Lehrbuch der Stereometrie

Hauck, Guido

Tübingen, 1893

6 - 9: Dreikant-Konstruktionen

urn:nbn:de:hbz:466:1-77777

6–9: Dreikant-Konstruktionen.

Aufgabe 6.

Ein Dreikant zu konstruieren, dessen drei Seiten gegeben sind. Zugleich sollen die drei Winkel des Dreikants durch Konstruktion in einer Ebene gefunden werden.

Auflösung. Die geg. Seiten seien a, b, c; die gesuchten Winkel α, β, γ. Angenommen: O, ABC (Fig. 40. a) sei

Fig. 40. b.

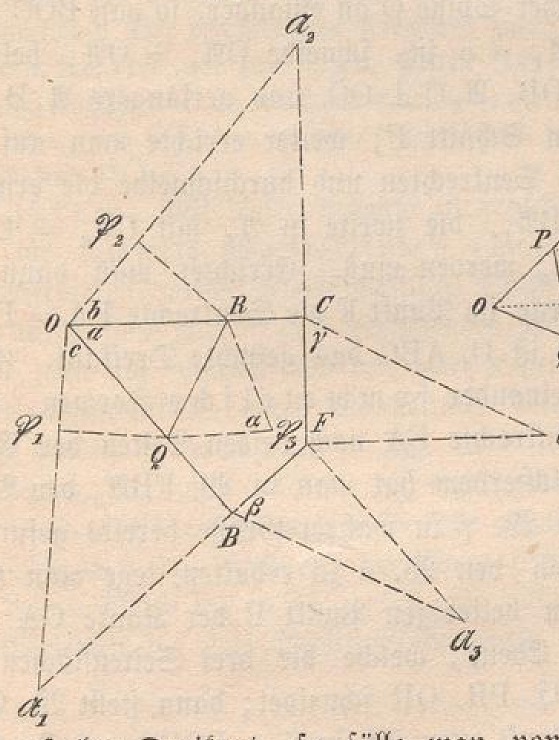
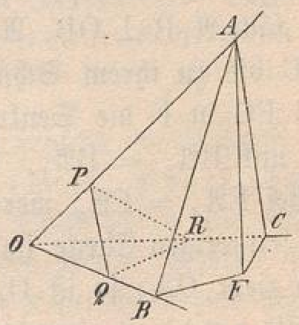


Fig. 40. a.



das gesuchte Dreikant, so fälle man von einem beliebigen Punkt A der Kante OA die Senkrechte AF auf die gegenüberliegende Seitenfläche. Fällt man hierauf FB $\perp$ OB, FC $\perp$ OC, und zieht AB, AC, so ist auch AB $\perp$ OB, AC $\perp$ OC (I. 9. b), und es ist W. FBA = β, W. FCA = γ. Die entstandene Figur enthält nun ein Viereck mit zwei rechten Winkeln, ferner vier rechtw. Dreiecke, die an die vier Seiten des Vierecks anstoßen. Legt man diese vier rechtw. Dreiecke in die Ebene des Vierecks um, indem man sie um die vier Seiten desselben (nach außen) dreht, so seien (Fig. 40. b) $O B \mathfrak{A}_1$, $O C \mathfrak{A}_2$, $F B \mathfrak{A}_3$, $F C \mathfrak{A}_4$ ihre neuen Lagen. $B \mathfrak{A}_1$ fällt in die Verlängerung von FB, $C \mathfrak{A}_2$ in die Verlängerung von FC; ferner ist $O \mathfrak{A}_2 = O \mathfrak{A}_1$, $B \mathfrak{A}_3 = B \mathfrak{A}_1$, $C \mathfrak{A}_4 = C \mathfrak{A}_2$, $F \mathfrak{A}_4 = F \mathfrak{A}_3$. — Nach diesen Bemerkungen fällt es nicht schwer, aus den geg. Seiten a, b, c die Figur 40. b, bezw. eine ihr ähnliche — und damit das Dreikant und die Größen seiner Winkel β und γ zu konstruieren:

Man lege (Fig. 40. b) in einer Ebene die drei geg. Seiten mit gemeinschaftlicher Spitze O an einander, so daß $BOC = a$, $CO\mathfrak{A}_2 = b$, $BO\mathfrak{A}_1 = c$ ist, schneide $O\mathfrak{A}_1 = O\mathfrak{A}_2$ beliebig ab, fälle $\mathfrak{A}_1 B \perp OB$, $\mathfrak{A}_2 C \perp OC$, und verlängere $\mathfrak{A}_1 B$ und $\mathfrak{A}_2 C$ bis zu ihrem Schnitt F; weiter errichte man auf FB und FC in F die Senkrechten und durchschneide die erste in $\mathfrak{A}_3$ mit $B\mathfrak{A}_3 = B\mathfrak{A}_1$, die zweite in $\mathfrak{A}_4$ mit $C\mathfrak{A}_4 = C\mathfrak{A}_2$, wobei $F\mathfrak{A}_4 = F\mathfrak{A}_3$ werden muß. Errichtet man dann auf der seitherigen Ebene im Punkt F die Senkrechte $FA = F\mathfrak{A}_3$, und zieht OA: so ist O, ABC das gesuchte Dreikant. (Man erhält zwei zu einander symmetrische Formen, insoferne man die Senkrechte FA nach beiden Seiten der Ebene errichten kann.) Außerdem hat man in W. $FB\mathfrak{A}_3$ den W. β, in W. $FC\mathfrak{A}_4$ den W. γ in wahrer Größe bereits gefunden. — Um endlich noch den W. α zu erhalten, lege man (Fig. 40. a) durch einen beliebigen Punkt P der Kante OA eine zu OA senkrechte Ebene, welche die drei Seitenflächen des Dreikants nach PQ, PR, QR schneidet; dann stellt W. QPR den W. α vor. Denkt man sich nun $\triangle$ PQR durch Drehung um QR ebenfalls in die Ebene BOC umgelegt, so kann es in dieser Lage leicht gezeichnet werden. Man zeichne nämlich zunächst die zwei rechtw. Dreiecke OPQ und OPR in umgelegter Lage, indem man (Fig. 40. b) $O\mathfrak{P}_1 = O\mathfrak{P}_2$ beliebig auf $O\mathfrak{A}_1$ und $O\mathfrak{A}_2$ abschneidet, und auf $O\mathfrak{P}_1$ und $O\mathfrak{P}_2$ in $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$ die Senkrechten errichtet, welche OB und OC in Q und R schneiden; zieht man dann QR, und beschreibt aus

Q und R mit $Q\mathfrak{P}_1$ und $R\mathfrak{P}_2$ Kreisbögen, die sich in $\mathfrak{P}_3$ schneiden: so ist $QR\mathfrak{P}_3$ das umgelegte Dreieck, also W. $Q\mathfrak{P}_3R = \alpha$.

Anm. 1. Die Punkte O, $\mathfrak{P}_3$, F (Fig. 40. b) müssen in einer geraden Linie liegen, welche $\perp$ QR ist. (Bew. durch I. Anh. 28 u. I. 9. b.)

Anm. 2. In Fig. 40. b fällt Punkt F innerhalb des Winkels BOC. Würde F außerhalb fallen, und zwar über OB hinaus, so würde das (stumpfe) Supplement von W. $FB\mathfrak{A}_3$ als W. β zu nehmen sein. Dasselbe gilt von W. γ, wenn F über OC hinaus fällt. — Ist eine der drei geg. Seiten stumpf, so lege man diese in die Mitte. Sind zwei oder drei Seiten stumpf, so bleibt die Konstruktion zwar Schritt für Schritt die nämliche; doch kann man immerhin behufs größerer Anschaulichkeit statt des gesuchten Dreikants zuerst eines seiner Nebendreikante mit drei oder zwei spitzen Seiten konstruieren. — Damit die Aufgabe möglich sein soll, muß die Summe je zweier Seiten größer als die dritte, und die Summe aller drei Seiten kleiner als 4 R sein. (II. 11 und 15. b.)

Zusatz. Mit dieser Aufgabe ist zugleich die Aufgabe gelöst: die Schnitt-Mantellinien zweier Kegelflächen zu konstruieren, welche gemeinschaftliche Spitze haben und außerdem durch ihre Achsen und erzeugenden Winkel gegeben sind. Denkt man sich nämlich von den zwei Kegelflächen zwei Kegelmäntel abgeschnitten, deren Mantellinien beliebige, aber gleiche Länge haben, so kann man in Fig. 40. b OB und OC als die geg. Achsen, W. b und c als die geg. erzeugenden Winkel, $\triangle OB\mathfrak{A}_1$ und $OC\mathfrak{A}_2$ als die erzeugenden Dreiecke ansehen. Errichtet man schließlich in F die Senkrechte zur Ebene BOC, schneidet auf ihr nach beiden Seiten $FA = FA' = F\mathfrak{A}_3$ ab, und zieht OA und OA': so stellen diese die zwei Schnitt-Mantellinien vor.

Aufgabe 7.

Ein Dreikant zu konstruieren, dessen drei Winkel gegeben sind.

Auflösung. Die drei geg. Winkel seien α, β, γ. Man konstruiere zuerst (II. Aufg. 6) ein Dreikant, dessen Seiten $2\,R - \alpha$, $2\,R - \beta$, $2\,R - \gamma$ sind, und stelle dann dessen Polardreikant her (II. Einl. 21. b): so ist dieses das verlangte. Die Supplemente der Winkel des zuerst konstruierten Dreikants stellen die Seiten des gesuchten Dreikants vor.

(Beweis durch II. 5. b.)

Anm. Eine direkte Lösung findet sich angedeutet in II. Anh. Aufg. 42.

Aufgabe 8.

Ein Dreikant zu konstruieren, von dem zwei Seiten und ein Winkel gegeben sind, und zwar

a. der von den zwei Seiten eingeschlossene Winkel,

b. der — einer der zwei Seiten gegenüberliegende Winkel.

Auflösung. a. Gegeben: S. a, S. c und W. β. Man kann aus den geg. Elementen die Fig. 40. b (S. 91) leicht konstruieren. Man lege nämlich in einer Ebene die zwei geg. Seiten mit gemeinschaftlicher Spitze O an einander, so daß BOC = a, $BO\mathfrak{A}_1$ = c ist, fälle von einem beliebigen Punkt $\mathfrak{A}_1$ der $O\mathfrak{A}_1$: $\mathfrak{A}_1B \perp OB$, lege an die Verlängerung von $\mathfrak{A}_1B$ den Winkel $FB\mathfrak{A}_3 = \beta$ an, mache $B\mathfrak{A}_3 = B\mathfrak{A}_1$, und fälle $\mathfrak{A}_3F \perp BF$. Errichtet man dann auf der Ebene BOC in F die Senkrechte $FA = F\mathfrak{A}_3$ und zieht OA: so ist O,ABC das gesuchte Dreikant. — Es ist leicht (vgl. Aufg. 6), die Figur 40. b zu vollenden und damit die übrigen Elemente des Dreikants b, γ, α durch ebene Konstruktion zu erhalten.

b. Gegeben: S. b, S. c und W. β. Man mache (Fig. 40. b) W. $BO\mathfrak{A}_1$ = c, fälle von einem beliebigen Punkt $\mathfrak{A}_1$ der $O\mathfrak{A}_1$: $\mathfrak{A}_1B \perp OB$, lege an die Verlängerung von $\mathfrak{A}_1B$ W. $FB\mathfrak{A}_3 = \beta$ an, mache $B\mathfrak{A}_3 = B\mathfrak{A}_1$, und fälle $\mathfrak{A}_3F \perp BF$. Es kann nun weiter $\triangle OC\mathfrak{A}_2$ (zwar nicht seiner Lage, aber doch seiner Gestalt nach) in einer Nebenfigur gezeichnet werden aus $O\mathfrak{A}_2 = O\mathfrak{A}_1$ und W. $CO\mathfrak{A}_2$ = b. Ist dadurch die Länge von OC gefunden, so beschreibe man über OF als Durchmesser einen Kreis, lege OC als Sehne hinein, und vollende die Konstruktion wie bei Aufg. 6. — Da zwei Lagen der Sehne OC möglich sind, so erhält man im allgem. zwei Lösungen.

Aufgabe 9.

Ein Dreikant zu konstruieren, von dem eine Seite und zwei Winkel gegeben sind, und zwar

a. die der Seite anliegenden Winkel,

b. ein anliegender und der gegenüberliegende Winkel.

Auflösung. a. Gegeben: S. a, W. β und W. γ. Es können von Fig. 40. b (S. 91) zunächst die zwei rechtw. Dreiecke $FB\mathfrak{A}_3$ und $FC\mathfrak{A}_4$ ihrer Gestalt nach in einer Nebenfigur gezeichnet werden aus den Katheten $F\mathfrak{A}_3 = F\mathfrak{A}_4 =$ einer beliebig gewählten Strecke und aus den W. β und γ als gegenüberliegenden Winkeln. Sind dadurch die Längen von FB und FC gefunden, so mache man W. BOC = der geg. S. a und bestimme in der Ebene dieses Winkels den Punkt F so, daß seine Entfernungen FB und FC von OB und OC die gefundenen Längen haben. Hierauf kann die Figur ohne Schwierigkeit vollendet werden.

b. Gegeben: S. c, W. β und W. γ. Man beginne die Konstruktion (Fig. 40. b) mit Zeichnung der zwei Dreiecke $OB\mathfrak{A}_1$ und $FB\mathfrak{A}_3$ wie in Aufg. 8. b, konstruiere sodann $\triangle\, FC\mathfrak{A}_4$ seiner Gestalt nach in einer Nebenfigur aus $F\mathfrak{A}_4 = F\mathfrak{A}_3$ und W. $FC\mathfrak{A}_4 = \gamma$, beschreibe über OF als Durchmesser einen Kreis, lege die in der Nebenfigur gefundene Länge von FC als Sehne hinein, und ziehe OC; worauf die Konstruktion wie seither vollendet werden kann. — Man erhält im allgem. zwei Lösungen.

(Andere Auflösung von Aufg. a und b durch Zurückführung auf Aufg. 8. a und b mittels des Polardreikants, ähnlich wie bei Aufg. 7.)