Lehrbuch der Stereometrie

Hauck, Guido

Tübingen, 1893

1 - 4: Kugelkreise

urn:nbn:de:hbz:466:1-77777

eines sphär. n-ecks (nach b, Schluß) größer als (n—2) 2 R, d. h. größer als die Winkelsumme eines ebenen Vielecks von gleicher Seitenzahl. Der Ueberschuß über die letztere heißt der sphärische Exzeß des sphär. Vielecks. Sind also α, β, γ . . . die Winkel des sphär. n-ecks, so ist sein sphär. Exzeß $= \alpha + \beta + \gamma + \ldots - (n-2)\,2\,R$. Die Bezeichnung „sphär. Exzeß" wird auch auf Vielkante übertragen.

d. Zwei Vielkante oder zwei sphär. Vielecke gleicher Kugeln heißen entsprechend-gleich, wenn sie in derselben Reihenfolge alle Winkel und alle entsprechenden Seiten einzeln gleich haben. Je nachdem sich dabei die entsprechenden Elemente in gleichem oder in entgegengesetztem Sinne folgen (vgl. 20. b), können die zwei Vielkante oder Vielecke zur Deckung gebracht werden und heißen kongruent, oder können sie nicht zur Deckung, wohl aber in symmetrische Lage gebracht werden und heißen symmetrisch.

B. Lehrsätze.

1—4: Kugelkreise.

Lehrsatz 1.

a. Die vom Mittelpunkt einer Kugel auf die Ebene eines Kleinkreises gefällte Senkrechte hat ihren Fußpunkt im Mittelpunkt des Kleinkreises.

b. Die Verbindungslinie des Mittelpunktes einer Kugel mit dem Mittelpunkt eines Kleinkreises steht auf der Ebene des Kleinkreises senkrecht.

c. Die auf der Ebene eines Kleinkreises in dessen Mittelpunkt errichtete Senkrechte geht durch den Mittelpunkt der Kugel.

Beweis. **a** folgt unmittelbar aus Einl. II. 6. c. — Beweise von **b** und **c** indirekt.

Zusatz 1. Die vom Mittelpunkt einer Kugel auf eine Sehne gefällte Senkrechte hat ihren Fußpunkt im Mittelpunkt der Sehne. Die Verbindungslinie des Mittelpunkts einer Kugel mit dem Mittelpunkt einer Sehne steht auf der Sehne senkrecht. Die Mittellotebene (I. Anh. 18. a) einer Sehne geht durch den Mittelpunkt der Kugel.

Zusatz 2. Dieselben Sätze gelten auch für eine Berührungsebene oder eine Tangente der Kugel, wenn statt „Mittelpunkt des Kleinkreises", bezw. „der Sehne" gesetzt wird: „Berührungspunkt der Berührungsebene", bezw. „der Tangente".

Lehrsatz 2.

Schneiden sich zwei Kugelflächen, so schneiden sie sich nach einem Kreis, dessen Mittelpunkt auf der gemeinschaftlichen Zentrallinie liegt, und dessen Ebene zur Zentrallinie senkrecht ist.

Beweis. Sind O und O′ die Mittelpunkte der zwei Kugeln, und ist A ein beliebiger Punkt der Schnittkurve, so sind, wie auch der Punkt A auf der Schnittkurve angenommen werden mag, die Dreiecke OAO′ alle unter sich kongruent; daher haben die von den Punkten A auf OO′ gefällten Höhen alle den nämlichen Fußpunkt M und die gleiche Länge. Die Punkte A liegen somit alle auf der Peripherie eines Kreises, dessen Mittelpunkt M ist, und dessen Ebene senkrecht zu OO′ ist (I. 6. b).

Lehrsatz 3.

a. Gleiche Kugelkreise derselben Kugel sind vom Mittelpunkt gleich weit entfernt, und umgekehrt.

b. Von zwei ungleichen Kugelkreisen ist der größere dem Mittelpunkt näher, und umgekehrt.

Beweis. Es sei O der Mittelpunkt der Kugel, M und M′ seien die Mittelpunkte zweier Kugelkreise, also OM und OM′ die Entfernungen ihrer Ebenen vom Kugelmittelpunkt (II. 1. b). MA und M′A′ seien beliebige Halbmesser der zwei Kugelkreise; man ziehe OA und OA′.

a. Sind die zwei Kugelkreise gleich, so ist $MA = M'A'$; da außerdem $OA = OA'$, so ist $\triangle\, OMA \cong OM'A'$, folglich: $OM = OM'$. — Ist umgekehrt $OM = OM'$, so ist gleichfalls $\triangle\, OMA \cong OM'A'$, folglich $MA = M'A'$, d. h.: die Kugelkreise sind gleich.

b. In den zwei rechtw. Dreiecken OMA und OM′A′ sind die Hypotenusen OA und OA′ gleich. Haben aber zwei rechtw. Dreiecke gleiche Hypotenusen, und ist die erste Kathete des einen größer als die erste Kathete des andern, so ist die zweite Kathete des einen kleiner als die zweite Kathete des andern. Ist daher Kugelkreis M größer als Kugelkreis M′, also Kath. $MA > M'A'$, so ist Kath. $OM < OM'$. Ist umgekehrt $OM < OM'$, so ist $MA > M'A'$, d. h.: Kugelkreis M größer als Kugelkreis M′.

Zusatz 1. Dieselben Sätze gelten auch für Kugelsehnen.

Zusatz 2. Verlängert man OM und OM′, bis sie die Kugeloberfläche schneiden in P und P′, und vergleicht die zwei Dreiecke PMA und P′M′A′, so erhält man (gemäß II. Einl. 13. c und d) die Sätze: Haben zwei Kugelkreise derselben Kugel gleiche ebene Halbmesser, so haben sie auch gleiche sphärische Halbmesser; und umgekehrt. Sind die ebenen Halbmesser ungleich, so hat der Kreis mit dem größeren ebenen Halbmesser auch einen größeren sphärischen Halbmesser; und umgekehrt.

Anm. Sämtliche Sätze gelten auch für zwei gleiche Kugeln.

Lehrsatz 4.

a. Hat ein Punkt der Kugeloberfläche von drei Punkten eines Kugelkreises gleiche sphärische Entfernungen, so ist er Pol des Kugelkreises.

b. Hat ein Punkt der Kugeloberfläche von zwei Punkten eines Großkreises, die nicht Gegenpunkte sind, sphär. Entfernungen von je 90 Graden, so ist er Pol des Großkreises.

Beweis. a. Ist P der Punkt auf der Kugeloberfläche, und sind A, B, C die drei Punkte des Kugelkreises, so ist Strecke PA = PB = PC (II. Einl. 13. c). Fällt man daher von P auf die Ebene des Kugelkreises die Senkrechte PM, so ist: MA = MB = MC (I. 12. b mit Zus. 1); folglich ist M Mittelpunkt des Kreises ABC, und somit (nach II. 1. c u. II. Einl. 6. c) P einer seiner zwei Pole.

b. Ist P (vgl. Fig. 26, S. 58) der Punkt auf der Kugeloberfläche, O der Mittelpunkt der Kugel, und sind A, B die zwei Punkte des Großkreises, so ziehe man OP, OA, OB; da nun die Großkreisbögen PA und PB je 90 Grade betragen, so sind die Zentriwinkel POA und POB je = R; folglich steht (da A, O, B nicht in gerader Linie liegen) PO senkrecht auf der Ebene des Großkreises in dessen Mittelpunkt (I. 6. a); somit ist P einer seiner zwei Pole (II. Einl. 6. c).

5—17: **Sphärisches Dreieck und Dreikant.**

Lehrsatz 5.

a. Ist ein sphärisches Dreieck Polardreieck eines zweiten, so ist auch das zweite Dreieck Polardreieck des ersten. — Ist ein Dreikant Polardreikant eines zweiten, so ist auch das zweite Dreikant Polardreikant des ersten.

b. Die Bogengrade der Seiten eines sphär. Dreiecks supplementieren die Winkelgrade der zugehörigen Winkel seines Polardreiecks, und die Winkelgrade der Winkel des sphär. Dreiecks supplementieren die Bogengrade