = pr^2$, also $\mu = r\sqrt{p}$. Die Dimension der magnetischen Masse ist also zu bestimmen aus $l\sqrt{lmt^{-2}}$. Dies giebt als Dimension der magnetischen Menge μ den Ausdruck $l^{\frac{3}{2}} m^{\frac{1}{2}} t^{-1}$. Dieser auf den ersten Blick wegen seiner Kompliziertheit befremdende Ausdruck ist dadurch entstanden, daſs man, um einfacher rechnen zu können, sich geeinigt hat, die Dimension der Konstanten $\varkappa$ zu vernachlässigen. μ wird auch Polstärke eines Magneten genannt.

Ist in $\mu = r\sqrt{p}$ $r = 1$ und $p = 1$, so wird $\mu = 1$.

Die magnetische Masseneinheit ist also diejenige magnetische Menge, die auf eine gleich grofse Menge in Entfernung 1 cm die Kraft 1 Dyn ausübt. Die Menge von 10^8 solcher Einheiten heifst zu Ehren des berühmten Physikers ein Weber.

2) Magnetische Potentialfunktion einer Masse. $V = \frac{\mu}{r}$ $= \frac{\text{magnetische Masse}}{\text{Entfernung}}$ giebt $\frac{l^{\frac{3}{2}} m^{\frac{1}{2}} t^{-1}}{l}$ oder als Dimension $l^{\frac{1}{2}} m^{\frac{1}{2}} t^{-1}$.

Hier sind dieselben Vereinfachungen vorgenommen wie beim Gravitationspotential bezw. seiner Funktion. Ist $m = 1$ und $r = 1$, so wird $V = 1$. Dadurch ist die Potentialeinheit definiert.

3) Magnetisches Potential zwischen zwei Massen. (Magnetische Energie).

$$\frac{\mu_1}{r} \cdot \mu_2 \text{ giebt } \left(l^{\frac{1}{2}} m^{\frac{1}{2}} t^{-1}\right) l^{\frac{3}{2}} m^{\frac{1}{2}} t^{-1} = l^2 m t^{-2}.$$

Dies ist die Dimension einer Arbeit, der Name Energie ist also berechtigt. Zwischen zwei magnetischen Masseneinheiten herrscht in der Entfernung von 1 cm das Potential 1, d. h. es ist ein Erg Arbeit nötig, um die eine aus der Entfernung 1 von der festgehaltenen andern in unendliche Entfernung zu schaffen.

4) Potentialgefälle $= \frac{\text{Potentialdifferenz}}{\text{Abstand der Niveauflächen}}$ giebt $\frac{l^{\frac{1}{2}} m^{\frac{1}{2}} t^{-1}}{l}$ (bezogen auf Einheit) oder die Dimension $l^{-\frac{1}{2}} m^{\frac{1}{2}} t^{-1}$.

5) Feldstärke F in einem Punkte = Kraft, die ein Pol auf die in diesem Punkte befindliche magnetische Einheit ausübt. Dimension folgt aus $\frac{\text{Kraft}}{\text{magn. Menge}} = \frac{l m t^{-2}}{l^{\frac{3}{2}} m^{\frac{1}{2}} t^{-1}} = l^{-\frac{1}{2}} m^{\frac{1}{2}} t^{-1}$.

4) und 5) sind identisch, 5) ist die Erklärung von 4). Aus 5) folgt $F \cdot \mu$ = Feldstärke mal magn. Menge gleich Kraft; Potentialgefälle gleich der auf die magnetische Einheit ausgeübten Kraft.

6) Magnetisches Moment eines Magnets = Polstärke mal Länge des Magnets. Dimension $= \mu \cdot l = \left(l^{\frac{3}{2}} m^{\frac{1}{2}} t^{-1}\right) l = l^{\frac{5}{2}} m^{\frac{1}{2}} t^{-1}$.

7) Drehmoment eines Magnets von Polstärke μ und Länge l im homogenen Felde (z. B. dem des Erdmagnetismus) von Feldstärke F.

Es ist gleich $F \cdot \mu \cdot l \sin \alpha$, wenn der Stab mit der Kraftrichtung des Feldes den Winkel α bildet. Der Höchstwert ist $F\mu l$. Dimension $= \left(l^{-\frac{1}{2}} m^{\frac{1}{2}} t^{-1}\right) \left(l^{\frac{3}{2}} m^{\frac{1}{2}} t^{-1}\right) l = l^2 m t^{-2}$. (Vgl. Stat. Moment der Mechanik.)

8) Schwingungsdauer des Magnets im homog. magn. Felde $= 2\pi \sqrt{\frac{\text{Trägheitsmoment}}{\text{Drehmoment}}}$; Dimension ist $\sqrt{\frac{m l^2}{l^2 m t^{-2}}} = \sqrt{t^2} = t$, wie zu erwarten war.

9) Spezifischer Magnetismus $= \frac{\text{Magn. Moment}}{\text{Masse}} = \frac{l^{\frac{5}{2}} m^{\frac{1}{2}} t^{-1}}{m}$ $= l^{\frac{5}{2}} m^{-\frac{1}{2}} t^{-1}$.

10) Intensität der Magnetisierung $= \frac{\text{Magn. Moment}}{\text{Volumen}} = \frac{l^{\frac{5}{2}} m^{\frac{1}{2}} t^{-1}}{l^3}$ $= l^{-\frac{1}{2}} m^{\frac{1}{2}} t^{-1}$.

11) Zahl der Kraftlinien = Feldstärke mal Fläche $= \left(l^{-\frac{1}{2}} m^{\frac{1}{2}} t^{-1}\right) l^2$ $= l^{\frac{3}{2}} m^{\frac{1}{2}} t^{-1}$.

C. Einheiten der Elektrostatik.

1) Elektrische Menge. Sie wird, wie die des Magnetismus, aus $p = \varkappa \frac{\mu_1 \mu_2}{r^2}$ für $\varkappa = 1$ abgeleitet. Ihre Dimension ist also ebenfalls $l^{\frac{3}{2}} m^{\frac{1}{2}} t^{-1}$.

Einheit der elektrischen Menge ist diejenige Menge, die auf eine gleich grofse in der Entfernung 1 cm die Anziehung 1 Dyn ausübt.

Die praktische Einheit der Elektrotechnik umfafst $3 \cdot 10^9$ solche Einheiten und heifst ein Coulomb.

2) Elektrische Potentialfunktion $= \frac{\mu}{r}$ giebt, wie beim Magnetismus, als Dimension $l^{\frac{1}{2}} m^{\frac{1}{2}} t^{-1}$. Definition der Potentialeinheit: Ist $\mu = 1$ und $r = 1$, so ist das Potential $= 1$.

3) Elektrisches Potential in Bezug auf zwei Massen $\frac{\mu \cdot \mu_1}{r}$ hat die Dimension $\left(l^{\frac{1}{2}} m^{\frac{1}{2}} t^{-1}\right) \left(l^{\frac{3}{2}} m^{\frac{1}{2}} t^{-1}\right) = l^2 m t^{-2}$, es bedeutet also eine Arbeit.

Ist $\mu = 1$, $\mu_1 = 1$ und $r = 1$, so kostet es die Arbeit 1, die eine der Mengen unter Festhaltung der andern ins Unendliche zu entfernen. Die zur Überwindung eines Potentialunterschiedes 1 (durch Fortbewegung der elektrischen Menge 1) nötige Arbeit ist ein Erg. Handelt es sich um die Arbeit $\frac{1}{3 \cdot 10^2}$ Erg, so heifst der Potentialunterschied ein Volt.

4) Dimension der Dichte $\delta = \frac{\text{Ladung}}{\text{Fläche}}$ ist $\frac{\mu}{l^2} = \frac{m^{\frac{1}{2}} l^{\frac{3}{2}} t^{-1}}{l^2} = l^{-\frac{1}{2}} m^{\frac{1}{2}} t^{-1}$.

5) Oberflächenspannung $2\pi\delta^2$ hat die Dimension $\delta^2 = l^{-1} m t^{-2}$.

6) Kapazität eines Leiters ist die Ladung, die sein Potential um 1 erhöht, also Ladung reduziert auf die Einheit des Potentials d. h.

$$\text{Kapazität} = \frac{\text{Ladung}}{\text{Potential}} = \frac{m^{\frac{1}{2}} l^{\frac{3}{2}} t^{-1}}{l^{\frac{1}{2}} m^{\frac{1}{2}} t^{-1}} = l.$$

Ist ein Coulomb Ladung nötig, um das Potential um 1 zu erhöhen, so nennt man die Kapazität ein Farad.

$$1 \text{ Farad} = \frac{1 \text{ Coulomb}}{1 \text{ Volt}} = \frac{3 \cdot 10^9}{\frac{1}{3 \cdot 10^2}} \text{ oder } 9 \cdot 10^{11} \text{ absolute Einheiten.}$$

7) Energie der Ladung $= \frac{1}{2} V \cdot \mu$, Dim. $= \left(l^{\frac{1}{2}} m^{\frac{1}{2}} t^{-1}\right) \left(m^{\frac{1}{2}} l^{\frac{3}{2}} t^{-1}\right) = l^2 m t^{-2}$, also die Dimension einer Arbeit. Vgl. Nr. 3.

8) Dimension der Dielektrizitätskonstante $= \frac{\text{Kap.}}{\text{Kap.}} = l^0 m^0 t^0$.

D. Erläuterung des galvanischen Stromes und seiner Gesetze, nebst Ableitung der Einheiten und ihrer Dimensionen.

Hat ein homogener Draht die Länge 1, den Querschnitt 1, und ist die Potentialdifferenz zwischen Anfangs- und Endpol, deren Bedeutung noch näher besprochen werden soll, gleich Eins, so braucht die Einheit der Elektrizitätsmenge, um einen der Querschnitte zu passieren, eine gewisse Zeit ϱ, die konstant ist, wenn die Strömung den Charakter einer stationären Strömung hat. Diese Zeit hängt von der chemischen Beschaffenheit, d. h. vom Material des Drahtes ab und steht in enger Beziehung zu der Geschwindigkeit der Elektrizität im Drahte. Die Dimension von ϱ ist t.

Folglich: In jeder Sekunde passiert durch jeden Querschnitt 1 eine Elektrizitätsmenge $\lambda = \frac{1}{\varrho}$. Ihre Dimension ist $\frac{1}{t}$ oder t^{-1}.

Man bezeichnet ϱ, weil es auf lauter Einheiten bezogen ist, als den spezifischen Widerstand des Drahtes; λ heifst sein Leitungskoeffizient oder das spezifische Leitungsvermögen.

Der spezifische Widerstand wird also gemessen durch die Zeit, die bei der Potentialdifferenz 1 nötig ist, um in einem Drahte von Länge 1 und Querschnitt 1 die elektrische Menge 1 durch jeden Querschnitt passieren zu lassen.

Der Leitungskoeffizient giebt an, welche Menge Elektrizität dabei in jeder Sekunde durch jeden Querschnitt geht.

Hat nun der Stab die $l$fache Länge, so ist ein $l$facher Widerstand zu überwinden, und daher geht, wie das Ohmsche Gesetz sagt, nur der l^{te} Teil der Elektrizitätsmenge λ durch jeden Querschnitt 1, sobald die Potentialdifferenz dieselbe ist. Aus dem Potentialgefälle $\frac{1}{1}$ ist eben $\frac{1}{l}$ geworden, aus der Menge λ wird daher $\frac{\lambda}{l}$.

Giebt man ferner dem Drahte den Ffachen Querschnitt, so wandert naturgemäſs in jeder Sekunde die Ffache Elektrizitätsmenge $\frac{\lambda}{l}F$ durch jeden Stabquerschnitt.

Ist endlich die Potentialdifferenz zwischen den Endpunkten nicht 1, sondern $D = V_1 - V_2$, die Anziehung jedes Poles auf die entgegengesetzte elektrische Einheit also D mal so groſs, als vorher, so geht in jeder Sekunde im Einklang mit dem Ohmschen Gesetz die Dfache Elektrizitätsmenge durch jeden Querschnitt, wie vorher, nämlich die Menge

$$J = \frac{\lambda}{l} F (V_1 - V_2).$$

Um zu sehen, ob diese Angaben dem Begriffe der Elektrizitätsmenge entsprechen, setze man an Stelle dieser Ausdrücke die bekannten Dimensionen. Man erhält als Dimension von J

$$\frac{t^{-1}}{l} l^2 \cdot \left(l^{\frac{1}{2}} m^{\frac{1}{2}} t^{-1}\right) \quad \text{oder} \quad l^{\frac{3}{2}} m^{\frac{1}{2}} t^{-2}.$$

Nun hatte aber die Elektrizitätsmenge die Dimension $l^{\frac{3}{2}} m^{\frac{1}{2}} t^{-1}$, hier steht also in der That $\frac{\text{Elektrizitätsmenge}}{\text{Zeit}}$, d. h. die sekundlich passierende Elektrizitätsmenge.

Man nennt den gefundenen Ausdruck die Stromstärke oder Intensität, so daſs

$$J = \frac{\lambda}{l} F (V_1 - V_2) = \lambda F \frac{V_1 - V_2}{l} = \lambda F G$$

ist, wo G das Potentialgefälle $\frac{V_1 - V_2}{l}$ für die Drahtlänge l bedeutet.

Die Stromstärke also ist die Menge von Elektrizität, die sekundlich durch jeden Querschnitt des Drahtes geht.

Sie ist proportional dem Leitungskoeffizienten λ, dem Querschnitte F, der Potentialdifferenz, und umgekehrt proportional der Länge des Drahtes; oder, sie ist proportional dem Leitungskoeffizienten, dem Querschnitte und dem Potentialgefälle.

Ist $J = \lambda F G = 1$, so sagt man, der Strom habe die Stärke 1 (C. G. S.-System). Ist $J = 3 \cdot 10^9$, d. h. passiert in jeder Sekunde durch F ein Coulomb $= 3 \cdot 10^9$ C. G. S.-Einheiten Elektrizitätsmenge, so sagt man, der Strom habe die Stärke 1 Ampère. Die Anzahl der Ampère giebt also an, wieviel Coulomb in jeder Sekunde durch jeden Querschnitt passieren. Es ist 1 Ampère = 1 Sekunden-Coulomb. Man merke also:

Anzahl der Ampère = Anzahl der Coulomb auf die Sekunde $= \frac{\text{Menge}}{\text{Zeit}}$.

Ampère mal Zeit giebt die Elektrizitätsmenge. So kann man die Ladung eines Akkumulators gleich n Ampèrestunden setzen.

Um auch für die Potentialdifferenz etwas Greifbares zu erhalten, untersuche man das Produkt $(V_1 - V_2)\, J$ in Bezug auf seine Dimensionen. Man erhält

$$\left(l^{\frac{1}{2}} m^{\frac{1}{2}} t^{-1}\right) \cdot \left(l^{\frac{3}{2}} m^{\frac{1}{2}} t^{-2}\right) = l^2 m t^{-3} = \frac{l^2 m t^{-2}}{t}.$$

Dies ist die Dimension einer Leistung oder einer sekundlichen Arbeit. Also:

Das Produkt aus Potentialdifferenz und Stromstärke ist äquivalent einer mechanischen Arbeitsleistung auf die Sekunde.

Folglich:

$$\text{Potentialdifferenz} = \frac{\text{Arbeit auf die Sekunde}}{\text{Elektrizitätsmenge auf die Sekunde}}$$

$$= \frac{\text{Arbeit in } t \text{ Sekunden}}{\text{Elektrizitätsmenge in } t \text{ Sekunden}} = \frac{\text{Stromarbeit}}{\text{Elektrizitätsmenge}},$$

letzteres für beliebige Zeit.

Man kann also die Potentialdifferenz deuten als die Stromarbeit, reduziert auf die Einheit der Elektrizitätsmenge. Ist z. B. in den Einheiten des C. G. S.-Systems die Stromarbeit gleich 1 und die Elektrizitätsmenge gleich 1, so hat man die Potentialdifferenz 1. Ist aber die Stromarbeit nicht gleich 1 Erg, sondern gleich $\frac{1}{3 \cdot 10^2}$ Erg, und die Elektrizitätsmenge gleich 1, so ist die Potentialdifferenz gleich $\frac{1}{3 \cdot 10^2}$ Einheiten des C. G. S.-Systems.

Diese Differenz bezeichnet man als 1 Volt. Demnach ist die Stromleistung von

$$(1\ \text{Volt}) \cdot (1\ \text{Ampère}) = \left(\tfrac{1}{3 \cdot 10^2}\right) \cdot (3 \cdot 10^9)\ \text{Sek. Erg} = 10^7\ \text{Sek. Erg}$$
$$= 1\ \text{Sek. Joule} = 1\ \text{Watt},$$

und

$$\text{Anzahl der Volt gleich } \frac{\text{Sekundenleistung}}{\text{Anzahl der Ampère}},$$

oder

Anzahl der Volt gleich Sekundenleistung durch sekundliche Menge,

oder

$$\text{Anzahl der Volt gleich } \frac{\text{Arbeit}}{\text{Menge}} \text{ für beliebige Zeit } t.$$

Nun war

$$\frac{\lambda F}{l}(V_1 - V_2) = J,$$

also

$$\frac{V_1 - V_2}{J} = \frac{l}{\lambda F} = \varrho \frac{l}{F},$$

d. h. die Potentialdifferenz, die für jedes Ampère des Stromes nötig ist, ist gleich $\varrho \frac{l}{F}$.

Es war aber ϱ der spezifische Widerstand für $l = 1$ und $F = 1$. Nach dem Ohmschen Gesetze ist der wirkliche Widerstand proportional der Drahtlänge und umgekehrt proportional dem Querschnitte, und so hat man $r = \varrho \frac{l}{F}$ als Widerstand W des Drahtes zu betrachten. Dies giebt

$$\frac{\text{Potentialdifferenz}}{\text{Stromstärke}} = \text{Widerstand}, \quad \frac{D}{J} = W.$$

Die Dimension des Widerstandes ist $t \cdot \frac{l}{l^2} = tl^{-1}$, also das Umkehrte einer Geschwindigkeit.

Bringt die Potentialdifferenz 1 Volt die Stromstärke 1 Ampère hervor, so sagt man, der Widerstand sei ein Ohm.

Also ist

$$1\ \text{Ohm} = \frac{1\ \text{Volt}}{1\ \text{Ampère}} = \frac{\frac{1}{300}}{3 \cdot 10^9} = \frac{1}{9 \cdot 10^{11}}\ \text{Widerstandseinheiten}$$

des C. G. S.-Systems.

Man merke:

Anzahl der Volt = Anzahl der Ohm mal Anzahl der Ampère;

$$\text{Anzahl der Ampère} = \frac{\text{Anzahl der Volt}}{\text{Anzahl der Ohm}},$$

$$\text{Anzahl der Ohm} = \frac{\text{Anzahl der Volt}}{\text{Anzahl der Ampère}},$$

oder, wenn D die Potentialdifferenz ist,

$$D = W \cdot J, \quad J = \frac{D}{W}, \quad W = \frac{D}{J}.$$

Aus $DJ = L$ und $\frac{J}{D} = \frac{1}{W}$ folgt durch Multiplikation noch $J^2 = \frac{L}{W}$ oder $L = J^2 \cdot W$, d. h. Leistung gleich Widerstand mal Quadrat der Stromstärke.

Ist nun A das mechanische Äquivalent der Wärme, d. h. 1 Cal. $= 4{,}2 \cdot 10^7$ Erg, also 1 Erg $= 2{,}4 \cdot 10^{-8}$ Cal. und 1 Watt $= 0{,}24$ Cal. pro Sekunde, so ergiebt sich folgendes:

Aus $L = WJ^2$ folgt, dafs der Strom in der Zeit t die Wärmemenge

$$Q = \frac{WJ^2 t}{A}$$

entwickeln kann. Ist z. B. der Widerstand in Ohm, die Stromstärke in Ampère gegeben, die Leistung also in Watt, so wird in t Sekunden $0{,}24\, J^2 Wt$ Cal. Wärme erzeugt, sobald der Strom keine weitere Arbeit, weder mechanische noch sonstige leistet. Dies ist der Ausdruck für das Gesetz von Joule.

Man kann den Vorgang der Strömung im homogenen Drahte vergleichen mit der Strömung eines Flusses, der z. B. für die Horizontalstrecke l das gleichmäfsige Gefälle $(h_1 - h_2)$ hat, dessen normaler Querschnitt F überall derselbe ist, dessen Bett auf der ganzen Strecke dieselbe Beschaffenheit hat. Das Gefällverhältnis $\frac{h_1 - h_2}{l} = \tan\alpha$ kann als proportional der Geschwindigkeit v angenommen werden, die überall dieselbe ist (vgl. Theorie des Reibungswinkels, wobei $\mu = \tan\alpha$ ist). Die Tiefe des Flusses reguliert sich von selbst so, dafs die Wassermenge $F \cdot v$ der sekundlich zulaufenden Wassermenge gleich ist. Setzt man nun $v = \lambda \tan\alpha = \lambda \frac{h_1 - h_2}{l}$, so ist λ eine Art von Reibungskoeffizient, der dem Leitungskoeffizienten λ im Drahte entspricht. Er hängt ab von allerlei Widerständen, die das Flussbett darbietet, Reibungswiderstand, Unebenheiten aller Art, auf dem Grunde liegende Steine, festwurzelnde Wasserpflanzen u. dgl., so dafs λ um so kleiner ist, je mehr Hindernisse sich der Strömung entgegenstellen. (Vgl. Nr. 158 und 159.)

Welche Arbeit könnte nun der Flufs für die Strecke l und das Gefälle $h_1 - h_2$ leisten, wenn man das letztere am Anfangspunkte der Strecke l vollständig ausnutzte und z. B. in senkrechtem Schachte einen Turbinenbetrieb anlegte, dessen Untergraben die Strecke l giebt? Die sekundliche Arbeit ist dann, da Fv die sekundliche Wassermasse vom Gewichte $F \cdot v \cdot 1$ Tonnen (technischen Mafssystems) und $(h_1 - h_2)$ die Höhe in Metern ist, theoretisch gleich

$$Fv\,(h_1 - h_2) = F \cdot \lambda \cdot \frac{h_1 - h_2}{l}\,(h_1 - h_2) \text{ Metertonnen.}$$

Im ursprünglichen Strome wird diese zur Überwindung der Hindernisse aufgebraucht, denn die Strömung ist stationär, an jeder Stelle ist die Geschwindigkeit konstant, eine Beschleunigung also findet nicht statt. Dabei kann man $F \cdot v = \lambda F \cdot \frac{h_1 - h_2}{l}$ als Stromstärke (sekundliche Wassermenge) bezeichnen. Genau so war vorher $\lambda F \cdot \frac{V_1 - V_2}{l}$ die in jeder Sekunde den Draht passierende Elektrizitätsmenge. Das spezifische Gewicht des Wassers multipliziert mit der Höhendifferenz $(h_1 - h_2)$ entspricht der Potentialdifferenz $V_1 - V_2$, das Gefällverhältnis $\frac{h_1 - h_2}{l}$ multipliziert mit dem spezifischen Gewicht 1 des Wassers entspricht dem Potentialgefälle $\frac{V_1 - V_2}{l}$. In beiden Fällen ist

Leistungsfähigkeit oder Stromarbeit gleich dem Produkte aus der sekundlichen Menge des Fluidums multipliziert mit der Potentialdifferenz.

Die ganze Arbeitsfähigkeit wird in beiden Fällen dazu aufgebraucht, sekundlich die betreffende Menge des Fluidums durch alle Hindernisse hindurchzudrängen.

Aufklärend ist auch folgendes Bild:

Zwei Wasserbecken seien durch eine Mauer voneinander getrennt. Dem oberen fliefse durch einen Bach sekundlich die Wassermenge Q zu, aus dem unteren fliefse ebenso viel durch einen Bach ab. Beide seien am Grunde durch ein Rohr verbunden.

Angenommen, das Rohr wäre zu weit, dann würde sich der Spiegel des oberen Teiches so lange senken, bis der Höhenunterschied $h_1 - h_2$ und damit der Arbeitsdruck klein genug ist, um nur noch die Wassermenge Q sekundlich durch das Rohr zu drängen. Dieser stationäre Zustand tritt ein, sobald die Leistungsfähigkeit $Q\,(h_1 - h_2)$ (pro Sekunde) gerade zur Überwindung der Bewegungshindernisse ausreicht.

Ist jetzt der Wasserstand des oberen Teiches für den beabsichtigten Zweck zu niedrig, so kann man ihn dadurch erhöhen, dafs man entweder die Länge des Rohres vergröfsert, was den Reibungswiderstand vermehrt, oder ein Rohr mit geringerem Durchmesser einschaltet, bei dem die gröfsere Durchflufsgeschwindigkeit, die gefordert wird, den Widerstand ebenfalls verstärkt. Jetzt steigt das Wasser so lange, bis die Leistungsfähigkeit $Q(h_1 - h_2)$ grofs genug ist, um wiederum bei stationärem Zustande zur Überwindung der Hindernisse auszureichen.

Jetzt hat man dieselbe Stromstärke (Q in der Sekunde), die sekundliche Arbeit $Q(h_1 - h_2)$ mufs aber die doppelte sein, wenn jetzt die doppelte Widerstandsarbeit zu überwinden ist. Also: bei gleicher Stromstärke ist der Höhenunterschied (Potentialdifferenz) proportional der Widerstandsarbeit. — Führt aber der Bach nur noch die Hälfte des Wassers zu, so mufs die Widerstandsarbeit halbiert werden, wenn das Niveau bleiben soll. Beides ist der obigen Formel $\frac{\text{Potentialdifferenz}}{\text{Stromstärke}} = \text{Widerstand}$ ganz analog.

E. Elektromagnetisches Mafssystem.

Während der galvanische Strom im elektrostatischen System an sich selbst gemessen wurde, wird er hier auf Grund seiner Wirkungen nach aufsen gemessen. Es handelt sich jetzt um dasselbe J, um dieselbe Potentialdifferenz $D = V_1 - V_2$, um denselben Widerstand W, die Dimensionen aber lauten anders. Aus ihrem Vergleiche ergiebt sich eine neue Gröfse v, die etwa gleich der Geschwindigkeit des Lichtes ist und als Fortpflanzungsgeschwindigkeit der elektrischen Wellen im Äther des Weltraumes betrachtet wird. Dafs die praktischen Einheiten Ampère, Volt und Ohm des neuen Mafssystemes trotzdem dieselben sind, wie die früheren, bedarf eines Beweises, der ebenfalls gegeben werden soll.

1) Stromstärke. Wie die Lehrbücher (vgl. Nr. 259) auf Grund des Biot-Savartschen Gesetzes beweisen, wirkt ein Kreisstrom von der Stromstärke J und der Kreisfläche F nach aufsen magnetisch wie ein Elementarmagnet vom Momente $M = \varkappa JF$. Es ist also $J = \frac{1}{\varkappa} \cdot \frac{M}{F}$, und man kann die Einheiten so wählen, dafs $\varkappa = 1$ wird. Dann ist also

$$J = \frac{M}{F} = \frac{\text{mgn. Moment}}{\text{Kreisfläche}},$$

und die neue Dimension von J wird nach dem früheren $\frac{l^{\frac{5}{2}} m^{\frac{1}{2}} t^{-1}}{l^2} = l^{\frac{1}{2}} m^{\frac{1}{2}} t^{-1}$.

Ist $M = 1$ und $F = 1$, so wird $J = 1$.

Die elektromagnetische Einheit der Stromstärke hat man also bei der Fläche $r^2\pi = 1$ des Kreisstroms und dem magnetischen Momente 1 der Aufsenwirkung.

Als praktische Einheit aber hat man das Ampère $= \frac{1}{10}$ der letzten Einheit festgesetzt, und unten soll gezeigt werden, dafs dieses Ampère dasselbe ist, wie das früher definierte.

2) Elektromotorische Kraft oder Potentialdifferenz $D = V_1 - V$ (auch als Spannung bezeichnet).

Aus $D \cdot J =$ Leistung L folgt, wie früher $D = \frac{L}{J}$. Die neu gefundene Dimension von J giebt hier für D die Dimension

$$\frac{l^2 m t^{-3}}{l^{\frac{1}{2}} m^{\frac{1}{2}} t^{-1}} = l^{\frac{3}{2}} m^{\frac{1}{2}} t^{-2}.$$

Ist die Leistung gleich 1 und die Stromstärke gleich 1, so ist auch $D = 1$, also:

Man hat die Einheit der Potentialdifferenz, sobald ein Strom von der Stärke 1 die innere Arbeit 1 leistet.

Als praktische Einheit aber hat man das 10^8fache dieser Einheit eingeführt und sie als Volt bezeichnet. Unten wird bewiesen, dafs dieses Volt mit dem früher definierten identisch ist.

3) Elektromagnetische Einheit des Widerstandes.

Aus $W = \frac{D}{J}$ ergiebt sich infolge der neuen Dimensionen von D und J ebenfalls eine neue Dimension, nämlich $\frac{l^{\frac{3}{2}} m^{\frac{1}{2}} t^{-1}}{l^{\frac{1}{2}} m^{\frac{1}{2}} t^{-2}} = l t^{-1}$, also die einer Geschwindigkeit v, was sehr bedeutungsvoll ist, denn diese Geschwindigkeit hat sich durch Messungen als eine solche von etwa 300 000 Kilometer = 30 000 000 000 cm = $3 \cdot 10^{10}$ cm (etwa 40 000 geogr. Meilen) herausgestellt, so dafs sie, wie die elektromagnetische Lichttheorie Maxwells behauptet, mit der des Lichtes übereinstimmt!*)

*) Die Lichtgeschwindigkeit in Kilometern pro Sekunde ist nach Fizeau 314 000, nach den Aberrationsberechnungen 308 000, nach Foucault 298 360, im Durchschnitt 306 790. Das Verhältnis der elektrischen Einheiten nach Weber, Maxwell und Thomson ist, entsprechend reduziert, 310 740, 288 000, 282 000, im Durchschnitt 293 580. Bei den Schwankungen zwischen den drei ersten Angaben und den Schwierigkeiten elektrischer Messungen ist volle Übereinstimmung

Ist $D = 1$ und $J = 1$, so hat man die Einheit des Widerstandes.

Die Einheit des Widerstandes im elektromagnetischen Maſssystem hat man, sobald eine Potentialdifferenz von der Stärke 1 eine Stromstärke von der Stärke 1 hervorruft.

Als praktische Einheit aber hat man das Ohm $= 10^9$ solcher Einheiten festgesetzt, und es soll bewiesen werden, daſs dieses mit dem früher definierten Ohm übereinstimmt.

Vergleich der alten und neuen Einheiten und Dimensionen.

Für den Augenblick sollen J_s, D_s und W_s die Ausdrücke des elektrostatischen Systems sein, J_m, D_m, W_m die des elektromagnetischen. Bezüglich der Dimensionen hat man dann

$$\frac{J_s}{J_m} = \frac{l^{\frac{3}{2}} m^{\frac{1}{2}} t^{-2}}{l^{\frac{1}{2}} m^{\frac{1}{2}} t^{-1}} = l t^{-1},$$

d. h. die Dimension einer Geschwindigkeit v. Ferner

$$\frac{D_s}{D_m} = \frac{l^{\frac{1}{2}} m^{\frac{1}{2}} t^{-1}}{l^{\frac{3}{2}} m^{\frac{1}{2}} t^{-2}} = \frac{t}{l},$$

also ist die Dimension die des reciproken Wertes $\frac{1}{v}$ einer Geschwindigkeit v.

Endlich ist $\frac{W_s}{W_m} = \frac{t l^{-1}}{l t^{-1}} = t^2 l^{-2}$, also die Dimension die des Quadrates vom reciproken Werte einer Geschwindigkeit v, nämlich von $\frac{1}{v^2}$.

Nach den Messungen ist, wie oben angegeben, v stets gleich $3 \cdot 10^{10}$ cm. Demnach ist

$$J_s = v J_m, \quad D_s = \frac{1}{v} D_m, \quad W_s = \frac{1}{v^2} W_m.$$

Giebt aber dieselbe Intensität elektrostatisch gemessen die v fache Zahl, als elektromagnetisch gemessen, so muſs die Einheit$_s = \frac{1}{v}$ Einheit$_m$ sein, d. h.

Für die Intensität ist 1 Einheit$_m = 3 \cdot 10^{10}$ Einheiten$_s$.

---

durchaus nicht ausgeschlossen. Daſs es sich um eine Geschwindigkeit v handelt, ergiebt die Dimension, daſs diese Geschwindigkeit in ihrer ersten Potenz mit der des Lichtes nahezu übereinstimmt, ist unter allen Umständen bemerkenswert, besonders, nachdem durch dis Hertzschen Entdeckungen die Faraday-Maxwellschen Anschauungen bestätigt worden sind.

Nun war 1 $\text{Ampère}_m = \frac{1}{10}\,\text{Einheit}_m$ gewählt, also ist

$$1\ \text{Ampère}_m = \tfrac{1}{10}\,\text{Einheit}_m = \tfrac{1}{10}\,3 \cdot 10^{10}\ \text{Einheiten}_s = 3 \cdot 10^{9}\ \text{Einheiten}_s$$
$$= 1\ \text{Ampère}_s.$$

Die Übereinstimmung der beiden Ampère ist dadurch nachgewiesen.

Ferner folgt aus obigem für dieselbe Potentialdifferenz $D_s = \frac{1}{v} D_m$, daſs die $\text{Einheit}_s = v\ \text{Einheiten}_m$ sein muſs. Folglich:

Für die Potentialdifferenz oder Leistungsfähigkeit ist

$$1\ \text{Einheit}_m = \frac{1}{v}\,\text{Einheit}_s = \frac{1}{3 \cdot 10^{10}}\,\text{Einheit}_s.$$

Nun war aber

$$1\ \text{Volt}_m = 10^{8}\ \text{Einheiten}_m,$$

also ist

$$1\ \text{Volt}_m = 10^{8}\ \text{Einheiten}_m = 10^{8} \cdot \frac{1}{3 \cdot 10^{10}}\ \text{Einheiten}_s = \frac{1}{3 \cdot 10^{2}}\ \text{Einheiten}_s$$
$$= 1\ \text{Volt}_s.$$

Also auch hier herrscht Übereinstimmung in den praktischen Einheiten.

Für den Widerstand ist entsprechend $W_s = \frac{1}{v^2} W_m$, also muſs sein

$$\text{Einheit}_s = v^2\ \text{Einheiten}_m.$$

Folglich: für den Widerstand ist

$$1\ \text{Einheit}_m = \frac{1}{v^2}\,\text{Einheit}_s = \frac{1}{9 \cdot 10^{20}}\,\text{Einheit}_s.$$

Nun war gewählt als praktische Einheit

$$1\ \text{Ohm}_m = 10^{9}\ \text{Einheiten}_m,$$

also ist

$$1\ \text{Ohm}_m = 10^{9}\ \text{Einheiten}_m = 10^{9} \cdot \frac{1}{9 \cdot 10^{20}}\ \text{Einheiten}_s = \frac{1}{9 \cdot 10^{11}}\ \text{Einheiten}_s$$
$$= 1\ \text{Ohm}_s.$$

Die Übereinstimmung ist also für alle Einheiten nachgewiesen.

Bezüglich der beiden Pariser Kongresse sei eingeschaltet, daſs die Beschlüsse auf einem Kompromiſs beruhen, der dem Ideale durchaus nicht entspricht: So sagt z. B. Kohlrausch im Leitfaden der praktischen Physik (8. Aufl. 1896 bei Teubner erschienen) auf Seite 450 bezüglich des $\text{Ampère} = \frac{1}{10}\,\text{Einheit}_m$ des C. G. S.-Systems:

„Dafs es ein Fehler war, die C. G. S.-Einheit durch 10 geteilt in die Praxis einzuführen, so dafs sie bei allen elektromagnetischen Beziehungen mit 10 zurückmultipliziert werden mufs, ist zu spät erkannt worden. Es giebt keinen zweckmäfsigen Ausweg, als den von der Technik adoptierten, dafs man im Elektromagnetismus nicht nach Ampère, sondern mit der Weberschen C. G. S.-Einheit rechnet."

Dies ist eben die oben definierte absolute Einheit$_m$.

Zweitens haben sich die Engländer den Beschlüssen des Pariser Kongresses von 1884 nicht vollständig angeschlossen. Sie haben z. B. das Ohm nicht der beschlossenen Einheit entsprechend angenommen, sondern gröfser, und zwar als das $\frac{1{,}063}{1{,}06}$fache. Dies entspricht in der That den genaueren Messungen der neueren Zeit. Durch die deutsche physikalische Reichsanstalt ist dies im Anschlufs an die Arbeiten des Prof. Dr. Dorn offiziell anerkannt worden. Dazu vergleiche man die „Vorschläge zu gesetzlichen Bestimmungen über elektrische Mafseinheiten, entworfen durch das Kuratorium der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt; nebst kritischem Bericht über den wahrscheinlichsten Wert des Ohm nach den bisherigen Messungen, verfafst von Dr. Dorn." Berlin, bei J. Springer. 86 Seiten. Dort wird „Amper" statt Ampère gesagt.

Die Schlufsbemerkung lautet:

„Die Übereinstimmung derjenigen Resultate für das Ohm, welche nach meiner Kritik zu erheblichen Einwänden nicht Veranlassung geben, mufs eine ziemlich befriedigende genannt werden. Die Differenzen übersteigen nicht das Mafs dessen, was nach den Beobachtungsfehlern und infolge bekannter störender Ursachen (Magnetismus der Apparate z. B.) erwartet werden darf.

Wir werden darin eine Gewähr dafür erblicken dürfen, dafs die für das vorliegende Gebiet mafsgebenden Naturgesetze uns hinreichend bekannt sind. Dies wird auch nach dem weiteren, insbesondere durch Hertz uns erschlossenen Standpunkte aus wahrscheinlich."

Der Erlafs eines Gesetzes über das Ohm als Mafseinheit steht bevor. [Das Ideal kann, wie Verfasser vor längerer Zeit in der Zeitschrift Deutscher Ingenieure (Band 36, Seite 895 ff.) dargelegt hat, nur dann erreicht werden, wenn man festhält, dafs die Masseneinheiten in den verschiedenen absoluten Mafssystemen dem Gesetze $1 : 10^3 : 10^6$, die Krafteinheiten dem Gesetze $1 : 10^4 : 10^8$, die Arbeits- und Leistungsmafse dem Gesetze $1 : 10^5 : 10^{10}$ gehorchen, was alle Rechnungen beim Übergange aus dem einen ins andere überflüssig machen würde.]

Man kann sich über die elektromagnetischen Einheiten und Dimensionen noch folgendes merken.

Die Stromintensität hatte die Dimension $l^{\frac{1}{2}} m^{\frac{1}{2}} t^{-1}$. Sie bedeutete $\frac{\text{Elektrizitätsmenge}}{\text{Zeit}}$, d. h. sekundliche Menge. Multipliziert man also mit t, so erhält man die elektrische Menge an sich, ohne Bezugnahme auf die Zeit. Ihre Dimension ist jetzt $l^{\frac{1}{2}} m^{\frac{1}{2}}$. (Im elektrostatischen System war sie $l^{\frac{3}{2}} m^{\frac{1}{2}} t^{-1}$.) Praktische Einheit 1 Coulomb gleich $\frac{1}{10}$ absolute Einheit pro Sekunde entspricht dem Ampère.

Das elektrochemische Äquivalent des Stromes von der Stärke 1 (C. G. S.), oder 1 Webersche Einheit zersetzt in der Sekunde 0,000933 g Wasser oder scheidet 0,01118 Silber aus. Ist das Äquivalentgewicht des auszuscheidenden Körpers gleich A, so scheidet er in der Sekunde $A \cdot 0{,}0001036$ g aus. (Sauerstoff hat $A = 16$.) 1 Ampère zersetzt (als $\frac{1}{10}$ Einheit$_m$) nur 0,0000933 g oder 0,0933 mg Wasser in der Sekunde aus, oder scheidet 0,00118 g = 1,18 mg Silber aus, allgemein von jedem Körper vom Äquivalentgewicht A die Menge $A \cdot 1{,}036$ mg in der Sekunde.

Es ist 1 Daniell = ∼ 1,1 Volt, 1 Bunsen = ∼ 1,9 Volt, 1 Akkumulator = 2 Volt, 1 legales Volt = 0,9972 Volt.

Kapazität = Elektrizitätsmenge pro Einheit des Potentials $= \frac{\text{Menge}}{\text{Potential}}$ ist elektromagnetisch gemessen von der Dimension

$$\frac{l^{\frac{1}{2}} m^{\frac{1}{2}}}{l^{\frac{3}{2}} m^{\frac{1}{2}} t^{-2}} = l^{-1} t^2.$$

Die praktische Einheit Farad ist $= 9 \cdot 10^{11}$ Einh.$_s$ $= 10^{-9}$ Einh.$_m$, wie sich aus dem obigen Umwandlungsfaktor ergiebt.

Ändert ein Strom seine Intensität, so ruft er im benachbarten geschlossenen Leiter (Spirale) einen Induktionsstrom hervor. Die Intensitätsänderung für unendlich kleine Zeit ist gleich $\frac{J_1 - J_2}{t_1 - t_2}$, also von der Dimension

$$\frac{l^{\frac{1}{2}} m^{\frac{1}{2}} t^{-1}}{t} = l^{\frac{1}{2}} m^{\frac{1}{2}} t^{-2}.$$

Dem ist proportional die elektromotorische Kraft des induzierten Stromes, die von der Dimension $l^{\frac{3}{2}} m^{\frac{1}{2}} t^{-2}$ ist.

Man erhält den überführenden Faktor, indem man setzt

$$(l^{\frac{1}{2}} m^{\frac{1}{2}} t^{-2})\, x = l^{\frac{3}{2}} m^{\frac{1}{2}} t^{-2}.$$

Demnach ist x von der Dimension l. Folglich:

Der Induktionskoeffizient Π, das sogenannte elektrodynamische Potential, ist von der Dimension l.

Widerstand$_{m}$. 1 cm^3 Quecksilber hat den Widerstand 94080 abs. Einheiten bei 0^0 C; 1 Ohm = 1,063 Siemenseinh. = 1,063 $\frac{m}{mm^2}$ Hg 0^0, d. h. gleich einer Quecksilbersäule von 1,063 m Länge und 1 qmm Querschnitt bei 0^0 C.

Das frühere legale Ohm hatte nur 1,060 Siemenseinheiten, ist also gleich 0,9972 richtigen Ohm. Vgl. die Vorschläge der Technisch-Physik. Reichsanstalt.

Im Gesetz folgen die Definitionen der praktischen Einheiten folgendermaſsen aufeinander:

1 Ohm = 1,063 $\frac{m}{mm^2}$ Hg bei 0^0; 1 Amp. = 1,118 mg Silber/Sek.; 1 Volt = 1 Ohm · 1 Amp.

Eine vortreffliche Einführung in die elektrischen Messungen und zuverlässige Angaben über die Werte der Konstanten, auch korrekte Tabellen, findet man in dem schon citierten:

„Leitfaden der praktischen Physik“ von Dr. F. Kohlrausch, Präsident der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt.

Druckfehler-Verzeichnis.

Seite 14, Zeile 9 von u. lies Leverrier statt Levervier,
„ 75 „ 22 von o. lies die statt der.