Lehrbuch der Stereometrie

Hauck, Guido

Tübingen, 1893

1 - 5: Parallele Gerade und Ebenen

urn:nbn:de:hbz:466:1-77777

e. Zwei Ebenen stehen auf einander senkrecht, wenn einer der vier von ihnen gebildeten Keile ein Rechter ist. Auch die andern drei Keile sind dann Rechte.

B. Lehrsätze.

1—5: Parallele Gerade und Ebenen.

Lehrsatz 1.

a. Ist eine Gerade parallel einer Ebene, und legt man durch die Gerade eine zweite Ebene, welche die erste schneidet: so ist auch die Schnittlinie der Geraden parallel.

b. Ist eine Gerade parallel einer zweiten Geraden, so ist sie auch jeder durch diese gelegten Ebene parallel. Oder: Ist eine Gerade parallel einer in einer Ebene liegenden Geraden, so ist sie auch der Ebene parallel.

c. Ist eine Gerade parallel einer Ebene, und zieht man durch einen beliebigen Punkt der Ebene die Parallele zur Geraden, so muß diese ganz in die Ebene fallen.

Beweis. **a.** Die Gerade sei g (Fig. 4), die ihr parallele Ebene sci M; die durch g gelegte Ebene N schneide M

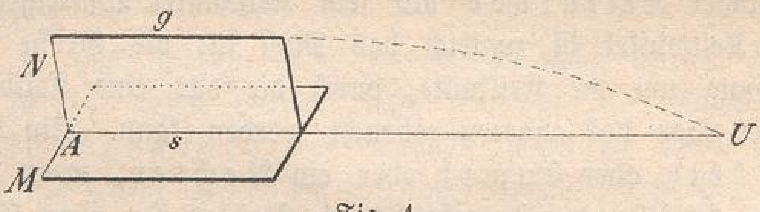

Fig. 4.

nach der Geraden s. Wäre nun s nicht $\parallel$ g, so müßten beide sich schneiden, weil sie in einer Ebene N liegen. Der Schnittpunkt U wäre aber dann ein gemeinsamer Punkt der Geraden g und der Ebene M, — was der Voraussetzung widerspricht. Folglich muß s $\parallel$ g sein.

b. Die zwei parallelen Geraden seien g und s (Fig. 4);

durch s sei die Ebene M gelegt. Legt man durch g und s die Ebene N, so stellt s zugleich die Schnittlinie von N und M vor. Würde nun g die Ebene M schneiden, so müßte (nach I. Einl. 6. b) der Schnittpunkt U in der Schnittlinie s liegen, d. h. g müßte s schneiden; — was gegen die Voraussetzung ist. Folglich muß g der Ebene M parallel sein.

c. Die Gerade sei g (Fig. 4), die mit ihr parallele Ebene sei M; durch den in M liegenden Punkt A sei die Gerade s parallel zu g gezogen. Würde nun s nicht in die Ebene M fallen, so würde es außer s durch den Punkt A noch eine zweite Parallele zu g geben, nämlich die Schnittlinie der Ebene M mit der durch g und A gelegten Ebene N (nach Lehrs. a); — was nicht möglich ist (I. Einl. 4. b). Folglich muß s in die Ebene M fallen.

Zusatz. Aus c folgt: 1) Die unendlich vielen Ebenen, die durch einen Punkt parallel mit einer Geraden gelegt werden können, schneiden sich alle nach einer und derselben Geraden, nämlich nach der durch den Punkt zu der Geraden gezogenen Parallelen. 2) Eine Gerade, die zweien Ebenen parallel ist, ist ihrer Schnittlinie parallel.

Lehrsatz 2.

Werden zwei parallele Ebenen von einer dritten Ebene geschnitten, so sind die zwei Schnittlinien parallel.

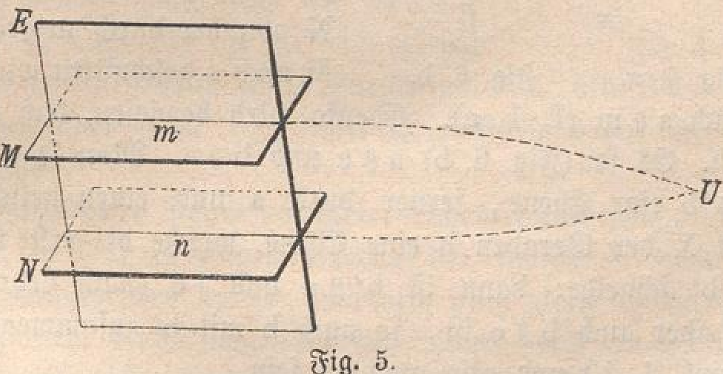

Fig. 5.

Beweis. Die zwei parallelen Ebenen M und N (Fig. 5) werden von der Ebene E geschnitten nach m und n. Wären nun m und n nicht parallel, so müßten sie sich schneiden, weil beide in der Ebene E liegen. Ihr Schnittpunkt U wäre aber dann ein gemeinsamer Punkt der zwei Ebenen M und N, — was der Voraussetzung widerspricht. Folglich müssen m und n parallel sein.

(Direkter Beweis mittels I. Einl. 6. c und I. 1. a.)

Zusatz. Die unendlich vielen Geraden, die durch einen Punkt parallel mit einer Ebene gezogen werden können, liegen alle in einer und derselben Ebene, nämlich in der durch den Punkt zu der Ebene gelegten Parallelebene. (Bew. mittels I. 1. a, I. 2 und I. Einl. 4. b.)

Lehrsatz 3.

a. Legt man durch zwei parallele Gerade zwei Ebenen, die sich schneiden, so ist die Schnittlinie den zwei Geraden parallel.

b. Sind zwei Gerade einer dritten parallel, so sind sie einander parallel.

Beweis. a. Die zwei parallelen Geraden seien m und n (Fig. 6. a), die durch sie gelegten Ebenen seien M und N, deren Schnittlinie sei s. Da m ∥ n, so ist m auch ∥ zu der durch n gelegten Ebene N (I. 1. b), und weil diese Ebene N von der durch m gelegten M nach s geschnitten wird, so ist auch s ∥ m (I. 1. a). Ebenso wird bewiesen, daß s ∥ n.

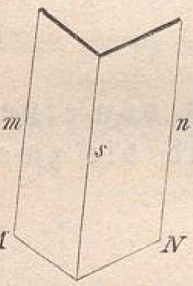

Fig. 6. a.

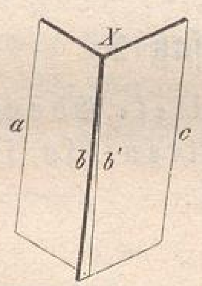

Fig. 6. b.

b. Es sei (Fig. 6. b) a ∥ c und b ∥ c. Man lege durch c und b eine Ebene, ferner durch a und einen beliebigen Punkt X der Geraden b eine Ebene, welche die erste Ebene nach b′ schneide; dann ist b′ ∥ a und ∥ c (nach Lehrs. a). Weil aber auch b ∥ c ist, so muß b mit b′ zusammenfallen (I. Einl. 4. b) und also auch ∥ a sein.

Zusatz. Lehrs. a läßt sich auch so aussprechen: Sind von den drei Schnittlinien dreier Ebenen (I. Einl. 6. d) zwei parallel, so sind alle drei parallel. Der Schnittpunkt der drei Ebenen kann dann als in unendliche Entfernung gerückt aufgefaßt werden.

Lehrsatz 4.

a. Sind die Schenkel zweier Winkel einzeln parallel, so sind ihre Ebenen parallel.

b. Sind die Schenkel zweier Winkel einzeln parallel, und sind beide Paare paralleler Schenkel gleich gerichtet oder beide entgegengesetzt gerichtet, so sind die Winkel gleich.

Beweis. a. Würden die zwei Ebenen sich schneiden, so müßte (nach I. 3. a) die Schnittlinie parallel sein sowohl mit dem einen als mit dem andern Schenkel eines Winkels; — was nicht möglich ist (I. Einl. 4. b). Folglich müssen die Ebenen parallel sein.

b. Die Winkel seien BAC und B′A′C′ (Fig. 7), es sei AB mit A′B′, AC mit A′C′ parallel und gleich gerichtet; man mache AB = A′B′ und AC = A′C′, ziehe BC, B′C′, ferner AA′, BB′, CC′. Da nun AB ⧺ A′B′, so ist ABB′A′ ein Parallelogramm, also auch AA′ ⧺ BB′; ebenso beweist man, daß AA′ ⧺ CC′; daher ist auch BB′ ⧺ CC′ (I. 3. b), folglich BB′C′C ebenfalls ein Parallelogramm, also BC = B′C′. Hieraus aber folgt: △ ABC ≌ A′B′C′, daher W. BAC = B′A′C′.

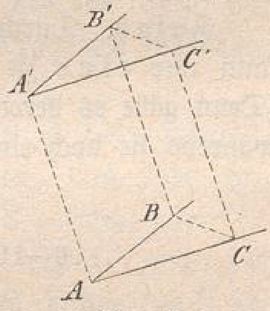

Fig. 7.

Sind beide Paare paralleler Schenkel entgegengesetzt gerichtet, so ist (nach obigem Beweis) der eine Winkel gleich dem Scheitelwinkel des andern und also auch gleich diesem selbst.

Zusatz. Aus b folgt, daß der Winkel, durch den der Winkel zweier windschiefen Geraden gemessen wird (I. Einl. 4. d), stets dieselbe Größe hat, wo auch sein Scheitel angenommen werden mag.

Lehrsatz 5.

Sind zwei Ebenen einer dritten parallel, so sind sie einander parallel.

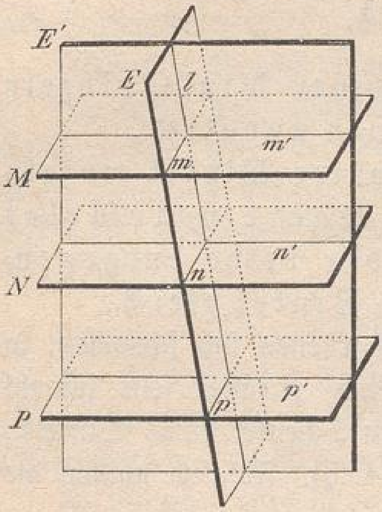

Fig. 8.

Beweis. Es sei (Fig. 8) Ebene M ∥ P und Ebene N ∥ P. Durch eine die drei Ebenen schneidende Gerade l lege man zwei weitere Ebenen E und E′, welche die drei ersten schneiden nach m, n, p und m′, n′, p′. Dann ist m ∥ p und n ∥ p (I. 2), also auch m ∥ n. Ebenso wird bewiesen, daß m′ ∥ n′. Nun schneiden sich m und m′, n und n′, und bilden also zwei Winkel, deren Schenkel einzeln parallel sind. Daher ist Ebene M ∥ N (I. 4. a).

Zusatz. Durch einen außerhalb einer Ebene liegenden Punkt kann nur eine zu dieser Ebene parallele Ebene gelegt werden. (Denn gäbe es deren zwei, so müßten sie unter sich parallel sein, während sie doch einen Punkt gemein haben.)

6—11: Senkrechte Gerade und Ebenen.

Lehrsatz 6.

a. Steht eine Gerade senkrecht auf zwei andern sich schneidenden Geraden in deren Schnittpunkt, so steht sie auch auf der Ebene der zwei Geraden senkrecht.

b. Stehen mehrere Gerade senkrecht auf derselben Geraden in demselben Punkt, so liegen sie alle in einer Ebene, die zu der letzteren Geraden senkrecht ist.