Lehrbuch der Stereometrie

Hauck, Guido

Tübingen, 1893

1 - 5: Fundamentalaufgaben über krumme Flächen

Großkreisperipherie oder als 360°. Daher iſt auch die Seitenſumme des zugehörigen Vielkants kleiner als 4 R.

Zuſatz. Der Inhalt eines ſphär. Vielecks iſt ſtets kleiner als die Halbkugel. — Je kleiner ein ſphär. Vieleck im Verhältnis zu ſeiner Kugeloberfläche iſt, deſto kleiner iſt ſein ſphär. Exzeß. Für F $= \infty$ wird der ſphär. Exzeß $=$ o. (Beweiſe wie in II. 15. Zuſ.)

C. Aufgaben.

Vorbemerkung.

Bei Verwertung der krummen Flächen als geom. Örter zu Konſtruktionsaufgaben kommen die Flächen als ſolche zwar in der inneren Vorſtellung zur vollen Geltung. Bei der wirklichen Ausführung der Konſtruktion dagegen kann man nicht direkt mit ihnen operieren, da man an das in der Vorbemerkung S. 26 aufgeſtellte Poſtulat gebunden iſt. Wie nun die hier auftretenden Fundamentalaufgaben mit Rückſicht auf jenes Poſtulat gelöſt werden, zeigen die folgenden Nummern 1—5. Man hat ſich dabei die Kugelfläche ſtets durch Mittelpunkt und Halbmeſſer gegeben zu denken, die Kegelfläche und Cylinderfläche entweder (als Mantel eines Kegels, bezw. Cylinders) durch Grundkreis und Höhe, oder (als unendlich ausgedehnte Fläche) durch Achſe, Spitze und erzeugenden Winkel, bezw. durch Achſe und Halbmeſſer. Umgekehrt läuft die Aufgabe: eine dieſer Flächen zu „konſtruieren", darauf hinaus, daß die genannten Beſtimmungselemente für ſie ermittelt werden.

1—5: Fundamentalaufgaben über krumme Flächen.

Aufgabe 1.

a. Den Schnittkreis einer Ebene mit einer Kugelfläche zu beſtimmen.

b. Die Schnittpunkte einer Geraden mit einer Kugelfläche zu beſtimmen.

Auflöſung. **a.** Man fälle von dem geg. Kugelmittelpunkt die Senkrechte auf die geg. Ebene (I. Aufg. 4. a), konstruiere (in einer Nebenfigur) ein rechtw. Dreieck aus dem geg. Kugelhalbmesser als Hyp. und der Senkrechten als Kath., und beschreibe in der geg. Ebene aus dem Fußpunkt der Senkrechten einen Kreis mit der andern Kath. als Halbmesser: so ist dieser Kreis der verlangte.

(Beweis durch II. 1. a.)

b. Man lege durch die Gerade eine beliebige Ebene und konstruiere deren Schnittkreis mit der Kugelfläche (Aufg. a): so sind die Schnittpunkte dieses Kreises mit der Geraden die verlangten Punkte. Am einfachsten legt man die Ebene durch den Kugelmittelpunkt und hat dann in dieser Ebene bloß einen Kreis mit dem Kugelhalbmesser aus dem Mittelpunkt zu beschreiben.

(Beweis durch II. Einl. 7. a.)

Aufgabe 2.

a. Den Schnittkreis zweier Kugelflächen zu bestimmen.

b. Die Schnittpunkte einer Kreislinie mit einer Kugelfläche zu bestimmen.

c. Die Schnittpunkte dreier Kugelflächen zu bestimmen.

Auflösung. a. Man lege durch die zwei geg. Mittelpunkte eine beliebige Ebene und zeichne deren Schnittkreise mit den zwei Kugelflächen, lege hierauf durch die gemeinschaftliche Sehne dieser zwei Kreise senkrecht zu ihrer Ebene eine zweite Ebene, und beschreibe in ihr einen Kreis über der gemeinschaftl. Sehne als Durchmesser: so ist dieser Kreis der verlangte.

(Beweis durch II. 2.)

b. Man bestimme den Kreis, nach dem die Ebene der geg. Kreislinie die Kugelfläche schneidet (Aufg. 1. a): so sind die Schnittpunkte dieses Schnittkreises und des geg. Kreises die verlangten Punkte.

c. Man konstruiere den Schnittkreis zweier von den geg. Kugelflächen (Aufg. a), und bestimme die Schnittpunkte dieses Schnittkreises mit der dritten Kugelfläche (Aufg. b): so sind sie die verlangten.

Andere Auflösung. Legt man durch die drei geg. Mittelpunkte eine Ebene, und zeichnet deren Schnittkreise mit den drei Kugelflächen, so schneiden sich die drei gemeinschaftlichen Sehnen nach bekanntem Satze in einem Punkte p. Man lege nun durch eine der drei gemeinschaftl. Sehnen senkrecht zur ersten Ebene eine zweite Ebene, errichte in dieser über der Sehne als Durchmesser einen Kreis, und auf der Sehne im Punkt p die Senkrechte: so sind die Schnittpunkte der Senkrechten mit dem Kreis die verlangten Punkte. — Punkt p muß im Innern der drei Schnittkreise liegen, wenn die Aufgabe möglich sein soll.

Aufgabe 3.

a. Die Schnitt-Mantellinien einer Kegelfläche (oder Cylinderfläche) mit einer Ebene zu bestimmen, die durch die Spitze der Kegelfläche geht (bezw. der Cylinderachse parallel ist).

b. Die Schnittpunkte einer Geraden mit einer Kegelfläche (oder Cylinderfläche) zu bestimmen.

Auflösung. a. Ist die Fläche als Mantel eines Kegels (oder Cylinders) durch Grundkreis und Höhe gegeben, so bestimme man die Schnittlinie der geg. Ebene mit der Grundkreis-Ebene (I. Aufg. 6. b), markiere deren Schnittpunkte mit der Peripherie des Grundkreises, und ziehe durch diese Schnittpunkte Linien nach der Kegelspitze (bezw. parallel zur Cylinderachse): so sind sie die verlangten Schnitt-Mantellinien.

Ist die Kegelfläche durch Achse, Spitze und erzeugenden Winkel (oder die Cylinderfläche durch Achse und Halbmesser) gegeben, so konstruiere man zuerst irgend einen Parallelkreis und benütze diesen als Grundkreis wie oben. Bei der Kegelfläche erhält man einen Parallelkreis, indem man durch einen Punkt O der Achse in beliebigem Abstand von der Spitze S eine Ebene M senkrecht zur Achse legt (I. Aufg. 3. a), ein rechtw. Dreieck aus dem geg. erzeugenden Winkel und SO als anliegender Kath. konstruiert, und in der Ebene M aus O einen Kreis mit der andern Kath. als Halbmesser beschreibt.

b. Man lege durch die Gerade und die Kegelspitze (bezw. parallel zur Cylinderachse) eine Ebene und bestimme deren Schnitt-Mantellinien mit der geg. Fläche (Aufg. a): so sind die Schnittpunkte dieser Mantellinien mit der geg. Geraden die verlangten Punkte.

Aufgabe 4.

a. Durch einen geg. Punkt an eine Kugelfläche eine Tangente zu ziehen, die einer geg. Ebene parallel sei.

b. Durch zwei geg. Punkte (oder durch eine geg. Gerade) eine Berührungsebene an eine Kugelfläche zu legen.

Auflösung. a. Man lege durch den geg. Punkt eine Ebene parallel zur geg. Ebene (I. Aufg. 1. b), bestimme deren Schnittkreis mit der Kugelfläche (II. Aufg. I. a), und ziehe an ihn von dem geg. Punkt eine Tangente: so genügt diese der Aufgabe. — Da von einem Punkt an einen Kreis im allgem. zwei Tangenten möglich sind, so erhält man im allgem. zwei Lösungen.

(Beweis durch II. Einl. 8. c und I. Einl. 6. c.)

b. Sind A und B (Fig. 38) die zwei geg. Punkte, O der Mittelpunkt der geg. Kugelfläche: so lege man durch O die zu

AB senkrechte Ebene M, welche AB in C schneidet (I. Aufg. 3. b), und zeichne in ihr den Großkreis, nach dem sie die Kugelfläche schneidet. Man ziehe sodann an diesen Kreis von C eine Tangente CT und lege durch AB und CT die Ebene N: so genügt diese der Aufgabe. — Man erhält im allgem. zwei Lösungen.

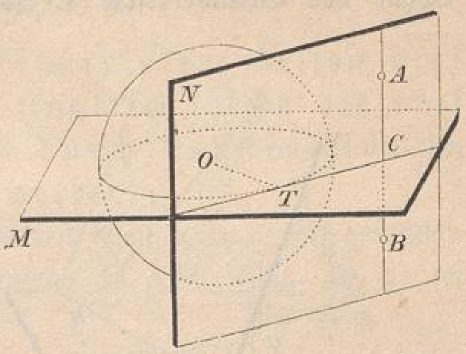

Fig. 38.

Beweis. Die Ebenen M und N stehen senkrecht auf einander (I. 8. a); da ferner Halbm. OT in M liegt und auf der Schnittlinie CT von M und N senkrecht steht, so steht OT auch senkrecht auf N (I. 8. b); folglich ist N Berührungsebene an die Kugelfläche (II. Einl. 8. b). (Anderer Beweis mittels I. 6. Zus. 1.)

Zusatz. Soll durch einen geg. Punkt parallel zu einer geg. Geraden eine Berührungsebene an eine Kugelfläche gelegt werden, so ziehe man durch den geg. Punkt A die Parallele AB zu der geg. Geraden, und verfahre im übrigen wie oben. — Soll parallel zu einer geg. Ebene eine Berührungsebene an eine Kugelfläche gelegt werden, so fälle man vom Kugelmittelpunkt O die Senkrechte auf die Ebene, schneide auf ihr eine Strecke OT = dem Kugelhalbmesser ab, und lege durch T die Ebene N parallel zur geg. Ebene.

Aufgabe 5.

a. Durch einen geg. Punkt —

b. Parallel mit einer geg. Geraden eine Berührungsebene an eine Kegel- oder Cylinderfläche zu legen.

Auflösung. a. Ist die Kegelfläche als Mantel eines Kegels durch Grundkreis und Höhe gegeben, so verbinde man den geg. Punkt A (Fig. 39) mit der Spitze S, bestimme den Schnittpunkt B der Verbindungslinie mit der Ebene des Grundkreises (I. Aufg. 6. a), und ziehe von B an den Grundkreis eine Tangente BT. Legt man dann durch SB und BT die Ebene N: so genügt N als Berührungsebene mit ST als Berührungs-Mantellinie der Aufgabe. Man erhält im allgem. zwei Lösungen. — Ist die Kegelfläche durch Achse, Spitze und erzeugenden Winkel geg., so konstruiere man zuerst irgend einen Parallelkreis wie in Aufg. 3. a, und benütze diesen als Grundkreis. Am einfachsten wird die Parallelkreis-Ebene durch den Punkt A selbst gelegt.

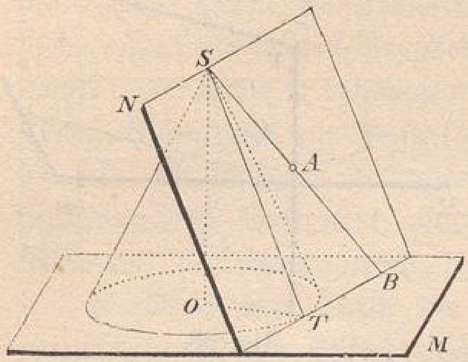

Fig. 39.

Beim Cylinder ziehe man durch A die Parallele zur Achse, bestimme deren Schnittpunkt B mit der Grundkreis-Ebene, und verfahre im übrigen wie beim Kegel.

b. Man ziehe durch die Spitze S der Kegelfläche die Parallele SB zu der geg. Geraden, und verfahre im übrigen wie oben.

Beim Cylinder lege man durch die geg. Gerade eine Ebene parallel zur Cylinderachse (I. Aufg. 2. a), bestimme deren Schnittlinie mit der Grundkreis-Ebene (I. Aufg. 6. b), und lege parallel zu dieser eine Tangente an den Grundkreis; zieht man dann durch den Berührungspunkt die Parallele zur Achse, und legt durch sie und die Tangente eine Ebene, so genügt diese der Aufgabe.

(Beweise durch II. Einl. 3. c und 2. c.)