Lehrbuch der Stereometrie

Hauck, Guido

Tübingen, 1893

B. Lehrsätze.

urn:nbn:de:hbz:466:1-77777

e. Zwei Ebenen stehen auf einander senkrecht, wenn einer der vier von ihnen gebildeten Keile ein Rechter ist. Auch die andern drei Keile sind dann Rechte.

B. Lehrsätze.

1—5: Parallele Gerade und Ebenen.

Lehrsatz 1.

a. Ist eine Gerade parallel einer Ebene, und legt man durch die Gerade eine zweite Ebene, welche die erste schneidet: so ist auch die Schnittlinie der Geraden parallel.

b. Ist eine Gerade parallel einer zweiten Geraden, so ist sie auch jeder durch diese gelegten Ebene parallel. Oder: Ist eine Gerade parallel einer in einer Ebene liegenden Geraden, so ist sie auch der Ebene parallel.

c. Ist eine Gerade parallel einer Ebene, und zieht man durch einen beliebigen Punkt der Ebene die Parallele zur Geraden, so muß diese ganz in die Ebene fallen.

Beweis. **a.** Die Gerade sei g (Fig. 4), die ihr parallele Ebene sci M; die durch g gelegte Ebene N schneide M

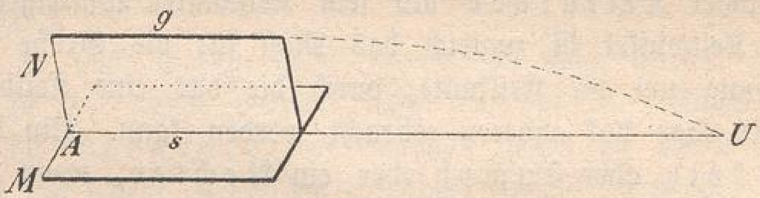

Fig. 4.

nach der Geraden s. Wäre nun s nicht $\parallel$ g, so müßten beide sich schneiden, weil sie in einer Ebene N liegen. Der Schnittpunkt U wäre aber dann ein gemeinsamer Punkt der Geraden g und der Ebene M, — was der Voraussetzung widerspricht. Folglich muß s $\parallel$ g sein.

b. Die zwei parallelen Geraden seien g und s (Fig. 4);

durch s sei die Ebene M gelegt. Legt man durch g und s die Ebene N, so stellt s zugleich die Schnittlinie von N und M vor. Würde nun g die Ebene M schneiden, so müßte (nach I. Einl. 6. b) der Schnittpunkt U in der Schnittlinie s liegen, d. h. g müßte s schneiden; — was gegen die Voraussetzung ist. Folglich muß g der Ebene M parallel sein.

c. Die Gerade sei g (Fig. 4), die mit ihr parallele Ebene sei M; durch den in M liegenden Punkt A sei die Gerade s parallel zu g gezogen. Würde nun s nicht in die Ebene M fallen, so würde es außer s durch den Punkt A noch eine zweite Parallele zu g geben, nämlich die Schnittlinie der Ebene M mit der durch g und A gelegten Ebene N (nach Lehrs. a); — was nicht möglich ist (I. Einl. 4. b). Folglich muß s in die Ebene M fallen.

Zusatz. Aus c folgt: 1) Die unendlich vielen Ebenen, die durch einen Punkt parallel mit einer Geraden gelegt werden können, schneiden sich alle nach einer und derselben Geraden, nämlich nach der durch den Punkt zu der Geraden gezogenen Parallelen. 2) Eine Gerade, die zweien Ebenen parallel ist, ist ihrer Schnittlinie parallel.

Lehrsatz 2.

Werden zwei parallele Ebenen von einer dritten Ebene geschnitten, so sind die zwei Schnittlinien parallel.

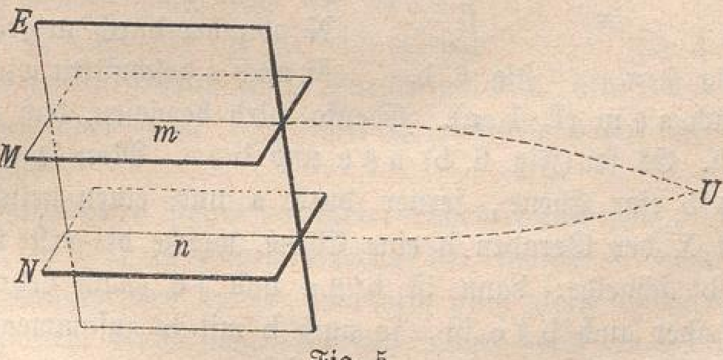

Fig. 5.

Beweis. Die zwei parallelen Ebenen M und N (Fig. 5) werden von der Ebene E geschnitten nach m und n. Wären nun m und n nicht parallel, so müßten sie sich schneiden, weil beide in der Ebene E liegen. Ihr Schnittpunkt U wäre aber dann ein gemeinsamer Punkt der zwei Ebenen M und N, — was der Voraussetzung widerspricht. Folglich müssen m und n parallel sein.

(Direkter Beweis mittels I. Einl. 6. c und I. 1. a.)

Zusatz. Die unendlich vielen Geraden, die durch einen Punkt parallel mit einer Ebene gezogen werden können, liegen alle in einer und derselben Ebene, nämlich in der durch den Punkt zu der Ebene gelegten Parallelebene. (Bew. mittels I. 1. a, I. 2 und I. Einl. 4. b.)

Lehrsatz 3.

a. Legt man durch zwei parallele Gerade zwei Ebenen, die sich schneiden, so ist die Schnittlinie den zwei Geraden parallel.

b. Sind zwei Gerade einer dritten parallel, so sind sie einander parallel.

Beweis. a. Die zwei parallelen Geraden seien m und n (Fig. 6. a), die durch sie gelegten Ebenen seien M und N, deren Schnittlinie sei s. Da m ∥ n, so ist m auch ∥ zu der durch n gelegten Ebene N (I. 1. b), und weil diese Ebene N von der durch m gelegten M nach s geschnitten wird, so ist auch s ∥ m (I. 1. a). Ebenso wird bewiesen, daß s ∥ n.

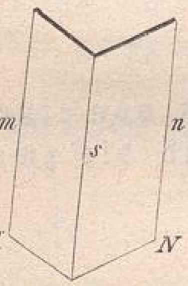

Fig. 6. a.

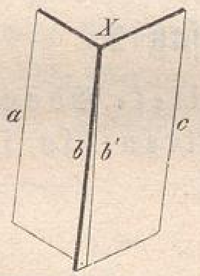

Fig. 6. b.

b. Es sei (Fig. 6. b) a ∥ c und b ∥ c. Man lege durch c und b eine Ebene, ferner durch a und einen beliebigen Punkt X der Geraden b eine Ebene, welche die erste Ebene nach b′ schneide; dann ist b′ ∥ a und ∥ c (nach Lehrs. a). Weil aber auch b ∥ c ist, so muß b mit b′ zusammenfallen (I. Einl. 4. b) und also auch ∥ a sein.

Zusatz. Lehrs. a läßt sich auch so aussprechen: Sind von den drei Schnittlinien dreier Ebenen (I. Einl. 6. d) zwei parallel, so sind alle drei parallel. Der Schnittpunkt der drei Ebenen kann dann als in unendliche Entfernung gerückt aufgefaßt werden.

Lehrsatz 4.

a. Sind die Schenkel zweier Winkel einzeln parallel, so sind ihre Ebenen parallel.

b. Sind die Schenkel zweier Winkel einzeln parallel, und sind beide Paare paralleler Schenkel gleich gerichtet oder beide entgegengesetzt gerichtet, so sind die Winkel gleich.

Beweis. a. Würden die zwei Ebenen sich schneiden, so müßte (nach I. 3. a) die Schnittlinie parallel sein sowohl mit dem einen als mit dem andern Schenkel eines Winkels; — was nicht möglich ist (I. Einl. 4. b). Folglich müssen die Ebenen parallel sein.

b. Die Winkel seien BAC und $B'A'C'$ (Fig. 7), es sei AB mit $A'B'$, AC mit $A'C'$ parallel und gleich gerichtet; man mache $AB = A'B'$ und $AC = A'C'$, ziehe BC, $B'C'$, ferner AA', BB', CC'. Da nun $AB \# A'B'$, so ist $ABB'A'$ ein Parallelogramm, also auch $AA' \# BB'$; ebenso beweist man, daß $AA' \# CC'$; daher ist auch $BB' \# CC'$ (I. 3. b), folglich $BB'C'C$ ebenfalls ein Parallelogramm, also $BC = B'C'$. Hieraus aber folgt: $\triangle\ ABC \cong A'B'C'$, daher W. $BAC = B'A'C'$.

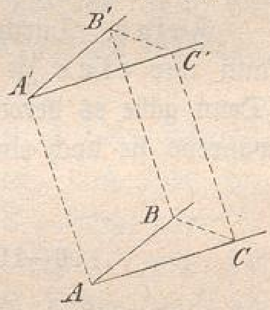

Fig. 7.

Sind beide Paare paralleler Schenkel entgegengesetzt gerichtet, so ist (nach obigem Beweis) der eine Winkel gleich dem Scheitelwinkel des andern und also auch gleich diesem selbst.

Zusatz. Aus b folgt, daß der Winkel, durch den der Winkel zweier windschiefen Geraden gemessen wird (I. Einl. 4. d), stets dieselbe Größe hat, wo auch sein Scheitel angenommen werden mag.

Lehrsatz 5.

Sind zwei Ebenen einer dritten parallel, so sind sie einander parallel.

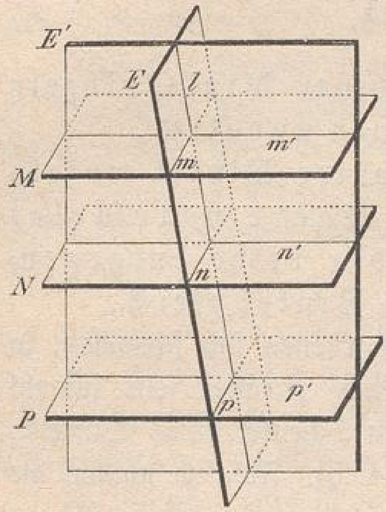

Fig. 8.

Beweis. Es sei (Fig. 8) Ebene M ∥ P und Ebene N ∥ P. Durch eine die drei Ebenen schneidende Gerade l lege man zwei weitere Ebenen E und E', welche die drei ersten schneiden nach m, n, p und m', n', p'. Dann ist m ∥ p und n ∥ p (I. 2), also auch m ∥ n. Ebenso wird bewiesen, daß m' ∥ n'. Nun schneiden sich m und m', n und n', und bilden also zwei Winkel, deren Schenkel einzeln parallel sind. Daher ist Ebene M ∥ N (I. 4. a).

Zusatz. Durch einen außerhalb einer Ebene liegenden Punkt kann nur eine zu dieser Ebene parallele Ebene gelegt werden. (Denn gäbe es deren zwei, so müßten sie unter sich parallel sein, während sie doch einen Punkt gemein haben.)

6—11: Senkrechte Gerade und Ebenen.

Lehrsatz 6.

a. Steht eine Gerade senkrecht auf zwei andern sich schneidenden Geraden in deren Schnittpunkt, so steht sie auch auf der Ebene der zwei Geraden senkrecht.

b. Stehen mehrere Gerade senkrecht auf derselben Geraden in demselben Punkt, so liegen sie alle in einer Ebene, die zu der letzteren Geraden senkrecht ist.

Beweis. a. Es sei (Fig. 9) AB senkrecht auf den in der Ebene M liegenden Geraden AC und AD. Es ist (nach I. Einl. 7. a) zu beweisen, daß AB auch auf jeder andern in der Ebene M durch A gezogenen Geraden AE senkrecht steht. Zu diesem Zweck ziehe man in M eine beliebige Linie, welche die drei Geraden AC, AD, AE in C, D, E schneidet, verlängere ferner BA um eine Strecke AB′ = BA und verbinde B und B′ mit den drei Punkten C, D, E. Nun ist $\triangle$ ABC $\cong$ AB′C, und

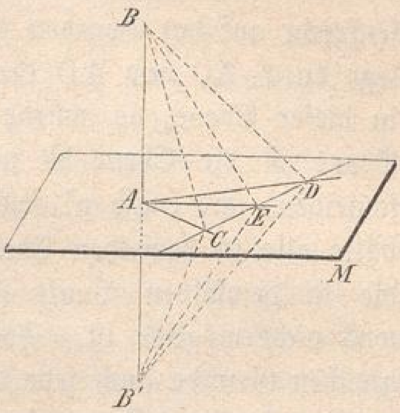

Fig. 9.

ABD $\cong$ AB′D, also BC = B′C und BD = B′D. Hieraus folgt: $\triangle$ BCD $\cong$ B′CD, W. BCD = B′CD, und daher auch $\triangle$ BCE $\cong$ B′CE, BE = B′E. Damit kann aber jetzt bewiesen werden, daß $\triangle$ ABE $\cong$ AB′E, folglich BAE ein rechter Winkel ist. — Ebenso wird bewiesen, daß AB senkrecht steht auf allen andern in der Ebene M durch A gezogenen Geraden. Folglich steht AB senkrecht auf der Ebene M.

Anderer Beweis. (Fig. 9*). Es ist stets möglich, die Linie CD in der Ebene M so zu ziehen, daß ihre zwischen AC und AD fallende Strecke durch AE halbiert wird**). Dann ist BE Schwerlinie des Dreiecks BCD, und AE Schwerlinie des Dreiecks ACD. Man hat daher (nach bekanntem Satze der ebenen Geometrie):

$$\begin{aligned} & 2\,(BE^2 + CE^2) = BC^2 + BD^2, \\ & 2\,(AE^2 + CE^2) = AC^2 + AD^2, \\ \text{subtr.:}\quad & 2\,(BE^2 - AE^2) = BC^2 - AC^2 + BD^2 - AD^2 \\ & \qquad = 2\,AB^2, \end{aligned}$$

*) Man denke sich in Fig. 9 die von B′ ausgehenden Linien hinweg.

**) Man ziehe nämlich durch den beliebig gewählten Punkt E die Parallele mit CA, welche AD schneiden muß, in U; verlängere AU um ein Stück UD = AU, ziehe DE, welche AC schneiden muß, in C.

also: $BE^2 - AE^2 = AB^2$,
woraus folgt, daß BAE ein rechter Winkel ist.

b. Die Geraden AC, AD, AE, . . . stehen alle senkrecht auf der Geraden AB in demselben Punkt A. Man lege durch AC und AD die Ebene M. Läge nun AE nicht in dieser Ebene, so würde die durch AB und AE gelegte Ebene N die Ebene M nach einer andern Geraden AE′ schneiden, die (nach a) senkrecht zu AB sein müßte. Man hätte also in derselben Ebene N zwei Gerade AE und AE′, die in demselben Punkt A auf AB senkrecht stünden, — was nicht möglich ist. Folglich muß AE — und aus dem gleichen Grunde auch jede der andern Senkrechten — in der durch AC und AD gelegten Ebene liegen.

Zusatz 1. Nennt man mit Bezugnahme auf I. Einl. 4. d zwei Windschiefe, deren Winkel ein Rechter ist: auf einander senkrecht, so läßt sich Lehrs. a folgendermaßen verallgemeinern: Eine Gerade steht senkrecht auf einer Ebene, wenn sie senkrecht steht auf irgend zweien in der Ebene liegenden (aber nicht parallelen) Geraden; sie steht alsdann auch senkrecht auf jeder andern in der Ebene gezogenen Geraden.

Zusatz 2. Lehrs. b läßt sich auch so ausdrücken: Dreht man einen rechten Winkel um einen seiner Schenkel, so beschreibt der andere eine Ebene, die auf dem ersten senkrecht steht. — Hieraus folgt weiter: Dreht man die durch einen Punkt und eine Gerade gelegte Ebene um die Gerade als Achse so lange herum, bis sie wieder in ihre erste Lage zurückgekehrt ist, so hat der Punkt einen Kreis beschrieben, dessen Ebene senkrecht zur Drehachse, dessen Halbmesser die von dem Punkt auf die Drehachse gefällte Senkrechte, und dessen Mittelpunkt der Fußpunkt dieser Senkrechten ist.

Zusatz 3. Die Ebene eines Keilwinkels (I. Einl. 9. a) steht senkrecht zur Keilkante.

Lehrsatz 7.

a. Auf einer Ebene läßt sich in einem Punkte derselben nur **eine** Senkrechte errichten, und auf eine Ebene läßt sich von einem Punkt außerhalb derselben nur **eine** Senkrechte fällen.

b. Durch einen Punkt (auf oder außerhalb einer Geraden) läßt sich nur **eine** zu der Geraden senkrechte Ebene legen.

Beweis. a. Gäbe es durch den Punkt A (welcher in oder außerhalb der Ebene M liegen mag) zwei Senkrechte zu M, so würden diese (nach I. Einl. 7. a) auch senkrecht stehen auf der Linie, nach der die durch beide Senkrechte gelegte Ebene N die Ebene M schneidet. Man hätte also in derselben Ebene N zwei Senkrechte zu einer Geraden durch denselben Punkt, — was nicht möglich ist. Folglich kann es auf der Ebene durch den Punkt nur eine Senkrechte geben.

b. Gäbe es durch den Punkt A zwei senkrechte Ebenen M und M′ zu der Geraden g, so würden diese, falls A außerhalb g liegt (Fig. 10. a), von der durch

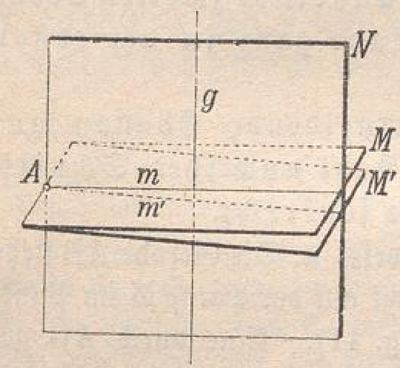

Fig. 10. a.

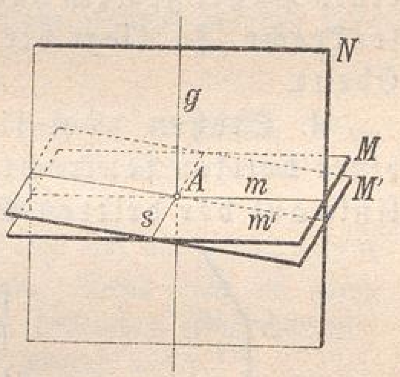

Fig. 10. b.

A und g gelegten Ebene N nach zwei Geraden m und m′ geschnitten werden, die (nach I. Einl. 7. a) auf g senkrecht stehen müßten. Man hätte also wieder in derselben Ebene zwei Senkrechte zu einer Geraden durch denselben Punkt, — was nicht möglich ist. — Liegt der Punkt A **auf** der Geraden g (Fig. 10. b), so lege man die Ebene N beliebig durch g (doch so, daß sie nicht durch die Schnittlinie s der Ebenen M und M' geht,) und mache den gleichen Schluß.

Zusatz. Mittels Lehrs. b und I. 6. Zus. 3 beweist man den Kehrsatz von I. Einl. 9. b: Zwei Keile sind gleich, wenn ihre Keilwinkel gleich sind. — Daraus folgt: Zwei Scheitelkeile sind gleich.

Lehrsatz 8.

a. Steht eine Gerade auf einer Ebene senkrecht, so steht auch jede durch sie gelegte Ebene auf der ersten Ebene senkrecht.

b. Steht eine Gerade, die in einer von zwei senkrechten Ebenen liegt, senkrecht auf deren Schnittlinie, so steht sie auch senkrecht auf der andern Ebene.

c. Stehen eine Gerade und eine Ebene, die einen Punkt gemein haben, auf einer zweiten Ebene senkrecht, so liegt die Gerade ganz in der ersten Ebene.

d. Stehen zwei sich schneidende Ebenen auf einer dritten senkrecht, so steht auch ihre Schnittlinie auf der dritten Ebene senkrecht.

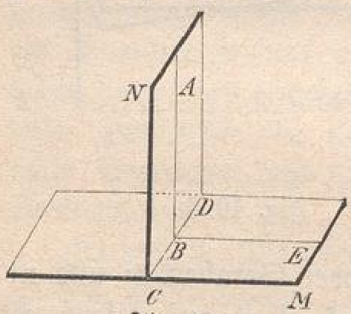

Fig. 11.

Beweis. a. Die Gerade AB stehe senkrecht auf der Ebene M im Punkt B (Fig. 11). Eine durch AB gelegte Ebene N schneide M nach der (durch B gehenden) Geraden CD. Man ziehe in der Ebene M die Linie BE $\perp$ CD. Da nun BA $\perp$ CD (I. Einl. 7. a) und BE $\perp$ CD ist, so ist ABE der Keilwinkel des einen von den zwei Ebenen gebildeten Keils (I. Einl. 9. a); es ist aber W. ABE = R (I. Einl. 7. a), folglich stehen die zwei Ebenen auf einander senkrecht (I. Einl. 9. e).

b. Ebene N ſei ſenkrecht auf Ebene M (Fig. 11), CD ſei ihre Schnittlinie; in der Ebene N liege die Gerade AB, und es ſei AB $\perp$ CD. Man ziehe in M die Linie BE $\perp$ CD; dann iſt ABE der Keilwinkel des einen von den zwei Ebenen gebildeten Keils, alſo W. ABE = R. Nun ſteht AB ſenkrecht auf BE und BD, folglich auch auf M (I. 6 a).

c. Die Gerade AB und die Ebene N, welche den Punkt A gemein haben, ſtehen beide ſenkrecht auf der Ebene M. Läge nun AB nicht in N, ſo könnte man in N durch A eine Gerade AB′ ſenkrecht zu ihrer Spurlinie CD ziehen, welche (nach b) auch ſenkrecht zu M wäre; es würden alſo durch A zwei Senkrechte zu M vorhanden ſein; — was nicht möglich iſt (I. 7. a). Folglich muß AB in N liegen.

d. Die zwei Ebenen N und N′ ſeien ſenkrecht auf der Ebene M. Von einem beliebigen Punkte der Schnittlinie der Ebenen N und N′ fälle man die Senkrechte auf M; dann muß dieſe (nach c) ſowohl in N als in N′ liegen, alſo mit der Schnittlinie von N und N′ zuſammenfallen; folglich ſteht die Schnittlinie ſenkrecht auf M.

Zuſatz 1. Lehrſ. a läßt ſich auch ſo ausdrücken: Eine Ebene ſteht auf einer andern Ebene ſenkrecht, wenn ſie auf einer in dieſer liegenden Geraden ſenkrecht ſteht.

Zuſatz 2. Durch eine Gerade läßt ſich nur eine Ebene ſenkrecht zu einer andern Ebene legen. (Denn gäbe es deren zwei, ſo würden, nach b, von einem beliebigen Punkt der Geraden zwei Senkrechte auf die Ebene möglich ſein.)

Zuſatz 3. Die projizierende Ebene (I. Einl. 8. a) einer Geraden ſteht (nach a) ſenkrecht auf der Projektionsebene und enthält (nach c) die projizierenden Lote ihrer ſämtlichen Punkte; die Projektionen der einzelnen Punkte liegen daher alle in der Projektion der Geraden. Es iſt folglich gleichgültig, welcher Punkt einer Geraden zur Konſtruktion ihrer Projektion verwendet wird. Man erhält ſie auch als Verbindungslinie der Projektionen von zwei beliebigen Punkten, oder als Verbindungslinie der Projektion eines beliebigen Punktes mit dem Spurpunkt. Die

Projektion einer Strecke ist identisch mit der Verbindungsstrecke der Projektionen ihrer Endpunkte. — Die Projektion einer zur Projektionsebene senkrechten Geraden ist ein Punkt, welcher identisch ist mit ihrem Spurpunkt.

Lehrsatz 9.

a. Ein rechter Winkel, dessen einer Schenkel in einer Ebene liegt, projiziert sich auf diese Ebene wieder als rechter Winkel.

b. Ist die Projektion eines Winkels, dessen einer Schenkel in der Projektionsebene liegt, ein Rechter, so ist der Winkel selbst ein Rechter.

Beweis. **a.** Der Winkel ABC (Fig. 12*), dessen Schenkel BC in der Ebene M liegt, sei ein Rechter. Fällt man AF ⊥ M und zieht FB, so ist FB die Projektion von AB auf M (I. 8. Zus. 3). Nun stehen CB und FA auf einander senkrecht (I. 6. Zus. 1); außerdem steht CB senkrecht auf BA, folglich steht CB senkrecht auf der Ebene BFA (I. 6. Zus. 1), und daher auch senkrecht auf BF.

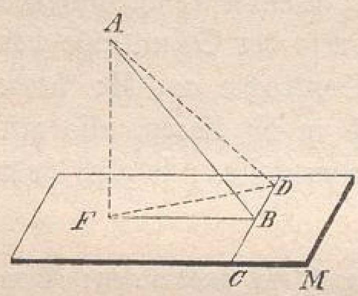

Fig. 12.

b. Der Winkel FBC (Fig. 12), welcher die Projektion des Winkels ABC auf die Ebene M vorstellt, sei ein Rechter. Nun ist CB ⊥ BF und ⊥ FA, folglich ⊥ auf der Ebene BFA, und daher auch ⊥ BA.

Anderer Beweis. **a.** Ist D (Fig. 12) ein beliebiger Punkt auf BC, und zieht man DA und DF, so ist:

$$BD^2 = AD^2 - AB^2$$
$$= (AF^2 + FD^2) - (AF^2 + FB^2)$$
$$= FD^2 - FB^2,$$

folglich:
$$FB \perp BD.$$

---

*) Man denke sich in Fig. 12 die Linien AD und FD zunächst hinweg.

b. Macht man dieselbe Konstruktion wie in Bew. a, so ist:

$$BD^2 = FD^2 - FB^2$$
$$= (AD^2 - AF^2) - (AB^2 - AF^2)$$
$$= AD^2 - AB^2,$$

folglich: $AB \perp BD$.

Zusatz. Es giebt noch einen zweiten Kehrsatz, nämlich: Hat man zwei rechte Winkel, die einen Schenkel und den Scheitel gemeinsam haben, und fällt von einem Punkt des freien Schenkels des ersten Winkels die Senkrechte auf den freien Schenkel des zweiten, so steht diese senkrecht auf der Ebene des zweiten Winkels. (Beweis ähnlich wie a und b oder indirekt.)

Lehrsatz 10.

a. Steht die eine von zwei parallelen Geraden senkrecht auf einer Ebene, so steht auch die andere senkrecht auf der Ebene.

b. Stehen zwei Gerade auf derselben Ebene senkrecht, so sind sie parallel.

Beweis. a. Es sei (Fig. 13) $AB \parallel A'B'$, und $AB \perp$ auf der Ebene M. B und B′ seien die Spurpunkte von AB und A′B′. Zieht man in der Ebene M durch B zwei beliebige Gerade BC und BD, und durch B′ die Parallelen B′C′ und B′D′ zu ihnen, so ist W. ABC = A′B′C′ und W. ABD = A′B′D′ (I. 4. b). Da nun die W. ABC und ABD Rechte sind, so müssen auch die W. A′B′C′ und A′B′D′ Rechte sein. Folglich ist $A'B' \perp M$ (I. 6. a).

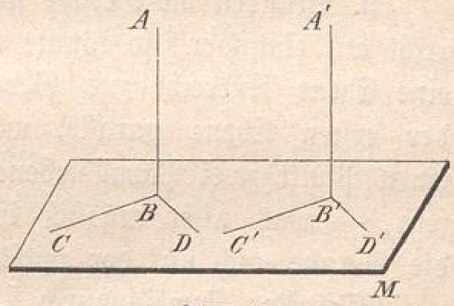

Fig. 13.

b. Es sei $AB \perp M$ und $A'B' \perp M$; wäre nun A′B′ nicht parallel AB, so könnte man durch B′ eine Gerade B′A″ parallel BA ziehen, welche (nach a) $\perp$ M wäre; es würden also auf M in B′ zwei Gerade senkrecht stehen, —

was nicht möglich ist (I. 7. a); folglich muß A'B' || AB sein.

Zusatz. Aus b folgt: Die Projektionen paralleler Geraden auf irgend eine Ebene sind parallel. (Denn nach b und I. 4. a sind die projizierenden Ebenen parallel, folglich nach I. 2 auch die Projektionen.)

Lehrsatz 11.

a. Steht eine Gerade auf zwei Ebenen senkrecht, so sind die Ebenen parallel.

b. Steht eine Gerade auf einer von zwei parallelen Ebenen senkrecht, so steht sie auch auf der andern senkrecht.

Beweis. a. Wären die Ebenen nicht parallel, so würden sie sich schneiden. Würde man dann einen beliebigen Punkt der Schnittlinie verbinden mit den zwei Spurpunkten der Geraden, so entstünde ein Dreieck, in dem zwei Winkel Rechte wären; — was nicht möglich ist. Folglich müssen die Ebenen parallel sein.

(Direkter Beweis durch I. 4. a.)

b. Stünden die Gerade und die zweite Ebene nicht senkrecht auf einander, so könnte man durch ihren Schnittpunkt eine Ebene senkrecht zur Geraden legen, welche (nach a) der ersten Ebene parallel wäre; es würden also durch einen Punkt zwei Parallelebenen zu einer Ebene vorhanden sein, — was nicht möglich ist (I. 5. Zus.). Folglich muß die Gerade auch auf der zweiten Ebene senkrecht stehen.

(Direkter Beweis durch I. 2 und I. 6. a.)

12—15: Maß-Beziehungen.

Lehrsatz 12.

Von allen Strecken, die zwischen einem Punkte und einer Ebene liegen, ist

a. die auf der Ebene ſenkrechte Strecke die kürzeſte.

b. Alle diejenigen ſind gleich, deren Fußpunkte gleich weit vom Fußpunkt der Senkrechten entfernt ſind.

c. Sie ſind um ſo größer, je weiter ihre Fußpunkte vom Fußpunkt der Senkrechten entfernt ſind.

Beweis. a. Iſt A (Fig. 14) der Punkt, M die Ebene, AF die von A auf M gefällte Senkrechte, AB irgend eine andere Strecke zwiſchen A und M: ſo ziehe man FB. Nun iſt $\triangle$ AFB rechtwinklig, folglich Kathete AF kleiner als Hypotenuſe AB.

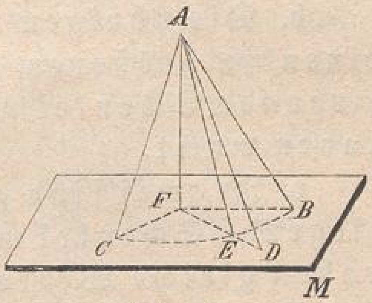

Fig. 14.

b. Iſt AC (Fig. 14) eine dritte Strecke zwiſchen A und der Ebene, und iſt FC = FB, ſo iſt $\triangle$ AFC $\cong$ AFB, folglich AC = AB.

c. Iſt AD (Fig. 14) eine vierte Strecke, und liegt ihr Fußpunkt D ſo, daß FD > FB, ſo kann man von FD ein Stück FE = FB abſchneiden. Zieht man dann AE, ſo iſt in der Ebene AFD : AD > AE; da aber AE = AB (nach b), ſo iſt auch AD > AB.

Zuſatz 1. Die Sätze gelten auch umgekehrt.

Zuſatz 2. Aus b folgt: Der geometriſche Ort eines Punktes, der in einer Ebene liegt und von einem feſten Punkt eine geg. Entfernung hat, iſt eine Kreislinie, — gleichgültig ob der feſte Punkt in der Ebene oder außerhalb derſelben liegt. Das gleiche gilt für den geometriſchen Ort einer Geraden, die in einer Ebene liegt und von einem feſten Punkt eine geg. Entfernung hat (Beweis durch I. 9. b). — Ferner folgt: Der geometriſche Ort eines Punktes, der von allen Punkten (und allen Tangenten) einer Kreislinie gleich weit entfernt iſt, iſt die auf der Ebene des Kreiſes in deſſen Mittelpunkt errichtete Senkrechte.

Lehrsatz 13.

Ist eine Gerade schief zu einer Ebene, so ist unter den Winkeln, die sie mit den durch ihren Spurpunkt in der Ebene gezogenen Geraden macht,

a. der spitze Winkel, den sie mit ihrer Projektion macht, der kleinste, dessen Nebenwinkel der größte.

b. Die übrigen Winkel sind um so größer, einen je größeren Winkel der in der Ebene liegende Schenkel mit der Projektion der Geraden macht.

c. Je zwei sind gleich, deren in der Ebene liegende Schenkel mit der Projektion der Geraden gleiche Winkel machen.

Beweis. a. Die Gerade SA (Fig. 15) schneide die Ebene M in S; man fälle AF $\perp$ M und ziehe SF, dann ist SF die Projektion von SA auf die Ebene M (I. 8. Zus. 3). SB sei eine beliebige andere durch S gehende Gerade in M; man schneide von ihr SB = SF ab, ziehe AB und FB. Dann ist in den zwei Dreiecken ASF und ASB : SA = SA, SF = SB, AF < AB (I. 12. a);

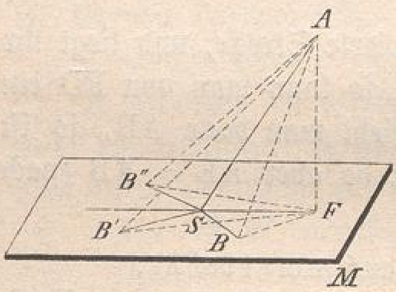

Fig. 15.

folglich (nach bekanntem Satz der ebenen Geometrie): W. ASF < ASB. — Hieraus folgt zugleich, daß der Nebenwinkel von ASF der größte ist. (Denn gäbe es einen noch größeren, so müßte dessen Nebenwinkel noch kleiner als W. ASF sein.)

b. Ist SB′ (Fig. 15) eine weitere durch S gehende Gerade in M, und ist W. FSB′ > FSB, so mache man SB′ = SB und ziehe AB′ und FB′; dann ergiebt sich zunächst aus der Vergleichung der zwei Dreiecke FSB′ und FSB : FB′ > FB;

hieraus folgt: AB′ > AB (I. 12. c), worauf sich weiter aus der Vergleichung der zwei Dreiecke ASB′ und ASB ergiebt: W. ASB′ > ASB.

c. Liegt SB″ (Fig. 15) in M auf der andern Seite von SF so, daß W. FSB″ = FSB′: so mache man wieder SB″ = SB′ und ziehe AB″ und FB″; dann ist △ FSB″ ≅ FSB′, FB″ = FB′, und daher AB″ = AB′ (I. 12. b); hieraus aber folgt: △ ASB″ ≅ ASB′, W. ASB″ = ASB′.

Zusatz 1. Die Sätze gelten auch umgekehrt.

Zusatz 2. Die Neigung einer Geraden gegen eine Ebene (I. Einl. 8. b) wird also durch den kleinsten zwischen der Geraden und der Ebene möglichen Winkel gemessen, ebenso wie die Entfernung eines Punktes von einer Ebene durch die kleinste zwischen Punkt und Ebene mögliche Strecke gemessen wird.

Zusatz 3. Lehrs. I. 9. b kann als spezieller Fall von Lehrs. c angesehen werden.

Lehrsatz 14.

a. Eine Gerade macht mit parallelen Ebenen gleiche Neigungswinkel.

b. Parallele Gerade machen mit einer Ebene gleiche Neigungswinkel.

c. Parallele Strecken zwischen zwei parallelen Ebenen sind gleich.

d. Werden mehrere Gerade von einer Anzahl paralleler Ebenen geschnitten, so sind die Abschnitte der einzelnen Geraden zwischen denselben Ebenen einander proportioniert.

Beweis. a. Fällt man von einem beliebigen Punkt der Geraden auf eine der parallelen Ebenen die Senkrechte, so steht diese auch senkrecht auf den übrigen (I. 11. b). Legt man daher durch die Gerade und die Senkrechte eine Ebene, so stellen deren Schnittlinien mit den parallelen Ebenen die Projektionen der Geraden auf diese vor (I. Einl. 8. a). Da aber die Schnittlinien alle unter sich parallel sind (I. 2), so macht die Gerade mit allen ihren Projektionen gleiche Winkel, folglich auch mit allen Ebenen (I. Einl. 8. b).

b. Folgt aus I. 10. Zus. und I. 4. b.

c. Sind AB und A′B′ zwei parallele Strecken zwischen zwei parallelen Ebenen, so ist ABB′A′ ein Parallelogramm (I. 2), folglich AB = A′B′.

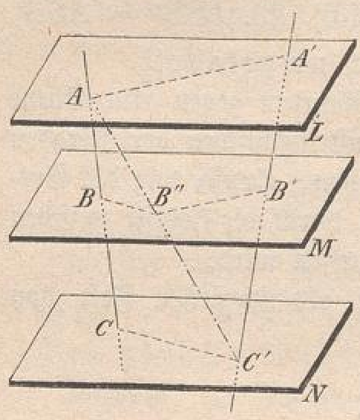

Fig. 16.

d. Zwei Gerade werden von den parallelen Ebenen L, M, N (Fig. 16) geschnitten in den Punkten A, B, C und A′, B′, C′. Man ziehe AC′, welche die M schneidet in B″; die Ebene CAC′ schneidet dann M nach BB″, N nach CC′, und es ist BB″ ∥ CC′ (I. 2), woraus folgt: $\frac{AB}{BC} = \frac{AB''}{B''C'}$. Ebenso giebt die Ebene AC′A′ die parallelen Schnittlinien AA′ und B″B′, woraus folgt: $\frac{A'B'}{B'C'} = \frac{AB''}{B''C'}$. Daher ist auch: $\frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'}$.

Zusatz 1. Sind zwei Ebenen parallel, so sind (nach Lehrs. c und I. 10. b) alle Punkte der einen Ebene von der andern gleich weit entfernt; diese konstante Entfernung wird als *die Entfernung der zwei parallelen Ebenen* bezeichnet. — *Der geometrische Ort eines Punktes, der von einer Ebene eine gegebene Entfernung hat,* wird gebildet von zwei Ebenen, die in der geg. Entfernung parallel mit der ersten Ebene zu beiden Seiten derselben liegen.

Zusatz 2. Ist eine Gerade einer Ebene parallel, so haben alle ihre Punkte gleiche Entfernung von der Ebene; diese Entfernung wird als *die Entfernung der Geraden von der Ebene* bezeichnet.

Zusatz 3. Die (in d besprochenen) zwischen einer Anzahl paralleler Ebenen liegenden Abschnitte einer beliebigen Geraden sind den Entfernungen der parallelen Ebenen proportioniert. (Hiernach anderer Beweis von d.)

Zusatz 4. Eine Ebene macht mit parallelen Ebenen gleiche Neigungswinkel. (I. 6. Zus. 3 und I. 10. a.)

Lehrsatz 15.

Zwischen zwei windschiefen Geraden giebt es immer eine Strecke, die auf beiden senkrecht steht und zugleich die kürzeste Strecke zwischen ihnen ist.

Beweis. Die zwei windschiefen Geraden seien AB und CD (Fig. 17). Durch einen beliebigen Punkt C der Geraden CD ziehe man die Parallele CE zu AB und lege durch CD und CE die Ebene M; dann ist AB ∥ M (I. 1. b). Hierauf fälle man von einem beliebigen Punkt F′ der Geraden AB die Senkrechte F′G′ auf M und ziehe

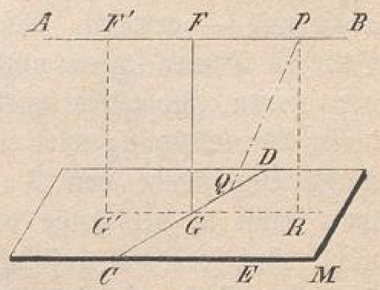

Fig. 17.

durch den Fußpunkt G′ die Parallele zu AB, welche in der Ebene M liegt (I. 1. c) und, da sie auch ∥ CE ist, CD schneiden muß, in G. Endlich ziehe man in der Ebene ABG′G durch G die Parallele zu G′F′, welche AB schneidet in F. Es ist nun FG ⊥ M (I. 10. a), also ⊥ CD und ⊥ G′G, und weil AB ∥ G′G, auch ⊥ AB. Folglich ist FG die auf AB und CD senkrechte Strecke.

Zieht man zwischen AB und CD eine beliebige andere Strecke PQ, so ist diese stets größer als FG. Denn fällt man PR ⊥ M, so ist PR $<$ PQ (I. 12. a), also, weil PR = FG (I. 14. Zus. 2), auch FG $<$ PQ.

Anmerkung. FG heißt die kürzeste Entfernung oder auch schlechtweg die Entfernung der zwei windschiefen Geraden.

Zusatz. Durch eine von zwei windschiefen Geraden läßt sich stets eine Ebene parallel zur andern legen und nur eine. — Durch zwei windschiefe Gerade läßt sich stets ein Paar paralleler

Ebenen legen und nur eines. Ihr Abstand ist gleich der kürzesten Entfernung der zwei Windschiefen. Diese kann auch erhalten werden als Schnittlinie der zwei Ebenen, die senkrecht zu den zwei parallelen Ebenen durch die Windschiefen gelegt werden.

C. Aufgaben.

Vorbemerkung.

Postulat der Stereometrie. Bezüglich der praktischen Ausführbarkeit von Konstruktionen im Raum wird in der Stereometrie die Voraussetzung — aber nur die eine Voraussetzung — gemacht, daß man durch gegebene Punkte nach Belieben Ebenen legen und in jeder Ebene die Konstruktionen der ebenen Geometrie ausführen könne. Mit Zugrundelegung dieser Voraussetzung wird in den folgenden Nummern 1—6 zunächst eine Reihe von Fundamentalaufgaben gelöst, die man dann in der Folge bei stereometrischen Konstruktionen benützt, ohne jedesmal auf ihre Einzelausführung zurückzugehen (in ähnlicher Weise wie dies in der ebenen Geometrie bezüglich des Ziehens von Parallelen, Senkrechten u. s. w. geschieht).

1—6: Fundamentalaufgaben.

Aufgabe 1.

a. Durch einen geg. Punkt eine Gerade parallel zu einer geg. Geraden zu ziehen.

b. Durch einen geg. Punkt eine Ebene parallel zu einer geg. Ebene zu legen.

Auflösung. a. Man lege durch den Punkt und die Gerade eine Ebene und vollziehe die übrige Konstruktion in dieser.

b. Man ziehe in der geg. Ebene zwei beliebige Gerade, die sich schneiden, ziehe zu ihnen durch den geg. Punkt die Parallelen (Aufg. a) und lege durch diese eine Ebene: so ist sie die verlangte.

(Beweise durch I. Einl. 4. b und I. 4. a.)