Lehrbuch der Stereometrie

Hauck, Guido

Tübingen, 1893

2 - 4: Cylinder und Kegel

urn:nbn:de:hbz:466:1-77777

der Drehachse liegen, und welche **Parallelkreise** heißen. Das Stück der Fläche oder des Körpers zwischen zwei Parallelkreisen heißt eine **Zone** der Fläche oder des Körpers. — Da jede durch die Achse gelegte Ebene angesehen werden kann als die Ebene der gedrehten Figur in einer gewissen während der Drehung eingenommenen Lage, so schneiden alle durch die Achse gelegten Ebenen die Fläche nach kongruenten Figuren, welche **Achsenschnitte** oder **Meridiane** heißen. Jeder Meridian besteht aus zwei kongruenten und gegen die Achse symmetrisch liegenden Teilen (Halbmeridianen), deren jeder der gedrehten Figur kongruent ist.

d. Unter den Umdrehungs-Körpern und -Flächen sind von besonderer Wichtigkeit: der Umdrehungs-**Cylinder**, der Umdrehungs-**Kegel** und die **Kugel**.*)

2—4: Cylinder und Kegel.

2. a. Dreht sich ein Rechteck OO′A′A (Fig. 22) um eine seiner Seiten OO′ als Achse so lange herum, bis es wieder in seine erste Lage zurückgekehrt ist, so hat es einen Umdrehungskörper erzeugt, welcher **Umdrehungscylinder** oder kurz: **Cylinder** heißt. Die drei andern Seiten haben seine Oberfläche beschrieben; und zwar haben die der Achse anliegenden Seiten OA und O′A′ zwei gleiche, zur Achse senkrechte und daher unter sich parallele Kreise beschrieben (I. 6.

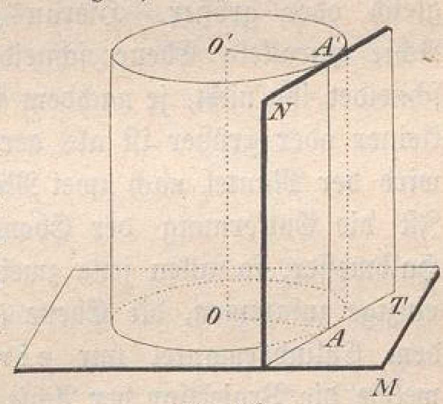

Fig. 22.

*) Nach 1. b müßte strenge genommen unterschieden werden zwischen „Cylinder, Kegel, Kugel" und „Cylinder*fläche*, Kegel*fläche*, Kugel*fläche*". Doch gebraucht man die Worte „Cylinder, Kegel, Kugel" häufig nicht bloß zur Bezeichnung des Körpers, sondern auch der Fläche, ähnlich wie in der ebenen Geometrie das Wort „Kreis" sowohl für „Kreis*fläche*" als für „Kreis*linie*" gebraucht wird.

Zus. 2 und I. 11. a), welche die Grundkreise heißen; die der Achse gegenüberliegende Seite AA′ hat eine krumme Fläche erzeugt, welche der Mantel des Cylinders heißt.

b. Da der Mantel von einer Geraden beschrieben worden ist, so liegen auf ihm unendlich viele Gerade; sie heißen Mantellinien und sind alle mit der Achse parallel und gleich, also auch unter sich parallel und gleich (I. 3. b). Die Entfernung der zwei Grundkreis-Ebenen heißt die Höhe des Cylinders; sie ist gleich der Achse und gleich den Mantellinien (I. 14. Zus. 1). Alle Parallelkreise sind unter sich und mit den Grundkreisen gleich; jeder Parallelkreis-Halbmesser heißt ein Halbmesser des Cylinders. Der Achsenschnitt ist ein Rechteck, dessen Seiten zwei Mantellinien und zwei Grundkreis-Durchmesser sind.

c. Ein Punkt oder eine mit der Achse parallele Gerade liegt innerhalb des Cylinders oder auf dessen Mantel oder außerhalb, je nachdem die Entfernung des Punktes oder der Geraden von der Achse kleiner ist als der Halbmesser oder gleich oder größer. Hieraus folgt weiter: Eine mit der Achse parallele Ebene schneidet den Cylindermantel oder schneidet ihn nicht, je nachdem ihre Entfernung von der Achse kleiner oder größer ist als der Halbmesser. Im ersten Fall wird der Mantel nach zwei Mantellinien geschnitten (I. 1. c). Ist die Entfernung der Ebene von der Achse gleich dem Halbmesser, so fallen jene zwei Schnitt-Mantellinien in eine einzige zusammen, die Ebene (Ebene N in Fig. 22) hat mit dem Cylindermantel nur eine Mantellinie AA′ gemein, welche die Projektion der Achse auf die Ebene vorstellt; (denn jede andere in ihr parallel zu AA′ gezogene Gerade fällt außerhalb des Cylinders nach I. 12. a.) Eine solche Ebene heißt eine Berührungsebene des Cylindermantels, die Mantellinie AA′ heißt ihre Berührungsmantellinie. Die Berührungsebene steht senkrecht auf der durch Berührungsmantellinie und Achse gelegten Ebene. Die Schnittlinie AT der Berührungsebene mit einer Grundkreis-Ebene

M ist Tangente an den Grundkreis; denn sie hat mit ihm nur einen Punkt gemein, nämlich den Endpunkt A der Berührungsmantellinie. Um daher (Fig. 22) die Berührungsebene zu konstruieren, die den Cylindermantel längs einer geg. Mantellinie AA′ berührt, zieht man an einen Grundkreis im Endpunkt A der Mantellinie die Tangente AT und legt durch Tangente AT und Mantellinie AA′ eine Ebene.

d. Aus c (Anf.) folgt ferner: Eine gerade Linie schneidet den Cylindermantel oder schneidet ihn nicht, je nachdem ihre kürzeste Entfernung von der Achse kleiner oder größer ist als der Halbmesser. Ist die kürzeste Entfernung gleich dem Halbmesser, so hat die Gerade mit dem Cylindermantel nur einen einzigen Punkt gemein, nämlich den Fußpunkt der kürzesten Entfernung. Eine solche Gerade heißt eine Tangente des Cylindermantels, jener Punkt — ihr Berührungspunkt. Jede Gerade, die auf einem Halbmesser in seinem Endpunkt senkrecht steht, ist Tangente, (denn der Halbmesser steht auch senkrecht auf der Achse). Daher ist auch jede in einer Berührungsebene gezogene Gerade Tangente.

3. a. Dreht sich ein rechtwinkliges Dreieck SOA (Fig. 23) um eine seiner Katheten SO als Achse so lange herum, bis es wieder in seine erste Lage zurückgekehrt ist, so hat es einen Umdrehungskörper erzeugt, welcher Umdrehungskegel oder kurz: Kegel heißt. Die zwei andern Seiten haben die Oberfläche des Kegels beschrieben; diese besteht aus dem von der andern Kathete OA beschriebenen Grundkreis, welcher senkrecht zur Achse ist, und aus dem von der Hypotenuse SA beschriebenen krummen Mantel des Kegels. — Der Winkel OSA zwischen der Achse und der Hypotenuse heißt der erzeugende Winkel des Kegelmantels. Der Endpunkt S der Achse heißt die Spitze,

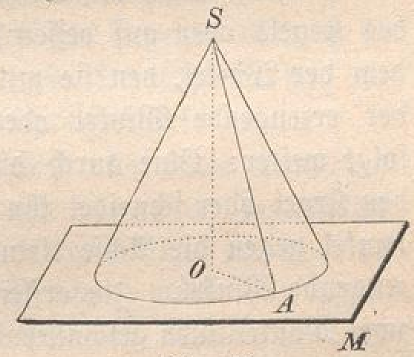

Fig. 23.

ihre Entfernung von der Ebene des Grundkreises die Höhe des Kegels; die Höhe ist gleich der Achse.

b. Jede Gerade, die von der Spitze nach einem Punkt der Peripherie des Grundkreises gezogen wird, kann als die Hypotenuse des erzeugenden Dreiecks in einer gewissen während der Drehung eingenommenen Lage betrachtet werden; sie liegt daher auf dem Kegelmantel und heißt eine Mantellinie des Kegels. Alle Mantellinien sind gleich lang und machen mit der Achse gleiche Winkel. Jeder Halbmesser OA des Grundkreises stellt die Projektion der durch seinen Endpunkt gehenden Mantellinie SA auf die Ebene des Grundkreises vor. Da nun der Winkel SAO stets die nämliche Größe hat, so sind alle Mantellinien gegen die Grundkreis-Ebene gleich geneigt, und zwar ist der Neigungswinkel gleich dem Komplement des erzeugenden Winkels. — Der Achsenschnitt ist ein gleichschenkliges Dreieck, dessen Seiten zwei Mantellinien und ein Grundkreis-Durchmesser sind. Der Dreieckswinkel an der Spitze (gleich dem doppelten erzeugenden W.) heißt die Öffnung des Kegels.

c. Eine durch die Spitze gehende Gerade liegt innerhalb des Kegels oder auf dessen Mantel oder außerhalb, je nachdem der Winkel, den sie mit der Achse macht, kleiner ist als der erzeugende Winkel oder gleich oder größer. Hieraus folgt weiter: Eine durch die Spitze gelegte Ebene schneidet den Kegel oder schneidet ihn nicht, je nachdem ihr Neigungswinkel gegen die Achse kleiner oder größer ist als der erzeugende Winkel. Im ersten Fall wird der Kegelmantel nach zwei Mantellinien geschnitten (I. Einl. 2). Ist der Neigungswinkel gleich dem erzeugenden Winkel, so fallen jene zwei Schnitt-Mantellinien in eine einzige zusammen, die Ebene hat mit dem Kegelmantel nur eine Mantellinie gemein, welche mit der Projektion der Achse auf die Ebene zusammenfällt, (denn jede andere durch die Spitze in der Ebene gezogene Gerade liegt außerhalb des Kegelmantels nach I. 13. a). Eine solche

Ebene N (Fig. 24*) heißt eine **Berührungsebene** des Kegelmantels; die gemeinsame Mantellinie ST heißt ihre **Berührungsmantellinie**. Die Berührungsebene steht senkrecht auf der durch Berührungsmantellinie und Achse gelegten Ebene STO. Die Schnittlinie TB der Berührungsebene mit der Ebene des Grundkreises ist (wie beim Cylinder) Tangente an den Grundkreis. Daher Konstruktion der Berührungsebene wie beim Cylinder. — Der Neigungswinkel einer Berührungsebene N gegen die Ebene des Grundkreises ist gleich dem Neigungswinkel ihrer Berührungsmantellinie ST; denn ST stellt eine Neigungslinie der Ebene N vor (I. 9. b und I. Anh. 10). Daher haben alle Berührungsebenen gleiche Neigung gegen die Ebene des Grundkreises, und zwar ist der Neigungswinkel gleich dem Komplement des erzeugenden Winkels.

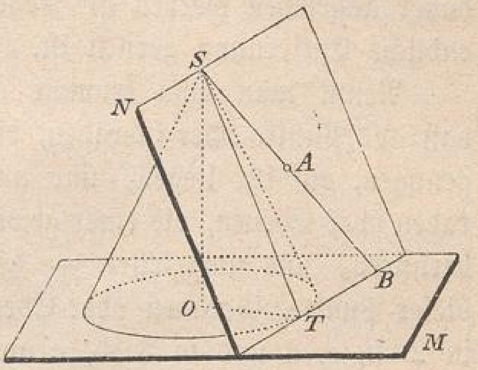

Fig. 24.

d. Jede in einer Berührungsebene liegende Gerade ist **Tangente** an den Kegelmantel. Ihr Schnittpunkt mit der Berührungsmantellinie ist ihr Berührungspunkt.

4. a. Der Mantel eines Kegels und eines Cylinders stellt nur einen Teil — nämlich eine **Zone** — der Cylinder**fläche** und Kegel**fläche** im weiteren Sinne des Wortes vor. Die vollständige Fläche erhält man, wenn man sämtliche Mantellinien nach beiden Seiten ins Unendliche verlängert. Die vollständige Kegelfläche besteht also aus zwei kongruenten Teilen, die in der Spitze zusammenhängen; sie wird erzeugt durch Drehung der einen von zwei sich schneidenden unbegrenzten Geraden um die andere. (Ist der von den Geraden gebildete **erzeugende Winkel** ein Rechter, so erhält man als speziellen Fall der Kegelfläche die

*) Man denke sich in Fig. 24 die Linie SAB hinweg.

Ebene, vgl. I. 6. Zus. 2.) — Die Cylinderfläche wird erzeugt durch Drehung der einen von zwei unbegrenzten parallelen Geraden um die andere. Die Cylinderfläche kann daher angesehen werden als Kegelfläche, deren Spitze in unendliche Entfernung gerückt ist.

Nennt man eine krumme Fläche von der Eigenschaft, daß alle Punkte oder Geraden, die einer gewissen Bedingung genügen, auf ihr liegen, und umgekehrt, oder daß alle Geraden oder Ebenen, die einer gewissen Bedingung genügen, sie berühren, und umgekehrt, — den geometrischen Ort dieser Punkte, Geraden oder Ebenen: so lassen sich die Sätze in 2. b, c, d und in 3. b, c auch in folgender Form aussprechen:

b. Der geom. Ort eines Punktes, der eine geg. Entfernung — oder einer Geraden, die eine geg. kürzeste Entfernung von einer festen Geraden hat, ist eine Cylinderfläche, deren Achse die feste Gerade, und deren Halbmesser gleich der geg. Entfernung ist.

c. Der geom. Ort einer Geraden oder einer Ebene, die einer festen Geraden parallel ist und von ihr eine geg. Entfernung hat, ist eine Cylinderfläche, deren Achse die feste Gerade, und deren Halbmesser gleich der geg. Entfernung ist.

d. Der geom. Ort einer Geraden oder einer Ebene, die eine feste Gerade in einem festen Punkt unter geg. Winkel schneidet, ist eine Kegelfläche, deren Achse die feste Gerade, deren Spitze der feste Punkt, und deren erzeugender Winkel gleich dem geg. Winkel ist.

e. Der geom. Ort einer Geraden oder einer Ebene, die durch einen festen Punkt geht und gegen eine feste Ebene eine geg. Neigung hat, ist eine Kegelfläche, deren Spitze der feste Punkt ist, deren Achse senkrecht zu der festen Ebene steht, und deren erzeugender Winkel gleich dem Komplement des geg. Neigungswinkels ist. (Der Satz bleibt auch für den Fall gültig, daß der Punkt in der Ebene selbst liegt, I. 14. a und Zus. 4.)