Lehrbuch der Stereometrie

Hauck, Guido

Tübingen, 1893

6 - 11: Senkrechte Gerade und Ebenen

Lehrsatz 5.

Sind zwei Ebenen einer dritten parallel, so sind sie einander parallel.

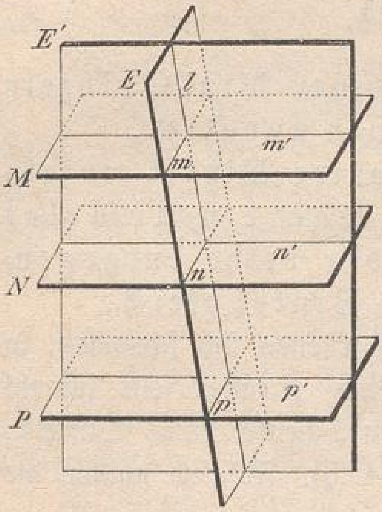

Fig. 8.

Beweis. Es sei (Fig. 8) Ebene M ∥ P und Ebene N ∥ P. Durch eine die drei Ebenen schneidende Gerade l lege man zwei weitere Ebenen E und E', welche die drei ersten schneiden nach m, n, p und m', n', p'. Dann ist m ∥ p und n ∥ p (I. 2), also auch m ∥ n. Ebenso wird bewiesen, daß m' ∥ n'. Nun schneiden sich m und m', n und n', und bilden also zwei Winkel, deren Schenkel einzeln parallel sind. Daher ist Ebene M ∥ N (I. 4. a).

Zusatz. Durch einen außerhalb einer Ebene liegenden Punkt kann nur eine zu dieser Ebene parallele Ebene gelegt werden. (Denn gäbe es deren zwei, so müßten sie unter sich parallel sein, während sie doch einen Punkt gemein haben.)

6—11: **Senkrechte Gerade und Ebenen.**

Lehrsatz 6.

a. Steht eine Gerade senkrecht auf zwei andern sich schneidenden Geraden in deren Schnittpunkt, so steht sie auch auf der Ebene der zwei Geraden senkrecht.

b. Stehen mehrere Gerade senkrecht auf derselben Geraden in demselben Punkt, so liegen sie alle in einer Ebene, die zu der letzteren Geraden senkrecht ist.

Beweis. a. Es sei (Fig. 9) AB senkrecht auf den in der Ebene M liegenden Geraden AC und AD. Es ist (nach I. Einl. 7. a) zu beweisen, daß AB auch auf jeder andern in der Ebene M durch A gezogenen Geraden AE senkrecht steht. Zu diesem Zweck ziehe man in M eine beliebige Linie, welche die drei Geraden AC, AD, AE in C, D, E schneidet, verlängere ferner BA um eine Strecke AB′ = BA und verbinde B und B′ mit den drei Punkten C, D, E. Nun ist $\triangle$ ABC $\cong$ AB′C, und

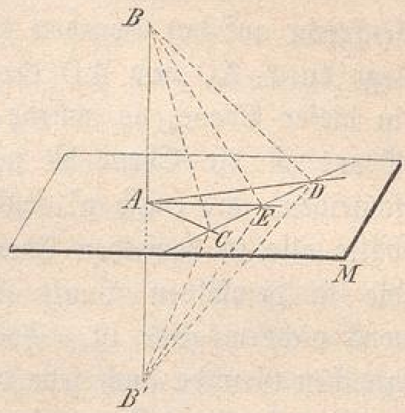

Fig. 9.

ABD $\cong$ AB′D, also BC = B′C und BD = B′D. Hieraus folgt: $\triangle$ BCD $\cong$ B′CD, W. BCD = B′CD, und daher auch $\triangle$ BCE $\cong$ B′CE, BE = B′E. Damit kann aber jetzt bewiesen werden, daß $\triangle$ ABE $\cong$ AB′E, folglich BAE ein rechter Winkel ist. — Ebenso wird bewiesen, daß AB senkrecht steht auf allen andern in der Ebene M durch A gezogenen Geraden. Folglich steht AB senkrecht auf der Ebene M.

Anderer Beweis. (Fig. 9*). Es ist stets möglich, die Linie CD in der Ebene M so zu ziehen, daß ihre zwischen AC und AD fallende Strecke durch AE halbiert wird**). Dann ist BE Schwerlinie des Dreiecks BCD, und AE Schwerlinie des Dreiecks ACD. Man hat daher (nach bekanntem Satze der ebenen Geometrie):

$$2\,(BE^2 + CE^2) = BC^2 + BD^2,$$
$$2\,(AE^2 + CE^2) = AC^2 + AD^2,$$
$$\text{subtr.:}\quad 2\,(BE^2 - AE^2) = BC^2 - AC^2 + BD^2 - AD^2$$
$$= 2\,AB^2,$$

*) Man denke sich in Fig. 9 die von B′ ausgehenden Linien hinweg.

**) Man ziehe nämlich durch den beliebig gewählten Punkt E die Parallele mit CA, welche AD schneiden muß, in U; verlängere AU um ein Stück UD = AU, ziehe DE, welche AC schneiden muß, in C.

also: $BE^2 - AE^2 = AB^2$,
woraus folgt, daß BAE ein rechter Winkel ist.

b. Die Geraden AC, AD, AE, . . . stehen alle senkrecht auf der Geraden AB in demselben Punkt A. Man lege durch AC und AD die Ebene M. Läge nun AE nicht in dieser Ebene, so würde die durch AB und AE gelegte Ebene N die Ebene M nach einer andern Geraden AE′ schneiden, die (nach a) senkrecht zu AB sein müßte. Man hätte also in derselben Ebene N zwei Gerade AE und AE′, die in demselben Punkt A auf AB senkrecht stünden, — was nicht möglich ist. Folglich muß AE — und aus dem gleichen Grunde auch jede der andern Senkrechten — in der durch AC und AD gelegten Ebene liegen.

Zusatz 1. Nennt man mit Bezugnahme auf I. Einl. 4. d zwei Windschiefe, deren Winkel ein Rechter ist: auf einander senkrecht, so läßt sich Lehrs. a folgendermaßen verallgemeinern: Eine Gerade steht senkrecht auf einer Ebene, wenn sie senkrecht steht auf irgend zweien in der Ebene liegenden (aber nicht parallelen) Geraden; sie steht alsdann auch senkrecht auf jeder andern in der Ebene gezogenen Geraden.

Zusatz 2. Lehrs. b läßt sich auch so ausdrücken: Dreht man einen rechten Winkel um einen seiner Schenkel, so beschreibt der andere eine Ebene, die auf dem ersten senkrecht steht. — Hieraus folgt weiter: Dreht man die durch einen Punkt und eine Gerade gelegte Ebene um die Gerade als Achse so lange herum, bis sie wieder in ihre erste Lage zurückgekehrt ist, so hat der Punkt einen Kreis beschrieben, dessen Ebene senkrecht zur Drehachse, dessen Halbmesser die von dem Punkt auf die Drehachse gefällte Senkrechte, und dessen Mittelpunkt der Fußpunkt dieser Senkrechten ist.

Zusatz 3. Die Ebene eines Keilwinkels (I. Einl. 9. a) steht senkrecht zur Keilkante.

Lehrsatz 7.

a. Auf einer Ebene läßt sich in einem Punkte derselben nur **eine** Senkrechte errichten, und auf eine Ebene läßt sich von einem Punkt außerhalb derselben nur **eine** Senkrechte fällen.

b. Durch einen Punkt (auf oder außerhalb einer Geraden) läßt sich nur **eine** zu der Geraden senkrechte Ebene legen.

Beweis. a. Gäbe es durch den Punkt A (welcher in oder außerhalb der Ebene M liegen mag) zwei Senkrechte zu M, so würden diese (nach I. Einl. 7. a) auch senkrecht stehen auf der Linie, nach der die durch beide Senkrechte gelegte Ebene N die Ebene M schneidet. Man hätte also in derselben Ebene N zwei Senkrechte zu einer Geraden durch denselben Punkt, — was nicht möglich ist. Folglich kann es auf der Ebene durch den Punkt nur eine Senkrechte geben.

b. Gäbe es durch den Punkt A zwei senkrechte Ebenen M und M′ zu der Geraden g, so würden diese, falls A außerhalb g liegt (Fig. 10. a), von der durch

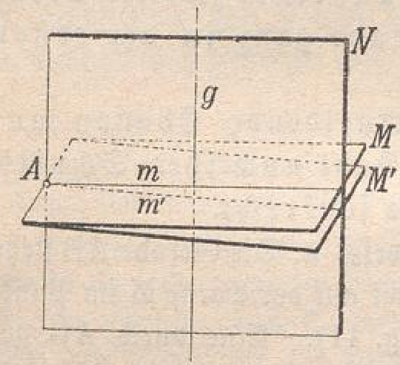

Fig. 10. a.

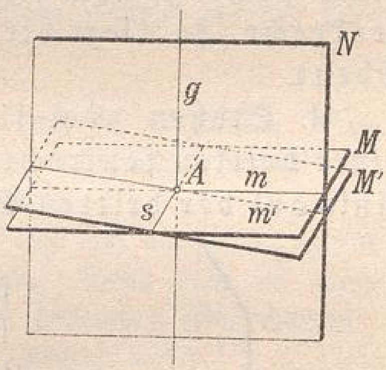

Fig. 10. b.

A und g gelegten Ebene N nach zwei Geraden m und m′ geschnitten werden, die (nach I. Einl. 7. a) auf g senkrecht stehen müßten. Man hätte also wieder in derselben Ebene zwei Senkrechte zu einer Geraden durch denselben Punkt, — was nicht möglich ist. — Liegt der Punkt A auf der Geraden g (Fig. 10. b), so lege man die Ebene N beliebig durch g (doch so, daß sie nicht durch die Schnittlinie s der Ebenen M und M′ geht,) und mache den gleichen Schluß.

Zusatz. Mittels Lehrs. b und I. 6. Zus. 3 beweist man den Kehrsatz von I. Einl. 9. b: Zwei Keile sind gleich, wenn ihre Keilwinkel gleich sind. — Daraus folgt: Zwei Scheitelkeile sind gleich.

Lehrsatz 8.

a. Steht eine Gerade auf einer Ebene senkrecht, so steht auch jede durch sie gelegte Ebene auf der ersten Ebene senkrecht.

b. Steht eine Gerade, die in einer von zwei senkrechten Ebenen liegt, senkrecht auf deren Schnittlinie, so steht sie auch senkrecht auf der andern Ebene.

c. Stehen eine Gerade und eine Ebene, die einen Punkt gemein haben, auf einer zweiten Ebene senkrecht, so liegt die Gerade ganz in der ersten Ebene.

d. Stehen zwei sich schneidende Ebenen auf einer dritten senkrecht, so steht auch ihre Schnittlinie auf der dritten Ebene senkrecht.

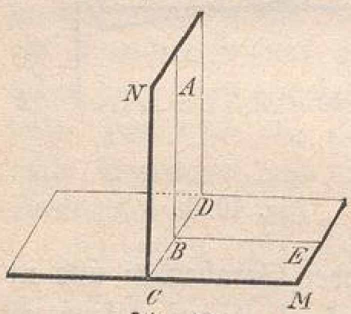

Fig. 11.

Beweis. a. Die Gerade AB stehe senkrecht auf der Ebene M im Punkt B (Fig. 11). Eine durch AB gelegte Ebene N schneide M nach der (durch B gehenden) Geraden CD. Man ziehe in der Ebene M die Linie BE ⊥ CD. Da nun BA ⊥ CD (I. Einl. 7. a) und BE ⊥ CD ist, so ist ABE der Keilwinkel des einen von den zwei Ebenen gebildeten Keils (I. Einl. 9. a); es ist aber W. ABE = R (I. Einl. 7. a), folglich stehen die zwei Ebenen auf einander senkrecht (I. Einl. 9. e).

b. Ebene N sei senkrecht auf Ebene M (Fig. 11), CD sei ihre Schnittlinie; in der Ebene N liege die Gerade AB, und es sei AB $\perp$ CD. Man ziehe in M die Linie BE $\perp$ CD; dann ist ABE der Keilwinkel des einen von den zwei Ebenen gebildeten Keils, also W. ABE = R. Nun steht AB senkrecht auf BE und BD, folglich auch auf M (I. 6 a).

c. Die Gerade AB und die Ebene N, welche den Punkt A gemein haben, stehen beide senkrecht auf der Ebene M. Läge nun AB nicht in N, so könnte man in N durch A eine Gerade AB′ senkrecht zu ihrer Spurlinie CD ziehen, welche (nach b) auch senkrecht zu M wäre; es würden also durch A zwei Senkrechte zu M vorhanden sein; — was nicht möglich ist (I. 7. a). Folglich muß AB in N liegen.

d. Die zwei Ebenen N und N′ seien senkrecht auf der Ebene M. Von einem beliebigen Punkte der Schnittlinie der Ebenen N und N′ fälle man die Senkrechte auf M; dann muß diese (nach c) sowohl in N als in N′ liegen, also mit der Schnittlinie von N und N′ zusammenfallen; folglich steht die Schnittlinie senkrecht auf M.

Zusatz 1. Lehrs. a läßt sich auch so ausdrücken: Eine Ebene steht auf einer andern Ebene senkrecht, wenn sie auf einer in dieser liegenden Geraden senkrecht steht.

Zusatz 2. Durch eine Gerade läßt sich nur eine Ebene senkrecht zu einer andern Ebene legen. (Denn gäbe es deren zwei, so würden, nach b, von einem beliebigen Punkt der Geraden zwei Senkrechte auf die Ebene möglich sein.)

Zusatz 3. Die projizierende Ebene (I. Einl. 8. a) einer Geraden steht (nach a) senkrecht auf der Projektionsebene und enthält (nach c) die projizierenden Lote ihrer sämtlichen Punkte; die Projektionen der einzelnen Punkte liegen daher alle in der Projektion der Geraden. Es ist folglich gleichgültig, welcher Punkt einer Geraden zur Konstruktion ihrer Projektion verwendet wird. Man erhält sie auch als Verbindungslinie der Projektionen von zwei beliebigen Punkten, oder als Verbindungslinie der Projektion eines beliebigen Punktes mit dem Spurpunkt. Die

Projektion einer Strecke ist identisch mit der Verbindungsstrecke der Projektionen ihrer Endpunkte. — Die Projektion einer zur Projektionsebene senkrechten Geraden ist ein Punkt, welcher identisch ist mit ihrem Spurpunkt.

Lehrsatz 9.

a. Ein rechter Winkel, dessen einer Schenkel in einer Ebene liegt, projiziert sich auf diese Ebene wieder als rechter Winkel.

b. Ist die Projektion eines Winkels, dessen einer Schenkel in der Projektionsebene liegt, ein Rechter, so ist der Winkel selbst ein Rechter.

Beweis. a. Der Winkel ABC (Fig. 12*), dessen Schenkel BC in der Ebene M liegt, sei ein Rechter. Fällt man AF ⊥ M und zieht FB, so ist FB die Projektion von AB auf M (I. 8. Zus. 3). Nun stehen CB und FA auf einander senkrecht (I. 6. Zus. 1); außerdem steht CB senkrecht auf BA, folglich steht CB senkrecht auf der Ebene BFA (I. 6. Zus. 1), und daher auch senkrecht auf BF.

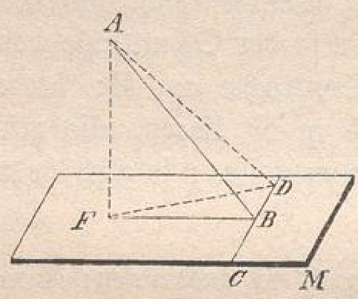

Fig. 12.

b. Der Winkel FBC (Fig. 12), welcher die Projektion des Winkels ABC auf die Ebene M vorstellt, sei ein Rechter. Nun ist CB ⊥ BF und ⊥ FA, folglich ⊥ auf der Ebene BFA, und daher auch ⊥ BA.

Anderer Beweis. **a.** Ist D (Fig. 12) ein beliebiger Punkt auf BC, und zieht man DA und DF, so ist:

$$\begin{aligned} BD^2 &= AD^2 - AB^2 \\ &= (AF^2 + FD^2) - (AF^2 + FB^2) \\ &= FD^2 - FB^2, \end{aligned}$$

folglich: $FB \perp BD$.

*) Man denke sich in Fig. 12 die Linien AD und FD zunächst hinweg.

b. Macht man dieselbe Konstruktion wie in Bew. a, so ist:

$$BD^2 = FD^2 - FB^2$$
$$= (AD^2 - AF^2) - (AB^2 - AF^2)$$
$$= AD^2 - AB^2,$$

folglich: $AB \perp BD.$

Zusatz. Es giebt noch einen zweiten Kehrsatz, nämlich: Hat man zwei rechte Winkel, die einen Schenkel und den Scheitel gemeinsam haben, und fällt von einem Punkt des freien Schenkels des ersten Winkels die Senkrechte auf den freien Schenkel des zweiten, so steht diese senkrecht auf der Ebene des zweiten Winkels. (Beweis ähnlich wie a und b oder indirekt.)

Lehrsatz 10.

a. Steht die eine von zwei parallelen Geraden senkrecht auf einer Ebene, so steht auch die andere senkrecht auf der Ebene.

b. Stehen zwei Gerade auf derselben Ebene senkrecht, so sind sie parallel.

Beweis. a. Es sei (Fig. 13) $AB \parallel A'B'$, und $AB \perp$ auf der Ebene M. B und B′ seien die Spurpunkte von AB und A′B′. Zieht man in der Ebene M durch B zwei beliebige Gerade BC und BD, und durch B′ die Parallelen B′C′ und B′D′ zu ihnen, so ist W. ABC = A′B′C′ und W. ABD = A′B′D′ (I. 4. b). Da nun die W. ABC und ABD Rechte sind, so müssen auch die W. A′B′C′ und A′B′D′ Rechte sein. Folglich ist $A'B' \perp M$ (I. 6. a).

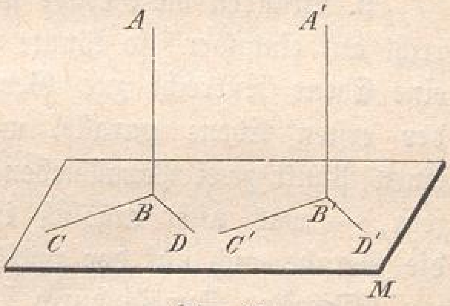

Fig. 13.

b. Es sei $AB \perp M$ und $A'B' \perp M$; wäre nun A′B′ nicht parallel AB, so könnte man durch B′ eine Gerade B′A″ parallel BA ziehen, welche (nach a) $\perp$ M wäre; es würden also auf M in B′ zwei Gerade senkrecht stehen, —

was nicht möglich ist (I. 7. a); folglich muß A′B′ ∥ AB sein.

Zusatz. Aus b folgt: Die Projektionen paralleler Geraden auf irgend eine Ebene sind parallel. (Denn nach b und I. 4. a sind die projizierenden Ebenen parallel, folglich nach I. 2 auch die Projektionen.)

Lehrsatz 11.

a. Steht eine Gerade auf zwei Ebenen senkrecht, so sind die Ebenen parallel.

b. Steht eine Gerade auf einer von zwei parallelen Ebenen senkrecht, so steht sie auch auf der andern senkrecht.

Beweis. a. Wären die Ebenen nicht parallel, so würden sie sich schneiden. Würde man dann einen beliebigen Punkt der Schnittlinie verbinden mit den zwei Spurpunkten der Geraden, so entstünde ein Dreieck, in dem zwei Winkel Rechte wären; — was nicht möglich ist. Folglich müssen die Ebenen parallel sein.

(Direkter Beweis durch I. 4. a.)

b. Stünden die Gerade und die zweite Ebene nicht senkrecht auf einander, so könnte man durch ihren Schnittpunkt eine Ebene senkrecht zur Geraden legen, welche (nach a) der ersten Ebene parallel wäre; es würden also durch einen Punkt zwei Parallelebenen zu einer Ebene vorhanden sein, — was nicht möglich ist (I. 5. Zus.). Folglich muß die Gerade auch auf der zweiten Ebene senkrecht stehen.

(Direkter Beweis durch I. 2 und I. 6. a.)

12—15: Maß-Beziehungen.

Lehrsatz 12.

Von allen Strecken, die zwischen einem Punkte und einer Ebene liegen, ist