UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Lehrbuch der Stereometrie

Hauck, Guido

Tübingen, 1893

C. Aufgaben.

urn:nbn:de:hbz:466:1-77777

Visual Library

Großkreisperipherie oder als 360 °. Daher ist auch die Seitensumme des zugehörigen Vielkants kleiner als 4 R.

Zusatz. Der Inhalt eines sphär. Vielecks ist stets kleiner als die Halbkugel. — Je kleiner ein sphär. Vieleck im Verhältnis zu seiner Kugeloberfläche ist, desto kleiner ist sein sphär. Exzeß. Für $F = \infty$ wird der sphär. Exzeß = o. (Beweise wie in II. 15. Zus.)

C. Aufgaben.

Vorbemerkung.

Bei Verwertung der krummen Flächen als geom. Örter zu Konstruktionsaufgaben kommen die Flächen als solche zwar in der inneren Vorstellung zur vollen Geltung. Bei der wirklichen Ausführung der Konstruktion dagegen kann man nicht direkt mit ihnen operieren, da man an das in der Vorbemerkung S. 26 aufgestellte Postulat gebunden ist. Wie nun die hier auftretenden Fundamentalaufgaben mit Rücksicht auf jenes Postulat gelöst werden, zeigen die folgenden Nummern 1—5. Man hat sich dabei die Kugelfläche stets durch Mittelpunkt und Halbmesser gegeben zu denken, die Kegelfläche und Cylinderfläche entweder (als Mantel eines Kegels, bezw. Cylinders) durch Grundkreis und Höhe, oder (als unendlich ausgedehnte Fläche) durch Achse, Spitze und erzeugenden Winkel, bezw. durch Achse und Halbmesser. Umgekehrt läuft die Aufgabe: eine dieser Flächen zu „konstruieren", darauf hinaus, daß die genannten Bestimmungselemente für sie ermittelt werden.

1—5: **Fundamentalaufgaben über krumme Flächen.**

Aufgabe 1.

a. Den Schnittkreis einer Ebene mit einer Kugelfläche zu bestimmen.

b. Die Schnittpunkte einer Geraden mit einer Kugelfläche zu bestimmen.

Auflösung. **a.** Man fälle von dem geg. Kugelmittelpunkt die Senkrechte auf die geg. Ebene (I. Aufg. 4. a), konstruiere (in einer Nebenfigur) ein rechtw. Dreieck aus dem geg. Kugelhalbmesser als Hyp. und der Senkrechten als Kath., und beschreibe in der geg. Ebene aus dem Fußpunkt der Senkrechten einen Kreis mit der andern Kath. als Halbmesser: so ist dieser Kreis der verlangte.

(Beweis durch II. 1. a.)

b. Man lege durch die Gerade eine beliebige Ebene und konstruiere deren Schnittkreis mit der Kugelfläche (Aufg. a): so sind die Schnittpunkte dieses Kreises mit der Geraden die verlangten Punkte. Am einfachsten legt man die Ebene durch den Kugelmittelpunkt und hat dann in dieser Ebene bloß einen Kreis mit dem Kugelhalbmesser aus dem Mittelpunkt zu beschreiben.

(Beweis durch II. Einl. 7. a.)

Aufgabe 2.

a. Den Schnittkreis zweier Kugelflächen zu bestimmen.

b. Die Schnittpunkte einer Kreislinie mit einer Kugelfläche zu bestimmen.

c. Die Schnittpunkte dreier Kugelflächen zu bestimmen.

Auflösung. a. Man lege durch die zwei geg. Mittelpunkte eine beliebige Ebene und zeichne deren Schnittkreise mit den zwei Kugelflächen, lege hierauf durch die gemeinschaftliche Sehne dieser zwei Kreise senkrecht zu ihrer Ebene eine zweite Ebene, und beschreibe in ihr einen Kreis über der gemeinschaftl. Sehne als Durchmesser: so ist dieser Kreis der verlangte.

(Beweis durch II. 2.)

b. Man bestimme den Kreis, nach dem die Ebene der geg. Kreislinie die Kugelfläche schneidet (Aufg. 1. a): so sind die Schnittpunkte dieses Schnittkreises und des geg. Kreises die verlangten Punkte.

c. Man konstruiere den Schnittkreis zweier von den geg. Kugelflächen (Aufg. a), und bestimme die Schnittpunkte dieses Schnittkreises mit der dritten Kugelfläche (Aufg. b): so sind sie die verlangten.

Andere Auflösung. Legt man durch die drei geg. Mittelpunkte eine Ebene, und zeichnet deren Schnittkreise mit den drei Kugelflächen, so schneiden sich die drei gemeinschaftlichen Sehnen nach bekanntem Satze in einem Punkte p. Man lege nun durch eine der drei gemeinschaftl. Sehnen senkrecht zur ersten Ebene eine zweite Ebene, errichte in dieser über der Sehne als Durchmesser einen Kreis, und auf der Sehne im Punkt p die Senkrechte: so sind die Schnittpunkte der Senkrechten mit dem Kreis die verlangten Punkte. — Punkt p muß im Innern der drei Schnittkreise liegen, wenn die Aufgabe möglich sein soll.

Aufgabe 3.

a. Die Schnitt-Mantellinien einer Kegelfläche (oder Cylinderfläche) mit einer Ebene zu bestimmen, die durch die Spitze der Kegelfläche geht (bezw. der Cylinderachse parallel ist).

b. Die Schnittpunkte einer Geraden mit einer Kegelfläche (oder Cylinderfläche) zu bestimmen.

Auflösung. **a.** Ist die Fläche als Mantel eines Kegels (oder Cylinders) durch Grundkreis und Höhe gegeben, so bestimme man die Schnittlinie der geg. Ebene mit der Grundkreis-Ebene (I. Aufg. 6. b), markiere deren Schnittpunkte mit der Peripherie des Grundkreises, und ziehe durch diese Schnittpunkte Linien nach der Kegelspitze (bezw. parallel zur Cylinderachse): so sind sie die verlangten Schnitt-Mantellinien.

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Ist die Kegelfläche durch Achse, Spitze und erzeugenden Winkel (oder die Cylinderfläche durch Achse und Halbmesser) gegeben, so konstruiere man zuerst irgend einen Parallelkreis und benütze diesen als Grundkreis wie oben. Bei der Kegelfläche erhält man einen Parallelkreis, indem man durch einen Punkt O der Achse in beliebigem Abstand von der Spitze S eine Ebene M senkrecht zur Achse legt (I. Aufg. 3. a), ein rechtw. Dreieck aus dem geg. erzeugenden Winkel und SO als anliegender Kath. konstruiert, und in der Ebene M aus O einen Kreis mit der andern Kath. als Halbmesser beschreibt.

b. Man lege durch die Gerade und die Kegelspitze (bezw. parallel zur Cylinderachse) eine Ebene und bestimme deren Schnitt-Mantellinien mit der geg. Fläche (Aufg. a): so sind die Schnittpunkte dieser Mantellinien mit der geg. Geraden die verlangten Punkte.

Aufgabe 4.

a. Durch einen geg. Punkt an eine Kugelfläche eine Tangente zu ziehen, die einer geg. Ebene parallel sei.

b. Durch zwei geg. Punkte (oder durch eine geg. Gerade) eine Berührungsebene an eine Kugelfläche zu legen.

Auflösung. a. Man lege durch den geg. Punkt eine Ebene parallel zur geg. Ebene (I. Aufg. 1. b), bestimme deren Schnittkreis mit der Kugelfläche (II. Aufg. I. a), und ziehe an ihn von dem geg. Punkt eine Tangente: so genügt diese der Aufgabe. — Da von einem Punkt an einen Kreis im allgem. zwei Tangenten möglich sind, so erhält man im allgem. zwei Lösungen.

(Beweis durch II. Einl. 8. c und I. Einl. 6. c.)

b. Sind A und B (Fig. 38) die zwei geg. Punkte, O der Mittelpunkt der geg. Kugelfläche: so lege man durch O die zu

AB senkrechte Ebene M, welche AB in C schneidet (I. Aufg. 3. b), und zeichne in ihr den Großkreis, nach dem sie die Kugelfläche schneidet. Man ziehe sodann an diesen Kreis von C eine Tangente CT und lege durch AB und CT die Ebene N: so genügt diese der Aufgabe. — Man erhält im allgem. zwei Lösungen.

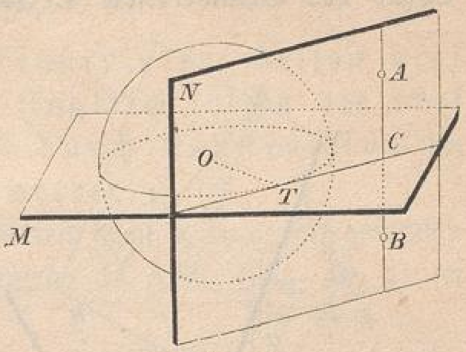


Fig. 38.

Beweis. Die Ebenen M und N stehen senkrecht auf einander (I. 8. a); da ferner Halbm. OT in M liegt und auf der Schnittlinie CT von M und N senkrecht steht, so steht OT auch senkrecht auf N (I. 8. b); folglich ist N Berührungsebene an die Kugelfläche (II. Einl. 8. b). (Anderer Beweis mittels I. 6. Zus. 1.)

Zusatz. Soll durch einen geg. Punkt parallel zu einer geg. Geraden eine Berührungsebene an eine Kugelfläche gelegt werden, so ziehe man durch den geg. Punkt A die Parallele AB zu der geg. Geraden, und verfahre im übrigen wie oben. — Soll parallel zu einer geg. Ebene eine Berührungsebene an eine Kugelfläche gelegt werden, so fälle man vom Kugelmittelpunkt O die Senkrechte auf die Ebene, schneide auf ihr eine Strecke OT = dem Kugelhalbmesser ab, und lege durch T die Ebene N parallel zur geg. Ebene.

Aufgabe 5.

a. Durch einen geg. Punkt —

b. Parallel mit einer geg. Geraden eine Berührungsebene an eine Kegel- oder Cylinderfläche zu legen.

Auflösung. a. Ist die Kegelfläche als Mantel eines Kegels durch Grundkreis und Höhe gegeben, so verbinde man den geg. Punkt A (Fig. 39) mit der Spitze S, bestimme den Schnittpunkt B der Verbindungslinie mit der Ebene des Grundkreises (I. Aufg. 6. a), und ziehe von B an den Grundkreis eine Tangente BT. Legt man dann durch SB und BT die Ebene N: so genügt N als Berührungsebene mit ST als Berührungs-Mantellinie der Aufgabe. Man erhält im allgem. zwei Lösungen. — Ist die Kegelfläche durch Achse, Spitze und erzeugenden Winkel geg., so konstruiere man zuerst irgend einen Parallelkreis wie in Aufg. 3. a, und benütze diesen als Grundkreis. Am einfachsten wird die Parallelkreis-Ebene durch den Punkt A selbst gelegt.

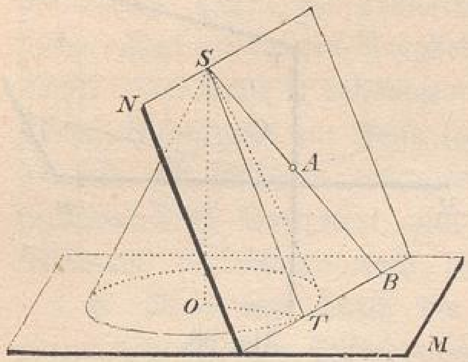


Fig. 39.

Beim Cylinder ziehe man durch A die Parallele zur Achse, bestimme deren Schnittpunkt B mit der Grundkreis-Ebene, und verfahre im übrigen wie beim Kegel.

b. Man ziehe durch die Spitze S der Kegelfläche die Parallele SB zu der geg. Geraden, und verfahre im übrigen wie oben.

Beim Cylinder lege man durch die geg. Gerade eine Ebene parallel zur Cylinderachse (I. Aufg. 2. a), bestimme deren Schnittlinie mit der Grundkreis-Ebene (I. Aufg. 6. b), und lege parallel zu dieser eine Tangente an den Grundkreis; zieht man dann durch den Berührungspunkt die Parallele zur Achse, und legt durch sie und die Tangente eine Ebene, so genügt diese der Aufgabe.

(Beweise durch II. Einl. 3. c und 2. c.)

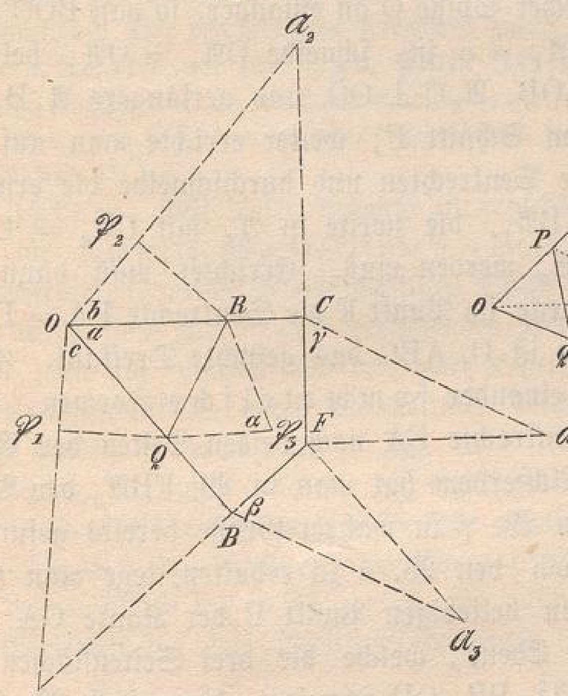
6–9: Dreikant-Konstruktionen.

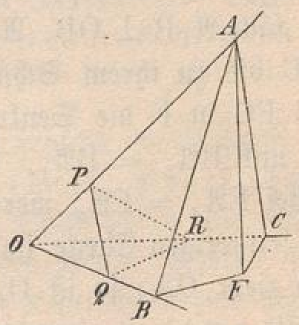
Aufgabe 6.

Ein Dreikant zu konstruieren, dessen drei Seiten gegeben sind. Zugleich sollen die drei Winkel des Dreikants durch Konstruktion in einer Ebene gefunden werden.

Auflösung. Die geg. Seiten seien a, b, c; die gesuchten Winkel α, β, γ. Angenommen: O, ABC (Fig. 40. a) sei

Fig. 40. b. Fig. 40. a.





das gesuchte Dreikant, so fälle man von einem beliebigen Punkt A der Kante OA die Senkrechte AF auf die gegenüberliegende Seitenfläche. Fällt man hierauf FB ⊥ OB, FC ⊥ OC, und zieht AB, AC, so ist auch AB ⊥ OB, AC ⊥ OC (I. 9. b), und es ist W. FBA = β, W. FCA = γ. Die entstandene Figur enthält nun ein Viereck mit zwei rechten Winkeln, ferner vier rechtw. Dreiecke, die an die vier Seiten des Vierecks anstoßen. Legt man diese vier rechtw. Dreiecke in die Ebene des Vierecks um, indem man sie um die vier Seiten desselben (nach außen) dreht, so seien (Fig. 40. b) $O B \mathfrak{A}_1$, $O C \mathfrak{A}_2$, $F B \mathfrak{A}_3$, $F C \mathfrak{A}_4$ ihre neuen Lagen. $B \mathfrak{A}_1$ fällt in die Verlängerung von FB, $C \mathfrak{A}_2$ in die Verlängerung von FC; ferner ist $O \mathfrak{A}_2 = O \mathfrak{A}_1$, $B \mathfrak{A}_3 = B \mathfrak{A}_1$, $C \mathfrak{A}_4 = C \mathfrak{A}_2$, $F \mathfrak{A}_4 = F \mathfrak{A}_3$. — Nach diesen Bemerkungen fällt es nicht schwer, aus den geg. Seiten a, b, c die Figur 40. b, bezw. eine ihr ähnliche — und damit das Dreikant und die Größen seiner Winkel β und γ zu konstruieren:

Man lege (Fig. 40. b) in einer Ebene die drei geg. Seiten mit gemeinschaftlicher Spitze O an einander, so daß $BOC = a$, $CO\mathfrak{A}_2 = b$, $BO\mathfrak{A}_1 = c$ ist, schneide $O\mathfrak{A}_1 = O\mathfrak{A}_2$ beliebig ab, fälle $\mathfrak{A}_1 B \perp OB$, $\mathfrak{A}_2 C \perp OC$, und verlängere $\mathfrak{A}_1 B$ und $\mathfrak{A}_2 C$ bis zu ihrem Schnitt F; weiter errichte man auf FB und FC in F die Senkrechten und durchschneide die erste in $\mathfrak{A}_3$ mit $B\mathfrak{A}_3 = B\mathfrak{A}_1$, die zweite in $\mathfrak{A}_4$ mit $C\mathfrak{A}_4 = C\mathfrak{A}_2$, wobei $F\mathfrak{A}_4 = F\mathfrak{A}_3$ werden muß. Errichtet man dann auf der seitherigen Ebene im Punkt F die Senkrechte $FA = F\mathfrak{A}_3$, und zieht OA: so ist O, ABC das gesuchte Dreikant. (Man erhält z w e i zu einander s y m m e t r i s c h e Formen, insoferne man die Senkrechte FA nach beiden Seiten der Ebene errichten kann.) Außerdem hat man in W. $FB\mathfrak{A}_3$ den W. β, in W. $FC\mathfrak{A}_4$ den W. γ in wahrer Größe bereits gefunden. — Um endlich noch den W. α zu erhalten, lege man (Fig. 40. a) durch einen beliebigen Punkt P der Kante OA eine zu OA senkrechte Ebene, welche die drei Seitenflächen des Dreikants nach PQ, PR, QR schneidet; dann stellt W. QPR den W. α vor. Denkt man sich nun $\triangle$ PQR durch Drehung um QR ebenfalls in die Ebene BOC umgelegt, so kann es in dieser Lage leicht gezeichnet werden. Man zeichne nämlich zunächst die zwei rechtw. Dreiecke OPQ und OPR in umgelegter Lage, indem man (Fig. 40. b) $O\mathfrak{P}_1 = O\mathfrak{P}_2$ beliebig auf $O\mathfrak{A}_1$ und $O\mathfrak{A}_2$ abschneidet, und auf $O\mathfrak{P}_1$ und $O\mathfrak{P}_2$ in $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$ die Senkrechten errichtet, welche OB und OC in Q und R schneiden; zieht man dann QR, und beschreibt aus

Q und R mit QP_1 und RP_2 Kreisbögen, die sich in P_3 schneiden: so ist QRP_3 das umgelegte Dreieck, also W. $QP_3R = \alpha$.

Anm. 1. Die Punkte O, P_3, F (Fig. 40. b) müssen in einer geraden Linie liegen, welche $\perp$ QR ist. (Bew. durch I. Anh. 28 u. I. 9. b.)

Anm. 2. In Fig. 40. b fällt Punkt F innerhalb des Winkels BOC. Würde F außerhalb fallen, und zwar über OB hinaus, so würde das (stumpfe) Supplement von W. FBA_3 als W. β zu nehmen sein. Dasselbe gilt von W. γ, wenn F über OC hinaus fällt. — Ist eine der drei geg. Seiten stumpf, so lege man diese in die Mitte. Sind zwei oder drei Seiten stumpf, so bleibt die Konstruktion zwar Schritt für Schritt die nämliche; doch kann man immerhin behufs größerer Anschaulichkeit statt des gesuchten Dreikants zuerst eines seiner Nebendreikante mit drei oder zwei spitzen Seiten konstruieren. — Damit die Aufgabe möglich sein soll, muß die Summe je zweier Seiten größer als die dritte, und die Summe aller drei Seiten kleiner als 4 R sein. (II. 11 und 15. b.)

Zusatz. Mit dieser Aufgabe ist zugleich die Aufgabe gelöst: die Schnitt-Mantellinien zweier Kegelflächen zu konstruieren, welche gemeinschaftliche Spitze haben und außerdem durch ihre Achsen und erzeugenden Winkel gegeben sind. Denkt man sich nämlich von den zwei Kegelflächen zwei Kegelmäntel abgeschnitten, deren Mantellinien beliebige, aber gleiche Länge haben, so kann man in Fig. 40. b OB und OC als die geg. Achsen, W. b und c als die geg. erzeugenden Winkel, $\triangle OBA_1$ und OCA_2 als die erzeugenden Dreiecke ansehen. Errichtet man schließlich in F die Senkrechte zur Ebene BOC, schneidet auf ihr nach beiden Seiten $FA = FA' = FA_3$ ab, und zieht OA und OA': so stellen diese die zwei Schnitt-Mantellinien vor.

Aufgabe 7.

Ein Dreikant zu konstruieren, dessen drei Winkel gegeben sind.

Auflösung. Die drei geg. Winkel seien α, β, γ. Man konstruiere zuerst (II. Aufg. 6) ein Dreikant, dessen Seiten $2R - \alpha$, $2R - \beta$, $2R - \gamma$ sind, und stelle dann dessen Polardreikant her (II. Einl. 21. b): so ist dieses das verlangte. Die Supplemente der Winkel des zuerst konstruierten Dreikants stellen die Seiten des gesuchten Dreikants vor.

(Beweis durch II. 5. b.)

Anm. Eine direkte Lösung findet sich angedeutet in II. Anh. Aufg. 42.

Aufgabe 8.

Ein Dreikant zu konstruieren, von dem zwei Seiten und ein Winkel gegeben sind, und zwar

a. der von den zwei Seiten eingeschlossene Winkel,

b. der — einer der zwei Seiten gegenüberliegende Winkel.

Auflösung. a. Gegeben: S. a, S. c und W. β. Man kann aus den geg. Elementen die Fig. 40. b (S. 91) leicht konstruieren. Man lege nämlich in einer Ebene die zwei geg. Seiten mit gemeinschaftlicher Spitze O an einander, so daß BOC = a, $BO\mathfrak{A}_1$ = c ist, fälle von einem beliebigen Punkt $\mathfrak{A}_1$ der $O\mathfrak{A}_1$: $\mathfrak{A}_1B \perp OB$, lege an die Verlängerung von $\mathfrak{A}_1B$ den Winkel $FB\mathfrak{A}_3 = \beta$ an, mache $B\mathfrak{A}_3 = B\mathfrak{A}_1$, und fälle $\mathfrak{A}_3F \perp BF$. Errichtet man dann auf der Ebene BOC in F die Senkrechte $FA = F\mathfrak{A}_3$ und zieht OA: so ist O,ABC das gesuchte Dreikant. — Es ist leicht (vgl. Aufg. 6), die Figur 40. b zu vollenden und damit die übrigen Elemente des Dreikants b, γ, α durch ebene Konstruktion zu erhalten.

b. Gegeben: S. b, S. c und W. β. Man mache (Fig. 40. b) W. $BO\mathfrak{A}_1 = c$, fälle von einem beliebigen Punkt $\mathfrak{A}_1$ der $O\mathfrak{A}_1$: $\mathfrak{A}_1B \perp OB$, lege an die Verlängerung von $\mathfrak{A}_1B$ W. $FB\mathfrak{A}_3 = \beta$ an, mache $B\mathfrak{A}_3 = B\mathfrak{A}_1$, und fälle $\mathfrak{A}_3F \perp BF$. Es kann nun weiter $\triangle\, OC\mathfrak{A}_2$ (zwar nicht seiner Lage, aber doch seiner Gestalt nach) in einer Nebenfigur gezeichnet werden aus $O\mathfrak{A}_2 = O\mathfrak{A}_1$ und W. $CO\mathfrak{A}_2 = b$. Ist dadurch die Länge von OC gefunden, so beschreibe man über OF als Durchmesser einen Kreis, lege OC als Sehne hinein, und

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

vollende die Konstruktion wie bei Aufg. 6. — Da zwei Lagen der Sehne OC möglich sind, so erhält man im allgem. zwei Lösungen.

Aufgabe 9.

Ein Dreikant zu konstruieren, von dem eine Seite und zwei Winkel gegeben sind, und zwar

a. die der Seite anliegenden Winkel,

b. ein anliegender und der gegenüberliegende Winkel.

Auflösung. a. Gegeben: S. a, W. β und W. γ. Es können von Fig. 40. b (S. 91) zunächst die zwei rechtw. Dreiecke $FB\mathfrak{A}_3$ und $FC\mathfrak{A}_4$ ihrer Gestalt nach in einer Nebenfigur gezeichnet werden aus den Katheten $F\mathfrak{A}_3 = F\mathfrak{A}_4 =$ einer beliebig gewählten Strecke und aus den W. β und γ als gegenüberliegenden Winkeln. Sind dadurch die Längen von FB und FC gefunden, so mache man W. BOC = der geg. S. a und bestimme in der Ebene dieses Winkels den Punkt F so, daß seine Entfernungen FB und FC von OB und OC die gefundenen Längen haben. Hierauf kann die Figur ohne Schwierigkeit vollendet werden.

b. Gegeben: S. c, W. β und W. γ. Man beginne die Konstruktion (Fig. 40. b) mit Zeichnung der zwei Dreiecke $OB\mathfrak{A}_1$ und $FB\mathfrak{A}_3$ wie in Aufg. 8. b, konstruiere sodann $\triangle FC\mathfrak{A}_4$ seiner Gestalt nach in einer Nebenfigur aus $F\mathfrak{A}_4 = F\mathfrak{A}_3$ und W. $FC\mathfrak{A}_4 = \gamma$, beschreibe über OF als Durchmesser einen Kreis, lege die in der Nebenfigur gefundene Länge von FC als Sehne hinein, und ziehe OC; worauf die Konstruktion wie seither vollendet werden kann. — Man erhält im allgem. zwei Lösungen.

(Andere Auflösung von Aufg. a und b durch Zurückführung auf Aufg. 8. a und b mittels des Polardreikants, ähnlich wie bei Aufg. 7.)

10: Fundamentalkonstruktionen der Sphärik.

Aufgabe 10.

Gegeben eine massive Kugel, deren Halbmesser nicht bekannt ist, und auf deren Oberfläche die Konstruktionen mit bloßer Anwendung eines Zirkels ausgeführt werden sollen.

a. Von einem auf der Kugeloberfläche aufgezeichneten Kugelkreis den ebenen Halbmesser zu finden.

b. Den Halbmesser der Kugel zu bestimmen.

c. Durch zwei auf der Kugeloberfläche geg. Punkte einen Großkreis zu legen.

Auflösung. a. Man nehme auf dem geg. Kugelkreis drei beliebige Punkte an, steche mit dem Zirkel ihre Entfernungen ab, und zeichne in einer Ebene ein Dreieck mit diesen drei Entfernungen als Seiten: so ist der dem Dreieck umbeschriebene Kreis gleich dem geg. Kugelkreis.

b. Man beschreibe aus einem beliebigen Punkt der Kugeloberfläche mit beliebiger Zirkelöffnung einen Kugelkreis (vgl. II. Einl. 13. d) und bestimme dessen ebenen Halbmesser (Aufg. a). Konstruiert man dann ein rechtwinkliges Dreieck aus dem ebenen Halbmesser als Höhe und der zuerst benützten Zirkelöffnung als Kathete: so ist die Hypotenuse gleich dem Durchmesser der Kugel.

c. Man zeichne in einer Ebene einen Kreis, dessen Halbmesser gleich dem Kugelhalbmesser ist (Aufg. b); dann stellt der vierte Teil seiner Peripherie den sphär. Halbmesser eines Großkreises der Kugeloberfläche vor (II. Einl. 13. e). Nimmt man also die zugehörige Sehne in den Zirkel, und schlägt auf der Kugeloberfläche mit dieser Zirkelöffnung aus den zwei geg. Punkten Kreisbögen, so sind deren zwei Schnittpunkte die beiden Pole des gesuchten Großkreises (II. 4. b); beschreibt man aus einem von ihnen mit der nämlichen Zirkelöffnung einen Kreis, so ist dieser der verlangte.

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Anm. Hiernach können sämtliche Konstruktionen der Sphärik (vgl. II. Einl. 13. f) auf der Kugeloberfläche mit bloßer Anwendung des Zirkels ausgeführt werden. Liegt eine Kugel geg. vor, so wird man den sphär. Halbmesser ihrer Großkreise gleich zu Anfang ein für allemal bestimmen. (Die Schenkel des zu benützenden Zirkels müssen größer als der Halbmesser der Kugel sein.)

D. Anhang

von Lehrsätzen und Aufgaben.

I. Lehrsätze.

1—16: Die Kugel. Geometrische Örter. Berührungskegel.

1. Das Produkt aus den zwei Abschnitten aller durch denselben Punkt gehenden Sehnen einer Kugel ist konstant. (Die Abschnitte sind additiv oder subtraktiv, je nachdem der Punkt innerhalb oder außerhalb der Kugel liegt.)

2. Unter allen durch einen Punkt im Innern einer Kugel gelegten Ebenen erzeugt diejenige, welche auf dem durch den Punkt gehenden Halbmesser senkrecht steht, den kleinsten Schnittkreis.

3. Schneidet man zwei konzentrische Kugelflächen durch eine beliebige Ebene, so hat der Kreisring zwischen den zwei Schnittkreisen einen konstanten Flächeninhalt.

4. Durch drei in drei verschiedenen Ebenen liegende Kreise, von denen jeder jeden zweimal schneidet, läßt sich immer eine Kugelfläche legen. (I. 12. Zus. 2.)

5. a. Eine Kugelfläche wird von einer sie schneidenden Kegel- oder Cylinderfläche, deren Achse durch ihren Mittelpunkt geht, nach zwei Kreislinien geschnitten, deren Ebenen senkrecht zur Achse sind.

b. Lehrsatz I. 12 bleibt richtig, wenn statt „Ebene" — „Kugelfläche" gesetzt wird. Der Punkt kann außerhalb oder innerhalb der Kugelfläche liegen. Unter „Fußpunkt der Senkrechten" ist der Fußpunkt der kürzesten Strecke zu verstehen. Die längste Strecke fällt in dieselbe Gerade (Zentrallinie) wie die kürzeste.

KÖNIGLICH PREUSSISCHE BAUGEWERKSCHULE * HÖXTER *