Lehrbuch der Stereometrie

Hauck, Guido

Tübingen, 1893

7 - 10: Beispiele von Konstruktionsaufgaben

urn:nbn:de:hbz:466:1-77777

Aufgabe 6.

a. Den Schnittpunkt einer Geraden mit einer ihr nicht parallelen Ebene zu bestimmen.

b. Die Schnittlinie zweier Ebenen zu bestimmen.

Auflösung. **a.** Man fälle (Fig. 19) von einem beliebigen Punkt A der geg. Geraden AB die Senkrechte AF auf die geg. Ebene M (Aufg. 4. a) und ziehe in der durch AB und AF gelegten Ebene FG ⊥ FA: so schneidet FG die Gerade AB in dem verlangten Punkt S.

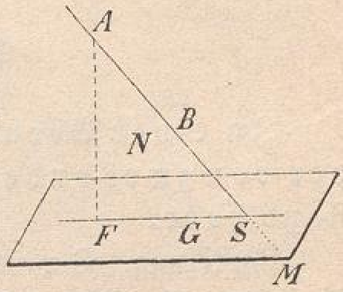

Fig. 19.

b. Man ziehe in einer der zwei geg. Ebenen zwei beliebige Gerade und bestimme deren Schnittpunkte mit der andern Ebene (Aufg. a): so ist die Verbindungslinie dieser zwei Schnittpunkte die verlangte Schnittlinie. (Bei Ausführung der Konstruktion benütze man die vom Schnittpunkt der zwei Geraden auf die andere Ebene gefällte Senkrechte.)

(Beweise durch I. 6. b und I. Einl. 6. b.)

7—10: Beispiele von Konstruktionsaufgaben.

Aufgabe 7.

a. Durch einen geg. Punkt —

b. Parallel zu einer geg. Richtungslinie eine Gerade zu ziehen, die zwei geg. windschiefe Gerade schneide.

Auflösung. **a.** Man lege durch den geg. Punkt und eine der zwei geg. Geraden eine Ebene, bestimme deren Schnittpunkt mit der andern Geraden (Aufg. 6. a), und verbinde diesen mit dem geg. Punkt: so ist die Verbindungslinie die verlangte Gerade.

b. Man lege parallel zu der geg. Richtungslinie durch die eine der zwei geg. Geraden eine Ebene (Aufg. 2. a), bestimme deren Schnittpunkt mit der andern Geraden, und ziehe durch diesen die Parallele zur geg. Richtungslinie: so ist sie die verlangte Gerade.

(Beweise durch Einl. 4. a und I. 1. c.)

Aufgabe 8.

In einer Ebene einen Punkt zu bestimmen, der von zwei andern Ebenen je einen geg. Abstand habe.

Auflösung. Der verlangte Punkt soll 1) in der Ebene M liegen, 2) von der Ebene N den Abstand a, 3) von der Ebene N′ den Abstand a′ haben. — Die Ebene M stellt einen geom. Ort für ihn vor. Die zweite Bedingung liefert einen zweiten geom. Ort, der (nach I. 14. Zus. 1) aus zwei Ebenen besteht, die parallel zu N im Abstand a zu beiden Seiten von N liegen; sie schneiden die Ebene M nach zwei parallelen Geraden, auf denen der gesuchte Punkt liegen muß. Um also diese Geraden zu konstruieren, errichte man in einem beliebigen Punkt der Ebene N die Senkrechte (Aufg. 4. b), schneide auf ihr vom Fußpunkt aus nach beiden Seiten die Strecke a ab, lege durch die Endpunkte Ebenen parallel zu N (Aufg. 1. b), und bestimme deren Schnittlinien mit M (Aufg. 6. b). In gleicher Weise erhält man aus der dritten Bedingung als dritten geom. Ort ein zu N′ paralleles Ebenenpaar, welches die Ebene M nach einem zweiten Geradenpaar schneidet, das ebenso konstruiert wird. Beide Geradenpaare schneiden sich nun in 4 Punkten, von denen jeder eine Lösung der Aufgabe vorstellt. — (Die geg. Ebenen M, N, N′ dürfen nicht zu einer und derselben Geraden parallel sein.)

Aufgabe 9.

In einer Ebene durch den Spurpunkt einer geg. Geraden eine Linie zu ziehen, die mit der Geraden einen geg. Winkel mache.

Auflösung. Die geg. Gerade g (Fig. 20) schneide die geg. Ebene M in A; der geg. (spitze) Winkel sei w. Angenommen, AD wäre die gesuchte Linie, so fälle man von einem beliebigen Punkt B der Geraden g die Senkrechte BC auf M und ziehe AC; dann ist AC die Projektion von AB auf M. Fällt man ferner CD $\perp$ AD und zieht BD, so ist auch BD $\perp$ AD (I. 9. b). In der so entstandenen Figur ist nun $\triangle$ ABC nach Gestalt und Lage bekannt; $\triangle$ ABD kann seiner Gestalt nach bestimmt werden aus Hyp. AB und W. BAD = w. Dann aber kann auch $\triangle$ ACD aus Hyp. AC und Kath. AD nach Gestalt und Lage in der Ebene M gezeichnet werden, wodurch AD gefunden ist. Man hat demnach folgende Konstruktion:

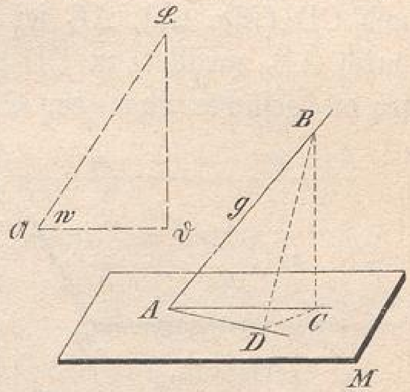

Fig. 20.

Von einem beliebigen Punkt B der Geraden g fälle man BC $\perp$ M (Aufg. 4. a) und ziehe AC; hierauf konstruiere man (in einer Nebenfigur) ein rechtw. Dreieck 𝔄𝔅𝔇 aus Hyp. 𝔄𝔅 = AB und W. 𝔅𝔄𝔇 = w; endlich zeichne man in der Ebene M ein rechtw. Dreieck ACD über AC als Hyp. mit AD = 𝔄𝔇 als Kath.: so ist AD die verlangte Gerade. — Wäre Winkel w stumpf, so würde man dieselbe Konstruktion mit seinem spitzen Supplement ausführen und schließlich DA über A verlängern.

Es giebt im allgemeinen zwei Auflösungen. Wann giebt es nur eine und wann wird die Aufgabe unmöglich? (Vgl. I. 13. c u. a, nebst Zus. 3.)

Aufgabe 10.

Zwischen zwei windschiefe Gerade eine Strecke von geg. Länge so zu legen, daß sie mit beiden Geraden gleiche Winkel mache.

Auflösung. Die zwei windschiefen Geraden seien AB und CD (Fig. 21), AC sei ihre kürzeste Entfernung, M die durch AB parallel zu CD gelegte Ebene (vgl. I. 15). BD sei die gesuchte Lage der Strecke, BD mache also mit BA und DC gleiche Winkel. Zieht man nun durch B die Parallele BF zu CD (welche nach I. 1. c in M liegen muß), so macht BD auch mit BA und BF gleiche Winkel; bestimmt man daher die Projektion von BD auf M, indem man DE $\perp$ M fällt und BE zieht, so muß auch die Projektion BE mit BA und BF gleiche Winkel machen (I. 13. c mit Zus. 1). Zieht man noch AE, so ist AE $\parallel$ CD $\parallel$ BF, folglich W. BEA = EBF = EBA, also $\triangle$ BEA gleichschenklig, AB = AE = CD. — Da nun das rechtw. $\triangle$ BDE seiner Gestalt nach gezeichnet werden kann aus BD = der geg. Strecke und DE = der kürzesten Entfernung der zwei Windschiefen, so ergiebt sich folgende Konstruktion:

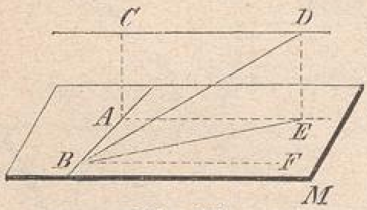

Fig. 21.

Man bestimme (nach I. 15) die kürzeste Entfernung AC der zwei Geraden und zeichne (in einer Nebenfigur) ein rechtw. Dreieck 𝔅𝔇𝔈 aus Hyp. 𝔅𝔇 = der geg. Strecke und Kath. 𝔇𝔈 = CA; hierauf ziehe man durch A die Parallele AE zu CD und lege zwischen die Schenkel von W. BAE die Strecke BE = 𝔅𝔈 so hinein, daß AB = AE wird; zieht man endlich in der Ebene CDEA durch E die Parallele zu AC, welche CD schneidet in D, und zieht BD: so ist diese die verlangte Strecke.

Es giebt im allgemeinen vier Auflösungen; (statt des

W. EAB können nämlich auch die drei anderen von AB und AE gebildeten Winkelräume benützt werden.)

Zusatz. Werden zwei windschiefe Gerade von einer dritten Geraden so geschnitten, daß diese mit beiden gleiche Winkel macht, so liegen die Schnittpunkte gleich weit entfernt von den Fußpunkten der kürzesten Entfernung der zwei Windschiefen; und umgekehrt.

D. Anhang

von Lehrsätzen und Aufgaben.*)

I. Lehrsätze.

1—17: Gerade und Ebenen, Strecken und Winkel.

1. Ist einem windschiefen Viereck (d. h. einem Viereck, dessen vier Ecken nicht in einer Ebene liegen) ein ebenes Viereck einbeschrieben, so schneiden sich je zwei Gegenseiten des ebenen Vierecks auf einer Diagonale des windschiefen. (I. Einl. 6. d.)

2. Liegen zwei Dreiecke ABC und A'B'C', deren Ebenen nicht parallel sind, so, daß die drei Verbindungslinien je zweier entsprechenden Ecken sich in einem Punkt schneiden, so müssen sich je zwei entsprechende Dreieckseiten schneiden, und müssen die drei Schnittpunkte in gerader Linie liegen; und umgekehrt. (Satz von Desargues.) (I. Einl. 4. a und 6. d.)

3. a. Ist von zwei parallelen Geraden die eine einer Ebene parallel, so ist es auch die andere. (I. 1. a und b.)

b. Ist eine Gerade der einen von zwei parallelen Ebenen parallel, so ist sie auch der andern parallel.

4. Legt man durch einen festen Punkt (Zentrum) und eine Gerade eine Ebene (projizierende Ebene) und bringt diese zum Schnitt mit einer festen Ebene (Bildebene), so heißt die Schnittlinie die Zentralprojektion der Geraden auf die Ebene von dem Punkt aus. — Die Zentralprojektionen einer Anzahl paralleler Geraden schneiden sich alle in einem Punkt (Flucht-

*) Diejenigen Sätze, welche zur Lösung von späteren Aufgaben unerläßlich sind und welche auch außerhalb des Anhanges noch Verwertung finden, sind durch ein Kreuz (†) ausgezeichnet.