Lehrbuch der Stereometrie

Hauck, Guido

Tübingen, 1893

A. Einleitung.

urn:nbn:de:hbz:466:1-77777

Zweites Buch.

Krumme Flächen und Vielkant.

A. Einleitung.

1: Allgemeine Umdrehungsflächen.

1. a. Diejenigen Körper, welche bloß von ebenen Flächen begrenzt sind, heißen ebenflächige Körper oder Polyeder. Diejenigen, welche ganz oder teilweise von krummen Flächen begrenzt sind, heißen krummflächige Körper. Von den letzteren werden in der elementaren Stereometrie nur die Umdrehungskörper betrachtet.

b. Dreht sich eine ebene geschlossene Figur um eine in ihrer Ebene liegende und sie nicht schneidende Gerade als Achse so lange herum, bis sie wieder in ihre erste Lage zurückgekehrt ist, so hat sie einen Körper beschrieben oder erzeugt, welcher Umdrehungskörper genannt wird; ihre Peripherie hat eine krumme Fläche beschrieben, welche Umdrehungsfläche heißt und welche die Oberfläche des Umdrehungskörpers bildet.

c. Da bei der Drehung der Figur jeder Punkt ihrer Peripherie einen Kreis beschreibt, dessen Ebene senkrecht zur Drehachse ist, und dessen Mittelpunkt im Fußpunkt der von dem Punkt auf die Drehachse gefällten Senkrechten liegt (I. 6. Zus. 2): so schneiden alle zur Achse senkrechten Ebenen die Umdrehungsfläche nach Kreisen, deren Mittelpunkte auf der Drehachse liegen, und welche Parallelkreise heißen. Das Stück der Fläche oder des Körpers zwischen zwei Parallelkreisen heißt eine Zone der Fläche oder des Körpers. — Da jede durch die Achse gelegte Ebene angesehen werden kann als die Ebene der gedrehten Figur in einer gewissen während der Drehung eingenommenen Lage, so schneiden alle durch die Achse gelegten Ebenen die Fläche nach kongruenten Figuren, welche Achsenschnitte oder Meridiane heißen. Jeder Meridian besteht aus zwei kongruenten und gegen die Achse symmetrisch liegenden Teilen (Halbmeridianen), deren jeder der gedrehten Figur kongruent ist.

d. Unter den Umdrehungs-Körpern und -Flächen sind von besonderer Wichtigkeit: der Umdrehungs-Cylinder, der Umdrehungs-Kegel und die Kugel.*)

2—4: Cylinder und Kegel.

2. a. Dreht sich ein Rechteck OO′A′A (Fig. 22) um eine seiner Seiten OO′ als Achse so lange herum, bis es wieder in seine erste Lage zurückgekehrt ist, so hat es einen Umdrehungskörper erzeugt, welcher Umdrehungscylinder oder kurz: Cylinder heißt. Die drei andern Seiten haben seine Oberfläche beschrieben; und zwar haben die der Achse anliegenden Seiten OA und O′A′ zwei gleiche, zur Achse senkrechte und daher unter sich parallele Kreise beschrieben (I. 6.

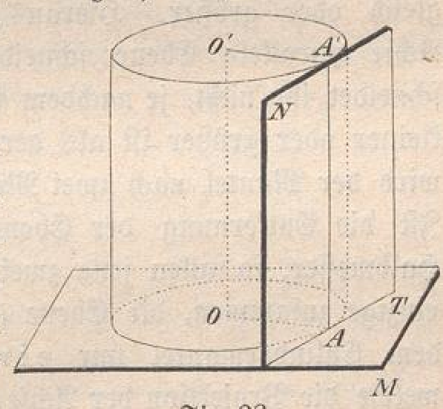

Fig. 22.

*) Nach 1. b müßte strenge genommen unterschieden werden zwischen „Cylinder, Kegel, Kugel" und „Cylinderfläche, Kegelfläche, Kugelfläche". Doch gebraucht man die Worte „Cylinder, Kegel, Kugel" häufig nicht bloß zur Bezeichnung des Körpers, sondern auch der Fläche, ähnlich wie in der ebenen Geometrie das Wort „Kreis" sowohl für „Kreisfläche" als für „Kreislinie" gebraucht wird.

Zus. 2 und I. 11. a), welche die Grundkreise heißen; die der Achse gegenüberliegende Seite AA′ hat eine krumme Fläche erzeugt, welche der Mantel des Cylinders heißt.

b. Da der Mantel von einer Geraden beschrieben worden ist, so liegen auf ihm unendlich viele Gerade; sie heißen Mantellinien und sind alle mit der Achse parallel und gleich, also auch unter sich parallel und gleich (I. 3. b). Die Entfernung der zwei Grundkreis-Ebenen heißt die Höhe des Cylinders; sie ist gleich der Achse und gleich den Mantellinien (I. 14. Zus. 1). Alle Parallelkreise sind unter sich und mit den Grundkreisen gleich; jeder Parallelkreis-Halbmesser heißt ein Halbmesser des Cylinders. Der Achsenschnitt ist ein Rechteck, dessen Seiten zwei Mantellinien und zwei Grundkreis-Durchmesser sind.

c. Ein Punkt oder eine mit der Achse parallele Gerade liegt innerhalb des Cylinders oder auf dessen Mantel oder außerhalb, je nachdem die Entfernung des Punktes oder der Geraden von der Achse kleiner ist als der Halbmesser oder gleich oder größer. Hieraus folgt weiter: Eine mit der Achse parallele Ebene schneidet den Cylindermantel oder schneidet ihn nicht, je nachdem ihre Entfernung von der Achse kleiner oder größer ist als der Halbmesser. Im ersten Fall wird der Mantel nach zwei Mantellinien geschnitten (I. 1. c). Ist die Entfernung der Ebene von der Achse gleich dem Halbmesser, so fallen jene zwei Schnitt-Mantellinien in eine einzige zusammen, die Ebene (Ebene N in Fig. 22) hat mit dem Cylindermantel nur eine Mantellinie AA′ gemein, welche die Projektion der Achse auf die Ebene vorstellt; (denn jede andere in ihr parallel zu AA′ gezogene Gerade fällt außerhalb des Cylinders nach I. 12. a.) Eine solche Ebene heißt eine Berührungsebene des Cylindermantels, die Mantellinie AA′ heißt ihre Berührungsmantellinie. Die Berührungsebene steht senkrecht auf der durch Berührungsmantellinie und Achse gelegten Ebene. Die Schnittlinie AT der Berührungsebene mit einer Grundkreis-Ebene

M ist Tangente an den Grundkreis; denn sie hat mit ihm nur einen Punkt gemein, nämlich den Endpunkt A der Berührungsmantellinie. Um daher (Fig. 22) die Berührungsebene zu konstruieren, die den Cylindermantel längs einer geg. Mantellinie AA′ berührt, zieht man an einen Grundkreis im Endpunkt A der Mantellinie die Tangente AT und legt durch Tangente AT und Mantellinie AA′ eine Ebene.

d. Aus c (Anf.) folgt ferner: Eine gerade Linie schneidet den Cylindermantel oder schneidet ihn nicht, je nachdem ihre kürzeste Entfernung von der Achse kleiner oder größer ist als der Halbmesser. Ist die kürzeste Entfernung gleich dem Halbmesser, so hat die Gerade mit dem Cylindermantel nur einen einzigen Punkt gemein, nämlich den Fußpunkt der kürzesten Entfernung. Eine solche Gerade heißt eine Tangente des Cylindermantels, jener Punkt — ihr Berührungspunkt. Jede Gerade, die auf einem Halbmesser in seinem Endpunkt senkrecht steht, ist Tangente, (denn der Halbmesser steht auch senkrecht auf der Achse). Daher ist auch jede in einer Berührungsebene gezogene Gerade Tangente.

3. a. Dreht sich ein rechtwinkliges Dreieck SOA (Fig. 23) um eine seiner Katheten SO als Achse so lange herum, bis es wieder in seine erste Lage zurückgekehrt ist, so hat es einen Umdrehungskörper erzeugt, welcher Umdrehungskegel oder kurz: Kegel heißt. Die zwei andern Seiten haben die Oberfläche des Kegels beschrieben; diese besteht

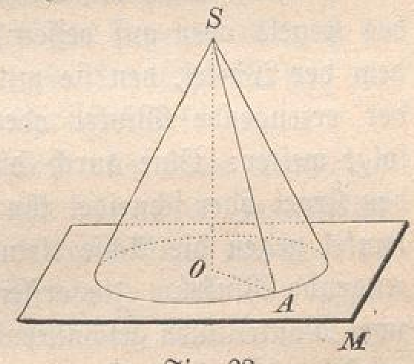

Fig. 23.

aus dem von der andern Kathete OA beschriebenen Grundkreis, welcher senkrecht zur Achse ist, und aus dem von der Hypotenuse SA beschriebenen krummen Mantel des Kegels. — Der Winkel OSA zwischen der Achse und der Hypotenuse heißt der erzeugende Winkel des Kegelmantels. Der Endpunkt S der Achse heißt die Spitze, ihre Entfernung von der Ebene des Grundkreises die Höhe des Kegels; die Höhe ist gleich der Achse.

b. Jede Gerade, die von der Spitze nach einem Punkt der Peripherie des Grundkreises gezogen wird, kann als die Hypotenuse des erzeugenden Dreiecks in einer gewissen während der Drehung eingenommenen Lage betrachtet werden; sie liegt daher auf dem Kegelmantel und heißt eine Mantellinie des Kegels. Alle Mantellinien sind gleich lang und machen mit der Achse gleiche Winkel. Jeder Halbmesser OA des Grundkreises stellt die Projektion der durch seinen Endpunkt gehenden Mantellinie SA auf die Ebene des Grundkreises vor. Da nun der Winkel SAO stets die nämliche Größe hat, so sind alle Mantellinien gegen die Grundkreis-Ebene gleich geneigt, und zwar ist der Neigungswinkel gleich dem Komplement des erzeugenden Winkels. — Der Achsenschnitt ist ein gleichschenkliges Dreieck, dessen Seiten zwei Mantellinien und ein Grundkreis-Durchmesser sind. Der Dreieckswinkel an der Spitze (gleich dem doppelten erzeugenden W.) heißt die Öffnung des Kegels.

c. Eine durch die Spitze gehende Gerade liegt innerhalb des Kegels oder auf dessen Mantel oder außerhalb, je nachdem der Winkel, den sie mit der Achse macht, kleiner ist als der erzeugende Winkel oder gleich oder größer. Hieraus folgt weiter: Eine durch die Spitze gelegte Ebene schneidet den Kegel oder schneidet ihn nicht, je nachdem ihr Neigungswinkel gegen die Achse kleiner oder größer ist als der erzeugende Winkel. Im ersten Fall wird der Kegelmantel nach zwei Mantellinien geschnitten (I. Einl. 2). Ist der Neigungswinkel gleich dem erzeugenden Winkel, so fallen jene zwei Schnitt-Mantellinien in eine einzige zusammen, die Ebene hat mit dem Kegelmantel nur eine Mantellinie gemein, welche mit der Projektion der Achse auf die Ebene zusammenfällt, (denn jede andere durch die Spitze in der Ebene gezogene Gerade liegt außerhalb des Kegelmantels nach I. 13. a). Eine solche

Ebene N (Fig. 24*) heißt eine Berührungsebene des Kegelmantels; die gemeinsame Mantellinie ST heißt ihre Berührungsmantellinie. Die Berührungsebene steht senkrecht auf der durch Berührungsmantellinie und Achse gelegten Ebene STO. Die Schnittlinie TB der Berührungsebene mit der Ebene des Grundkreises ist (wie beim Cylinder) Tangente an den Grundkreis. Daher Konstruktion der Berührungsebene wie beim Cylinder. — Der Neigungswinkel einer Berührungsebene N gegen die Ebene des Grundkreises ist gleich dem Neigungswinkel ihrer Berührungsmantellinie ST; denn ST stellt eine Neigungslinie der Ebene N vor (I. 9. b und I. Anh. 10). Daher haben alle Berührungsebenen gleiche Neigung gegen die Ebene des Grundkreises, und zwar ist der Neigungswinkel gleich dem Komplement des erzeugenden Winkels.

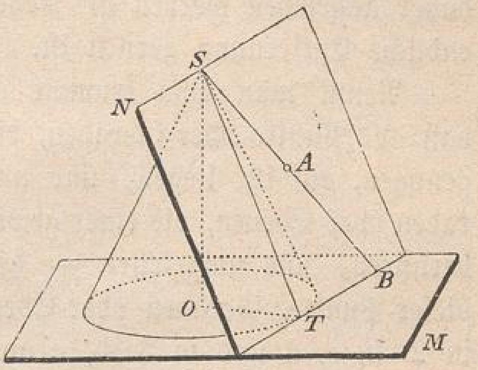

Fig. 24.

d. Jede in einer Berührungsebene liegende Gerade ist Tangente an den Kegelmantel. Ihr Schnittpunkt mit der Berührungsmantellinie ist ihr Berührungspunkt.

4. a. Der Mantel eines Kegels und eines Cylinders stellt nur einen Teil — nämlich eine Zone — der Cylinderfläche und Kegelfläche im weiteren Sinne des Wortes vor. Die vollständige Fläche erhält man, wenn man sämtliche Mantellinien nach beiden Seiten ins Unendliche verlängert. Die vollständige Kegelfläche besteht also aus zwei kongruenten Teilen, die in der Spitze zusammenhängen; sie wird erzeugt durch Drehung der einen von zwei sich schneidenden unbegrenzten Geraden um die andere. (Ist der von den Geraden gebildete erzeugende Winkel ein Rechter, so erhält man als speziellen Fall der Kegelfläche die

*) Man denke sich in Fig. 24 die Linie SAB hinweg.

Ebene, vgl. I. 6. Zus. 2.) — Die Cylinderfläche wird erzeugt durch Drehung der einen von zwei unbegrenzten parallelen Geraden um die andere. Die Cylinderfläche kann daher angesehen werden als Kegelfläche, deren Spitze in unendliche Entfernung gerückt ist.

Nennt man eine krumme Fläche von der Eigenschaft, daß alle Punkte oder Geraden, die einer gewissen Bedingung genügen, auf ihr liegen, und umgekehrt, oder daß alle Geraden oder Ebenen, die einer gewissen Bedingung genügen, sie berühren, und umgekehrt, — den geometrischen Ort dieser Punkte, Geraden oder Ebenen: so lassen sich die Sätze in 2. b, c, d und in 3. b, c auch in folgender Form aussprechen:

b. Der geom. Ort eines Punktes, der eine geg. Entfernung — oder einer Geraden, die eine geg. kürzeste Entfernung von einer festen Geraden hat, ist eine Cylinderfläche, deren Achse die feste Gerade, und deren Halbmesser gleich der geg. Entfernung ist.

c. Der geom. Ort einer Geraden oder einer Ebene, die einer festen Geraden parallel ist und von ihr eine geg. Entfernung hat, ist eine Cylinderfläche, deren Achse die feste Gerade, und deren Halbmesser gleich der geg. Entfernung ist.

d. Der geom. Ort einer Geraden oder einer Ebene, die eine feste Gerade in einem festen Punkt unter geg. Winkel schneidet, ist eine Kegelfläche, deren Achse die feste Gerade, deren Spitze der feste Punkt, und deren erzeugender Winkel gleich dem geg. Winkel ist.

e. Der geom. Ort einer Geraden oder einer Ebene, die durch einen festen Punkt geht und gegen eine feste Ebene eine geg. Neigung hat, ist eine Kegelfläche, deren Spitze der feste Punkt ist, deren Achse senkrecht zu der festen Ebene steht, und deren erzeugender Winkel gleich dem Komplement des geg. Neigungswinkels ist. (Der Satz bleibt auch für den Fall gültig, daß der Punkt in der Ebene selbst liegt, I. 14. a und Zus. 4.)

5—9: Die Kugel.

5. a. Dreht sich ein Halbkreis PCAP′ (Fig. 25) um seinen Durchmesser PP′ als Achse so lange herum, bis er wieder in seine erste Lage zurückgekehrt ist, so hat er einen Umdrehungskörper erzeugt, welcher Kugel heißt; seine Peripherie hat deren krumme Oberfläche beschrieben.

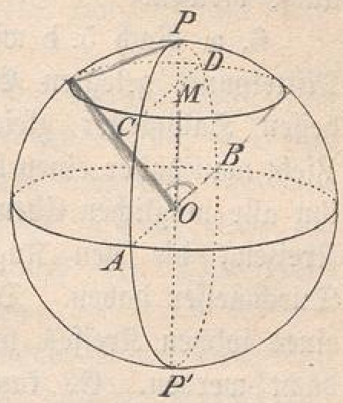

Fig. 25.

b. Der Mittelpunkt O des erzeugenden Halbkreises heißt der Mittelpunkt der Kugel. Jede vom Mittelpunkt an einen Punkt der Oberfläche gezogene Strecke heißt ein Halbmesser der Kugel. Alle Halbmesser sind gleich, denn jeder ist Halbmesser des erzeugenden Halbkreises in einer gewissen während der Drehung eingenommenen Lage; alle Punkte der Kugeloberfläche sind daher vom Mittelpunkt gleich weit entfernt. Jede durch den Mittelpunkt gehende und von der Oberfläche begrenzte Strecke heißt ein Durchmesser der Kugel; jeder Durchmesser besteht aus zwei Halbmessern, daher sind auch alle Durchmesser einander gleich. Die zwei Endpunkte eines Durchmessers heißen Gegenpunkte oder Antipoden.

c. Aus b folgt: Der geom. Ort eines Punktes, der von einem festen Punkt eine geg. Entfernung hat, ist eine Kugelfläche, deren Mittelpunkt der feste Punkt, und deren Halbmesser gleich der geg. Entfernung ist. — Man sagt, die Kugelfläche sei aus dem festen Punkt mit der geg. Entfernung als Halbmesser beschrieben.

d. Eine Kugel ist vollständig und eindeutig bestimmt durch Mittelpunkt und Halbmesser. Zwei Kugeln, die gleiche Halbmesser haben, sind kongruent, und zwar decken sich ihre Oberflächen in jeder Lage, wenn nur die Mittelpunkte zusammenfallen. Eine auf einer Kugeloberfläche liegende Figur kann daher auf derselben beliebig so verschoben werden, daß dabei ihre sämtlichen Punkte beständig auf der Kugeloberfläche bleiben.

6. a. Nach 5. b wird eine Kugel von jeder durch ihren Mittelpunkt gelegten Ebene nach einem Kreise geschnitten, dessen Halbmesser gleich dem Halbmesser der Kugel ist. Zieht man daher einen beliebigen Durchmesser, und legt durch ihn alle möglichen Ebenen, so schneiden diese die Kugel nach Kreisen, die den Kugeldurchmesser zum gemeinschaftlichen Durchmesser haben. Die Kugel kann also durch Umdrehung eines solchen Kreises um jenen Durchmesser entstanden gedacht werden. Es kann somit jeder beliebige Durchmesser einer Kugel als deren Achse angesehen werden.

b. Da ein Umdrehungskörper von jeder zur Achse senkrechten Schnittebene nach einem Kreis geschnitten wird (1. c), bei der Kugel aber *jeder* Durchmesser als Achse genommen werden kann, so wird die Kugel von *jeder* Ebene (die überhaupt schneidet) nach einem Kreise geschnitten. Man nennt einen solchen Kreis einen *Kugelkreis*.

c. Der Mittelpunkt M (Fig. 25) eines Kugelkreises liegt (nach 1. c) auf dem zu seiner Ebene senkrechten Durchmesser. Dieser heißt die *Achse*, seine Endpunkte P und P′ heißen die *Pole* des Kreises. Zu jedem Kugelkreis gehören zwei bestimmte Pole, welche Gegenpunkte zu einander sind. Alle parallelen Kugelkreise haben dieselbe Achse und dieselben Pole. Derjenige Parallelkreis, der durch den Mittelpunkt der Kugel geht, heißt der den Polen zugehörige *Äquator*.

d. Da die Durchmesser AB, CD, . . . (Fig. 25) der einzelnen, zu derselben Achse PP′ gehörigen Parallelkreise zugleich Sehnen in einem durch die Achse gelegten Kugelkreis PCAP′BD sind, so ist unter allen Parallelkreisen der Äquator der größte. Da dies für jede beliebige Achse gilt, so ist der Kreis, nach welchem eine durch den Kugelmittelpunkt gelegte Ebene schneidet, überhaupt der größte, nach dem eine Kugel geschnitten werden kann. Ein solcher Kreis heißt daher auch größter Kreis oder Großkreis der Kugel, wogegen jeder andere Kugelkreis als Kleinkreis bezeichnet wird.

7. a. Eine die Kugel schneidende Gerade heißt eine Sekante. Da sie zugleich Sekante des Kreises ist, nach dem eine beliebig durch sie gelegte Ebene die Kugel schneidet, so kann eine Gerade die Kugeloberfläche in nicht mehr als zwei Punkten schneiden. — Eine durch den Mittelpunkt gehende Sekante heißt Zentrallinie.

b. Das innerhalb der Kugel fallende Stück einer Sekante heißt Sehne. Aus 6. d folgt, daß der Durchmesser die größte Sehne ist.

8. a. Ein Punkt liegt innerhalb der Kugel oder auf deren Oberfläche oder außerhalb, je nachdem seine Entfernung vom Mittelpunkt kleiner ist als der Halbmesser oder gleich oder größer.

b. Hieraus folgt weiter: Eine Ebene oder eine Gerade schneidet die Kugel oder schneidet sie nicht, je nachdem ihre Entfernung vom Mittelpunkt kleiner oder größer ist als der Halbmesser. Ist die Entfernung gleich dem Halbmesser, so hat die Ebene oder Gerade mit der Kugeloberfläche nur einen einzigen Punkt gemein, nämlich den Fußpunkt der vom Mittelpunkt auf sie gefällten Senkrechten, (jeder andere Punkt der Ebene oder Geraden liegt außerhalb der Kugel nach I. 12. a). Eine solche Ebene heißt eine Berührungsebene, und eine solche Gerade — eine Tangente der Kugel. Der gemeinsame Punkt heißt ihr Berührungspunkt, der nach dem Berührungspunkt gezogene Halbmesser — ihr Berührungshalbmesser; der letztere steht senkrecht auf der Berührungsebene oder Tangente im Berührungspunkt. Umgekehrt: eine auf einem Halbmesser der Kugel in dessen Endpunkt senkrecht stehende Ebene oder Gerade berührt die Kugel.

c. Jede Tangente eines Kugelkreises ist auch Tangente an die Kugel; denn da sie in der Ebene des Kugelkreises liegt und mit diesem nur einen Punkt gemein hat, so kann sie auch mit der Kugelfläche nur diesen einen Punkt gemein haben. — Jede in einer Berührungsebene durch den Berührungspunkt gezogene Gerade ist Tangente an die Kugel. Umgekehrt: Haben zwei Tangenten denselben Berührungspunkt, so ist die durch sie gelegte Ebene Berührungsebene (I. 6. a).

d. Aus b folgt: Der geom. Ort einer Ebene oder einer Geraden, die von einem festen Punkt eine geg. Entfernung hat, ist eine Kugelfläche, deren Mittelpunkt der feste Punkt, und deren Halbmesser gleich der geg. Entfernung ist.

9. a. Ist von einem in der Ebene eines Kreises liegenden Punkt S eine Tangente SA an den Kreis gelegt, und dreht man die Ebene um die Zentrallinie SO, so beschreibt der Kreis eine Kugel, und die Tangente den Mantel eines Kegels, dessen sämtliche Mantellinien die Kugel berühren; sein Grundkreis ist der vom Berührungspunkt A beschriebene Kleinkreis. Der Kegel heißt der vom Punkt S an die Kugel gelegte Berührungskegel, jener Kleinkreis heißt sein Berührungskreis. Man sagt auch, die Kugel sei der Kegelfläche als Berührungskugel einbeschrieben.

b. Aus a folgt: die unendlich vielen Tangenten, die sich von einem Punkt an die Kugel legen lassen, haben — je von dem Punkt bis zum Berührungspunkt gemessen — alle gleiche Länge.

c. Jede Berührungsebene des Kegels berührt auch die Kugel; denn ist SA die Berührungsmantellinie, so hat die Ebene mit der Kugel den Punkt A, aber auch nur diesen gemein. Umgekehrt berührt jede durch den Punkt S an die Kugel gelegte Berührungsebene auch den Kegel.

d. Parallel mit einer geraden Linie lassen sich unendlich viele Tangenten an die Kugel legen; sie bilden die Mantellinien einer Cylinderfläche (Berührungscylinder); denn ihre Berührungspunkte liegen auf einem Großkreis der Kugel, dessen Ebene zu ihnen senkrecht ist (Berührungskreis). Jede Berührungsebene des Cylinders berührt auch die Kugel. Der Berührungscylinder kann als Berührungskegel angesehen werden, dessen Spitze in unendliche Entfernung gerückt ist.

Unter dem Berührungscylinder einer Kugel im engeren Sinn versteht man einen Cylinder, dessen Mantel und dessen beide Grundkreise die Kugel berühren, dessen Achse also der zu den Mantellinien parallele Kugeldurchmesser ist.

e. Zwei Kugeln berühren sich in einem Punkt, wenn sie in demselben eine gemeinschaftliche Berührungsebene besitzen. Da die zwei Berührungshalbmesser auf der Berührungsebene im nämlichen Punkte senkrecht stehen, so liegen die zwei Mittelpunkte und der Berührungspunkt in gerader Linie (I. 7. a). Die Entfernung der Mittelpunkte ist gleich der Summe oder gleich der Differenz der zwei Halbmesser, je nachdem die eine Kugelfläche die andere von außen oder von innen berührt. Umgekehrt gilt: Ist die Entfernung der Mittelpunkte zweier Kugeln gleich der Summe oder gleich der Differenz ihrer Halbmesser, so berühren sich die Kugeln.

10—12: Kugel-Teile.

10. a. Ein Kugelkreis teilt die Kugel (als Körper) in zwei Teile, welche Kugelabschnitte heißen, und die Kugeloberfläche in zwei Teile, welche Kugelkappen oder Kugelhauben heißen. Die Oberfläche eines Kugelabschnitts besteht also aus einem Kreise, welcher sein Grundkreis heißt, und aus einer Kugelhaube. Das ins Innere des Kugelabschnittes fallende Stück der Achse des Grundkreises heißt die Achse oder die Höhe, ihr Endpunkt — der Pol des Kugelabschnittes oder der Kugelhaube.

b. Ein Großkreis teilt die Kugel in zwei kongruente Hälften, welche Halbkugeln heißen. Jeder Kleinkreis teilt sie in zwei ungleiche Abschnitte (Hauben); der größere enthält den Mittelpunkt der Kugel.

11. a. Der zwischen zwei parallelen Kugelkreisen liegende Teil der Kugel oder der Kugeloberfläche heißt eine Kugelzone. Die zwei Kreise heißen die Grundkreise, das zwischen ihre Ebenen fallende Stück ihrer Achse heißt die Achse der Kugelzone. Die Entfernung der zwei Grundkreise heißt die Höhe; sie ist gleich der Achse.

b. Eine Kugelzone kann als Differenz zweier Kugelabschnitte (bezw. Kugelhauben) angesehen werden. Ein Kugelabschnitt kann als Kugelzone aufgefaßt werden, deren einer Grundkreis zu einem Punkt zusammengeschrumpft ist. Die Kugel selbst kann als Kugelzone aufgefaßt werden, deren beide Grundkreise zu Punkten zusammengeschrumpft sind.

12. a. Der Kegel, der einen Kleinkreis der Kugel zum Grundkreis, und den Kugelmittelpunkt zur Spitze hat, heißt der dem Kleinkreis zugehörige Kegel. Sein Mantel teilt die Kugel in zwei Teile, von denen jeder ein Kugelausschnitt oder Kugelsektor heißt. Die Oberfläche jedes Kugelausschnittes besteht aus einem Kegelmantel und einer Kugelhaube; der eine (konvexe) Ausschnitt kann als Summe, der andere (konkave) als Differenz eines Kugelabschnittes und eines Kegels angesehen werden.

b. Der erzeugende Winkel des Kegelmantels heißt der erzeugende Zentriwinkel des Kugelausschnittes; ein Kugelausschnitt kann nämlich erzeugt gedacht werden durch Drehung eines Kreisausschnittes um einen der zwei ihn begrenzenden Halbmesser.

c. Die Halbkugel und die Kugel selbst können als Kugelausschnitte aufgefaßt werden, deren erzeugende Winkel bezw. 1R und 2R betragen.

13—22: Sphärik und Vielkant.

13. a. Durch zwei Punkte einer Kugeloberfläche, die nicht Gegenpunkte sind, läßt sich immer ein und n u r e i n Großkreis legen (I. Einl. 3. a, Schluß).

b. Unter der s p h ä r i s c h e n E n t f e r n u n g zweier Punkte auf einer Kugeloberfläche versteht man die Länge des zwischen ihnen liegenden Großkreisbogens, und zwar desjenigen Bogens, der kleiner als ein Halbkreis ist. Es wird (in B. 11. Zus. 1) bewiesen werden, daß die sphärische Entfernung zweier Punkte den kürzesten Weg vorstellt, auf dem man von einem Punkt zum andern auf der Oberfläche der Kugel gelangen kann. — Die sphärischen Entfernungen können entweder nach irgend einer Längeneinheit (etwa mittels eines Fadens) oder nach Bogengraden (1 Grad = $\frac{1}{360}$ der Großkreis-Peripherie) gemessen werden. Da auf derselben Kugeloberfläche die Bogengrade durchweg gleiche Länge haben, so können auch sie als Einheiten eines Längenmaßstabes gelten.

c. Haben auf einer Kugelfläche zwei Punkte gleiche geradlinige Entfernung wie zwei andere Punkte, so haben sie auch gleiche sphärische Entfernung; und umgekehrt. (Denn die sphärischen Entfernungen sind dann Bögen gleicher Kreise mit gleichen Sehnen.) Einer größeren geradlinigen Entfernung entspricht auch eine größere sphärische Entfernung, und umgekehrt. Dasselbe gilt für zwei g l e i c h e Kugeln.

d. Nach I. 12. b hat ein Pol eines Kugelkreises (II. Einl. 6. c) von allen Punkten der Kreisperipherie gleiche geradlinige, und folglich (nach c) auch gleiche sphärische Entfernungen. Man nennt daher denjenigen Pol eines Kleinkreises, der mit ihm auf der nämlichen Seite des zugehörigen Äquators liegt, den s p h ä r i s c h e n M i t t e l p u n k t des Kleinkreises; seine sphär. Entfernung von einem Punkt der Peripherie heißt der s p h ä r i s c h e H a l b m e s s e r. Auf der Oberfläche einer massiven Kugel kann ein Kugelkreis aus seinem sphärischen Mittelpunkt ganz ebenso mit dem Zirkel beschrieben werden, wie in der Ebene ein Kreis aus seinem Mittelpunkt beschrieben wird.

e. Jeder Pol eines Großkreises hat von allen Punkten desselben eine sphär. Entfernung = 90° oder gleich dem vierten Teil der Großkreis-Peripherie. Der sphär. Halbmesser eines Großkreises ist also = 90°. Jeder seiner Pole kann als sein sphär. Mittelpunkt gelten.

f. Die in a und b genannten zwei Eigenschaften der Großkreise auf der Kugeloberfläche sind dieselben wie die Grundeigenschaften der geraden Linien in der Ebene. Die Großkreise spielen daher auf der Kugeloberfläche die nämliche Rolle wie die geraden Linien in der Ebene. Den Beziehungen zwischen geraden Linien und Kreisen in der Ebene, wie sie die ebene Geometrie betrachtet, entsprechen auf der Kugeloberfläche analoge Beziehungen zwischen Großkreisen und Kleinkreisen. Die Lehre von diesen Beziehungen heißt Sphärik.

g. Da es keine parallelen Großkreise giebt, so sind zu den Sätzen der ebenen Geometrie über parallele Gerade nur teilweise analoge Sätze in der Sphärik vorhanden.

14. a. Zwei von einem Punkt P (Fig. 26) einer Kugeloberfläche ausgehende Großkreisbögen PQ und PR schließen einen sphärischen Winkel QPR ein; der Punkt P heißt die Spitze oder der Scheitel, die beiden Großkreisbögen PQ und PR heißen die Schenkel des Winkels. Ein sphär. Winkel wird gemessen durch den Winkel, den die in der Spitze an die beiden Schenkel gelegten Tangenten PT und PU einschließen. Er ist gleich dem Keilwinkel des von den Ebenen der zwei Großkreisbögen gebildeten Keils; denn PT und PU liegen in den Keilblättern und sind senkrecht zur Keilkante OP. Ein sphär. Winkel

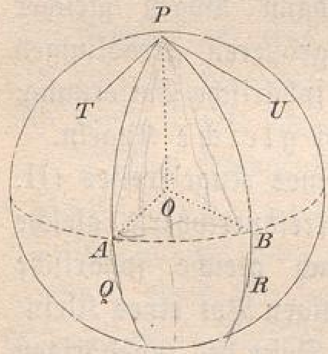

Fig. 26.

kann auch auf der Kugeloberfläche selbst gemessen werden, und zwar durch seinen Äquatorbogen, d. h. durch den zwischen seine Schenkel fallenden Bogen AB des zu der Spitze P gehörigen Äquators; denn der Zentriwinkel AOB dieses Bogens ist = W. TPU (I. 4. b), der Äquatorbogen mißt also ebensoviel Bogengrade als der sphär. Winkel Winkelgrade. — Die Benennungen: Nebenwinkel, Scheitelwinkel u. s. w. haben dieselbe Bedeutung wie bei ebenen Winkeln.

b. Zwei Großkreisbögen stehen auf einander senkrecht, wenn sie einen Winkel von 90° einschließen. Jeder Großkreis PA (Fig. 26), der durch den Pol P eines andern Großkreises AB geht, steht auf diesem senkrecht, und umgekehrt (I. 8. a und c).

15. a. Zwei Großkreise ABA′B′ und ACA′C′ (Fig. 27, S. 61) einer Kugeloberfläche schneiden sich in zwei Gegenpunkten A und A′ und halbieren sich daher gegenseitig, (denn ihre Ebenen haben den Mittelpunkt gemein, schneiden sich also nach einem Durchmesser). Sie teilen die Kugeloberfläche in vier Teile, von denen jeder ein Kugelzweieck oder sphärisches Zweieck heißt. Ein sphär. Zweieck wird also von zwei halben Großkreisen begrenzt. Ihre Schnittpunkte A und A′ heißen die Ecken des Zweiecks. Die sphär. Winkel an den zwei Ecken sind gleich; denn sie haben denselben Äquatorbogen, welcher auch der Äquatorbogen des sphär. Zweiecks heißt. — Die Halbkugel und die ganze Kugeloberfläche können als sphär. Zweiecke aufgefaßt werden, deren Winkel bezw. 2 R und 4 R betragen.

b. Der von den zwei Halbkreis-Ebenen eines sphär. Zweiecks eingeschlossene Keil heißt der dem Zweieck zugehörige Keil. Sein Keilwinkel ist gleich dem sphär. Winkel des Zweiecks (14. a).

c. Zwei sphär. Zweiecke derselben Kugel oder gleicher Kugeln sind kongruent, wenn sie gleiche Winkel oder Äquatorbögen haben (I. 7. Zus. und II. Einl. 5. d).

d. Zwei sphär. Zweiecke derselben Kugel oder gleicher Kugeln verhalten sich ihrem Flächeninhalte nach wie ihre Winkel oder Äquatorbögen. Denn verhalten sich die Äquatorbögen wie m zu n, wo m und n zunächst ganze Zahlen sein mögen, und teilt man den Äquatorbogen des einen Zweiecks in m, den des andern in n gleiche Teile, so ist ein Teil des einen Bogens gleich einem Teil des andern Bogens; legt man daher in beiden Zweiecken durch jeden Teilpunkt und die Ecken einen Großkreis, so wird dadurch das eine Zweieck in m, das andere in n Teile geteilt, die (nach c) sämtlich kongruent sind; die zwei Zweiecke verhalten sich somit wie m zu n. Läßt sich das Verhältnis der zwei Äquatorbögen nicht in ganzen Zahlen m und n ausdrücken, so liegt es doch zwischen zwei Grenzen $\frac{m}{n}$ und $\frac{m+1}{n}$, deren Unterschied $\frac{1}{n}$ beliebig klein gemacht werden kann*).

Ein sphär. Zweieck verhält sich zur halben Kugeloberfläche wie sein Winkel zu 2 R (nach a, Schluß).

16. a. Hat man auf einer Kugeloberfläche drei Großkreise, die sich nicht in den nämlichen zwei Gegenpunkten schneiden, so teilen zunächst zwei derselben, z. B. ABA′B′ und ACA′C′ (Fig. 27) die Kugeloberfläche in vier sphär. Zweiecke, von denen dann jedes durch den dritten Kreis BCB′C′ wieder in zwei Teile geteilt wird. Jeder dieser 8 Teile wird ein Kugeldreieck oder sphärisches Dreieck genannt. Die ein sphär. Dreieck einschließenden Großkreisbögen heißen die Seiten, die sphär. Winkel, die von je zwei in einer Ecke zusammenstoßenden Seiten gebildet werden, heißen die Winkel des sphär. Dreiecks.

b. Zwei sphär. Dreiecke, die zusammen ein sphär. Zweieck bilden, heißen Nebendreiecke. Zu jedem sphär. Dreieck

*) Ist z. B. das Verhältnis $= \sqrt{2} = 1{,}41421\ldots$, so liegt es zwischen den zwei Grenzen $\frac{1414}{1000}$ und $\frac{1415}{1000}$, oder zwischen $\frac{14142}{10000}$ und $\frac{14143}{10000}$, u. s. f.

sind drei Nebendreiecke vorhanden, oder: jedes sphär. Dreieck läßt sich auf dreifache Art zu einem Zweieck ergänzen. (Die Nebendreiecke von △ ABC sind z. B. BCA′, CAB′ und ABC′.) Zwei solche Dreiecke, deren Ecken paarweise Gegenpunkte sind, heißen Gegendreiecke. Zu jedem sphär. Dreieck ist ein Gegendreieck vorhanden. (Das Gegendreieck von △ ABC ist z. B. A′B′C′.)

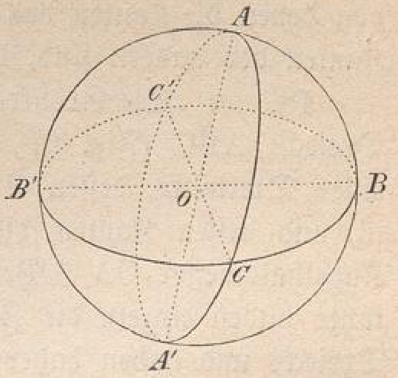

Fig. 27.

c. Die Sphärik beschränkt sich auf die Betrachtung solcher sphär. Dreiecke, in denen jede Seite kleiner als ein halber Großkreis, und jeder Winkel kleiner als 2 R ist. — Ein sphär. Dreieck entsteht daher auch dadurch, daß man drei beliebige, nicht auf demselben Großkreis liegende Punkte der Kugeloberfläche durch ihre sphär. Entfernungen verbindet.

17. a. Hat man drei Ebenen, die nicht der nämlichen Geraden parallel sind, so teilen zunächst zwei derselben den unendlichen Raum in vier Keile, von denen dann jeder durch die dritte Ebene wieder in zwei Teile geteilt wird. Jeder dieser acht Teile wird ein Dreikant genannt. Der Schnittpunkt der drei Ebenen heißt die Spitze, die von der Spitze ausgehenden Äste der drei Schnittlinien heißen die Kanten, die drei Ebenen — die Seitenflächen des Dreikants. Die von je zwei Kanten eingeschlossenen Winkel heißen seine Seiten, die von je zwei Seitenflächen gebildeten Keile — seine Winkel. Wir bezeichnen im folgenden ein Dreikant, dessen Spitze O, dessen Kanten OA, OB, OC sind, durch O,ABC, seine Seiten durch AOB, BOC, COA, seine Winkel durch A, B, C, die numerischen Werte der Winkel durch α, β, γ, die der gegenüberliegenden Seiten durch a, b, c.

b. Zwei Dreikante, die zusammen einen Keil bilden, heißen Nebendreikante. Zu jedem Dreikant sind drei Nebendreikante vorhanden, die man erhält, wenn man je eine Kante über die Spitze verlängert. Zwei Dreikante, von denen die Kanten des einen die Rückverlängerungen der Kanten des andern sind, heißen Scheiteldreikante.

18. a. Die Großkreis-Ebenen der Seiten eines sphär. Dreiecks ABC (Fig. 27, S. 61) bilden die Seitenflächen eines Dreikants, dessen Spitze der Mittelpunkt O der Kugel ist, und dessen Kanten die nach den drei Ecken gezogenen Kugelhalbmesser OA, OB, OC sind. Die Seiten des Dreikants bilden einzeln die Zentriwinkel der Seiten des sphär. Dreiecks und haben daher ebensoviel Winkelgrade, als die entsprechenden Dreieckseiten Bogengrade haben. Die Winkel des Dreikants sind einzeln gleich den Winkeln des sphär. Dreiecks (14. a). Das Dreikant heißt das dem sphär. Dreieck zugehörige Dreikant.

b. Beschreibt man umgekehrt aus der Spitze eines Dreikants mit beliebigem Halbmesser eine Kugelfläche, so schneidet das Dreikant aus dieser das zugehörige sphär. Dreieck aus. Da der Halbmesser der Kugel beliebig ist, so giebt es zu einem Dreikant unendlich viele zugehörige sphär. Dreiecke; zwei entsprechende Seiten zweier solcher Dreiecke haben zwar verschiedene absolute Längen, nach Bogengraden gemessen aber haben sie gleiche numerische Werte.

c. Jeder Lehrsatz über die Seiten und Winkel der sphär. Dreiecke gilt eben damit auch für Dreikante, und umgekehrt.

19. a. Die Summe der drei Winkel hat für verschiedene sphär. Dreiecke verschiedene Werte, sie ist stets größer als 2 R. Z. B. ist in dem sphär. Dreieck PAB in Fig. 26 (S. 58) die Summe der Winkel gleich 2 R plus dem W. APB, der zwischen 0 und 2 R liegen kann. (Der allgemeine Beweis wird in B. 15. a erbracht werden.) Man nennt den Ueberschuß der Winkelsumme eines sphär. Dreiecks über 2 R den sphärischen Exzeß des Dreiecks. Dieselbe Bezeichnung wird auch auf Dreikante übertragen.

b. Je kleiner die Dimensionen eines sphär. Dreiecks im Verhältnis zum Halbmesser seiner Kugel sind, desto kleiner ist sein sphär. Exzeß; denn desto weniger weicht das sphär. Dreieck von dem durch seine Endpunkte bestimmten ebenen Dreieck ab. Sind über ein auf einer Kugeloberfläche von großem Halbmesser (z. B. auf der Erdkugel) liegendes Dreieck geometrische Untersuchungen anzustellen, und ist sein sphär. Exzeß für den Grad der Genauigkeit, der für die Untersuchung vorgeschrieben ist, verschwindend klein, so kann das Dreieck als ebenes Dreieck behandelt werden. Ist dies aber nicht der Fall, so muß zu der Untersuchung statt der ebenen Geometrie die Sphärik angewendet werden.

c. Ein sphär. Dreieck oder Dreikant, das einen rechten Winkel besitzt, heißt rechtwinklig. Ein sphär. Dreieck oder Dreikant kann übrigens auch mehr als einen rechten Winkel enthalten (vgl. z. B. $\triangle$ PAB in Fig. 26, S. 58). Ebenso können mehrere stumpfe Winkel vorhanden sein. — Ein sphär. Dreieck oder Dreikant mit zwei gleichen Seiten heißt gleichschenklig, ein solches mit drei gleichen Seiten heißt gleichseitig. — Drei größte Kreise, die auf einander senkrecht stehen, teilen die Kugeloberfläche in acht kongruente Teile, von denen jeder ein Kugeloktant heißt; das zugehörige Dreikant heißt Oktant. In ihm sind alle Seiten und alle Winkel = 90°.

20. a. Zwei sphär. Dreiecke derselben Kugel oder gleicher Kugeln, und ebenso zwei Dreikante heißen entsprechend-gleich, wenn sie alle Winkel und alle entsprechenden Seiten bezw. gleich haben.

b. Umläuft man auf der Oberfläche einer Kugel zwei entsprechend-gleiche sphär. Dreiecke ABC und A′B′C′, indem man ihre entsprechenden Ecken und Seiten in der nämlichen Reihenfolge passiert, und hat man dabei das umlaufene Dreieck beidemal zur Linken oder beidemal zur Rechten (Fig. 28. a), so sagt man, die entsprechenden Elemente folgen sich in gleichem Sinn, oder: die zwei Dreiecke seien gleichstimmig. Hat man dagegen das eine Dreieck zur Linken, das andere zur Rechten (Fig. 28. b), so folgen sich die entsprechenden Elemente in entgegengesetztem Sinn, die zwei Dreiecke sind ungleichstimmig. Im ersten Fall können die Dreiecke und ihre zugehörigen Dreikante zur

Fig. 28. a.

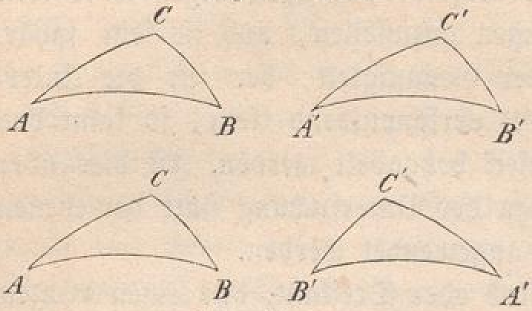

Fig. 28. b.

Deckung gebracht werden und heißen daher kongruent. Im zweiten Fall können sie nicht zur Deckung gebracht werden. Verschiebt man nämlich das eine Dreieck auf der Kugeloberfläche, bis zwei seiner Ecken, z. B. A und B mit den entsprechenden Ecken A′ und B′ des andern Dreiecks — und also die zwei Kanten OA und OB des einen zugehörigen Dreikants mit den entsprechenden Kanten OA′ und OB′ des andern zusammenfallen: so liegt jetzt das dritte Kantenpaar OC und OC′ (nach I. Anh. 15. b u. c) symmetrisch in Bez. auf die gemeinschaftliche Seitenfläche AOB. Zwei solche sphär. Dreiecke oder Dreikante heißen symmetrisch*). — Um bei entsprechend-gleichen Dreikanten zu entscheiden, ob sie gleichstimmig oder ungleichstimmig sind, ohne hiezu die zugehörigen sphär. Dreiecke zu Hilfe zu nehmen, kann man sich zwei menschliche Figuren mit den zwei Dreikanten als Mänteln bekleidet den-

*) Derselbe Unterschied zwischen kongruenten und symmetrischen Dreiecken findet wie in der Sphärik, so auch in der ebenen Geometrie statt. Zwei symmetrische ebene Dreiecke können durch bloßes Verschieben in ihrer Ebene nicht zur Deckung gebracht werden, sondern nur dadurch, daß man das eine Dreieck umlegt, so daß es seine vorherige Unterseite nach oben kehrt. Versucht man dasselbe bei zwei symmetrischen sphärischen Dreiecken auszuführen, indem man sie von der Kugeloberfläche abhebt und so legt, daß die Ecken des einen mit den entsprechenden Ecken des andern zusammenfallen: so sind jetzt die konkaven Seiten der zwei Dreiecke einander zugekehrt (ähnlich wie wenn die rechte und die linke hohle Hand so gegen einander gelegt werden, daß je zwei entsprechende Fingerspitzen sich berühren); von einer Deckung kann also keine Rede sein.

ken (den Hals in der Spitze), und sehen, ob für beide Figuren die entsprechenden Kanten (Falten) ihrer Mäntel in demselben Sinne auf einander folgen, oder für die eine Figur von der Rechten über die Brust zur Linken, für die andere von der Linken über die Brust zur Rechten.

c. Zwei entsprechend-gleiche sphär. Dreiecke oder Dreikante müssen entweder kongruent oder symmetrisch sein. Bloß in dem Falle, wo sie gleichschenklig sind, und in jedem den gleichen Seiten auch gleiche Winkel gegenüberliegen, sind sie sowohl kongruent als symmetrisch, denn es können dann die gleichen Elemente sowohl so, daß sie sich in gleichem Sinne —, als so, daß sie sich in entgegengesetztem Sinne folgen, einander zugeordnet werden.

d. Zwei sphär. Gegendreiecke oder zwei Scheiteldreikante sind entsprechend-gleich, (denn je zwei entsprechende Seiten oder Winkel sind als Scheitelwinkel gleich, I. 7. Zus.); und zwar sind sie — abgesehen von dem in c besprochenen Fall — immer entgegengesetzten Sinnes, also symmetrisch.

21. a. Konstruiert man zu den drei Seiten eines sphär. Dreiecks (d. h. zu den Großkreisen, von denen die Seiten Bögen sind) die Pole, und zwar zunächst zu jeder Seite nur denjenigen Pol, welcher auf derselben Halbkugel mit dem Dreieck liegt: so bestimmen diese drei Pole die Ecken eines zweiten sphär. Dreiecks, welches das Polardreieck oder Supplementardreieck des ersten heißt. Jeder Seite des ursprünglichen Dreiecks entspricht im Polardreieck ein ihr zugehöriger Winkel, nämlich derjenige, dessen Spitze der Pol der Seite ist; und jedem Winkel des ursprünglichen Dreiecks entspricht im Polardreieck eine ihm zugehörige Seite, nämlich diejenige, deren Endpunkte die Pole der jenen Winkel einschließenden Seiten sind. — Die entgegengesetzten Pole der Dreieckseiten bestimmen ein zweites Polardreieck, welches das Gegendreieck des ersten, und also ihm entsprechend-gleich ist. Das erste Polardreieck heißt mit dem ursprünglichen Dreieck gleichstimmig, das zweite — ungleichstimmig.

b. Entsprechend erhält man das Polardreikant oder Supplementardreikant eines Dreikants, wenn man auf dessen drei Seitenflächen in der Spitze die Senkrechten errichtet, und zwar entweder alle drei Senkrechten auf derjenigen Seite der betreffenden Seitenfläche, auf der das Dreikant liegt, oder alle drei auf der entgegengesetzten Seite. Was zugehörige Winkel und Seiten des Dreikants und seines Polardreikants sind, ergiebt sich ähnlich wie beim sphär. Dreieck.

22. a. Zieht man nach den Ecken eines ebenen Vielecks von einem außerhalb seiner Ebene liegenden Punkt Gerade, und legt durch je zwei auf einander folgende Gerade eine Ebene, so umschließen diese Ebenen einen (nicht allseitig begrenzten) Raum, welcher Vielkant (auch körperlicher Winkel oder körperliche Ecke) heißt. Hat das Vielkant n Kanten und also auch n Seitenflächen, so heißt es n=kant. — Beschreibt man aus der Spitze des Vielkants mit beliebigem Halbmesser eine Kugelfläche, so schneidet es aus dieser ein sphärisches Vieleck (n=eck) aus, das dem Vielkant zugehörig heißt. Seiten und Winkel des Vielkants und des sphär. Vielecks haben die nämliche Bedeutung wie beim Dreikant und sphär. Dreieck. Erhabene Winkel sind ausgeschlossen. — Ein Vielkant oder ein sphär. Vieleck heißt regulär, wenn alle seine Seiten gleich und alle seine Winkel gleich sind.

b. Die Ebenen, die durch je zwei nicht auf einander folgende Kanten eines Vielkants gelegt werden können, heißen Diagonalebenen. Sie schneiden die Fläche des zugehörigen sphär. Vielecks nach dessen Diagonalen. Jedes n=kant (sphär. n=eck) kann durch Diagonalebenen (Diagonalen) in n—2 Dreikante (sphär. Dreiecke) zerlegt werden.

c. Da die Summe der Winkel eines sphär. Dreiecks größer als 2 R ist (19. a), so ist die Summe der Winkel eines sphär. n-ecks (nach b, Schluß) größer als (n—2) 2 R, d. h. größer als die Winkelsumme eines ebenen Vielecks von gleicher Seitenzahl. Der Ueberschuß über die letztere heißt der sphärische Exzeß des sphär. Vielecks. Sind also α, β, γ ... die Winkel des sphär. n-ecks, so ist sein sphär. Exzeß $= \alpha + \beta + \gamma + \ldots - (n-2)\,2\,R$. Die Bezeichnung „sphär. Exzeß" wird auch auf Vielkante übertragen.

d. Zwei Vielkante oder zwei sphär. Vielecke gleicher Kugeln heißen entsprechend-gleich, wenn sie in derselben Reihenfolge alle Winkel und alle entsprechenden Seiten einzeln gleich haben. Je nachdem sich dabei die entsprechenden Elemente in gleichem oder in entgegengesetztem Sinne folgen (vgl. 20. b), können die zwei Vielkante oder Vielecke zur Deckung gebracht werden und heißen kongruent, oder können sie nicht zur Deckung, wohl aber in symmetrische Lage gebracht werden und heißen symmetrisch.

B. Lehrsätze.

1—4: Kugelkreise.

Lehrsatz 1.

a. Die vom Mittelpunkt einer Kugel auf die Ebene eines Kleinkreises gefällte Senkrechte hat ihren Fußpunkt im Mittelpunkt des Kleinkreises.

b. Die Verbindungslinie des Mittelpunktes einer Kugel mit dem Mittelpunkt eines Kleinkreises steht auf der Ebene des Kleinkreises senkrecht.

c. Die auf der Ebene eines Kleinkreises in dessen Mittelpunkt errichtete Senkrechte geht durch den Mittelpunkt der Kugel.

Beweis. **a** folgt unmittelbar aus Einl. II. 6. c. — Beweise von **b** und **c** indirekt.