Lehrbuch der Stereometrie

Hauck, Guido

Tübingen, 1893

1 - 16: Die Kugel. Geom. Örter. Berührungskegel

Anm. Hiernach können sämtliche Konstruktionen der Sphärik (vgl. II. Einl. 13. f) auf der Kugeloberfläche mit bloßer Anwendung des Zirkels ausgeführt werden. Liegt eine Kugel geg. vor, so wird man den sphär. Halbmesser ihrer Großkreise gleich zu Anfang ein für allemal bestimmen. (Die Schenkel des zu benützenden Zirkels müssen größer als der Halbmesser der Kugel sein.)

D. Anhang

von Lehrsätzen und Aufgaben.

I. Lehrsätze.

1—16: Die Kugel. Geometrische Örter. Berührungskegel.

1. Das Produkt aus den zwei Abschnitten aller durch denselben Punkt gehenden Sehnen einer Kugel ist konstant. (Die Abschnitte sind additiv oder subtraktiv, je nachdem der Punkt innerhalb oder außerhalb der Kugel liegt.)

2. Unter allen durch einen Punkt im Innern einer Kugel gelegten Ebenen erzeugt diejenige, welche auf dem durch den Punkt gehenden Halbmesser senkrecht steht, den kleinsten Schnittkreis.

3. Schneidet man zwei konzentrische Kugelflächen durch eine beliebige Ebene, so hat der Kreisring zwischen den zwei Schnittkreisen einen konstanten Flächeninhalt.

4. Durch drei in drei verschiedenen Ebenen liegende Kreise, von denen jeder jeden zweimal schneidet, läßt sich immer eine Kugelfläche legen. (I. 12. Zus. 2.)

5. a. Eine Kugelfläche wird von einer sie schneidenden Kegel- oder Cylinderfläche, deren Achse durch ihren Mittelpunkt geht, nach zwei Kreislinien geschnitten, deren Ebenen senkrecht zur Achse sind.

b. Lehrsatz I. 12 bleibt richtig, wenn statt „Ebene" — „Kugelfläche" gesetzt wird. Der Punkt kann außerhalb oder innerhalb der Kugelfläche liegen. Unter „Fußpunkt der Senkrechten" ist der Fußpunkt der kürzesten Strecke zu verstehen. Die längste Strecke fällt in dieselbe Gerade (Zentrallinie) wie die kürzeste.

6. Ein Körper, der von jeder Schnittebene nach einem Kreise geschnitten wird, ist eine Kugel.

7. Der geom. Ort einer Ebene, die eine feste Kugelfläche nach einem Kreis von geg. Halbmesser schneidet, ist eine mit ihr konzentrische Kugelfläche.

† 8. a. Der geom. Ort einer Ebene, die von zwei festen Punkten ein geg. Verhältnis der Entfernungen hat, besteht aus zwei Punkten, welche die Verbindungsstrecke der zwei festen Punkte in dem geg. Verhältnis harmonisch teilen.*) — Ist das geg. Verhältnis das der Gleichheit, so fällt der eine Punkt ins Unendliche.

b. Der geom. Ort einer Ebene, die von drei (nicht in gerader Linie liegenden) festen Punkten geg. Verhältnisse der Entfernungen hat, wird gebildet von vier Geraden, die in der Ebene der drei festen Punkte so liegen, daß ihre Entfernungen von diesen die geg. Verhältnisse haben. — Bei Gleichheit der Entfernungen fällt eine der vier Geraden ins Unendliche.

9. Der geom. Ort der Schnittlinie zweier Ebenen, die durch zwei feste parallele Gerade gehen und einen Keil von geg. Größe einschließen, ist eine Cylinderfläche, der die zwei festen Geraden als Mantellinien angehören.

† 10. Der geom. Ort eines Punktes, dessen Verbindungsstrecken mit zwei festen Punkten einen rechten Winkel einschließen, ist eine Kugelfläche, welche die Verbindungsstrecke der zwei festen Punkte zum Durchmesser hat.

† 11. a. Der geom. Ort eines Punktes, dessen Entfernungen von zwei festen Punkten ein geg. Verhältnis haben, ist eine Kugelfläche über einem Durchmesser, dessen Endpunkte die Strecke zwischen den zwei festen Punkten in dem geg. Verhältnis harmonisch teilen.

b. Der geom. Ort eines Punktes, dessen Entfernungen von

---

*) Ein Punkt oder eine Gerade kann als geom. Ort einer Ebene gelten, insoferne der Punkt als unendlich kleine Kugel, die Gerade als unendlich dünne Cylinderfläche angesehen werden kann. Jede durch den Punkt oder die Gerade gelegte Ebene hat die in Rede stehende Eigenschaft. — Auch der unendlich ferne Punkt einer Geraden oder die unendlich ferne Gerade einer Ebene kann als geom. Ort auftreten. Alsdann hat jede mit der Geraden oder der Ebene parallele Ebene die in Rede stehende Eigenschaft.

drei festen Punkten geg. Verhältnisse haben, ist eine Kreislinie, die symmetrisch zu der Ebene der drei festen Punkte liegt und sie in denjenigen zwei Punkten schneidet, die in der Ebene die geg. Verhältnisse der Entfernungen von den drei festen Punkten haben.

(Inwieferne sind I. Anh. 18. a und b spezielle Fälle der vorangehenden zwei Sätze?)

12. a. Der geom. Ort des Mittelpunktes einer Kugelfläche von geg. Halbmesser, die eine feste Ebene berührt (oder aus ihr einen Kreis von geg. Halbmesser ausschneidet), besteht aus zwei mit der festen Ebene parallelen und symmetrisch zu ihr liegenden Ebenen.

b. Der geom. Ort des Mittelpunktes einer Kugelfläche von geg. Halbmesser, die eine feste Kugelfläche berührt (oder sie nach einer Kreislinie von geg. Halbmesser schneidet), besteht aus zwei mit der festen Kugel konzentrischen Kugelflächen.

† 13. Der geom. Ort eines Punktes von der Eigenschaft, daß die von ihm an eine feste Kugel gelegten Tangenten eine geg. Länge haben, oder daß der von ihm an die Kugel gelegte Berührungskegel eine geg. Öffnung hat, ist eine mit der geg. Kugel konzentrische Kugelfläche.

14. a. Der geom. Ort eines Punktes von der Eigenschaft, daß die von ihm an zwei feste Kugeln gezogenen Tangenten gleiche Länge haben, ist eine zur gemeinschaftl. Zentrallinie senkrechte Ebene, welche die Potenzebene der zwei Kugeln heißt. Schneiden sich die zwei Kugeln, so stellt die Ebene ihres Schnittkreises die Potenzebene vor.

b. Die drei Potenzebenen dreier Kugeln schneiden sich nach einer Geraden (Potenzlinie), welche zu der Ebene der drei Mittelpunkte senkrecht steht. — Die sechs Potenzebenen von vier Kugeln schneiden sich in einem Punkt (Potenzpunkt).

15. a. Legt man von beliebigen Punkten einer geraden Linie Berührungskegel an eine feste Kugel, so schneiden sich deren Berührungskreise alle in zwei festen Punkten der Kugeloberfläche, welche zugleich die Berührungspunkte der zwei Berührungsebenen vorstellen, die durch die Gerade an die Kugel gelegt werden können. (Wie lautet der entsprechende Satz für Berührungscylinder? — II. Einl. 9. c und d.)

b. Legt man durch zwei Punkte, von denen der eine fest ist, der andere sich beliebig im Raum bewegt, die zwei Berührungsebenen an eine feste Kugel, so ist der geom. Ort der zwei Berührungspunkte ein fester Kugelkreis.

16. a. Ist an eine Kugel ein Berührungskegel gelegt, und zieht man durch die Kegelspitze eine beliebige Sekante, so wird deren innerhalb der Kugel fallende Sehne in ihrem Schnittpunkt mit der Ebene des Berührungskreises und in der Kegelspitze harmonisch geteilt.

b. Sind an eine Kugel zwei Berührungskegel gelegt, und liegt die Spitze des ersten in der Ebene des Berührungskreises des zweiten, so liegt auch die Spitze des zweiten in der Ebene des Berührungskreises des ersten.

(Beweise durch Zurückführung auf die entsprechenden Sätze der ebenen Geom.)

17—25: Ähnlichkeitspunkte zweier Kugeln. Kegelschnitte.

† 17. a. Zieht man in zwei Kugeln beliebige Paare paralleler und gleichgerichteter Halbmesser und verbindet deren Endpunkte, so schneiden sich alle diese Verbindungslinien in e i n e m Punkt der gemeinschaftlichen Zentrallinie, welcher der ä u ß e r e Ä h n l i c h k e i t s p u n k t der zwei Kugeln heißt. Zieht man die parallelen Halbmesser jedesmal in entgegengesetzter Richtung, so schneiden sich die Verbindungslinien ihrer Endpunkte in einem zweiten Punkt der Zentrallinie, welcher der i n n e r e Ä h n l i c h k e i t s p u n k t heißt. Die beiden Ähnlichkeitspunkte teilen die Strecke zwischen den Kugelmittelpunkten im Verhältnis der Halbmesser harmonisch.

† b. Legt man durch die gemeinschaftl. Zentrallinie zweier Kugeln eine Schnittebene und zieht an die zwei Schnittkreise die vier gemeinschaftl. Tangenten, so beschreiben diese, wenn die Ebene um die Zentrallinie gedreht wird, zwei Kegelflächen, welche beide Kugeln berühren. Der von den äußeren gemeinschaftl. Tangenten beschriebene Kegel heißt der ä u ß e r e —, der von den inneren beschriebene heißt der i n n e r e g e m e i n s c h a f t l i c h e B e r ü h r u n g s k e g e l der zwei Kugeln. Ihre Spitzen sind identisch mit den zwei Ähnlichkeitspunkten der Kugeln. — Jede Berührungsebene an einen der zwei Kegel berührt auch beide Kugeln und heißt ä u ß e r e oder i n n e r e g e m e i n s c h a f t l. Be-