Lehrbuch der Stereometrie

Hauck, Guido

Tübingen, 1893

D. Anhang.

urn:nbn:de:hbz:466:1-77777

Anm. Hiernach können sämtliche Konstruktionen der Sphärik (vgl. II. Einl. 13. f) auf der Kugeloberfläche mit bloßer Anwendung des Zirkels ausgeführt werden. Liegt eine Kugel geg. vor, so wird man den sphär. Halbmesser ihrer Großkreise gleich zu Anfang ein für allemal bestimmen. (Die Schenkel des zu benützenden Zirkels müssen größer als der Halbmesser der Kugel sein.)

D. Anhang

von Lehrsätzen und Aufgaben.

I. Lehrsätze.

1—16: Die Kugel. Geometrische Örter. Berührungskegel.

1. Das Produkt aus den zwei Abschnitten aller durch denselben Punkt gehenden Sehnen einer Kugel ist konstant. (Die Abschnitte sind additiv oder subtraktiv, je nachdem der Punkt innerhalb oder außerhalb der Kugel liegt.)

2. Unter allen durch einen Punkt im Innern einer Kugel gelegten Ebenen erzeugt diejenige, welche auf dem durch den Punkt gehenden Halbmesser senkrecht steht, den kleinsten Schnittkreis.

3. Schneidet man zwei konzentrische Kugelflächen durch eine beliebige Ebene, so hat der Kreisring zwischen den zwei Schnittkreisen einen konstanten Flächeninhalt.

4. Durch drei in drei verschiedenen Ebenen liegende Kreise, von denen jeder jeden zweimal schneidet, läßt sich immer eine Kugelfläche legen. (I. 12. Zus. 2.)

5. a. Eine Kugelfläche wird von einer sie schneidenden Kegel- oder Cylinderfläche, deren Achse durch ihren Mittelpunkt geht, nach zwei Kreislinien geschnitten, deren Ebenen senkrecht zur Achse sind.

b. Lehrsatz I. 12 bleibt richtig, wenn statt „Ebene" — „Kugelfläche" gesetzt wird. Der Punkt kann außerhalb oder innerhalb der Kugelfläche liegen. Unter „Fußpunkt der Senkrechten" ist der Fußpunkt der kürzesten Strecke zu verstehen. Die längste Strecke fällt in dieselbe Gerade (Zentrallinie) wie die kürzeste.

6. Ein Körper, der von jeder Schnittebene nach einem Kreise geschnitten wird, ist eine Kugel.

7. Der geom. Ort einer Ebene, die eine feste Kugelfläche nach einem Kreis von geg. Halbmesser schneidet, ist eine mit ihr konzentrische Kugelfläche.

† 8. a. Der geom. Ort einer Ebene, die von zwei festen Punkten ein geg. Verhältnis der Entfernungen hat, besteht aus zwei Punkten, welche die Verbindungsstrecke der zwei festen Punkte in dem geg. Verhältnis harmonisch teilen.*) — Ist das geg. Verhältnis das der Gleichheit, so fällt der eine Punkt ins Unendliche.

b. Der geom. Ort einer Ebene, die von drei (nicht in gerader Linie liegenden) festen Punkten geg. Verhältnisse der Entfernungen hat, wird gebildet von vier Geraden, die in der Ebene der drei festen Punkte so liegen, daß ihre Entfernungen von diesen die geg. Verhältnisse haben. — Bei Gleichheit der Entfernungen fällt eine der vier Geraden ins Unendliche.

9. Der geom. Ort der Schnittlinie zweier Ebenen, die durch zwei feste parallele Gerade gehen und einen Keil von geg. Größe einschließen, ist eine Cylinderfläche, der die zwei festen Geraden als Mantellinien angehören.

† 10. Der geom. Ort eines Punktes, dessen Verbindungsstrecken mit zwei festen Punkten einen rechten Winkel einschließen, ist eine Kugelfläche, welche die Verbindungsstrecke der zwei festen Punkte zum Durchmesser hat.

† 11. a. Der geom. Ort eines Punktes, dessen Entfernungen von zwei festen Punkten ein geg. Verhältnis haben, ist eine Kugelfläche über einem Durchmesser, dessen Endpunkte die Strecke zwischen den zwei festen Punkten in dem geg. Verhältnis harmonisch teilen.

b. Der geom. Ort eines Punktes, dessen Entfernungen von

*) Ein Punkt oder eine Gerade kann als geom. Ort einer Ebene gelten, insoferne der Punkt als unendlich kleine Kugel, die Gerade als unendlich dünne Cylinderfläche angesehen werden kann. Jede durch den Punkt oder die Gerade gelegte Ebene hat die in Rede stehende Eigenschaft. — Auch der unendlich ferne Punkt einer Geraden oder die unendlich ferne Gerade einer Ebene kann als geom. Ort auftreten. Alsdann hat jede mit der Geraden oder der Ebene parallele Ebene die in Rede stehende Eigenschaft.

drei festen Punkten geg. Verhältnisse haben, ist eine Kreislinie, die symmetrisch zu der Ebene der drei festen Punkte liegt und sie in denjenigen zwei Punkten schneidet, die in der Ebene die geg. Verhältnisse der Entfernungen von den drei festen Punkten haben.

(Inwieferne sind I. Anh. 18. a und b spezielle Fälle der vorangehenden zwei Sätze?)

12. a. Der geom. Ort des Mittelpunktes einer Kugelfläche von geg. Halbmesser, die eine feste Ebene berührt (oder aus ihr einen Kreis von geg. Halbmesser ausschneidet), besteht aus zwei mit der festen Ebene parallelen und symmetrisch zu ihr liegenden Ebenen.

b. Der geom. Ort des Mittelpunktes einer Kugelfläche von geg. Halbmesser, die eine feste Kugelfläche berührt (oder sie nach einer Kreislinie von geg. Halbmesser schneidet), besteht aus zwei mit der festen Kugel konzentrischen Kugelflächen.

† 13. Der geom. Ort eines Punktes von der Eigenschaft, daß die von ihm an eine feste Kugel gelegten Tangenten eine geg. Länge haben, oder daß der von ihm an die Kugel gelegte Berührungskegel eine geg. Öffnung hat, ist eine mit der geg. Kugel konzentrische Kugelfläche.

14. a. Der geom. Ort eines Punktes von der Eigenschaft, daß die von ihm an zwei feste Kugeln gezogenen Tangenten gleiche Länge haben, ist eine zur gemeinschaftl. Zentrallinie senkrechte Ebene, welche die Potenzebene der zwei Kugeln heißt. Schneiden sich die zwei Kugeln, so stellt die Ebene ihres Schnittkreises die Potenzebene vor.

b. Die drei Potenzebenen dreier Kugeln schneiden sich nach einer Geraden (Potenzlinie), welche zu der Ebene der drei Mittelpunkte senkrecht steht. — Die sechs Potenzebenen von vier Kugeln schneiden sich in einem Punkt (Potenzpunkt).

15. a. Legt man von beliebigen Punkten einer geraden Linie Berührungskegel an eine feste Kugel, so schneiden sich deren Berührungskreise alle in zwei festen Punkten der Kugeloberfläche, welche zugleich die Berührungspunkte der zwei Berührungsebenen vorstellen, die durch die Gerade an die Kugel gelegt werden können. (Wie lautet der entsprechende Satz für Berührungscylinder? — II. Einl. 9. c und d.)

b. Legt man durch zwei Punkte, von denen der eine fest ist, der andere sich beliebig im Raum bewegt, die zwei Berührungsebenen an eine feste Kugel, so ist der geom. Ort der zwei Berührungspunkte ein fester Kugelkreis.

16. a. Ist an eine Kugel ein Berührungskegel gelegt, und zieht man durch die Kegelspitze eine beliebige Sekante, so wird deren innerhalb der Kugel fallende Sehne in ihrem Schnittpunkt mit der Ebene des Berührungskreises und in der Kegelspitze harmonisch geteilt.

b. Sind an eine Kugel zwei Berührungskegel gelegt, und liegt die Spitze des ersten in der Ebene des Berührungskreises des zweiten, so liegt auch die Spitze des zweiten in der Ebene des Berührungskreises des ersten.

(Beweise durch Zurückführung auf die entsprechenden Sätze der ebenen Geom.)

17—25: Ähnlichkeitspunkte zweier Kugeln. Kegelschnitte.

† 17. a. Zieht man in zwei Kugeln beliebige Paare paralleler und gleichgerichteter Halbmesser und verbindet deren Endpunkte, so schneiden sich alle diese Verbindungslinien in einem Punkt der gemeinschaftlichen Zentrallinie, welcher der äußere Ähnlichkeitspunkt der zwei Kugeln heißt. Zieht man die parallelen Halbmesser jedesmal in entgegengesetzter Richtung, so schneiden sich die Verbindungslinien ihrer Endpunkte in einem zweiten Punkt der Zentrallinie, welcher der innere Ähnlichkeitspunkt heißt. Die beiden Ähnlichkeitspunkte teilen die Strecke zwischen den Kugelmittelpunkten im Verhältnis der Halbmesser harmonisch.

† b. Legt man durch die gemeinschaftl. Zentrallinie zweier Kugeln eine Schnittebene und zieht an die zwei Schnittkreise die vier gemeinschaftl. Tangenten, so beschreiben diese, wenn die Ebene um die Zentrallinie gedreht wird, zwei Kegelflächen, welche beide Kugeln berühren. Der von den äußeren gemeinschaftl. Tangenten beschriebene Kegel heißt der äußere —, der von den inneren beschriebene heißt der innere gemeinschaftliche Berührungskegel der zwei Kugeln. Ihre Spitzen sind identisch mit den zwei Ähnlichkeitspunkten der Kugeln. — Jede Berührungsebene an einen der zwei Kegel berührt auch beide Kugeln und heißt äußere oder innere gemeinschaftl. Be-

rührungsebene, je nachdem sie den äußeren oder den inneren gemeinschaftl. Berührungskegel berührt und also durch den äußeren oder den inneren Ähnlichkeitspunkt geht.

18. Der geom. Ort eines Punktes, der eine von einem festen Punkt S nach einem beliebigen Punkt einer Kugelfläche gezogene Strecke in einem geg. Verhältnis teilt, ist eine Kugelfläche, deren Mittelpunkt O' die Zentralstrecke SO in dem geg. Verhältnis teilt, und deren Halbmesser sich zum Halbmesser der geg. Kugel verhält wie SO' zu SO. (Vor. Satz a.)

19. Die drei äußeren Ähnlichkeitspunkte dreier Kugeln liegen in einer Geraden, welche die äußere Ähnlichkeitsachse der drei Kugeln heißt. Je zwei innere Ähnlichkeitspunkte liegen mit einem äußeren in einer Geraden, welche eine innere Ähnlichkeitsachse heißt.

† 20. Haben zwei Kegelflächen gemeinschaftliche Spitze, und beschreibt man jeder eine beliebige Berührungskugel ein, so ist der geom. Ort für deren äußeren, bezw. inneren Ähnlichkeitspunkt je eine durch die gemeinschaftl. Spitze gehende Gerade, welche zugleich die Schnittlinie der beiden äußeren, bezw. inneren gemeinschaftl. Berührungsebenen der zwei Kegelflächen vorstellt. (II. Einl. 9. c.)

21. Der geom. Ort eines Punktes, von dem aus gesehen zwei feste Kugeln gleich groß erscheinen*), ist eine Kugelfläche, welche die Strecke zwischen den beiden Ähnlichkeitspunkten der Kugeln zum Durchmesser hat. (II. Anh. 11. a.)

22. a. Ist an zwei Kugeln, die sich nicht schneiden, der äußere gemeinschaftl. Berührungskegel gelegt, so wird dessen Mantel von einer beliebigen inneren gemeinschaftl. Berührungsebene der zwei Kugeln nach einer Kurve geschnitten, deren Punkte eine konstante Summe der Entfernungen von den zwei Berührungspunkten haben. — Schneidet man ebenso den Mantel des inneren gemeinschaftl. Berührungskegels durch eine äußere gemeinschaftl. Berührungsebene, so haben die Punkte der Schnittkurve eine konstante Differenz der Entfernungen von den zwei Berührungspunkten. Die Schnittkurve heißt im ersten Fall Ellipse, im zweiten Fall

---

*) Die scheinbare Größe ist abhängig von der Öffnung des von dem Punkt an die Kugel gelegten Berührungskegels.

Hyperbel; die zwei Berührungspunkte heißen ihre Brennpunkte. (Die konstante Summe oder Differenz ist gleich dem Stück einer Mantellinie des Berührungskegels zwischen den beiden Berührungskreisen. II. Einl. 8. c u. 9. b.)

b. Eine Cylinderfläche wird von jeder Ebene, die nicht parallel ihrer Achse ist, nach einer Ellipse geschnitten. (Man beschreibe der Cylinderfläche zwei Berührungskugeln ein, welche die Schnittebene berühren.)

c. Der Schnittpunkt der Cylinderachse mit der Ebene heißt der Mittelpunkt der Ellipse, er halbiert die Strecke zwischen den zwei Brennpunkten und hat die Eigenschaft, daß jede durch ihn gezogene Ellipsensehne (Durchmesser) in ihm halbiert wird. Der Durchmesser, auf dem die zwei Brennpunkte liegen, heißt die große —, der zu ihm senkrechte Durchmesser die kleine Achse der Ellipse; der letztere ist gleich dem Durchmesser des Cylinders. Die konstante Summe der Entfernungen eines Ellipsenpunktes von den zwei Brennpunkten ist gleich der großen Achse. (Wie findet man hiernach die Brennpunkte einer Ellipse, von der die Achsen geg. sind?) — Jeder Parallelkreis des Cylinders kann als eine Projektion der Ellipse angesehen werden. Sind a und b die Halbachsen der Ellipse, so ist ihr Flächeninhalt $= a b \pi$. (I. Anh. 31.)

23. Ist einem Kegelmantel eine Berührungskugel einbeschrieben, und legt man parallel mit einer beliebigen Berührungsebene des Kegels eine Berührungsebene M an die Kugel, so schneidet M den Kegelmantel nach einer Kurve von der Eigenschaft, daß jeder ihrer Punkte gleiche Entfernungen hat von dem Berührungspunkt der Ebene M und von ihrer Schnittlinie mit der Ebene des Berührungskreises des Kegelmantels. Die Kurve heißt Parabel, der Berührungspunkt heißt ihr Brennpunkt, jene Schnittlinie ihre Direktrix. (Ist S die Kegelspitze, F der Brennpunkt, A ein beliebiger Kurvenpunkt, AB die auf die Direktrix gefällte Senkrechte, T der Schnittpunkt von SA mit dem Berührungskreis, U der Schnittpunkt der zur Ebene M parallelen Mantellinie mit dem Berührungskreis, so ist $AF = AT$, $AB \parallel SU$, $\triangle ABT \backsim SUT$.)

24. Zieht man durch einen Ähnlichkeitspunkt S zweier Kugeln eine beliebige Gerade, welche die eine Kugelfläche in X und

Y, die andere in X' und Y' schneidet, wobei Halbm. OX || O'X', OY || O'Y' sei, so ist: SX . SY' = SX' . SY = const.

25. a. Werden zwei Kugeln von einer dritten berührt, so geht die Verbindungslinie der beiden Berührungspunkte durch einen Ähnlichkeitspunkt der zwei ersten Kugeln, und zwar durch den äußeren oder den inneren, je nachdem die zwei Berührungen gleichartig (d. i. entw. beide von außen od. beide von innen) oder ungleichartig sind.

b. Werden drei Kugeln von einer vierten berührt, so geht die durch die drei Berührungspunkte gelegte Ebene durch eine Ähnlichkeitsachse der drei ersten Kugeln, und zwar durch die äußere oder eine innere, je nachdem die drei Berührungen gleichartig sind oder nicht.

26—52: Sphärik und Vielkant.

26. Die Sätze II. 5. a und b gelten auch für ein sphär. Vieleck oder ein Vielkant. (I. Anh. 9.)

† 27. Zwei Dreikante (Vielkante), deren Kanten parallel und gleich gerichtet sind, sind kongruent. — Zwei Dreikante (Vielkante), deren Kanten parallel und entgegengesetzt gerichtet sind, sind symmetrisch.

† 28. a. Nimmt man auf jeder Kante eines Vielkants einen Punkt an, und bestimmt zu jedem dieser Punkte sowie zur Spitze den symmetrischen Punkt in Beziehung auf eine beliebige Ebene, so bilden die Verbindungslinien des zur Spitze symmetrischen Punktes mit den übrigen symmetrischen Punkten ein Vielkant, das mit dem ursprünglichen Vielkant entsprechend-gleich, und zwar symmetrisch ist. (I. Anh. 15.)

b. Legt man durch zwei Gegenpunkte P und Q einer Kugeloberfläche eine Anzahl von Großkreisen und schneidet auf jedem vier gleiche Bögen von beliebiger Länge PA = PA' = QA'' = QA''', PB = PB' = QB'' = QB''', u. s. f. ab, so zwar, daß die Punkte A'',B'', . . mit A,B, . . — , A''',B''', . . mit A',B', . . je auf dem nämlichen Halbkreis liegen, so bilden diese Punkte die Ecken von vier entsprechend-gleichen sphär. Vielecken, von denen je zwei kongruent oder symmetrisch sind, je nachdem sie auf derselben Seite des zu P und Q gehörigen Äquators liegen, oder auf verschiedenen Seiten.

Anm. Man formuliere in den folgenden Nummern 29 bis 38 die nur für Dreikante ausgesprochenen Sätze jedesmal auch für sphärische Dreiecke gleicher Kugeln.

29. Die Summe zweier Seiten eines Dreikants und die Summe ihrer Gegenwinkel sind beide gleichzeitig entweder größer oder kleiner als 180°. (Mit Hilfe eines Nebendreikants, das mit dem ursprüngl. Dreikant eine der zwei fraglichen Seiten gemein hat. II. 12.)

† 30. a. Zwei Dreikante sind entsprechend-gleich, wenn sie zwei Seiten und den Gegenwinkel einer derselben bezw. gleich haben, und wenn die Gegenwinkel des andern Paars gleicher Seiten entweder beide spitz oder beide stumpf sind. (Indirekt: Wären die dritten Seiten nicht gleich, so könnte man von der einen ein Stück gleich der andern abschneiden u. s. w.)

† b. Zwei Dreikante sind entsprechend-gleich, wenn sie zwei Winkel und die Gegenseite eines derselben bezw. gleich haben, und wenn die Gegenseiten des andern Paars gleicher Winkel entweder beide spitz oder beide stumpf sind. (Durch Satz a mit Hilfe der Polardreikante.)

31. Zwei rechtwinklige Dreikante (mit nur einem rechten W.) sind entsprechend-gleich, a) wenn sie die Hypotenuse und eine Kathete bezw. gleich haben, b) wenn sie die Hypotenuse und einen der Hypotenuse anliegenden Winkel bezw. gleich haben.

32. Sind in einem Dreikant zwei Winkel = 90°, so sind auch die gegenüberliegenden Seiten = 90°; und umgekehrt.

33. a. In einem gleichschenkligen Dreikant fallen die zur Grundfläche gehörige Höhenebene, Mittellotebene, seitenhalbierende Transversalebene und Medianebene zusammen.

b. In einem allgem. Dreikant wird jede Seite von der zugehörigen Höhenebene in zwei ungleiche Segmente geteilt, von denen das größere der größeren —, das kleinere der kleineren der zwei andern Seiten anliegt. (I. 13. b mit Zus. 1.)

34. Haben zwei Dreikante zwei Seiten bezw. gleich, und ist der von ihnen eingeschlossene Winkel im einen größer als im andern, so ist auch die dritte Seite im einen größer als im andern; und umgekehrt. (Bew. wie in der ebenen Geometrie.)

† 35. Die Mittellotebenen der Seiten eines Dreikants schneiden sich nach einer Geraden, welche mit den drei Kanten gleiche

Winkel macht. (I. Anh. 19. b. — Achse des umbeschriebenen Kegelmantels; Mittelpunkt des einem sphär. Dreieck umbeschr. Kreises.)

† 36. Die drei inneren Medianebenen eines Dreikants schneiden sich nach einer Geraden, welche gegen die drei Seitenflächen gleich geneigt ist. Dasselbe gilt von je einer inneren und zwei äußeren Medianebenen. (I. Anh. 20. — Achsen des einbeschriebenen und der drei anbeschriebenen Kegelmäntel; Mittelpunkte des einem sphär. Dreieck einbeschriebenen Kreises und der drei anbeschriebenen Kreise, die letzteren sind den drei Nebendreiecken einbeschrieben.)

37. Die seitenhalbierenden Transversalebenen eines Dreikants schneiden sich nach einer Geraden. (Mittels eines Schnittdreiecks, dessen Ecken von der Spitze gleich weit entfernt sind.)

38. Die Höhenebenen eines Dreikants schneiden sich nach einer Geraden. (Man lege senkrecht zu einer Kante eine Ebene und betrachte das Schnittdreieck.)

39. Die Großkreisbögen, welche die Ecken eines sphär. Dreiecks mit den Ecken seines Polardreiecks verbinden, schneiden sich in einem Punkt. (Vor. Satz.)

40. Die Mittellote der Seiten eines sphär. Dreiecks sind identisch mit den Medianen seines Polardreiecks. Der umbeschriebene Kreis des einen Dreiecks und der einbeschriebene Kreis des andern haben daher denselben sphär. Mittelpunkt, und ihre sphär. Halbmesser ergänzen sich zu 90°.

† 41. a. Ist das in II. Einl. 22. a zur Erzeugung eines Vielkants benützte ebene Vieleck regulär, und liegt die Spitze auf der Geraden, die auf der Ebene des Vielecks in seinem Mittelpunkt senkrecht steht, so ist das erzeugte Vielkant regulär.

b. In einem regulären Vielkant schneiden sich sämtliche innere Medianebenen und die Mittellotebenen sämtlicher Seiten nach einer und derselben Geraden.

c. Jedem regulären Vielkant läßt sich ein Kegelmantel umbeschreiben und ein Kegelmantel einbeschreiben. Sie haben die in b genannte Gerade zur gemeinsamen Achse.

(Entsprechende Sätze fürs reguläre sphär. Vieleck.)

Anm. Man formuliere in den folgenden Nummern 42 bis 51 die für Kugelkreise ausgesprochenen Sätze jedesmal auch für Kegelflächen.

42. a. Liegt auf einer Kugeloberfläche ein Kugelkreis und ein Punkt A, so sind die sphär. Entfernungen der einzelnen Kreispunkte von A um so größer, je größere Winkel die nach ihnen gezogenen sphär. Halbmesser mit dem nach A gerichteten Halbmesser machen. Für die kleinste Entfernung ist dieser Winkel $= 0$, für die größte $= 180^\circ$. Je zwei Entfernungen, die zu beiden Seiten des nach A gerichteten Halbmessers symmetrisch zu ihm liegen, sind gleich. (II. Anh. 34 und II. 6.)

† b. Unter den sphär. Entfernungen eines Punktes der Kugeloberfläche von den einzelnen Punkten eines Großkreises sind die zwei auf dem Großkreise senkrechten die größte und die kleinste. Die letztere wird als die sphär. Entfernung des Punktes von dem Großkreise bezeichnet.

† 43. a. Ein Großkreis, der auf einem sphär. Halbmesser eines Kleinkreises in dessen Endpunkt senkrecht steht, hat mit dem Kleinkreis nur diesen einen Punkt gemein. Er heißt die sphär. Tangente des Kleinkreises in dem Punkt. Seine Ebene ist Berührungsebene an den dem Kleinkreis zugehörigen Kegel. Die Schnittlinie seiner Ebene mit der Ebene des Kleinkreises ist Tangente sowohl an den Kleinkreis als an den Großkreis.

b. Die zwei von einem Punkt einer Kugeloberfläche an einen Kleinkreis gelegten sphär. Tangenten sind gleich. (II. Anh. 31. a.)

44. a. Läßt sich in ein sphär. Viereck ein Kreis einbeschreiben, so ist die Summe zweier Gegenseiten des Vierecks gleich der Summe der zwei andern Gegenseiten; und umgekehrt. (Vor. Satz.)

b. Läßt sich um ein sphär. Viereck ein Kreis beschreiben, so ist die Summe zweier Gegenwinkel des Vierecks gleich der Summe der zwei andern Gegenwinkel; und umgekehrt.

† 45. Der geom. Ort eines Punktes auf einer Kugeloberfläche, der von einem Großkreise eine geg. sphär. Entfernung hat, besteht aus zwei gleichen Kleinkreisen, die zu beiden Seiten des Großkreises liegen und mit ihm die Pole gemein haben.

46. Der geom. Ort eines Punktes auf einer Kugeloberfläche von der Eigenschaft, daß die von ihm an einen festen Kleinkreis gelegten sphär. Tangenten eine geg. Länge haben oder einen geg. Winkel einschließen, ist ein mit dem Kleinkreis konzentrischer Kugelkreis.

47. Der geom. Ort eines Punktes auf einer Kugeloberfläche

von der Eigenschaft, daß die von ihm an zwei feste Kleinkreise gelegten sphär. Tangenten gleiche Länge haben, ist ein Großkreis, dessen Ebene durch die Schnittlinie der Ebenen der Kleinkreise geht. (Die von einem Punkt jener Schnittlinie an die zwei Kreise gezogenen geradlinigen Tangenten sind gleich.)

48. a. Alle sphär. Dreiecke, die einen Winkel und den der Gegenseite anbeschriebenen Kreis gemeinsam haben, haben den gleichen Umfang. (II. Anh. 43. b.)

b. Alle sphär. Dreiecke, die einen Winkel und den einbeschriebenen Kreis gemeinsam haben, haben den gleichen Überschuß der Summe der zwei den Winkel einschließenden Seiten über die dritte Seite.

49. Alle sphär. Dreiecke, welche die Grundlinie und den umbeschriebenen Kreis gemeinsam haben, haben den gleichen Überschuß der Summe der Winkel an der Grundlinie über den Winkel an der Spitze. (Man ziehe die sphär. Halbmesser nach den Ecken.)

50. Der geom. Ort der Spitzen C aller flächengleichen sphär. Dreiecke auf der nämlichen Grundlinie AB ist ein durch die Gegenpunkte A', B' gehender Kugelkreis. (Satz von L e x e l l.) (Bewegt sich C auf dem genannten Kugelkreis, so ist in $\triangle$ A'B'C nach dem vor. Satz W. A' + B' — C konstant.)

† 51. Der geom. Ort eines Großkreises, der einen festen Großkreis unter einem geg. Winkel schneidet, besteht aus zwei gleichen, mit dem festen Großkreis konzentrischen Kleinkreisen, deren sphär. Halbmesser den Äquatorbogen des geg. Winkels komplementieren.

† 52. a. Ist P derjenige Pol des Grundkreises einer Halbkugel, der nicht auf der Halbkugel liegt, und zieht man von P nach einem beliebigen Punkt A eine Gerade, welche die Ebene des Grundkreises in A' schneidet, so heißt A' die s t e r e o g r a p h i s c h e P r o j e k t i o n von A. Die Ebene des Grundkreises heißt die Projektionsebene, P das Projektionszentrum, PA der projizierende Strahl. — Die stereogr. Projektion eines Kugelkreises ist ein Kreis (Satz von H i p p a r c h), dessen Mittelpunkt die stereogr. Projektion der Spitze des Berührungskegels ist, der die Kugel längs des Kugelkreises berührt (Satz von C h a s l e s). (Der Kugelkreis und seine Projektion liegen auf einer Kugel-

fläche; ist nämlich O der Kugelmittelpunkt, Q der Gegenpunkt von P, A' die Projektion eines Punktes A des Kugelkreises, so ist: $PA \cdot PA' = PQ \cdot PO = \text{const.}$ Bew. des zweiten Teils an der Schnittfigur der durch O, P und die Kegelspitze gelegten Ebene.)

† b. Die stereographischen Projektionen zweier sich schneidenden Kugelkreise schneiden sich unter dem gleichen Winkel wie die Kugelkreise selbst. (Schneiden die an die zwei Kugelkreise in ihrem Schnittpunkt A gezogenen Tangenten die Projektionsebene in den Punkten T und U, so läßt sich mittels II. Einl. 9. b und Bew. des Satzes a leicht zeigen, daß $\triangle TUA' \cong TUA$.)

II. Aufgaben.

1—20: Aufgaben zur Anwendung von geometrischen Örtern.

1. Auf einer geg. Kugel-, Kegel- oder Cylinderfläche einen Punkt zu finden, der a) von drei geg. Punkten — b) von drei Ebenen gleiche Entfernungen habe, c) von zwei Ebenen geg. Entfernungen habe. (II. Aufg. 1. b und 3. b.)

2. a. Den Mittelpunkt einer Kugel zu finden, wenn ihre Oberfläche oder ein Teil derselben geg. ist. (I. Anh. 18. b.)

b. Durch vier nicht in einer Ebene liegende Punkte —

c. durch eine Kreislinie und einen außerhalb ihrer Ebene liegenden Punkt eine Kugelfläche zu legen.

3. Durch einen im Innern einer Kugel gelegenen Punkt eine Sehne so zu ziehen, daß sie einer geg. Ebene parallel sei und in dem Punkt in einem geg. Verhältnis geteilt werde.

4. Durch eine geg. Gerade oder parallel einer geg. Ebene eine Ebene zu legen, die zwei konzentrische Kugelflächen so schneide, daß der Flächeninhalt des inneren Schnittkreises halb so groß sei als derjenige des äußeren. (II. Anh. 3 u. 7. — Determination?)

5. a. Den Mittelpunkt einer Kugelfläche von geg. Halbmesser zu finden, die irgend drei von folgenden Bedingungen erfülle: α) sie gehe durch einen geg. Punkt, β) sie berühre eine geg. Ebene oder γ) Kugelfläche, δ) sie schneide eine geg. Ebene oder ε) Kugelfläche nach einem Kreis von geg. Halbmesser. — Unter den drei Bedingungen, welche die Kugel erfüllen soll, können auch zwei oder drei der nämlichen Art sein.

b. Den Mittelpunkt einer Kugelfläche von geg. Halbmesser zu finden, die irgend zwei von den Bedingungen β und δ der Aufg. a erfülle und außerdem eine geg. Gerade berühre oder aus ihr eine Sehne von geg. Länge ausschneide. (II. Aufg. 3. b.)

6. a. Auf einer Geraden einen Punkt zu finden, der von zwei geg. Punkten ein geg. Verhältnis der Entfernungen habe. (II. Anh. 11. a.)

b. Auf einer Kreislinie einen Punkt zu finden, dessen Verbindungsstrecken mit zwei geg. Punkten einen rechten Winkel einschließen. (II. Anh. 10, II. Aufg. 2. b.)

7. a. Einen Punkt zu finden, von dem aus gesehen vier geg. Kugeln gleiche scheinbare Größe haben. (II. Anh. 21.)

b. Auf einer Ebene oder einer Kugeloberfläche einen Punkt zu finden, von dem aus gesehen drei geg. Kugeln gleiche scheinbare Größe haben.

8. a. Einen Punkt zu finden von der Eigenschaft, daß von ihm aus gesehen drei geg. Kugeln geg. scheinbare Größen haben (d. h. daß die von ihm an die Kugeln gelegten Berührungskegel geg. Öffnungen haben). (II. Anh. 13.)

b. Auf einer Ebene oder einer Kugeloberfläche einen Punkt zu finden, von dem aus gesehen zwei geg. Kugeln geg. scheinbare Größen haben.

c. Eine Kugel zu konstr., die von vier geg. Punkten aus gesehen geg. scheinbare Größen habe. (II. Anh. 11. a.)

9. Einem Dreikant (oder regul. Vielkant) einen Kegelmantel a) umzubeschreiben, b) einzubeschreiben. (II. Anh. 35, 36 und 41. c.)

10. Auf einer Geraden einen Punkt zu finden, dessen Entfernungen von einer andern Geraden und von einem auf dieser liegenden Punkt ein geg. Verhältnis haben. (II. Aufg. 3. b.)

11. Andere Lösung von I. Aufg. 9 und I. Anh. Aufg. 27. a mittels II. Einl. 4. d.

Es ist ferner sehr lehrreich, die Aufgaben: I. Anh. Aufg. 21. a u. b, 23. a u. b, 24, 26, 28, 30. a u. b nochmals zu behandeln mit Anwendung von geom. Örtern; man kommt dabei auf die alten Lösungen. (Bei Aufg. 21. a kann entweder II. Einl. 8. d oder II. Anh. 10 verwendet werden.)

Anm. Bei den folgenden Aufgaben 12—15 benütze man II. Aufg. 6 (vgl. Zus.).

12. a. Eine gerade Linie zu ziehen, die zwei windschiefe Gerade unter geg. Winkeln schneide. (I. Anh. Anm. zu Aufg. 3.)

b. Behandlung von I. Anh. Aufg. 31 mittels II. Aufg. 6.

13. Eine Gerade zu ziehen, die gegen zwei Ebenen geg. Neigungen habe und a) durch einen geg. Punkt gehe, b) zwei windschiefe Gerade (oder eine Gerade und eine Kreislinie) schneide.

c. Zwischen zwei Ebenen eine Strecke von geg. Länge so zu legen, daß sie mit den Ebenen geg. Winkel mache und eine geg. Gerade schneide.

14. Zwischen eine Gerade und eine Ebene eine Strecke von geg. Länge so zu legen, daß sie mit jeder einen geg. Winkel mache.

15. Eine Kegelfläche von geg. erzeugendem Winkel zu konstr., die a) durch zwei geg. sich schneidende Gerade gehe, b) zwei Ebenen berühre, so daß die Spitze in einem geg. Punkt ihrer Schnittlinie liege, c) zwei Kegelflächen mit gemeinschaftlicher Spitze (nach zwei Mantellinien) berühre, d) durch eine Gerade gehe und eine Ebene berühre, u. s. w. — (Die Aufg. ist analog mit II. Anh. Aufg. 5. a. Was würde den dortigen Bedingungen δ und ε entsprechen?)

16. a. Durch einen geg. Punkt oder parallel einer geg. Richtung eine Gerade zu ziehen, welche α) die Mäntel zweier geg. Kegel oder zweier Cylinder oder eines Kegels und eines Cylinders — β) eine Kugel und einen Kegel- od. Cylindermantel — γ) zwei Kugeln berühre. (II. Einl. 2. d, 3. d und 9. a.)

b. Durch einen geg. Punkt oder parallel einer geg. Richtung eine Gerade zu ziehen, die zwei von folgenden Bedingungen erfülle: α) sie habe von einem geg. Punkt eine geg. Entfernung, β) sie schneide eine Kugel nach einer Sehne von geg. Länge, γ) sie habe von einer Geraden eine geg. kürzeste Entfernung. — Die Bedingungen, welche die Gerade erfüllen soll, können auch beide von der nämlichen Art sein.

17. a. Geg. zwei gleiche Strecken in bestimmter Lage im Raum. Eine Gerade zu ermitteln, um welche als Achse gedreht die eine Strecke in die Lage der andern übergeht.

b. Geg. zwei kongruente Dreiecke (Polygone) in bestimmter Lage im Raum. Einen Punkt zu finden, um welchen bewegt das eine Dreieck (Polygon) in die Lage des andern übergeführt werden kann. (Denkt man sich die zwei Polygone als Seitenflächen kongruenter Polyeder, so ist die Aufg. auch für diese gelöst.)

18. Eine Kugelfläche zu bestimmen, die vier geg. Kugelflächen rechtwinklig schneide. (II. Anh. 14.)

19. Durch einen geg. Punkt eine Gerade so zu ziehen, daß ihre zwischen eine geg. Kreislinie und eine geg. Kugelfläche fallende Strecke in dem Punkt nach einem geg. Verhältnis geteilt werde. (II. Anh. 18.)

20. Zwischen eine Kreislinie und eine Kugelfläche eine Strecke von geg. Länge so zu legen, daß sie einer geg. Geraden parallel sei.

21—40: **Berührungs-Aufgaben.**

21. Durch eine geg. Gerade eine Ebene zu legen, die eine geg. Kreislinie berühre.

22. Eine Kugel zu konstr., die eine geg. Kugel und eine geg. Ebene, und zwar die letztere in einem geg. Punkt, berühre.

23. Eine Kugel zu konstr., deren Oberfläche durch eine geg. Kreislinie gehe und eine geg. Gerade berühre. (Man ermittle den Abstand des Berührungspunkts der Geraden von ihrem Schnittpunkt mit der Kreisebene.)

24. Eine Kugel zu konstr., die eine geg. Ebene und eine geg. Kugel, und zwar die letztere in einem geg. Punkt, berühre.

25. Einem Dreikant eine Kugel von geg. Halbmesser einzubeschreiben, so daß sie a) die Seitenflächen, b) die Kanten des Dreikants berühre. (II. Anh. Aufg. 9. b u. a.)

26. a. In einen Kugelausschnitt —

b. in den von einem sphär. Dreieck und seinem zugehörigen Dreikant begrenzten Raum eine Kugel einzubeschreiben.

27. Einer Kegelfläche eine Kugel einzubeschreiben, die außerdem eine geg. Kugel berühre.

28. a. Einer Kegelfläche eine Kugel einzubeschreiben, die außerdem eine die Kegelfläche schneidende Gerade berühre. (Der Kreis, welcher dem von der Geraden und zwei Mantellinien gebildeten Dreieck einbeschrieben wird, liegt auf der gesuchten Kugel. Oder auch mittels Ähnlichkeitspunkt.)

b. Einem Dreikant α) eine flächenberührende — β) eine kantenberührende Kugel einzubeschreiben, die außerdem eine das Dreikant schneidende Gerade berühre.

29. Eine Kugel zu konstr., deren Mittelpunkt auf einer geg. Geraden liege, und deren Oberfläche eine geg. Ebene berühre und durch einen geg. Punkt gehe. (Man nehme den Schnittpunkt der Geraden mit der Ebene als Ähnlichkeitspunkt der gesuchten Kugel und einer Hilfskugel, die nur die zwei ersten Bedingungen erfüllt.)

30. Eine Kugel zu konstr., deren Oberfläche durch drei geg. Punkte gehe und a) eine geg. Ebene — b) eine geg. Kugel berühre. (Analog den entsprechenden Aufg. der ebenen Geom.)

31. Eine Kugel zu konstr., deren Oberfläche durch zwei geg. Punkte gehe und a) zwei geg. Ebenen — b) zwei Kugeln — c) eine Ebene und eine Kugel berühre. (Analog den entspr. Aufg. der ebenen Geom. II. Anh. 24 und 25. a.)

---

† 32. Durch einen geg. Punkt oder parallel einer geg. Geraden eine gemeinschaftliche Berührungsebene an zwei Kugeln zu legen. (II. Anh. 17. b, II. Aufg. 4. b oder 5.)

† 33. An drei Kugeln eine gemeinschaftliche Berührungsebene zu legen. (II. Anh. 19. — 8 Lösungen.)

† 34. An zwei Kegelflächen mit gemeinsamer Spitze eine gemeinschaftliche Berührungsebene zu legen. (II. Anh. 20 giebt die einfachste Lösung. Eine andere Lösung ist angedeutet in II. Anh. Aufg. 51.)

35. An eine Kegelfläche (oder Cylinderfläche) und eine Kugel eine gemeinschaftliche Berührungsebene zu legen. (II. Anh. 20.)

36. In einer Ebene durch einen geg. Punkt oder parallel einer geg. Richtung eine Gerade so zu ziehen, daß die Berührungsebenen, die durch sie an zwei auf derselben Seite der Ebene befindliche Kugeln gelegt werden, gegen die Ebene gleich geneigt seien. (Man bestimme zu einer der zwei Kugeln die symmetrische in Beziehung auf die geg. Ebene und wende II. Anh. Aufg. 32 an.)

37. Eine Ebene zu bestimmen, die irgend drei von folgenden Bedingungen erfülle: a) sie gehe durch einen geg. Punkt, b) sie sei einer geg. Geraden parallel, c) sie habe von einem Punkt eine geg. Entfernung, d) sie schneide eine Kugel nach einem Kreis von geg. Halbmesser, e) sie habe von zwei Punkten ein geg. Ver-

hältnis der Entfernungen, f) sie habe gegen eine Ebene eine geg. Neigung, g) sie habe gegen eine Gerade eine geg. Neigung. — Unter den drei Bedingungen, welche die Ebene erfüllen soll, können auch zwei oder drei der nämlichen Art sein. Von den Bedingungen b, f und g dürfen jedoch nicht drei zugleich verwertet werden. (Kommt f oder g zweimal vor, so kommt II. Anh. Aufg. 34 zur Verwendung. Kommt c oder d zusammen mit f oder g vor, so benütze man einen einer Kugel umbeschriebenen Berührungskegel. Bei g ist die Gerade unter Umständen an geeigneten Ort parallel zu verschieben.)

38. Eine Ebene zu bestimmen, die eine der in der vor. Aufg. genannten Bedingungen und außerdem noch eine der folgenden erfülle: α) sie sei einer Geraden parallel und habe von ihr eine geg. Entfernung, β) sie schneide einen Cylinder nach einem Rechteck von geg. Inhalt, γ) sie schneide einen Kegel nach einem Dreieck von geg. Inhalt. (Kommt α oder β zusammen mit 37. f oder g vor, so kommt II. Aufg. 5. b zur Anwendung.)

39. Eine Ebene zu bestimmen, die eine von den Bedingungen a, c, d, e der Aufg. 37 erfülle und außerdem gegen drei geg. Gerade oder Ebenen gleich geneigt sei.

40. Eine Ebene zu bestimmen, die von vier nicht in einer Ebene liegenden Punkten a) geg. Verhältnisse der Entfernungen, b) gleiche Entfernungen habe. (II. Anh. 8. — Bei a erhält man 8 Lösungen. Bei b fällt eine dieser 8 Ebenen ins Unendliche.)

41—61: Sphärik und Vielkant.

41. Eine Kugel, auf welcher Meridiane und Parallelkreise in Abständen von je 15° mit N und S als Nord- und Südpol aufgezeichnet sind, wird durch eine beliebige Großkreis-Ebene in zwei Halbkugeln geteilt. Von einer derselben soll ein stereographisches Kartennetz gezeichnet werden, indem der nicht auf ihr liegende Pol P des Großkreises als Projektionszentrum genommen wird. (II. Anh. 52. — Eine in der Ebene PNS gezeichnete Hilfsfigur liefert die Projektionen N' und S' von N und S, sowie die Durchmesser der einzelnen Parallelkreis-Projektionen nach Größe und Lage. Die Meridian-Projektionen gehen in der Hauptfigur alle durch N' und S', ihre Mittelpunkte liegen auf dem Mittellot von N'S' und ergeben sich gemäß II. Anh. 52. b dadurch, daß man

an N′S′ in N′ die Komplemente der Winkel anlegt, die die einzelnen Meridiane mit dem durch P gehenden Meridian machen.)

42. Direkte Lösung von II. Aufg. 7. (Zwei Ebenen, die den W. α einschließen, sind durch eine dritte Ebene so zu schneiden, daß diese mit ihnen die W. β und γ macht. Mittels II. Einl. 4. e und II. Anh. Aufg. 34.)

43. Ein Dreikant zu konstr., von dem geg. sind:

a) zwei Seiten und die zur dritten gehörige Höhe (d. i. der Winkel, nach dem die betr. Höhenebene das Dreikant schneidet),

b) zwei Seiten und die zu einer derselben gehörige Höhe,

c) eine Seite und die zu den zwei andern gehörigen Höhen,

d) eine Seite, die zu ihr gehörige Höhe und eine weitere Höhe.

44. Auf der Oberfläche einer Kugel von geg. Halbmesser sind drei Punkte geg., deren Entfernungen mit dem Zirkel abgestochen werden mögen. Es sollen hieraus durch Konstruktion in einer Ebene die Seiten und Winkel des Dreikants gefunden werden, das von den in den drei Punkten an die Kugel gelegten Berührungsebenen gebildet wird.

45. Von einem durch seine drei Seiten geg. Dreikant folgende Stücke durch Konstruktion in einer Ebene zu finden: a) die Höhen, b) die Medianen (Winkel, nach denen die Medianebenen das Dreikant schneiden), c) die seitenhalbierenden Transversalen (Winkel, nach denen die Transversalebenen schneiden), d) der erzeugende Winkel des einbeschriebenen Kegels, e) der erzeugende Winkel des umbeschriebenen Kegels. (Man lehne die Konstr. an Fig. 40. b, S. 91 an. Bei a, b und c fasse man den Körper ins Auge, der von dem Dreikant und der Ebene eines der zwei rechtw. Dreiecke AFB oder AFC eingeschlossen wird, und ermittle dessen Schnittdreieck mit der betreffenden Ebene. Bei d und e gehe man auf den Schnittpunkt der Kegelachse mit der Ebene eines jener rechtw. Dreiecke aus.)

Anm. In den folgenden Aufgaben 46—61 ist die geg. Kugel massiv vorauszusetzen, und sind die Konstruktionen auf ihrer Oberfläche mit bloßer Anwendung des Zirkels auszuführen (vgl. II. Aufg. 10. Anm.).

† 46. Durch einen geg. Punkt einen Großkreis senkrecht zu einem geg. Großkreis zu legen. (II. Einl. 14. b.)

† 47. Von einem außerhalb eines Kleinkreises geg. Punkt

eine sphär. Tangente an den Kleinkreis zu legen. (Mittels II. Anh. Lehrs. 46, oder durch Konstr. eines Pols der sphär. Tangente mittels zweier Kreisbögen, die aus dem geg. Punkt und dem Mittelpunkt des Kleinkreises beschrieben werden.)

† 48. a. An einen Großkreis in einem geg. Punkt einen sphär. Winkel anzulegen, der gleich viel Grade habe wie ein geg. ebener Winkel. (Man bestimme durch ebene Konstr. die Länge des Äquatorbogens.)

† b. Durch einen geg. Punkt einen Großkreis zu legen, der einen geg. Großkreis unter geg. Winkel schneide. (Man wende Aufg. a an und lege durch den Punkt einen Parallelkreis zu dem geg. Großkreis; oder auch mittels II. Anh. 51 und II. Anh. Aufg. 47.)

49. Zu beweisen, daß die Aufgaben: auf der Oberfläche einer massiven Kugel a) eine sphär. Entfernung zu halbieren, b) einen sphär. Winkel zu halbieren, c) einem sphär. Dreieck einen Kreis um- und d) einzubeschreiben, e) ein sphär. Dreieck zu konstr. aus drei Seiten, f) — aus zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel, g) — aus zwei Seiten und einem Gegenwinkel, — die nämlichen Auflösungen haben, wie die entsprechenden Aufgaben der ebenen Geometrie.

50. Einen Kugelkreis von geg. sphär. Halbmesser zu zeichnen, der zwei geg. Kugelkreise berühre. (Wie in der ebenen Geom.)

† 51. An zwei Kugelkreise die vier gemeinschaftlichen sphär. Tangenten zu legen. (Spezialfall der vor. Aufg. — Hiernach andere Lösung von II. Anh. Aufg. 34.)

52. Ein sphär. Dreieck zu konstr., wenn geg. sind: a) die drei Winkel, b) eine Seite und die zwei anliegenden Winkel, c) zwei Winkel und eine Gegenseite. (Durch Zurückführung auf II. Anh. Aufg. 49. e—g mittels der Polardreiecke, oder direkt. Die direkte Lösung von a mittels II. Anh. 51 und vor. Aufg.)

53. Geg. zwei kongruente (oder symmetrische) sphär. Vielecke in bestimmter Lage auf der Kugeloberfläche. Einen Punkt auf ihr zu finden von der Eigenschaft, daß das eine Vieleck, wenn es in fester Verbindung mit dem Punkte gedacht, durch Drehung um ihn auf der Kugeloberfläche verschoben wird, mit dem andern Vieleck zur Deckung (bezw. in antipodische Lage) gelangt. (Das gedrehte Vieleck befindet sich in der verlangten Lage, sobald eine seiner Seiten sich darin befindet.)

54. Ein sphär. Zweieck durch einen Großkreisbogen von geg. Länge zu halbieren.

55. Ein sphär. Vieleck in ein Zweieck von gleichem Flächeninhalt zu verwandeln. (Der Zweieckswinkel ist nach II. 16 gleich dem halben sphär. Exzeß des Vielecks. Konstr. des sphär. Exzesses durch Addieren der Äquatorbögen.)

56. Von einem sphär. Zweieck a) ein gleichseitiges sphär. Dreieck abzuschneiden, b) ein gleichschenkliges sphär. Dreieck abzuschneiden, das der nte Teil des Zweiecks sei. (II. Anh. 51. Bei b wird der W. an der Grundl. bestimmt nach II. 14. Zus.)

57. Ein sphär. Dreieck zu konstr., von dem eine Seite, die zugehörige Höhe und der Inhalt geg. sind. (II. Anh. 45 u. 50.)

58. Ein sphär. Dreieck zu konstr., von dem zwei Winkel und der Umfang geg. sind. (II. Anh. 48. a und 51.)

59. Ein sphär. Dreieck zu konstr., von dem geg. sind:

a) eine Seite, ein anliegender Winkel und die Summe der zwei andern Seiten,

b) eine Seite, ein anliegender Winkel und der Inhalt. (b mittels a durch das Polardreieck.)

60. Ein sphär. Dreieck zu konstr., von dem geg. sind:

a) eine Seite, der gegenüberliegende Winkel und die Summe der zwei andern Seiten (II. Anh. 48. a und b, II. Anh. Aufg. 51),

b) eine Seite, der gegenüberliegende Winkel und der Inhalt (mittels a durch das Polardreieck).

61. Eine geg. Kugelfläche in ein Netz von lauter kongruenten regulären sphär. Dreiecken zu teilen, und zwar so, daß a) immer drei, b) vier, c) fünf Dreiecke mit gemeinschaftl. Ecke an einander stoßen. (Man teile die Kugeloberfläche von einem beliebigen Punkt aus in 3, 4, 5 gleiche sphär. Zweiecke und wende auf eines von ihnen II. Anh. Aufg. 56. a an.) Durch Verbinden der sphär. Mittelpunkte der Dreiecke in den Netzen b und c erhält man zwei weitere Netze, die aus lauter kongr. regul. Vierecken und Fünfecken bestehen.

Anm. Man formuliere die Aufgaben 49—53 und 56—61 und deren Lösungen für Dreikante und Kegelflächen.