Lehrbuch der Stereometrie

Hauck, Guido

Tübingen, 1893

13 - 22: Sphärik und Vielkant

13—22: Sphärik und Vielkant.

13. a. Durch zwei Punkte einer Kugeloberfläche, die nicht Gegenpunkte sind, läßt sich immer ein und nur ein Großkreis legen (I. Einl. 3. a, Schluß).

b. Unter der sphärischen Entfernung zweier Punkte auf einer Kugeloberfläche versteht man die Länge des zwischen ihnen liegenden Großkreisbogens, und zwar desjenigen Bogens, der kleiner als ein Halbkreis ist. Es wird (in B. 11. Zus. 1) bewiesen werden, daß die sphärische Entfernung zweier Punkte den kürzesten Weg vorstellt, auf dem man von einem Punkt zum andern auf der Oberfläche der Kugel gelangen kann. — Die sphärischen Entfernungen können entweder nach irgend einer Längeneinheit (etwa mittels eines Fadens) oder nach Bogengraden (1 Grad = $\frac{1}{360}$ der Großkreis-Peripherie) gemessen werden. Da auf derselben Kugeloberfläche die Bogengrade durchweg gleiche Länge haben, so können auch sie als Einheiten eines Längenmaßstabes gelten.

c. Haben auf einer Kugelfläche zwei Punkte gleiche geradlinige Entfernung wie zwei andere Punkte, so haben sie auch gleiche sphärische Entfernung; und umgekehrt. (Denn die sphärischen Entfernungen sind dann Bögen gleicher Kreise mit gleichen Sehnen.) Einer größeren geradlinigen Entfernung entspricht auch eine größere sphärische Entfernung, und umgekehrt. Dasselbe gilt für zwei gleiche Kugeln.

d. Nach I. 12. b hat ein Pol eines Kugelkreises (II. Einl. 6. c) von allen Punkten der Kreisperipherie gleiche geradlinige, und folglich (nach c) auch gleiche sphärische Entfernungen. Man nennt daher denjenigen Pol eines Kleinkreises, der mit ihm auf der nämlichen Seite des zugehörigen Äquators liegt, den sphärischen Mittelpunkt des Kleinkreises; seine sphär. Entfernung von einem Punkt der Peripherie heißt der sphärische Halbmesser. Auf der Oberfläche einer massiven Kugel kann ein Kugelkreis aus seinem sphärischen Mittelpunkt ganz ebenso mit dem Zirkel beschrieben werden, wie in der Ebene ein Kreis aus seinem Mittelpunkt beschrieben wird.

e. Jeder Pol eines Großkreises hat von allen Punkten desselben eine sphär. Entfernung = 90° oder gleich dem vierten Teil der Großkreis-Peripherie. Der sphär. Halbmesser eines Großkreises ist also = 90°. Jeder seiner Pole kann als sein sphär. Mittelpunkt gelten.

f. Die in a und b genannten zwei Eigenschaften der Großkreise auf der Kugeloberfläche sind dieselben wie die Grundeigenschaften der geraden Linien in der Ebene. Die Großkreise spielen daher auf der Kugeloberfläche die nämliche Rolle wie die geraden Linien in der Ebene. Den Beziehungen zwischen geraden Linien und Kreisen in der Ebene, wie sie die ebene Geometrie betrachtet, entsprechen auf der Kugeloberfläche analoge Beziehungen zwischen Großkreisen und Kleinkreisen. Die Lehre von diesen Beziehungen heißt Sphärik.

g. Da es keine parallelen Großkreise giebt, so sind zu den Sätzen der ebenen Geometrie über parallele Gerade nur teilweise analoge Sätze in der Sphärik vorhanden.

14. a. Zwei von einem Punkt P (Fig. 26) einer Kugeloberfläche ausgehende Großkreisbögen PQ und PR schließen einen sphärischen Winkel QPR ein; der Punkt P heißt die Spitze oder der Scheitel, die beiden Großkreisbögen PQ und PR heißen die Schenkel des Winkels. Ein sphär. Winkel wird gemessen durch den Winkel, den die in der Spitze an die beiden Schenkel gelegten Tangenten PT und PU einschließen. Er ist gleich dem Keilwinkel des von den Ebenen der zwei Großkreisbögen gebildeten Keils; denn PT und PU liegen in den Keilblättern und sind senkrecht zur Keilkante OP. Ein sphär. Winkel

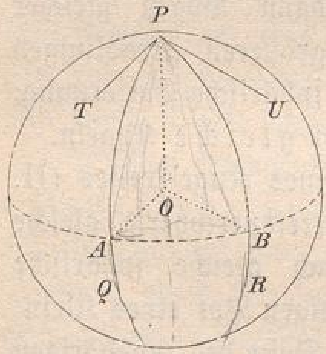

Fig. 26.

kann auch auf der Kugeloberfläche selbst gemessen werden, und zwar durch seinen Äquatorbogen, d. h. durch den zwischen seine Schenkel fallenden Bogen AB des zu der Spitze P gehörigen Äquators; denn der Zentriwinkel AOB dieses Bogens ist = W. TPU (I. 4. b), der Äquatorbogen mißt also ebensoviel Bogengrade als der sphär. Winkel Winkelgrade. — Die Benennungen: Nebenwinkel, Scheitelwinkel u. s. w. haben dieselbe Bedeutung wie bei ebenen Winkeln.

b. Zwei Großkreisbögen stehen auf einander senkrecht, wenn sie einen Winkel von 90° einschließen. Jeder Großkreis PA (Fig. 26), der durch den Pol P eines andern Großkreises AB geht, steht auf diesem senkrecht, und umgekehrt (I. 8. a und c).

15. a. Zwei Großkreise ABA′B′ und ACA′C′ (Fig. 27, S. 61) einer Kugeloberfläche schneiden sich in zwei Gegenpunkten A und A′ und halbieren sich daher gegenseitig, (denn ihre Ebenen haben den Mittelpunkt gemein, schneiden sich also nach einem Durchmesser). Sie teilen die Kugeloberfläche in vier Teile, von denen jeder ein Kugelzweieck oder sphärisches Zweieck heißt. Ein sphär. Zweieck wird also von zwei halben Großkreisen begrenzt. Ihre Schnittpunkte A und A′ heißen die Ecken des Zweiecks. Die sphär. Winkel an den zwei Ecken sind gleich; denn sie haben denselben Äquatorbogen, welcher auch der Äquatorbogen des sphär. Zweiecks heißt. — Die Halbkugel und die ganze Kugeloberfläche können als sphär. Zweiecke aufgefaßt werden, deren Winkel bezw. 2 R und 4 R betragen.

b. Der von den zwei Halbkreis-Ebenen eines sphär. Zweiecks eingeschlossene Keil heißt der dem Zweieck zugehörige Keil. Sein Keilwinkel ist gleich dem sphär. Winkel des Zweiecks (14. a).

c. Zwei sphär. Zweiecke derselben Kugel oder gleicher Kugeln sind kongruent, wenn sie gleiche Winkel oder Äquatorbögen haben (I. 7. Zus. und II. Einl. 5. d).

d. Zwei sphär. Zweiecke derselben Kugel oder gleicher Kugeln verhalten sich ihrem Flächeninhalte nach wie ihre Winkel oder Äquatorbögen. Denn verhalten sich die Äquatorbögen wie m zu n, wo m und n zunächst ganze Zahlen sein mögen, und teilt man den Äquatorbogen des einen Zweiecks in m, den des andern in n gleiche Teile, so ist ein Teil des einen Bogens gleich einem Teil des andern Bogens; legt man daher in beiden Zweiecken durch jeden Teilpunkt und die Ecken einen Großkreis, so wird dadurch das eine Zweieck in m, das andere in n Teile geteilt, die (nach c) sämtlich kongruent sind; die zwei Zweiecke verhalten sich somit wie m zu n. Läßt sich das Verhältnis der zwei Äquatorbögen nicht in ganzen Zahlen m und n ausdrücken, so liegt es doch zwischen zwei Grenzen $\frac{m}{n}$ und $\frac{m+1}{n}$, deren Unterschied $\frac{1}{n}$ beliebig klein gemacht werden kann*).

Ein sphär. Zweieck verhält sich zur halben Kugeloberfläche wie sein Winkel zu 2 R (nach a, Schluß).

16. a. Hat man auf einer Kugeloberfläche drei Großkreise, die sich nicht in den nämlichen zwei Gegenpunkten schneiden, so teilen zunächst zwei derselben, z. B. ABA'B' und ACA'C' (Fig. 27) die Kugeloberfläche in vier sphär. Zweiecke, von denen dann jedes durch den dritten Kreis BCB'C' wieder in zwei Teile geteilt wird. Jeder dieser 8 Teile wird ein Kugeldreieck oder sphärisches Dreieck genannt. Die ein sphär. Dreieck einschließenden Großkreisbögen heißen die Seiten, die sphär. Winkel, die von je zwei in einer Ecke zusammenstoßenden Seiten gebildet werden, heißen die Winkel des sphär. Dreiecks.

b. Zwei sphär. Dreiecke, die zusammen ein sphär. Zweieck bilden, heißen Nebendreiecke. Zu jedem sphär. Dreieck

---

*) Ist z. B. das Verhältnis $= \sqrt{2} = 1{,}41421\ldots$, so liegt es zwischen den zwei Grenzen $\frac{1414}{1000}$ und $\frac{1415}{1000}$, oder zwischen $\frac{14142}{10000}$ und $\frac{14143}{10000}$, u. s. f.

sind drei Nebendreiecke vorhanden, oder: jedes sphär. Dreieck läßt sich auf dreifache Art zu einem Zweieck ergänzen. (Die Nebendreiecke von △ ABC sind z. B. BCA′, CAB′ und ABC′.) Zwei solche Dreiecke, deren Ecken paarweise Gegenpunkte sind, heißen *Gegendreiecke*. Zu jedem sphär. Dreieck ist ein Gegendreieck vorhanden. (Das Gegendreieck von △ ABC ist z. B. A′B′C′.)

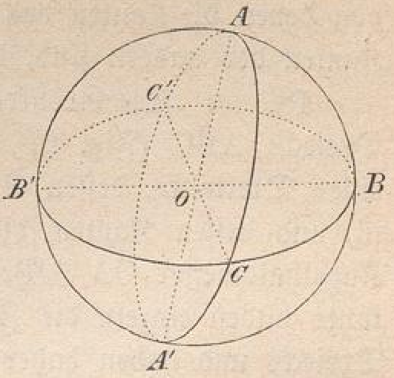

Fig. 27.

c. Die Sphärik beschränkt sich auf die Betrachtung solcher sphär. Dreiecke, in denen jede Seite kleiner als ein halber Großkreis, und jeder Winkel kleiner als 2 R ist. — Ein sphär. Dreieck entsteht daher auch dadurch, daß man drei beliebige, nicht auf demselben Großkreis liegende Punkte der Kugeloberfläche durch ihre sphär. Entfernungen verbindet.

17. a. Hat man drei Ebenen, die nicht der nämlichen Geraden parallel sind, so teilen zunächst zwei derselben den unendlichen Raum in vier Keile, von denen dann jeder durch die dritte Ebene wieder in zwei Teile geteilt wird. Jeder dieser acht Teile wird ein *Dreikant* genannt. Der Schnittpunkt der drei Ebenen heißt die *Spitze*, die von der Spitze ausgehenden Äste der drei Schnittlinien heißen die *Kanten*, die drei Ebenen — die *Seitenflächen* des Dreikants. Die von je zwei Kanten eingeschlossenen Winkel heißen seine *Seiten*, die von je zwei Seitenflächen gebildeten Keile — seine *Winkel*. Wir bezeichnen im folgenden ein Dreikant, dessen Spitze O, dessen Kanten OA, OB, OC sind, durch O,ABC, seine Seiten durch AOB, BOC, COA, seine Winkel durch A, B, C, die numerischen Werte der Winkel durch α, β, γ, die der gegenüberliegenden Seiten durch a, b, c.

b. Zwei Dreikante, die zusammen einen Keil bilden, heißen *Nebendreikante*. Zu jedem Dreikant sind drei Nebendreikante vorhanden, die man erhält, wenn man je eine Kante über die Spitze verlängert. Zwei Dreikante, von denen die Kanten des einen die Rückverlängerungen der Kanten des andern sind, heißen **Scheiteldreikante**.

18. a. Die Großkreis-Ebenen der Seiten eines sphär. Dreiecks ABC (Fig. 27, S. 61) bilden die Seitenflächen eines Dreikants, dessen Spitze der Mittelpunkt O der Kugel ist, und dessen Kanten die nach den drei Ecken gezogenen Kugelhalbmesser OA, OB, OC sind. Die Seiten des Dreikants bilden einzeln die Zentriwinkel der Seiten des sphär. Dreiecks und haben daher ebensoviel Winkelgrade, als die entsprechenden Dreieckseiten Bogengrade haben. Die Winkel des Dreikants sind einzeln gleich den Winkeln des sphär. Dreiecks (14. a). Das Dreikant heißt das dem sphär. Dreieck **zugehörige** Dreikant.

b. Beschreibt man umgekehrt aus der Spitze eines Dreikants mit beliebigem Halbmesser eine Kugelfläche, so schneidet das Dreikant aus dieser das zugehörige sphär. Dreieck aus. Da der Halbmesser der Kugel beliebig ist, so giebt es zu einem Dreikant unendlich viele zugehörige sphär. Dreiecke; zwei entsprechende Seiten zweier solcher Dreiecke haben zwar verschiedene absolute Längen, nach Bogengraden gemessen aber haben sie gleiche numerische Werte.

c. Jeder Lehrsatz über die Seiten und Winkel der sphär. Dreiecke gilt eben damit auch für Dreikante, und umgekehrt.

19. a. Die Summe der drei Winkel hat für verschiedene sphär. Dreiecke verschiedene Werte, sie ist stets größer als 2 R. Z. B. ist in dem sphär. Dreieck PAB in Fig. 26 (S. 58) die Summe der Winkel gleich 2 R plus dem W. APB, der zwischen 0 und 2 R liegen kann. (Der allgemeine Beweis wird in B. 15. a erbracht werden.) Man nennt den Ueberschuß der Winkelsumme eines sphär. Dreiecks über 2 R den **sphärischen Exzeß** des Dreiecks. Dieselbe Bezeichnung wird auch auf Dreikante übertragen.

b. Je kleiner die Dimensionen eines sphär. Dreiecks im Verhältnis zum Halbmesser seiner Kugel sind, desto kleiner ist sein sphär. Exzeß; denn desto weniger weicht das sphär. Dreieck von dem durch seine Endpunkte bestimmten ebenen Dreieck ab. Sind über ein auf einer Kugeloberfläche von großem Halbmesser (z. B. auf der Erdkugel) liegendes Dreieck geometrische Untersuchungen anzustellen, und ist sein sphär. Exzeß für den Grad der Genauigkeit, der für die Untersuchung vorgeschrieben ist, verschwindend klein, so kann das Dreieck als ebenes Dreieck behandelt werden. Ist dies aber nicht der Fall, so muß zu der Untersuchung statt der ebenen Geometrie die Sphärik angewendet werden.

c. Ein sphär. Dreieck oder Dreikant, das einen rechten Winkel besitzt, heißt rechtwinklig. Ein sphär. Dreieck oder Dreikant kann übrigens auch mehr als einen rechten Winkel enthalten (vgl. z. B. $\triangle$ PAB in Fig. 26, S. 58). Ebenso können mehrere stumpfe Winkel vorhanden sein. — Ein sphär. Dreieck oder Dreikant mit zwei gleichen Seiten heißt gleichschenklig, ein solches mit drei gleichen Seiten heißt gleichseitig. — Drei größte Kreise, die auf einander senkrecht stehen, teilen die Kugeloberfläche in acht kongruente Teile, von denen jeder ein Kugeloktant heißt; das zugehörige Dreikant heißt Oktant. In ihm sind alle Seiten und alle Winkel = 90°.

20. a. Zwei sphär. Dreiecke derselben Kugel oder gleicher Kugeln, und ebenso zwei Dreikante heißen entsprechend-gleich, wenn sie alle Winkel und alle entsprechenden Seiten bezw. gleich haben.

b. Umläuft man auf der Oberfläche einer Kugel zwei entsprechend-gleiche sphär. Dreiecke ABC und A'B'C', indem man ihre entsprechenden Ecken und Seiten in der nämlichen Reihenfolge passiert, und hat man dabei das umlaufene Dreieck beidemal zur Linken oder beidemal zur Rechten (Fig. 28. a), so sagt man, die entsprechenden Elemente folgen sich in gleichem Sinn, oder: die zwei Dreiecke seien gleichstimmig. Hat man dagegen das eine Dreieck zur Linken, das andere zur Rechten (Fig. 28. b), so folgen sich die entsprechenden Elemente in entgegengesetztem Sinn, die zwei Dreiecke sind ungleichstimmig. Im ersten Fall können die Dreiecke und ihre zugehörigen Dreikante zur

Fig. 28. a.

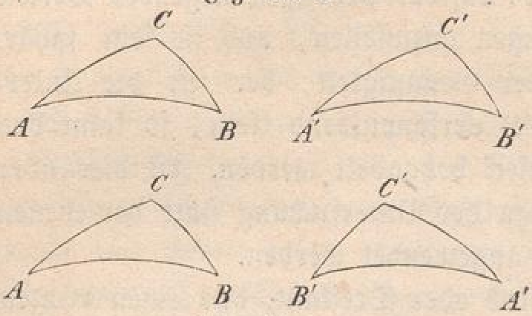

Fig. 28. b.

Deckung gebracht werden und heißen daher kongruent. Im zweiten Fall können sie nicht zur Deckung gebracht werden. Verschiebt man nämlich das eine Dreieck auf der Kugeloberfläche, bis zwei seiner Ecken, z. B. A und B mit den entsprechenden Ecken A′ und B′ des andern Dreiecks — und also die zwei Kanten OA und OB des einen zugehörigen Dreikants mit den entsprechenden Kanten OA′ und OB′ des andern zusammenfallen: so liegt jetzt das dritte Kantenpaar OC und OC′ (nach I. Anh. 15. b u. c) symmetrisch in Bez. auf die gemeinschaftliche Seitenfläche AOB. Zwei solche sphär. Dreiecke oder Dreikante heißen symmetrisch*). — Um bei entsprechend-gleichen Dreikanten zu entscheiden, ob sie gleichstimmig oder ungleichstimmig sind, ohne hiezu die zugehörigen sphär. Dreiecke zu Hilfe zu nehmen, kann man sich zwei menschliche Figuren mit den zwei Dreikanten als Mänteln bekleidet den-

*) Derselbe Unterschied zwischen kongruenten und symmetrischen Dreiecken findet wie in der Sphärik, so auch in der ebenen Geometrie statt. Zwei symmetrische ebene Dreiecke können durch bloßes Verschieben in ihrer Ebene nicht zur Deckung gebracht werden, sondern nur dadurch, daß man das eine Dreieck umlegt, so daß es seine vorherige Unterseite nach oben kehrt. Versucht man dasselbe bei zwei symmetrischen sphärischen Dreiecken auszuführen, indem man sie von der Kugeloberfläche abhebt und so legt, daß die Ecken des einen mit den entsprechenden Ecken des andern zusammenfallen: so sind jetzt die konkaven Seiten der zwei Dreiecke einander zugekehrt (ähnlich wie wenn die rechte und die linke hohle Hand so gegen einander gelegt werden, daß je zwei entsprechende Fingerspitzen sich berühren); von einer Deckung kann also keine Rede sein.

ken (den Hals in der Spitze), und sehen, ob für beide Figuren die entsprechenden Kanten (Falten) ihrer Mäntel in demselben Sinne auf einander folgen, oder für die eine Figur von der Rechten über die Brust zur Linken, für die andere von der Linken über die Brust zur Rechten.

c. Zwei entsprechend-gleiche sphär. Dreiecke oder Dreikante müssen entweder kongruent oder symmetrisch sein. Bloß in dem Falle, wo sie gleichschenklig sind, und in jedem den gleichen Seiten auch gleiche Winkel gegenüberliegen, sind sie sowohl kongruent als symmetrisch, denn es können dann die gleichen Elemente sowohl so, daß sie sich in gleichem Sinne —, als so, daß sie sich in entgegengesetztem Sinne folgen, einander zugeordnet werden.

d. Zwei sphär. Gegendreiecke oder zwei Scheiteldreikante sind entsprechend-gleich, (denn je zwei entsprechende Seiten oder Winkel sind als Scheitelwinkel gleich, I. 7. Zus.); und zwar sind sie — abgesehen von dem in c besprochenen Fall — immer entgegengesetzten Sinnes, also symmetrisch.

21. a. Konstruiert man zu den drei Seiten eines sphär. Dreiecks (d. h. zu den Großkreisen, von denen die Seiten Bögen sind) die Pole, und zwar zunächst zu jeder Seite nur denjenigen Pol, welcher auf derselben Halbkugel mit dem Dreieck liegt: so bestimmen diese drei Pole die Ecken eines zweiten sphär. Dreiecks, welches das Polardreieck oder Supplementardreieck des ersten heißt. Jeder Seite des ursprünglichen Dreiecks entspricht im Polardreieck ein ihr zugehöriger Winkel, nämlich derjenige, dessen Spitze der Pol der Seite ist; und jedem Winkel des ursprünglichen Dreiecks entspricht im Polardreieck eine ihm zugehörige Seite, nämlich diejenige, deren Endpunkte die Pole der jenen Winkel einschließenden Seiten sind. — Die entgegengesetzten Pole der Dreieckseiten bestimmen ein zweites Polardreieck, welches das Gegendreieck des ersten, und also ihm entsprechend-gleich ist. Das erste Polardreieck heißt mit dem ursprünglichen Dreieck gleichstimmig, das zweite — ungleichstimmig.

b. Entsprechend erhält man das Polardreikant oder Supplementardreikant eines Dreikants, wenn man auf dessen drei Seitenflächen in der Spitze die Senkrechten errichtet, und zwar entweder alle drei Senkrechten auf derjenigen Seite der betreffenden Seitenfläche, auf der das Dreikant liegt, oder alle drei auf der entgegengesetzten Seite. Was zugehörige Winkel und Seiten des Dreikants und seines Polardreikants sind, ergiebt sich ähnlich wie beim sphär. Dreieck.

22. a. Zieht man nach den Ecken eines ebenen Vielecks von einem außerhalb seiner Ebene liegenden Punkt Gerade, und legt durch je zwei auf einander folgende Gerade eine Ebene, so umschließen diese Ebenen einen (nicht allseitig begrenzten) Raum, welcher Vielkant (auch körperlicher Winkel oder körperliche Ecke) heißt. Hat das Vielkant n Kanten und also auch n Seitenflächen, so heißt es n-kant. — Beschreibt man aus der Spitze des Vielkants mit beliebigem Halbmesser eine Kugelfläche, so schneidet es aus dieser ein sphärisches Vieleck (n-eck) aus, das dem Vielkant zugehörig heißt. Seiten und Winkel des Vielkants und des sphär. Vielecks haben die nämliche Bedeutung wie beim Dreikant und sphär. Dreieck. Erhabene Winkel sind ausgeschlossen. — Ein Vielkant oder ein sphär. Vieleck heißt regulär, wenn alle seine Seiten gleich und alle seine Winkel gleich sind.

b. Die Ebenen, die durch je zwei nicht auf einander folgende Kanten eines Vielkants gelegt werden können, heißen Diagonalebenen. Sie schneiden die Fläche des zugehörigen sphär. Vielecks nach dessen Diagonalen. Jedes n-kant (sphär. n-eck) kann durch Diagonalebenen (Diagonalen) in n—2 Dreikante (sphär. Dreiecke) zerlegt werden.

c. Da die Summe der Winkel eines sphär. Dreiecks größer als 2 R ist (19. a), so ist die Summe der Winkel eines sphär. n-ecks (nach b, Schluß) größer als (n—2) 2 R, d. h. größer als die Winkelsumme eines ebenen Vielecks von gleicher Seitenzahl. Der Ueberschuß über die letztere heißt der sphärische Exzeß des sphär. Vielecks. Sind also α, β, γ ... die Winkel des sphär. n-ecks, so ist sein sphär. Exzeß $= \alpha + \beta + \gamma + \ldots - (n-2)\,2\,R$. Die Bezeichnung „sphär. Exzeß" wird auch auf Vielkante übertragen.

d. Zwei Vielkante oder zwei sphär. Vielecke gleicher Kugeln heißen entsprechend-gleich, wenn sie in derselben Reihenfolge alle Winkel und alle entsprechenden Seiten einzeln gleich haben. Je nachdem sich dabei die entsprechenden Elemente in gleichem oder in entgegengesetztem Sinne folgen (vgl. 20. b), können die zwei Vielkante oder Vielecke zur Deckung gebracht werden und heißen kongruent, oder können sie nicht zur Deckung, wohl aber in symmetrische Lage gebracht werden und heißen symmetrisch.

B. Lehrsätze.

1—4: Kugelkreise.

Lehrsatz 1.

a. Die vom Mittelpunkt einer Kugel auf die Ebene eines Kleinkreises gefällte Senkrechte hat ihren Fußpunkt im Mittelpunkt des Kleinkreises.

b. Die Verbindungslinie des Mittelpunktes einer Kugel mit dem Mittelpunkt eines Kleinkreises steht auf der Ebene des Kleinkreises senkrecht.

c. Die auf der Ebene eines Kleinkreises in dessen Mittelpunkt errichtete Senkrechte geht durch den Mittelpunkt der Kugel.

Beweis. **a** folgt unmittelbar aus Einl. II. 6. c. — Beweise von **b** und **c** indirekt.