Lehrbuch der Stereometrie

Hauck, Guido

Tübingen, 1893

12 - 15: Maß-Beziehungen

urn:nbn:de:hbz:466:1-77777

was nicht möglich ist (I. 7. a); folglich muß A'B' ∥ AB sein.

Zusatz. Aus b folgt: Die Projektionen paralleler Geraden auf irgend eine Ebene sind parallel. (Denn nach b und I. 4. a sind die projizierenden Ebenen parallel, folglich nach I. 2 auch die Projektionen.)

Lehrsatz 11.

a. Steht eine Gerade auf zwei Ebenen senkrecht, so sind die Ebenen parallel.

b. Steht eine Gerade auf einer von zwei parallelen Ebenen senkrecht, so steht sie auch auf der andern senkrecht.

Beweis. a. Wären die Ebenen nicht parallel, so würden sie sich schneiden. Würde man dann einen beliebigen Punkt der Schnittlinie verbinden mit den zwei Spurpunkten der Geraden, so entstünde ein Dreieck, in dem zwei Winkel Rechte wären; — was nicht möglich ist. Folglich müssen die Ebenen parallel sein.

(Direkter Beweis durch I. 4. a.)

b. Stünden die Gerade und die zweite Ebene nicht senkrecht auf einander, so könnte man durch ihren Schnittpunkt eine Ebene senkrecht zur Geraden legen, welche (nach a) der ersten Ebene parallel wäre; es würden also durch einen Punkt zwei Parallelebenen zu einer Ebene vorhanden sein, — was nicht möglich ist (I. 5. Zus.). Folglich muß die Gerade auch auf der zweiten Ebene senkrecht stehen.

(Direkter Beweis durch I. 2 und I. 6. a.)

12—15: Maß-Beziehungen.

Lehrsatz 12.

Von allen Strecken, die zwischen einem Punkte und einer Ebene liegen, ist

a. die auf der Ebene senkrechte Strecke die kürzeste.

b. Alle diejenigen sind gleich, deren Fußpunkte gleich weit vom Fußpunkt der Senkrechten entfernt sind.

c. Sie sind um so größer, je weiter ihre Fußpunkte vom Fußpunkt der Senkrechten entfernt sind.

Beweis. a. Ist A (Fig. 14) der Punkt, M die Ebene, AF die von A auf M gefällte Senkrechte, AB irgend eine andere Strecke zwischen A und M: so ziehe man FB. Nun ist △ AFB rechtwinklig, folglich Kathete AF kleiner als Hypotenuse AB.

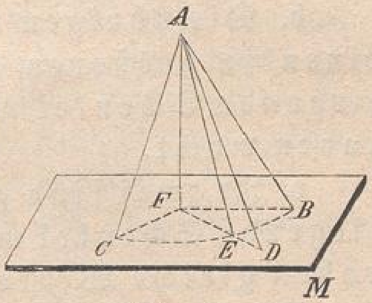

Fig. 14.

b. Ist AC (Fig. 14) eine dritte Strecke zwischen A und der Ebene, und ist FC = FB, so ist △ AFC ≌ AFB, folglich AC = AB.

c. Ist AD (Fig. 14) eine vierte Strecke, und liegt ihr Fußpunkt D so, daß FD > FB, so kann man von FD ein Stück FE = FB abschneiden. Zieht man dann AE, so ist in der Ebene AFD : AD > AE; da aber AE = AB (nach b), so ist auch AD > AB.

Zusatz 1. Die Sätze gelten auch umgekehrt.

Zusatz 2. Aus b folgt: Der geometrische Ort eines Punktes, der in einer Ebene liegt und von einem festen Punkt eine geg. Entfernung hat, ist eine Kreislinie, — gleichgültig ob der feste Punkt in der Ebene oder außerhalb derselben liegt. Das gleiche gilt für den geometrischen Ort einer Geraden, die in einer Ebene liegt und von einem festen Punkt eine geg. Entfernung hat (Beweis durch I. 9. b). — Ferner folgt: Der geometrische Ort eines Punktes, der von allen Punkten (und allen Tangenten) einer Kreislinie gleich weit entfernt ist, ist die auf der Ebene des Kreises in dessen Mittelpunkt errichtete Senkrechte.

Lehrsatz 13.

Ist eine Gerade schief zu einer Ebene, so ist unter den Winkeln, die sie mit den durch ihren Spurpunkt in der Ebene gezogenen Geraden macht,

a. der spitze Winkel, den sie mit ihrer Projektion macht, der kleinste, dessen Nebenwinkel der größte.

b. Die übrigen Winkel sind um so größer, einen je größeren Winkel der in der Ebene liegende Schenkel mit der Projektion der Geraden macht.

c. Je zwei sind gleich, deren in der Ebene liegende Schenkel mit der Projektion der Geraden gleiche Winkel machen.

Beweis. a. Die Gerade SA (Fig. 15) schneide die Ebene M in S; man fälle AF ⊥ M und ziehe SF, dann ist SF die Projektion von SA auf die Ebene M (I. 8. Zus. 3). SB sei eine beliebige andere durch S gehende Gerade in M; man schneide von ihr SB = SF ab, ziehe AB und FB. Dann ist in den zwei Dreiecken ASF und ASB : SA = SA, SF = SB, AF < AB (I. 12. a); folglich (nach bekanntem Satz der ebenen Geometrie): W. ASF < ASB. — Hieraus folgt zugleich, daß der Nebenwinkel von ASF der größte ist. (Denn gäbe es einen noch größeren, so müßte dessen Nebenwinkel noch kleiner als W. ASF sein.)

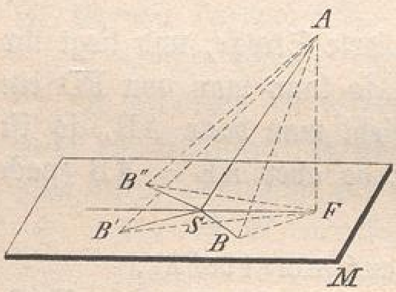

Fig. 15.

b. Ist SB′ (Fig. 15) eine weitere durch S gehende Gerade in M, und ist W. FSB′ > FSB, so mache man SB′ = SB und ziehe AB′ und FB′; dann ergiebt sich zunächst aus der Vergleichung der zwei Dreiecke FSB′ und FSB : FB′ > FB;

hieraus folgt: $AB' > AB$ (I. 12. c), worauf ſich weiter aus der Vergleichung der zwei Dreiecke ASB' und ASB ergiebt: W. $ASB' > ASB$.

c. Liegt SB'' (Fig. 15) in M auf der andern Seite von SF ſo, daß W. $FSB'' = FSB'$: ſo mache man wieder $SB'' = SB'$ und ziehe AB'' und FB''; dann iſt $\triangle FSB'' \cong FSB'$, $FB'' = FB'$, und daher $AB'' = AB'$ (I. 12. b); hieraus aber folgt: $\triangle ASB'' \cong ASB'$, W. $ASB'' = ASB'$.

Zuſatz 1. Die Sätze gelten auch umgekehrt.

Zuſatz 2. Die Neigung einer Geraden gegen eine Ebene (I. Einl. 8. b) wird alſo durch den kleinſten zwiſchen der Geraden und der Ebene möglichen Winkel gemeſſen, ebenſo wie die Entfernung eines Punktes von einer Ebene durch die kleinſte zwiſchen Punkt und Ebene mögliche Strecke gemeſſen wird.

Zuſatz 3. Lehrſ. I. 9. b kann als ſpezieller Fall von Lehrſ. c angeſehen werden.

Lehrſatz 14.

a. Eine Gerade macht mit parallelen Ebenen gleiche Neigungswinkel.

b. Parallele Gerade machen mit einer Ebene gleiche Neigungswinkel.

c. Parallele Strecken zwiſchen zwei parallelen Ebenen ſind gleich.

d. Werden mehrere Gerade von einer Anzahl paralleler Ebenen geſchnitten, ſo ſind die Abſchnitte der einzelnen Geraden zwiſchen denſelben Ebenen einander proportioniert.

Beweis. a. Fällt man von einem beliebigen Punkt der Geraden auf eine der parallelen Ebenen die Senkrechte, ſo ſteht dieſe auch ſenkrecht auf den übrigen (I. 11. b). Legt man daher durch die Gerade und die Senkrechte eine Ebene, ſo ſtellen deren Schnittlinien mit den parallelen Ebenen die Projektionen der Geraden auf dieſe vor (I. Einl. 8. a). Da aber die Schnittlinien alle unter sich parallel sind (I. 2), so macht die Gerade mit allen ihren Projektionen gleiche Winkel, folglich auch mit allen Ebenen (I. Einl. 8. b).

b. Folgt aus I. 10. Zus. und I. 4. b.

c. Sind AB und A′B′ zwei parallele Strecken zwischen zwei parallelen Ebenen, so ist ABB′A′ ein Parallelogramm (I. 2), folglich AB = A′B′.

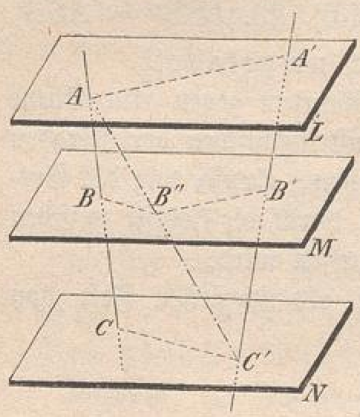

Fig. 16.

d. Zwei Gerade werden von den parallelen Ebenen L, M, N (Fig. 16) geschnitten in den Punkten A, B, C und A′, B′, C′. Man ziehe AC′, welche die M schneidet in B″; die Ebene CAC′ schneidet dann M nach BB″, N nach CC′, und es ist BB″ ∥ CC′ (I. 2), woraus folgt: $\frac{AB}{BC} = \frac{AB''}{B''C'}$. Ebenso giebt die Ebene AC′A′ die parallelen Schnittlinien AA′ und B″B′, woraus folgt: $\frac{A'B'}{B'C'} = \frac{AB''}{B''C'}$. Daher ist auch: $\frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'}$.

Zusatz 1. Sind zwei Ebenen parallel, so sind (nach Lehrs. c und I. 10. b) alle Punkte der einen Ebene von der andern gleich weit entfernt; diese konstante Entfernung wird als *die Entfernung der zwei parallelen Ebenen* bezeichnet. — *Der geometrische Ort eines Punktes, der von einer Ebene eine gegebene Entfernung hat,* wird gebildet von zwei Ebenen, die in der geg. Entfernung parallel mit der ersten Ebene zu beiden Seiten derselben liegen.

Zusatz 2. Ist eine Gerade einer Ebene parallel, so haben alle ihre Punkte gleiche Entfernung von der Ebene; diese Entfernung wird als *die Entfernung der Geraden von der Ebene* bezeichnet.

Zusatz 3. Die (in d besprochenen) zwischen einer Anzahl paralleler Ebenen liegenden Abschnitte einer beliebigen Geraden sind den Entfernungen der parallelen Ebenen proportioniert. (Hiernach anderer Beweis von d.)

Zusatz 4. Eine Ebene macht mit parallelen Ebenen gleiche Neigungswinkel. (I. 6. Zus. 3 und I. 10. a.)

Lehrsatz 15.

Zwischen zwei windschiefen Geraden giebt es immer eine Strecke, die auf beiden senkrecht steht und zugleich die kürzeste Strecke zwischen ihnen ist.

Beweis. Die zwei windschiefen Geraden seien AB und CD (Fig. 17). Durch einen beliebigen Punkt C der Geraden CD ziehe man die Parallele CE zu AB und lege durch CD und CE die Ebene M; dann ist AB ∥ M (I. 1. b). Hierauf fälle man von einem beliebigen Punkt F′ der Geraden AB die Senkrechte F′G′ auf M und ziehe

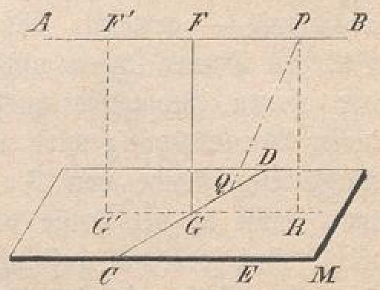

Fig. 17.

durch den Fußpunkt G′ die Parallele zu AB, welche in der Ebene M liegt (I. 1. c) und, da sie auch ∥ CE ist, CD schneiden muß, in G. Endlich ziehe man in der Ebene ABG′G durch G die Parallele zu G′F′, welche AB schneidet in F. Es ist nun FG ⊥ M (I. 10. a), also ⊥ CD und ⊥ G′G, und weil AB ∥ G′G, auch ⊥ AB. Folglich ist FG die auf AB und CD senkrechte Strecke.

Zieht man zwischen AB und CD eine beliebige andere Strecke PQ, so ist diese stets größer als FG. Denn fällt man PR ⊥ M, so ist PR < PQ (I. 12. a), also, weil PR = FG (I. 14. Zus. 2), auch FG < PQ.

Anmerkung. FG heißt die kürzeste Entfernung oder auch schlechtweg die Entfernung der zwei windschiefen Geraden.

Zusatz. Durch eine von zwei windschiefen Geraden läßt sich stets eine Ebene parallel zur andern legen und nur eine. — Durch zwei windschiefe Gerade läßt sich stets ein Paar paralleler

Ebenen legen und nur eines. Ihr Abstand ist gleich der kürzesten Entfernung der zwei Windschiefen. Diese kann auch erhalten werden als Schnittlinie der zwei Ebenen, die senkrecht zu den zwei parallelen Ebenen durch die Windschiefen gelegt werden.

C. Aufgaben.

Vorbemerkung.

Postulat der Stereometrie. Bezüglich der praktischen Ausführbarkeit von Konstruktionen im Raum wird in der Stereometrie die Voraussetzung — aber nur die eine Voraussetzung — gemacht, daß man durch gegebene Punkte nach Belieben Ebenen legen und in jeder Ebene die Konstruktionen der ebenen Geometrie ausführen könne. Mit Zugrundelegung dieser Voraussetzung wird in den folgenden Nummern 1—6 zunächst eine Reihe von Fundamentalaufgaben gelöst, die man dann in der Folge bei stereometrischen Konstruktionen benützt, ohne jedesmal auf ihre Einzelausführung zurückzugehen (in ähnlicher Weise wie dies in der ebenen Geometrie bezüglich des Ziehens von Parallelen, Senkrechten u. s. w. geschieht).

1—6: Fundamentalaufgaben.

Aufgabe 1.

a. Durch einen geg. Punkt eine Gerade parallel zu einer geg. Geraden zu ziehen.

b. Durch einen geg. Punkt eine Ebene parallel zu einer geg. Ebene zu legen.

Auflösung. a. Man lege durch den Punkt und die Gerade eine Ebene und vollziehe die übrige Konstruktion in dieser.

b. Man ziehe in der geg. Ebene zwei beliebige Gerade, die sich schneiden, ziehe zu ihnen durch den geg. Punkt die Parallelen (Aufg. a) und lege durch diese eine Ebene: so ist sie die verlangte.

(Beweise durch I. Einl. 4. b und I. 4. a.)