Lehrbuch der Stereometrie

Hauck, Guido

Tübingen, 1893

C. Aufgaben.

Ebenen legen und nur eines. Ihr Abstand ist gleich der kürzesten Entfernung der zwei Windschiefen. Diese kann auch erhalten werden als Schnittlinie der zwei Ebenen, die senkrecht zu den zwei parallelen Ebenen durch die Windschiefen gelegt werden.

C. Aufgaben.

Vorbemerkung.

Postulat der Stereometrie. Bezüglich der praktischen Ausführbarkeit von Konstruktionen im Raum wird in der Stereometrie die Voraussetzung — aber nur die eine Voraussetzung — gemacht, daß man durch gegebene Punkte nach Belieben Ebenen legen und in jeder Ebene die Konstruktionen der ebenen Geometrie ausführen könne. Mit Zugrundelegung dieser Voraussetzung wird in den folgenden Nummern 1—6 zunächst eine Reihe von Fundamentalaufgaben gelöst, die man dann in der Folge bei stereometrischen Konstruktionen benützt, ohne jedesmal auf ihre Einzelausführung zurückzugehen (in ähnlicher Weise wie dies in der ebenen Geometrie bezüglich des Ziehens von Parallelen, Senkrechten u. s. w. geschieht).

1—6: Fundamentalaufgaben.

Aufgabe 1.

a. Durch einen geg. Punkt eine Gerade parallel zu einer geg. Geraden zu ziehen.

b. Durch einen geg. Punkt eine Ebene parallel zu einer geg. Ebene zu legen.

Auflösung. a. Man lege durch den Punkt und die Gerade eine Ebene und vollziehe die übrige Konstruktion in dieser.

b. Man ziehe in der geg. Ebene zwei beliebige Gerade, die sich schneiden, ziehe zu ihnen durch den geg. Punkt die Parallelen (Aufg. a) und lege durch diese eine Ebene: so ist sie die verlangte.

(Beweise durch I. Einl. 4. b und I. 4. a.)

Aufgabe 2.

a. Durch eine geg. Gerade eine Ebene parallel zu einer zweiten geg. Geraden zu legen.

b. Durch einen geg. Punkt eine Ebene parallel zu zweien geg. Geraden zu legen.

Auflösung. a. Man ziehe durch einen beliebigen Punkt der ersten Geraden die Parallele zur zweiten (Aufg. 1. a) und lege durch die erste Gerade und die Parallele eine Ebene: so ist diese die verlangte.

b. Man ziehe durch den Punkt die Parallelen zu den zwei geg. Geraden und lege durch sie eine Ebene: so ist diese die verlangte.

(Beweise durch I. 1. b.)

Aufgabe 3.

a. Durch einen auf einer Geraden geg. Punkt eine Ebene senkrecht zu der Geraden zu legen.

b. Durch einen außerhalb einer Geraden geg. Punkt eine Ebene senkrecht zu der Geraden zu legen.

Auflösung. a. Man lege durch die Gerade zwei beliebige Ebenen, errichte in ihnen auf der Geraden in dem geg. Punkt je eine Senkrechte, und lege durch die zwei Senkrechten eine Ebene: so ist diese die verlangte.

b. Man fälle in der durch Punkt und Gerade gelegten Ebene die Senkrechte von dem Punkt auf die Gerade, errichte in deren Fußpunkt auf der Geraden (in einer beliebig durch sie gelegten Ebene) eine zweite Senkrechte, und lege durch beide Senkrechte eine Ebene: so ist diese die verlangte.

(Beweise durch I. 6. a.)

Aufgabe 4.

a. Von einem außerhalb einer Ebene geg. Punkt die Senkrechte auf die Ebene zu fällen.

b. Auf einer Ebene in einem geg. Punkt derselben die Senkrechte zu errichten.

Auflösung. a. Ist M (Fig. 18*) die geg. Ebene, A der geg. Punkt, so ziehe man in M eine Gerade CD beliebig, fälle in der durch A und CD gelegten Ebene: AB ⊥ CD, ziehe in der Ebene M: BF ⊥ CD, und fälle in der durch AB und BF gelegten Ebene: AF ⊥ BF, so ist AF die verlangte Senkrechte.

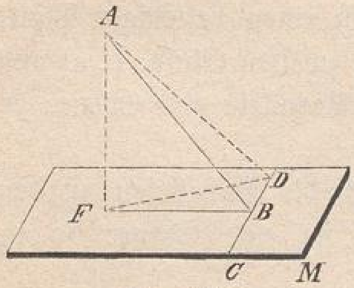

Fig. 18.

b. Ist M (Fig. 18) die geg. Ebene, F der geg. Punkt, so ziehe man in M eine Gerade CD beliebig, fälle FB ⊥ CD, ziehe in einer beliebig durch CD gelegten Ebene: BA ⊥ CD, und errichte in der durch FB und BA gelegten Ebene: FA ⊥ FB, so ist FA die verlangte Senkrechte.

(Beweise durch I. 9. Zus.)

Aufgabe 5.

Durch eine geg. Gerade eine Ebene senkrecht zu einer geg. Ebene zu legen.

Auflösung. Man fälle von einem beliebigen Punkt der Geraden die Senkrechte auf die Ebene (Aufg. 4. a) und lege durch die Gerade und die Senkrechte eine Ebene: so ist diese die verlangte. (Liegt die Gerade in der geg. Ebene, so kommt Aufg. 4. b zur Anwendung.)

(Beweis durch I. 8. a.)

---

*) Man denke sich in Fig. 18 die Linien AD und FD hinweg.

Aufgabe 6.

a. Den Schnittpunkt einer Geraden mit einer ihr nicht parallelen Ebene zu bestimmen.

b. Die Schnittlinie zweier Ebenen zu bestimmen.

Auflösung. **a.** Man fälle (Fig. 19) von einem beliebigen Punkt A der geg. Geraden AB die Senkrechte AF auf die geg. Ebene M (Aufg. 4. a) und ziehe in der durch AB und AF gelegten Ebene FG ⊥ FA: so schneidet FG die Gerade AB in dem verlangten Punkt S.

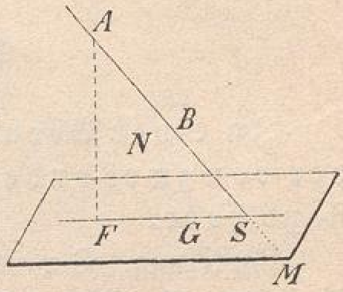

Fig. 19.

b. Man ziehe in einer der zwei geg. Ebenen zwei beliebige Gerade und bestimme deren Schnittpunkte mit der andern Ebene (Aufg. a): so ist die Verbindungslinie dieser zwei Schnittpunkte die verlangte Schnittlinie. (Bei Ausführung der Konstruktion benütze man die vom Schnittpunkt der zwei Geraden auf die andere Ebene gefällte Senkrechte.)

(Beweise durch I. 6. b und I. Einl. 6. b.)

7—10: Beispiele von Konstruktionsaufgaben.

Aufgabe 7.

a. Durch einen geg. Punkt —

b. Parallel zu einer geg. Richtungslinie eine Gerade zu ziehen, die zwei geg. windschiefe Gerade schneide.

Auflösung. **a.** Man lege durch den geg. Punkt und eine der zwei geg. Geraden eine Ebene, bestimme deren Schnittpunkt mit der andern Geraden (Aufg. 6. a), und verbinde diesen mit dem geg. Punkt: so ist die Verbindungslinie die verlangte Gerade.

b. Man lege parallel zu der geg. Richtungslinie durch die eine der zwei geg. Geraden eine Ebene (Aufg. 2. a), bestimme deren Schnittpunkt mit der andern Geraden, und ziehe durch diesen die Parallele zur geg. Richtungslinie: so ist sie die verlangte Gerade.

(Beweise durch Einl. 4. a und I. 1. c.)

Aufgabe 8.

In einer Ebene einen Punkt zu bestimmen, der von zwei andern Ebenen je einen geg. Abstand habe.

Auflösung. Der verlangte Punkt soll 1) in der Ebene M liegen, 2) von der Ebene N den Abstand a, 3) von der Ebene N′ den Abstand a′ haben. — Die Ebene M stellt einen geom. Ort für ihn vor. Die zweite Bedingung liefert einen zweiten geom. Ort, der (nach I. 14. Zus. 1) aus zwei Ebenen besteht, die parallel zu N im Abstand a zu beiden Seiten von N liegen; sie schneiden die Ebene M nach zwei parallelen Geraden, auf denen der gesuchte Punkt liegen muß. Um also diese Geraden zu konstruieren, errichte man in einem beliebigen Punkt der Ebene N die Senkrechte (Aufg. 4. b), schneide auf ihr vom Fußpunkt aus nach beiden Seiten die Strecke a ab, lege durch die Endpunkte Ebenen parallel zu N (Aufg. 1. b), und bestimme deren Schnittlinien mit M (Aufg. 6. b). In gleicher Weise erhält man aus der dritten Bedingung als dritten geom. Ort ein zu N′ paralleles Ebenenpaar, welches die Ebene M nach einem zweiten Geradenpaar schneidet, das ebenso konstruiert wird. Beide Geradenpaare schneiden sich nun in 4 Punkten, von denen jeder eine Lösung der Aufgabe vorstellt. — (Die geg. Ebenen M, N, N′ dürfen nicht zu einer und derselben Geraden parallel sein.)

Aufgabe 9.

In einer Ebene durch den Spurpunkt einer geg. Geraden eine Linie zu ziehen, die mit der Geraden einen geg. Winkel mache.

Auflösung. Die geg. Gerade g (Fig. 20) schneide die geg. Ebene M in A; der geg. (spitze) Winkel sei w. Angenommen, AD wäre die gesuchte Linie, so fälle man von einem beliebigen Punkt B der Geraden g die Senkrechte BC auf M und ziehe AC; dann ist AC die Projektion von AB auf M. Fällt man ferner CD ⊥ AD und zieht BD, so ist auch BD ⊥ AD (I. 9. b). In der so entstandenen Figur

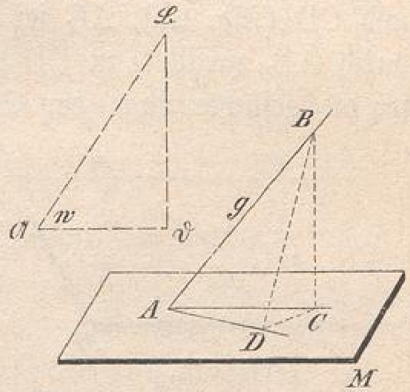

Fig. 20.

ist nun △ ABC nach Gestalt und Lage bekannt; △ ABD kann seiner Gestalt nach bestimmt werden aus Hyp. AB und W. BAD = w. Dann aber kann auch △ ACD aus Hyp. AC und Kath. AD nach Gestalt und Lage in der Ebene M gezeichnet werden, wodurch AD gefunden ist. Man hat demnach folgende Konstruktion:

Von einem beliebigen Punkt B der Geraden g fälle man BC ⊥ M (Aufg. 4. a) und ziehe AC; hierauf konstruiere man (in einer Nebenfigur) ein rechtw. Dreieck 𝔄𝔅𝔇 aus Hyp. 𝔄𝔅 = AB und W. 𝔅𝔄𝔇 = w; endlich zeichne man in der Ebene M ein rechtw. Dreieck ACD über AC als Hyp. mit AD = 𝔄𝔇 als Kath.: so ist AD die verlangte Gerade. — Wäre Winkel w stumpf, so würde man dieselbe Konstruktion mit seinem spitzen Supplement ausführen und schließlich DA über A verlängern.

Es giebt im allgemeinen zwei Auflösungen. Wann giebt es nur eine und wann wird die Aufgabe unmöglich? (Vgl. I. 13. c u. a, nebst Zus. 3.)

Aufgabe 10.

Zwischen zwei windschiefe Gerade eine Strecke von geg. Länge so zu legen, daß sie mit beiden Geraden gleiche Winkel mache.

Auflösung. Die zwei windschiefen Geraden seien AB und CD (Fig. 21), AC sei ihre kürzeste Entfernung, M die durch AB parallel zu CD gelegte Ebene (vgl. I. 15). BD sei die gesuchte Lage der Strecke, BD mache also mit BA und DC gleiche Winkel. Zieht man nun durch B die Parallele BF zu CD (welche nach I. 1. c in M liegen muß), so macht BD auch mit BA und BF gleiche Winkel; bestimmt man daher die Projektion von BD auf M, indem man DE $\perp$ M fällt und BE zieht, so muß auch die Projektion BE mit BA und BF gleiche Winkel machen (I. 13. c mit Zus. 1). Zieht man noch AE, so ist AE $\parallel$ CD $\parallel$ BF, folglich W. BEA = EBF = EBA, also $\triangle$ BEA gleichschenklig, AB = AE = CD. — Da nun das rechtw. $\triangle$ BDE seiner Gestalt nach gezeichnet werden kann aus BD = der geg. Strecke und DE = der kürzesten Entfernung der zwei Windschiefen, so ergiebt sich folgende Konstruktion:

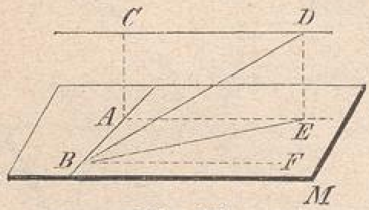

Fig. 21.

Man bestimme (nach I. 15) die kürzeste Entfernung AC der zwei Geraden und zeichne (in einer Nebenfigur) ein rechtw. Dreieck 𝔅𝔇𝔈 aus Hyp. 𝔅𝔇 = der geg. Strecke und Kath. 𝔇𝔈 = CA; hierauf ziehe man durch A die Parallele AE zu CD und lege zwischen die Schenkel von W. BAE die Strecke BE = 𝔅𝔈 so hinein, daß AB = AE wird; zieht man endlich in der Ebene CDEA durch E die Parallele zu AC, welche CD schneidet in D, und zieht BD: so ist diese die verlangte Strecke.

Es giebt im allgemeinen vier Auflösungen; (statt des

W. EAB können nämlich auch die drei anderen von AB und AE gebildeten Winkelräume benützt werden.)

Zusatz. Werden zwei windschiefe Gerade von einer dritten Geraden so geschnitten, daß diese mit beiden gleiche Winkel macht, so liegen die Schnittpunkte gleich weit entfernt von den Fußpunkten der kürzesten Entfernung der zwei Windschiefen; und umgekehrt.

D. Anhang

von Lehrsätzen und Aufgaben.*)

I. Lehrsätze.

1—17: Gerade und Ebenen, Strecken und Winkel.

1. Ist einem windschiefen Viereck (d. h. einem Viereck, dessen vier Ecken nicht in einer Ebene liegen) ein ebenes Viereck einbeschrieben, so schneiden sich je zwei Gegenseiten des ebenen Vierecks auf einer Diagonale des windschiefen. (I. Einl. 6. d.)

2. Liegen zwei Dreiecke ABC und A'B'C', deren Ebenen nicht parallel sind, so, daß die drei Verbindungslinien je zweier entsprechenden Ecken sich in einem Punkt schneiden, so müssen sich je zwei entsprechende Dreieckseiten schneiden, und müssen die drei Schnittpunkte in gerader Linie liegen; und umgekehrt. (Satz von Desargues.) (I. Einl. 4. a und 6. d.)

3. a. Ist von zwei parallelen Geraden die eine einer Ebene parallel, so ist es auch die andere. (I. 1. a und b.)

b. Ist eine Gerade der einen von zwei parallelen Ebenen parallel, so ist sie auch der andern parallel.

4. Legt man durch einen festen Punkt (Zentrum) und eine Gerade eine Ebene (projizierende Ebene) und bringt diese zum Schnitt mit einer festen Ebene (Bildebene), so heißt die Schnittlinie die Zentralprojektion der Geraden auf die Ebene von dem Punkt aus. — Die Zentralprojektionen einer Anzahl paralleler Geraden schneiden sich alle in einem Punkt (Flucht-

*) Diejenigen Sätze, welche zur Lösung von späteren Aufgaben unerläßlich sind und welche auch außerhalb des Anhanges noch Verwertung finden, sind durch ein Kreuz (†) ausgezeichnet.