Lehrbuch der Stereometrie

Hauck, Guido

Tübingen, 1893

B. Lehrsätze.

eines sphär. n-ecks (nach b, Schluß) größer als (n—2) 2 R, d. h. größer als die Winkelsumme eines ebenen Vielecks von gleicher Seitenzahl. Der Ueberschuß über die letztere heißt der sphärische Exzeß des sphär. Vielecks. Sind also α, β, γ . . . die Winkel des sphär. n-ecks, so ist sein sphär. Exzeß $= \alpha + \beta + \gamma + \ldots - (n-2)\,2\,R$. Die Bezeichnung „sphär. Exzeß" wird auch auf Vielkante übertragen.

d. Zwei Vielkante oder zwei sphär. Vielecke gleicher Kugeln heißen entsprechend-gleich, wenn sie in derselben Reihenfolge alle Winkel und alle entsprechenden Seiten einzeln gleich haben. Je nachdem sich dabei die entsprechenden Elemente in gleichem oder in entgegengesetztem Sinne folgen (vgl. 20. b), können die zwei Vielkante oder Vielecke zur Deckung gebracht werden und heißen kongruent, oder können sie nicht zur Deckung, wohl aber in symmetrische Lage gebracht werden und heißen symmetrisch.

B. Lehrsätze.

1—4: Kugelkreise.

Lehrsatz 1.

a. Die vom Mittelpunkt einer Kugel auf die Ebene eines Kleinkreises gefällte Senkrechte hat ihren Fußpunkt im Mittelpunkt des Kleinkreises.

b. Die Verbindungslinie des Mittelpunktes einer Kugel mit dem Mittelpunkt eines Kleinkreises steht auf der Ebene des Kleinkreises senkrecht.

c. Die auf der Ebene eines Kleinkreises in dessen Mittelpunkt errichtete Senkrechte geht durch den Mittelpunkt der Kugel.

Beweis. **a** folgt unmittelbar aus Einl. II. 6. c. — Beweise von **b** und **c** indirekt.

Zusatz 1. Die vom Mittelpunkt einer Kugel auf eine Sehne gefällte Senkrechte hat ihren Fußpunkt im Mittelpunkt der Sehne. Die Verbindungslinie des Mittelpunkts einer Kugel mit dem Mittelpunkt einer Sehne steht auf der Sehne senkrecht. Die Mittellotebene (I. Anh. 18. a) einer Sehne geht durch den Mittelpunkt der Kugel.

Zusatz 2. Dieselben Sätze gelten auch für eine Berührungsebene oder eine Tangente der Kugel, wenn statt „Mittelpunkt des Kleinkreises", bezw. „der Sehne" gesetzt wird: „Berührungspunkt der Berührungsebene", bezw. „der Tangente".

Lehrsatz 2.

Schneiden sich zwei Kugelflächen, so schneiden sie sich nach einem Kreis, dessen Mittelpunkt auf der gemeinschaftlichen Zentrallinie liegt, und dessen Ebene zur Zentrallinie senkrecht ist.

Beweis. Sind O und O′ die Mittelpunkte der zwei Kugeln, und ist A ein beliebiger Punkt der Schnittkurve, so sind, wie auch der Punkt A auf der Schnittkurve angenommen werden mag, die Dreiecke OAO′ alle unter sich kongruent; daher haben die von den Punkten A auf OO′ gefällten Höhen alle den nämlichen Fußpunkt M und die gleiche Länge. Die Punkte A liegen somit alle auf der Peripherie eines Kreises, dessen Mittelpunkt M ist, und dessen Ebene senkrecht zu OO′ ist (I. 6. b).

Lehrsatz 3.

a. Gleiche Kugelkreise derselben Kugel sind vom Mittelpunkt gleich weit entfernt, und umgekehrt.

b. Von zwei ungleichen Kugelkreisen ist der größere dem Mittelpunkt näher, und umgekehrt.

Beweis. Es sei O der Mittelpunkt der Kugel, M und M′ seien die Mittelpunkte zweier Kugelkreise, also OM und OM′ die Entfernungen ihrer Ebenen vom Kugelmittelpunkt (II. 1. b). MA und M′A′ seien beliebige Halbmesser der zwei Kugelkreise; man ziehe OA und OA′.

a. Sind die zwei Kugelkreise gleich, so ist $MA = M'A'$; da außerdem $OA = OA'$, so ist $\triangle OMA \cong OM'A'$, folglich: $OM = OM'$. — Ist umgekehrt $OM = OM'$, so ist gleichfalls $\triangle OMA \cong OM'A'$, folglich $MA = M'A'$, d. h.: die Kugelkreise sind gleich.

b. In den zwei rechtw. Dreiecken OMA und OM′A′ sind die Hypotenusen OA und OA′ gleich. Haben aber zwei rechtw. Dreiecke gleiche Hypotenusen, und ist die erste Kathete des einen größer als die erste Kathete des andern, so ist die zweite Kathete des einen kleiner als die zweite Kathete des andern. Ist daher Kugelkreis M größer als Kugelkreis M′, also Kath. $MA > M'A'$, so ist Kath. $OM < OM'$. Ist umgekehrt $OM < OM'$, so ist $MA > M'A'$, d. h.: Kugelkreis M größer als Kugelkreis M′.

Zusatz 1. Dieselben Sätze gelten auch für Kugelsehnen.

Zusatz 2. Verlängert man OM und OM′, bis sie die Kugeloberfläche schneiden in P und P′, und vergleicht die zwei Dreiecke PMA und P′M′A′, so erhält man (gemäß II. Einl. 13. c und d) die Sätze: Haben zwei Kugelkreise derselben Kugel gleiche ebene Halbmesser, so haben sie auch gleiche sphärische Halbmesser; und umgekehrt. Sind die ebenen Halbmesser ungleich, so hat der Kreis mit dem größeren ebenen Halbmesser auch einen größeren sphärischen Halbmesser; und umgekehrt.

Anm. Sämtliche Sätze gelten auch für zwei gleiche Kugeln.

Lehrsatz 4.

a. Hat ein Punkt der Kugeloberfläche von drei Punkten eines Kugelkreises gleiche sphärische Entfernungen, so ist er Pol des Kugelkreises.

b. Hat ein Punkt der Kugeloberfläche von zwei Punkten eines Großkreises, die nicht Gegenpunkte sind, sphär. Entfernungen von je 90 Graden, so ist er Pol des Großkreises.

Beweis. a. Ist P der Punkt auf der Kugeloberfläche, und sind A, B, C die drei Punkte des Kugelkreises, so ist Strecke PA = PB = PC (II. Einl. 13. c). Fällt man daher von P auf die Ebene des Kugelkreises die Senkrechte PM, so ist: MA = MB = MC (I. 12. b mit Zus. 1); folglich ist M Mittelpunkt des Kreises ABC, und somit (nach II. 1. c u. II. Einl. 6. c) P einer seiner zwei Pole.

b. Ist P (vgl. Fig. 26, S. 58) der Punkt auf der Kugeloberfläche, O der Mittelpunkt der Kugel, und sind A, B die zwei Punkte des Großkreises, so ziehe man OP, OA, OB; da nun die Großkreisbögen PA und PB je 90 Grade betragen, so sind die Zentriwinkel POA und POB je = R; folglich steht (da A, O, B nicht in gerader Linie liegen) PO senkrecht auf der Ebene des Großkreises in dessen Mittelpunkt (I. 6. a); somit ist P einer seiner zwei Pole (II. Einl. 6. c).

5—17: **Sphärisches Dreieck und Dreikant.**

Lehrsatz 5.

a. Ist ein sphärisches Dreieck Polardreieck eines zweiten, so ist auch das zweite Dreieck Polardreieck des ersten. — Ist ein Dreikant Polardreikant eines zweiten, so ist auch das zweite Dreikant Polardreikant des ersten.

b. Die Bogengrade der Seiten eines sphär. Dreiecks supplementieren die Winkelgrade der zugehörigen Winkel seines Polardreiecks, und die Winkelgrade der Winkel des sphär. Dreiecks supplementieren die Bogengrade der zugehörigen Seiten des Polardreiecks. — Die Seiten und Winkel eines Dreikants supplementieren bezw. die zugehörigen Winkel und Seiten seines Polardreikants.

Erster Beweis. a. Es sei ABC (Fig. 29) ein sphär. Dreieck, abc sein Polardreieck, und zwar das mit ihm gleichstimmige (II. Einl. 21. a), a Pol von BC, b von CA, c von AB. Man ziehe die Großkreisbögen Ab und Ac. Da nun b Pol von AC ist, so ist Bogen bA $= 90^0$, und da c Pol von AB ist, so ist Bogen cA $= 90^0$; Punkt A hat also von b und von c sphär. Entfernungen von je 90 Graden, ist folglich Pol von bc (II. 4. b). Ebenso zeigt man, daß B Pol von ca, C Pol von ab ist. Nun liegt jeder der Pole A, B, C mit △ abc auf der nämlichen Halbkugel. Folglich ist △ ABC Polardreieck von △ abc, und zwar das mit ihm gleichstimmige.

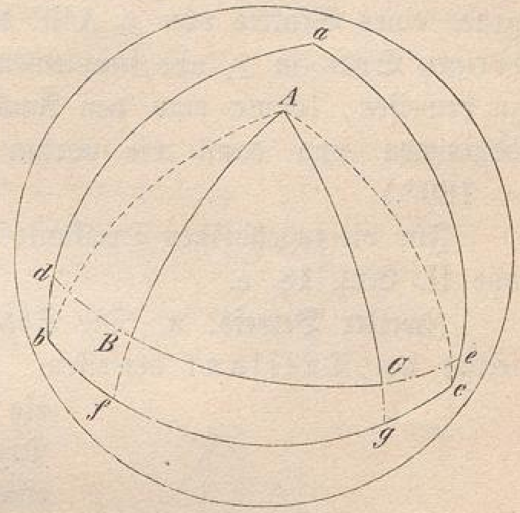

Fig. 29.

Für die zugehörigen Dreikante O, ABC und O, abc ergiebt sich sodann der Beweis unmittelbar durch die Bemerkung, daß zu jedem Bogen von 90^0 ein Zentriwinkel gleich einem Rechten gehört.

b. Zur Seite BC des Dreiecks ABC gehört der Winkel a des Polardreiecks abc. Um diesen Winkel mit dem Bogen BC vergleichen zu können, benütze man seinen Äquatorbogen (II. Einl. 14. a). Da BC der Äquator von a ist, so ist, wenn BC von ab in d, von ac in e geschnitten wird, de der Äquatorbogen von W. a; man hat also zu beweisen, daß Bogen de + BC $= 180^0$ ist. Nun betragen die Bögen Be und Cd je 90^0 (nach a), folglich ist Be + Cd $= 180^0$;

aber: Be + Cd = BC + Ce + dB + BC = de + BC; somit auch: de + BC = 180°. Damit ist bewiesen, daß die Bogengrade einer Seite des sphär. Dreiecks ABC die Winkelgrade des zugehörigen Winkels im Polardreieck abc supplementieren. Da aber (nach a) umgekehrt △ ABC Polardreieck von △ abc ist, so ist eben damit auch bewiesen, daß die Winkelgrade eines Winkels von △ ABC die Bogengrade der zugehörigen Seite in △ abc supplementieren. (Um dies direkt zu beweisen, könnte man den Äquatorbogen fg von W. A bestimmen und dann wie vorhin zeigen, daß bc + fg = 180°.)

Für die zugehörigen Dreikante folgt sodann der Beweis aus II. Einl. 18. c.

Zweiter Beweis. a. Die Sätze lassen sich auch unmittelbar am Dreikant beweisen. Ist nämlich O (Fig. 30) die Spitze des ursprünglichen Dreikants, und fällt man von einem in seinem Innern liegenden Punkt o auf seine Seitenflächen die Senkrechten oa, ob, oc, so sind diese (nach I. 10. b) parallel und gleichgerichtet mit den Kanten desjenigen Polardreikants,

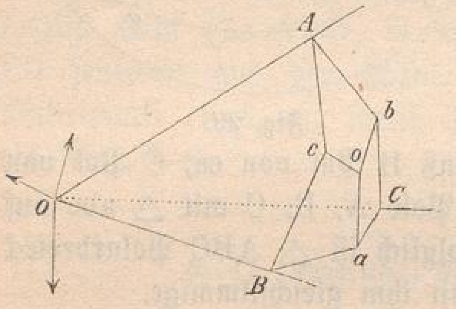

Fig. 30.

das mit Dreikant O ungleichstimmig ist. Hieraus folgt, daß das von den drei Senkrechten gebildete Dreikant mit jenem Polardreikant kongruent ist; denn es hat mit ihm (nach I. 4. b) die Seiten, und (nach I. 4. a u. I. Anh. 7) die Winkel gleichstimmig gleich. — Werden die Kanten des ursprünglichen Dreikants O von den Seitenflächen des Dreikants o in den Punkten A, B, C geschnitten, so schneiden sich die beiderlei Seitenflächen nach den Geraden aB, Bc, cA, Ab, bC, Ca, und es entsteht ein von sechs Vierecken begrenzter Körper. Nun ist z. B. Fläche aoc senkrecht auf Fläche BOC, weil sie durch oa geht, und senkrecht auf Fläche AOB, weil sie durch oc geht (I. 8. a), folglich auch senkrecht auf deren Schnittlinie OB (I. 8. d). Daher ist auch die mit aoc parallele Seitenfläche des eigentlichen Polardreikants senkrecht auf OB (I. 11. b), u. s. w.

b. In jedem der sechs Vierecke sind zwei gegenüberliegende Winkel Rechte, folglich supplementieren sich die zwei andern Winkel; von diesen stellt aber immer der eine eine Seite des einen Dreikants, der andere den zugehörigen Winkel des andern Dreikants vor.

Anm. Aus Lehrs. b erklären sich die Namen „Supplementardreieck, Supplementardreikant".

Zusatz 1. Nach a können zu einem sphär. Dreieck die Polardreiecke auch dadurch konstruiert werden, daß man zu jeder Ecke den Äquator konstruiert; und zu einem Dreikant die Polardreikante dadurch, daß man senkrecht zu jeder Kante eine Ebene durch die Spitze legt.

Zusatz 2. Aus b folgt: Haben auf gleichen Kugeloberflächen zwei sphär. Dreiecke — oder haben zwei Dreikante die Seiten bezw. gleich, so haben ihre Polardreiecke oder Polardreikante die Winkel bezw. gleich; und umgekehrt. Hieraus folgt weiter: Sind zwei sphär. Dreiecke gleicher Kugeln oder zwei Dreikante entsprechend-gleich, so sind auch ihre Polardreiecke oder Polardreikante entsprechend-gleich.

Lehrsatz 6.

Zwei Dreikante oder zwei sphär. Dreiecke gleicher Kugeln sind entsprechend-gleich, wenn zwei Seiten und der von ihnen eingeschlossene Winkel im einen bezw. gleich sind zweien Seiten und dem von ihnen eingeschlossenen Winkel im andern.

Beweis. Die zwei Dreikante seien $\triangle$ und $\triangle'$ oder O, ABC und O′, A′B′C′; es sei Winkel A = A′, Seite AOB = A′O′B′, Seite AOC = A′O′C′.

Folgen sich die gleichen Elemente in gleichem Sinne, so können $\triangle$ und $\triangle'$ zur Deckung gebracht werden. Bringt man nämlich Keil A' mit A zur Deckung so, daß Punkt O' mit O zusammenfällt, so müssen in den beiden Keilblättern (wegen der Gleichheit der betr. Dreikantseiten) auch OB' mit OB, und OC' mit OC zusammenfallen. Die zwei Dreikante sind somit kongruent. — Folgen sich die gleichen Elemente in entgegengesetztem Sinne, so konstruiere man zu $\triangle'$ dessen Scheiteldreikant $\triangle''$. Nun ist $\triangle''$ mit $\triangle'$ entsprechend-gleich, und zwar entgegengesetzten Sinnes (II. Einl. 20. d). Daher folgen sich in $\triangle''$ und $\triangle$ die gleichen Elemente wieder in gleichem Sinne; also ist $\triangle$ entsprechend-gleich $\triangle''$ (1. Teil des Bew.), und somit auch entsprechend-gleich $\triangle'$.

Ist der Satz für Dreikante bewiesen, so gilt er auch für sphär. Dreiecke gleicher Kugeln (II. Einl. 18. c).*)

Lehrsatz 7.

Zwei Dreikante oder zwei sphär. Dreiecke gleicher Kugeln sind entsprechend-gleich, wenn eine Seite und die zwei ihr anliegenden Winkel im einen bezw. gleich sind einer Seite und den zwei ihr anliegenden Winkeln im andern.

Beweis. Konstruiert man zu den zwei Dreikanten die Polardreikante, so haben diese einen Winkel und die ihn einschließenden Seiten bezw. gleich (II. 5. b), und sind daher entsprechend-gleich (II. 6). Dann aber müssen auch die ursprünglichen Dreikante entsprechend-gleich sein (II. 5. Zus. 2).

Lehrsatz 8.

Zwei Dreikante oder zwei sphär. Dreiecke gleicher Kugeln sind entsprechend-gleich, wenn

*) Dieselbe Bemerkung gilt für jeden der folgenden Beweise zu Lehrs. 7 bis 12.

die drei Seiten des einen bezw. gleich sind den drei Seiten des andern.

Beweis. Die Dreikante seien O, ABC und O′, A′B′C′ (Fig. 31). Man schneide von den 6 Kanten gleiche Stücke ab: OA = OB = OC = O′A′ = O′B′ = O′C′, und verbinde ihre Endpunkte. Dann sind die Dreiecke OAB, OBC, OCA bezw. kongruent den Dreiecken O′A′B′, O′B′C′, O′C′A′; daher ist AB = A′B′, BC = B′C′, CA = C′A′, folglich △ ABC ≌ A′B′C′. Weiter folgt aus den genannten Kongruenzen, daß die in A zusammenstoßenden drei Dreieckswinkel einzeln gleich sind den entsprechenden in A′ zusammenstoßenden Dreieckswinkeln. Man schneide nun auf den Kanten OA und O′A′ gleiche Stücke OD = O′D′ ab und lege senkrecht zu OA und O′A′ durch D und D′ Ebenen, welche die in A und A′ zusammenstoßenden Dreiecke nach DE, DF, EF, bezw. D′E′, D′F′, E′F′ schneiden. Dann stellen W. EDF und E′D′F′ die Keilwinkel an den Kanten OA und O′A′ vor, und es kann leicht bewiesen werden, daß diese zwei Winkel gleich sind. Es ergiebt sich nämlich zunächst: △ ADE ≌ A′D′E′ und △ ADF ≌ A′D′F′, daher AE = A′E′, DE = D′E′, AF = A′F′, DF = D′F′. Hieraus folgt weiter: △ EAF ≌ E′A′F′, EF = E′F′, und daher schließlich: △ EDF ≌ E′D′F′, W. EDF = E′D′F′. Die zwei Dreikante haben also auch zwei entsprechende Winkel gleich und sind folglich entsprechendgleich (nach II. 6).

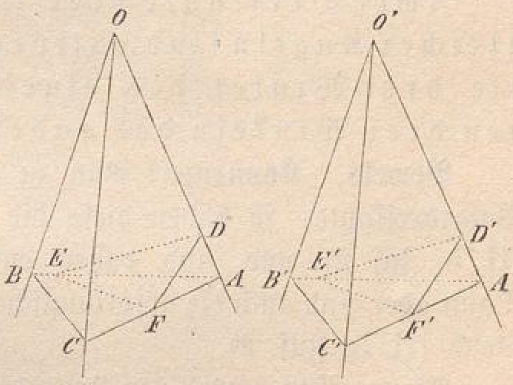

Fig. 31.

Anm. Der obige Beweis ist für alle Fälle giltig, mögen die Seiten spitz oder stumpf oder Rechte sein. — Übrigens kann der Beweis auch ohne Hinzuziehung der Dreiecke ABC und A′B′C′ geführt werden. Schneiden nämlich die durch D und D′ senkrecht zu OA und

O'A' gelegten Ebenen die Kanten OB und OC, O'B' und O'C' in G und H, G' und H': so ist $\triangle$ ODG $\cong$ O'D'G', $\triangle$ ODH $\cong$ O'D'H'. Hieraus folgt: $\triangle$ OGH $\cong$ O'G'H', und weiter: $\triangle$ GDH $\cong$ G'D'H', W. GDH = G'D'H'. Dieser Beweis ist jedoch nur dann direkt anwendbar, wenn in den Dreikanten zwei Paare gleicher Seiten spitz sind. Trifft dies nicht zu, so ist mindestens ein Paar Nebendreikante vorhanden, in denen es zutrifft; sind aber diese entsprechend-gleich, so sind es auch die ursprünglichen Dreikante.

Lehrsatz 9.

Zwei Dreikante oder zwei sphär. Dreiecke gleicher Kugeln sind entsprechend-gleich, wenn die drei Winkel des einen bezw. gleich sind den drei Winkeln des andern.

Beweis. Konstruiert man zu den zwei Dreikanten die Polardreikante, so haben diese die drei Seiten bezw. gleich (II. 5. Zus. 2) und sind daher entsprechend-gleich (II. 8). Dann aber sind auch die ursprünglichen Dreikante entsprechend-gleich (II. 5. Zus. 2).

Anm. Man bemerke den Unterschied zwischen den Sätzen II. 6, 7, 8, 9 und den Lehrsätzen über die Kongruenz ebener Dreiecke. Die vier Sätze lassen sich auch so aussprechen: Ein Dreikant oder sphär. Dreieck ist eindeutig bestimmt aus drei Seiten, aus drei Winkeln, u. s. w. Allgemein läßt sich der Satz aussprechen: Ein Dreikant oder ein sphär. Dreieck ist (ebenso wie ein ebenes Dreieck) bestimmt aus drei von einander unabhängigen Elementen. Der Unterschied zwischen den obigen vier Sätzen und den Lehrsätzen über die Kongruenz ebener Dreiecke rührt nun daher, daß bei ebenen Dreiecken die drei Winkel von einander abhängig sind, was bei sphär. Dreiecken nicht der Fall ist (II. Einl. 19. a). — Aus zwei Seiten und dem Gegenwinkel einer derselben ist ein sphär. Dreieck (ebenso wie ein ebenes) im allgemeinen nicht eindeutig, sondern zweideutig bestimmt, und daher sind zwei Dreikante oder sphär. Dreiecke, die drei solche Elemente bezw. gleich haben, nicht notwendig entsprechend-gleich. Dieselbe Bewandtnis hat es mit zwei Dreikanten oder sphär. Dreiecken, die zwei Winkel und die Gegenseite eines derselben bezw. gleich haben. (Siehe hierüber II. Anh. 30. a und b.) — Aehnliche Dreikante oder sphär. Dreiecke auf derselben Kugel giebt es nicht; doch stellen zwei sphär. Dreiecke, die demselben Dreikant, aber zweien ungleichen Kugeln angehören (II. Einl. 18. b), ähnliche Gebilde vor.

Lehrsatz 10.

In einem Dreikant oder in einem sphär. Dreieck liegen

a. gleichen Winkeln gleiche Seiten —

b. gleichen Seiten gleiche Winkel gegenüber.

Beweis. a. In dem Dreikant O, ABC (Fig. 32) sei W. B = C. Man konstruiere sein Scheiteldreikant O, A′B′C′; dann läßt sich beweisen, daß dieses mit O, ABC in der Art entsprechend-gleich ist, daß Kante OB′ mit OC und Kante OC′ mit OB entsprechend ist. Es ist nämlich W. B′ = B = C = C′ (I. 7. Zus.); in den zwei Dreikanten O, ABC und O, A′C′B′ ist also S. BOC = C′OB′, W. B = C′, W. C = B′; folglich sind sie in dem angegebenen Sinne entsprechend-gleich (II. 7), daher ist S. AOB = A′OC′ = AOC.

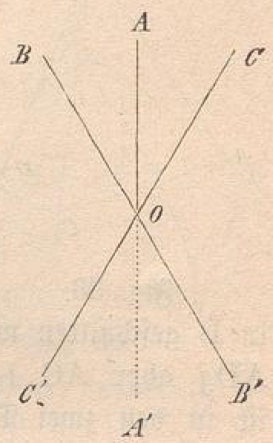

Fig. 32.

b. Es sei S. AOB = AOC; konstruiert man wieder das Scheiteldreikant O, A′B′C′, so ist S. A′OB′ = AOB = AOC = A′OC′; also ist in den zwei Dreikanten O, ABC und O, A′C′B′, wenn sie in dem nämlichen Sinne wie oben auf einander bezogen werden, W. A = A′, S. AOB = A′OC′, S. AOC = A′OB′; folglich sind sie entsprechend-gleich (II. 6), daher ist W. B = C′ = C.

(Anderer Beweis durch I. Anh. 12. b.)

Zusatz 1. Satz b wird auch so ausgesprochen: Im gleichschenkligen sphär. Dreieck (Dreikant) sind die Winkel an der Grundlinie (Grundfläche) gleich.

Zusatz 2. Im gleichseitigen sphär. Dreieck oder Dreikant sind alle Winkel gleich, und: sind in einem sphär. Dreieck oder Dreikant die drei Winkel gleich, so ist es gleichseitig.

Lehrsatz 11.

In einem Dreikant oder in einem sphär. Dreieck sind zwei Seiten zusammen größer als die dritte.

Beweis. Das Dreikant sei O, ABC (Fig. 33); AOB sei seine größte Seite; es ist dann bloß zu beweisen, daß AOC + BOC > AOB. Man lege in der Ebene AOB an OA in O den Winkel AOD = AOC an; dann muß OD innerhalb des W. AOB fallen. Schneidet man die Strecken OC = OD beliebig ab und legt durch die Punkte C und D beliebig eine Ebene, welche von OA in A, von OB in B geschnitten wird, so ist △ AOC ≌ AOD, also AC = AD; aber AC + BC > AB; folglich BC > BD. Nun ist in den zwei Dreiecken BOC und BOD: S. OB = OB, S. OC = OD, S. BC > BD, daher: W. BOC > BOD; addiert man hiezu: AOC = AOD, so folgt: AOC + BOC > AOB.

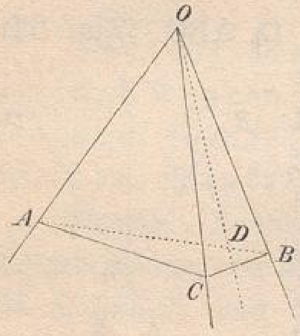

Fig. 33.

Zusatz 1. Aus dem Satze folgt: In einem sphär. Vieleck ist eine Seite kleiner als die Summe der übrigen Seiten. — Hieraus folgt weiter: Auf der Oberfläche einer Kugel ist die sphär. Entfernung zweier Punkte der kürzeste Weg, auf dem man von einem Punkt zum andern gelangen kann. Denn jeder andere Weg kann als polygonaler Zug (eventuell von unendl. vielen unendl. kleinen Seiten) aufgefaßt werden.

Zusatz 2. Wendet man Lehrs. 11 auf die drei Seiten $2R - \alpha$, $2R - \beta$, $2R - \gamma$ des Polardreikants an, so ergiebt sich der Satz: In einem Dreikant oder sphär. Dreieck sind zwei Winkel zusammen kleiner als der um 2 R vermehrte dritte.

Lehrsatz 12.

In einem Dreikant oder in einem sphär. Dreieck liegt

a. dem größeren Winkel die größere Seite —

b. der größeren Seite der größere Winkel gegenüber.

Beweis. a. In dem Dreikant O, ABC (Fig. 34) sei W. C > B. Dann ist zu beweisen, daß S. AOB > AOC. Legt man durch die Kante OC eine Ebene, die mit der Seitenfläche COB einen Winkel = B macht, so muß diese Ebene innerhalb des W. C — und folglich ihre Schnittlinie OD mit der Seitenfläche AOB zwischen OA und OB fallen. In dem Dreikant O, BCD ist nun S. DOB = DOC (II. 10. a); ferner ist in dem Dreikant O, ACD:

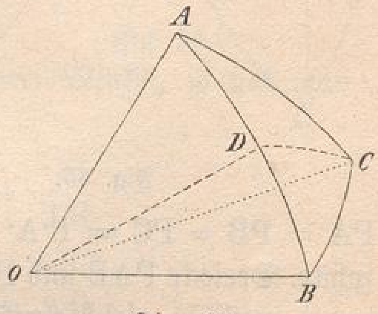

Fig. 34.

$$AOC < AOD + DOC \quad (II.\ 11),$$

also auch: $AOC < AOD + DOB$

oder: $AOC < AOB.$

b. Es sei S. AOB > AOC. Wäre W. C nicht größer als B, so wäre entweder C = B oder C < B. Im ersten Falle müßte S. AOB = AOC sein (II. 10. a); im zweiten Falle müßte AOB < AOC sein (nach a). Beides widerspricht der Voraussetzung; folglich muß W. C > B sein.

(Anderer Beweis durch I. Anh. 12. c.)

Lehrsatz 13.

Zwei entsprechend-gleiche sphär. Dreiecke haben gleichen Flächeninhalt.

Beweis. Für kongruente Dreiecke ist der Satz selbstverständlich. Für symmetrische Dreiecke beweist er sich folgendermaßen:

Die Dreiecke seien ABC und A'B'C' (Fig. 35); dann ist Sehne $AB = A'B'$, $BC = B'C'$, $CA = C'A'$ (II. Einl. 13. c); folglich sind die ebenen Dreiecke ABC und A'B'C' kongruent, und die Schnittkreise ihrer Ebenen mit der Kugeloberfläche gleich (denn kongruente Dreiecke haben gleiche umbeschriebene Kreise). Sind also P und P' die sphär. Mittelpunkte dieser zwei Kreise, so ist (gemäß II. 3. Zus. 2): Bogen $PA = PB = PC = P'A' = P'B' = P'C'$. Hiernach sind die sphär. Dreiecke PAB und P'A'B' entsprechend-gleich (II. 8), und zwar, weil sie gleichschenklig sind, kongruent (II. Einl. 20. c), folglich auch flächengleich. Dasselbe gilt von den Dreiecken PBC und P'B'C', PCA und P'C'A'. Liegen daher die Punkte P und P' innerhalb der Dreiecke ABC und A'B'C', so ist $\triangle\, ABC = PAB + PBC + PCA = P'A'B' + P'B'C' + P'C'A' = \triangle\, A'B'C'$. Liegt aber einer jener Punkte außerhalb seines Dreiecks, so muß auch der andere eine entsprechende Lage außerhalb seines Dreiecks haben; (liegt z. B. P außerhalb so, daß W. $BPC = BPA + APC$ ist, so muß wegen der Gleichheit der entsprechenden Winkel auch $B'P'C' = B'P'A' + A'P'C'$ sein;) die zwei Dreiecke ABC und A'B'C' sind also dann Differenzen gleicher Flächenräume, folglich ebenfalls flächengleich.

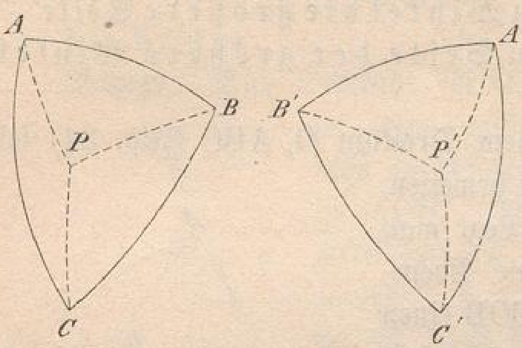

Fig. 35.

Lehrsatz 14.

Der Flächeninhalt eines sphär. Dreiecks verhält sich zur halben Oberfläche seiner Kugel wie sein sphär. Exzeß zu 4 R.

Beweis. Das sphär. Dreieck sei ABC (Fig. 36), die Oberfläche seiner Kugel sei = F. Man erweitere die Seiten des Dreiecks zu Großkreisen, welche sich in den Gegenpunkten A′, B′, C′ von A, B, C zum zweitenmal schneiden. Nun bildet △ ABC mit seinen Nebendreiecken BCA′, CAB′, ABC′ drei sphär. Zweiecke, von denen jedes mit △ ABC einen Winkel gemein hat. Sind daher

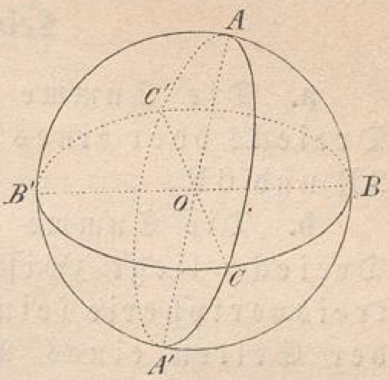

Fig. 36.

α, β, γ die numerischen Werte der drei Winkel, so hat man (nach II. Einl. 15. d):

$$\frac{\triangle ABC + BCA'}{\frac{1}{2} F} = \frac{\alpha}{2R},$$

$$\frac{\triangle ABC + CAB'}{\frac{1}{2} F} = \frac{\beta}{2R},$$

$$\frac{\triangle ABC + ABC'}{\frac{1}{2} F} = \frac{\gamma}{2R}.$$

Addiert man diese drei Gleichungen und bemerkt, daß △ ABC′ mit seinem Gegendreieck A′B′C flächengleich ist (II. 13), und daß ABC + BCA′ + CAB′ + A′B′C die halbe Kugeloberfläche einnimmt, so folgt:

$$\frac{2 \triangle ABC + \frac{1}{2} F}{\frac{1}{2} F} = \frac{\alpha + \beta + \gamma}{2R}, \text{ oder}$$

$$\frac{2 \triangle ABC}{\frac{1}{2} F} = \frac{\alpha + \beta + \gamma - 2R}{2R}, \text{ oder}$$

$$\frac{\triangle ABC}{\frac{1}{2} F} = \frac{\alpha + \beta + \gamma - 2R}{4R}.$$

Zusatz. Die Inhalte zweier sphär. Dreiecke gleicher Kugeln verhalten sich zu einander wie ihre sphär. Exzesse.

Lehrsatz 15.

a. Die Summe der Winkel eines sphär. Dreiecks oder eines Dreikants liegt zwischen 2 R und 6 R.

b. Die Summe der Seiten eines sphär. Dreiecks liegt zwischen Null und der Großkreisperipherie seiner Kugel. — Die Summe der Seiten eines Dreikants liegt zwischen Null und 4 R.

Beweis. a. Aus der letzten Gleichung in II. 14 folgt, daß $\alpha + \beta + \gamma - 2\,R$ stets positiv, also $\alpha + \beta + \gamma > 2\,R$ sein muß. Da ferner jeder einzelne Winkel $< 2\,R$ ist (II. Einl. 16. c), so ist die Summe der drei Winkel $< 6\,R$.

b. Da die drei Seiten eines Dreikants mit den drei Winkeln seines Polardreikants zusammen 6 R ausmachen (II. 5. b), die drei Winkel des Polardreikants aber (nach a) mehr als 2 R betragen, so müssen die drei Seiten des Dreikants zusammen weniger als 4 R betragen. Daher muß auch im zugehörigen sphär. Dreieck die Summe der Seiten kleiner sein als 360° oder als die Peripherie eines Großkreises der Kugel. — Da ferner die obere Grenze der Winkelsumme des Polardreikants (nach a) $= 6\,R$ ist, so ist die untere Grenze der Seitensumme des Dreikants $= 0$.

Zusatz. Aus a folgt, daß $\alpha + \beta + \gamma - 2\,R < 4\,R$ ist, daß also in der letzten Gleichung von II. 14 auf der rechten Seite ein ächter Bruch steht. Daher muß auch linker Hand ein ächter Bruch stehen, woraus sich ergiebt: Jedes sphär. Dreieck ist kleiner als die halbe Oberfläche seiner Kugel. — Ferner folgt aus jener Gleichung, daß, je kleiner $\triangle\, ABC$ im Verhältnis zu $\frac{1}{2}\,F$ ist, desto kleiner auch sein sphär. Exzeß ist. Der sphär. Exzeß wird $= o$, d. h. die Winkelsumme wird $= 2\,R$, wenn $F = \infty$ wird, d. h. wenn die Kugeloberfläche zur Ebene wird. (Vgl. II. Einl. 19. b.)

Lehrsatz 16.

Der Flächeninhalt eines sphär. Vielecks verhält sich zur halben Oberfläche seiner Kugel wie sein sphär. Exzeß zu 4 R.

Beweis. Das Vieleck sei ABC . . EF (Fig. 37), seine Winkel seien $= \alpha, \beta, \gamma, \ldots \varepsilon, \varphi$, sein Inhalt sei $= J$, die Oberfläche seiner Kugel $= F$. Man ziehe von der Ecke A aus sämtliche Diagonalen. Hat das Vieleck n Seiten, so wird es dadurch

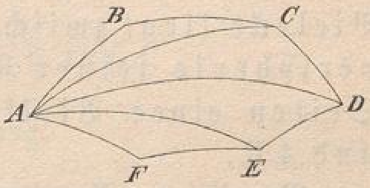

Fig. 37.

in $n-2$ sphär. Dreiecke zerlegt, deren Inhalte $= i_1, i_2, \ldots i_{n-2}$ sein mögen. Die Diagonale AC teile den Winkel γ in die zwei Teile γ_1 und γ_2, die Diagonale AD teile den Winkel δ in die zwei Teile δ_1 und δ_2, u. s. w.; der Winkel α wird in $n-2$ Teile geteilt, die $= \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{n-2}$ seien. Man hat nun (nach II. 14):

$$\frac{i_1}{\frac{1}{2}F} = \frac{\alpha_1 + \beta + \gamma_1 - 2R}{4R},$$

$$\frac{i_2}{\frac{1}{2}F} = \frac{\alpha_2 + \gamma_2 + \delta_1 - 2R}{4R},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{i_{n-2}}{\frac{1}{2}F} = \frac{\alpha_{n-2} + \varepsilon_2 + \varphi - 2R}{4R}.$$

Addiert man diese $n-2$ Gleichungen, so erhält man:

$$\frac{J}{\frac{1}{2}F} = \frac{\alpha + \beta + \gamma + \ldots \varepsilon + \varphi - (n-2)\,2R}{4R}.$$

Zusatz 1. Auf gleichen Kugeloberflächen verhalten sich die Inhalte zweier beliebiger sphär. Vielecke wie ihre sphär. Exzesse.

Zusatz 2. Wird als Maßeinheit für die Flächeninhalte auf einer Kugeloberfläche das Kugelzweieck, dessen Äquatorbogen $= 1^\circ$ ist, (also der 360te Teil der Kugeloberfläche) gewählt, so ist der Inhalt eines sphär. Vielecks gleich seinem halben sphär. Exzeß ausgedrückt in Graden.

Lehrsatz 17.

a. Die Summe der Winkel eines sphär. Vielecks oder eines Vielkants von n Seiten liegt zwischen $(n-2).2R$ und $n.2R$.

b. Die Summe der Seiten eines sphär. Vielecks liegt zwischen Null und der Großkreisperipherie seiner Kugel. — Die Summe der Seiten eines Vielkants liegt zwischen Null und 4 R.

Beweis. a. Aus der letzten Gleichung in II. 16 folgt, daß $\alpha + \beta + \gamma + \ldots - (n-2).2R$ stets positiv, also $\alpha + \beta + \gamma + \ldots > (n-2).2R$ sein muß. Da ferner jeder einzelne Winkel $< 2R$, die Anzahl der Winkel aber $= n$ ist, so ist : $\alpha + \beta + \gamma + \ldots < n.2R$.

b. Zerlegt man das spär. Vieleck in Dreiecke, so ist die untere Grenze für die Seitensumme jedes Dreiecks $= 0$ (II. 15. b), folglich ist auch für die Seitensumme des Vielecks die untere Grenze $= 0$. Dasselbe gilt für ein Vielkant. — Um die obere Grenze zu erhalten, verlängere man in dem sphär. Vieleck ABCD . . die an eine Seite BC anstoßenden Seiten AB und DC bis zu ihrem Schnitt S, und zwar so, daß das hinzugefügte Dreieck BCS ganz außerhalb des Vielecks liegt. Aus dem ursprünglichen n-eck ABCD . . wird dann ein $(n-1)$-eck ASD . ., dessen Seitensumme größer ist als diejenige des n-ecks, weil in $\triangle$ BCS : $BS + CS > BC$ ist (II. 11). Durch dasselbe Verfahren kann ferner aus dem $(n-1)$-eck ein $(n-2)$-eck gemacht werden, dessen Seitensumme noch größer ist. Fährt man auf diese Weise fort, so gelangt man schließlich zu einem Dreieck, und von diesem zu einem Zweieck. Jedes der erhaltenen Vielecke hat eine größere Seitensumme als das vorangehende. Somit ist die Seitensumme des ursprünglichen n-ecks kleiner als diejenige des Zweiecks, also kleiner als die

Großkreisperipherie oder als 360°. Daher ist auch die Seitensumme des zugehörigen Vielkants kleiner als 4 R.

Zusatz. Der Inhalt eines sphär. Vielecks ist stets kleiner als die Halbkugel. — Je kleiner ein sphär. Vieleck im Verhältnis zu seiner Kugeloberfläche ist, desto kleiner ist sein sphär. Exzeß. Für $F = \infty$ wird der sphär. Exzeß $= o$. (Beweise wie in II. 15. Zus.)

C. Aufgaben.

Vorbemerkung.

Bei Verwertung der krummen Flächen als geom. Örter zu Konstruktionsaufgaben kommen die Flächen als solche zwar in der inneren Vorstellung zur vollen Geltung. Bei der wirklichen Ausführung der Konstruktion dagegen kann man nicht direkt mit ihnen operieren, da man an das in der Vorbemerkung S. 26 aufgestellte Postulat gebunden ist. Wie nun die hier auftretenden Fundamentalaufgaben mit Rücksicht auf jenes Postulat gelöst werden, zeigen die folgenden Nummern 1—5. Man hat sich dabei die Kugelfläche stets durch Mittelpunkt und Halbmesser gegeben zu denken, die Kegelfläche und Cylinderfläche entweder (als Mantel eines Kegels, bezw. Cylinders) durch Grundkreis und Höhe, oder (als unendlich ausgedehnte Fläche) durch Achse, Spitze und erzeugenden Winkel, bezw. durch Achse und Halbmesser. Umgekehrt läuft die Aufgabe: eine dieser Flächen zu „konstruieren", darauf hinaus, daß die genannten Bestimmungselemente für sie ermittelt werden.

1—5: Fundamentalaufgaben über krumme Flächen.

Aufgabe 1.

a. Den Schnittkreis einer Ebene mit einer Kugelfläche zu bestimmen.

b. Die Schnittpunkte einer Geraden mit einer Kugelfläche zu bestimmen.

Auflösung. a. Man fälle von dem geg. Kugelmittel-