UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Lehrbuch der Stereometrie

Hauck, Guido

Tübingen, 1893

17 - 25: Ähnlichkeitspunkte zweier Kugeln. Kegelschnitte

urn:nbn:de:hbz:466:1-77777

Visual Library

ist, der andere sich beliebig im Raum bewegt, die zwei Berührungsebenen an eine feste Kugel, so ist der geom. Ort der zwei Berührungspunkte ein fester Kugelkreis.

16. a. Ist an eine Kugel ein Berührungskegel gelegt, und zieht man durch die Kegelspitze eine beliebige Sekante, so wird deren innerhalb der Kugel fallende Sehne in ihrem Schnittpunkt mit der Ebene des Berührungskreises und in der Kegelspitze harmonisch geteilt.

b. Sind an eine Kugel zwei Berührungskegel gelegt, und liegt die Spitze des ersten in der Ebene des Berührungskreises des zweiten, so liegt auch die Spitze des zweiten in der Ebene des Berührungskreises des ersten.

(Beweise durch Zurückführung auf die entsprechenden Sätze der ebenen Geom.)

17—25: Ähnlichkeitspunkte zweier Kugeln. Kegelschnitte.

† 17. a. Zieht man in zwei Kugeln beliebige Paare paralleler und gleichgerichteter Halbmesser und verbindet deren Endpunkte, so schneiden sich alle diese Verbindungslinien in einem Punkt der gemeinschaftlichen Zentrallinie, welcher der äußere Ähnlichkeitspunkt der zwei Kugeln heißt. Zieht man die parallelen Halbmesser jedesmal in entgegengesetzter Richtung, so schneiden sich die Verbindungslinien ihrer Endpunkte in einem zweiten Punkt der Zentrallinie, welcher der innere Ähnlichkeitspunkt heißt. Die beiden Ähnlichkeitspunkte teilen die Strecke zwischen den Kugelmittelpunkten im Verhältnis der Halbmesser harmonisch.

† b. Legt man durch die gemeinschaftl. Zentrallinie zweier Kugeln eine Schnittebene und zieht an die zwei Schnittkreise die vier gemeinschaftl. Tangenten, so beschreiben diese, wenn die Ebene um die Zentrallinie gedreht wird, zwei Kegelflächen, welche beide Kugeln berühren. Der von den äußeren gemeinschaftl. Tangenten beschriebene Kegel heißt der äußere —, der von den inneren beschriebene heißt der innere gemeinschaftliche Berührungskegel der zwei Kugeln. Ihre Spitzen sind identisch mit den zwei Ähnlichkeitspunkten der Kugeln. — Jede Berührungsebene an einen der zwei Kegel berührt auch beide Kugeln und heißt äußere oder innere gemeinschaftl. Be-

rührungsebene, je nachdem sie den äußeren oder den inneren gemeinschaftl. Berührungskegel berührt und also durch den äußeren oder den inneren Ähnlichkeitspunkt geht.

18. Der geom. Ort eines Punktes, der eine von einem festen Punkt S nach einem beliebigen Punkt einer Kugelfläche gezogene Strecke in einem geg. Verhältnis teilt, ist eine Kugelfläche, deren Mittelpunkt O' die Zentralstrecke SO in dem geg. Verhältnis teilt, und deren Halbmesser sich zum Halbmesser der geg. Kugel verhält wie SO' zu SO. (Vor. Satz a.)

19. Die drei äußeren Ähnlichkeitspunkte dreier Kugeln liegen in einer Geraden, welche die äußere Ähnlichkeitsachse der drei Kugeln heißt. Je zwei innere Ähnlichkeitspunkte liegen mit einem äußeren in einer Geraden, welche eine innere Ähnlichkeitsachse heißt.

† 20. Haben zwei Kegelflächen gemeinschaftliche Spitze, und beschreibt man jeder eine beliebige Berührungskugel ein, so ist der geom. Ort für deren äußeren, bezw. inneren Ähnlichkeitspunkt je eine durch die gemeinschaftl. Spitze gehende Gerade, welche zugleich die Schnittlinie der beiden äußeren, bezw. inneren gemeinschaftl. Berührungsebenen der zwei Kegelflächen vorstellt. (II. Einl. 9. c.)

21. Der geom. Ort eines Punktes, von dem aus gesehen zwei feste Kugeln gleich groß erscheinen*), ist eine Kugelfläche, welche die Strecke zwischen den beiden Ähnlichkeitspunkten der Kugeln zum Durchmesser hat. (II. Anh. 11. a.)

22. a. Ist an zwei Kugeln, die sich nicht schneiden, der äußere gemeinschaftl. Berührungskegel gelegt, so wird dessen Mantel von einer beliebigen inneren gemeinschaftl. Berührungsebene der zwei Kugeln nach einer Kurve geschnitten, deren Punkte eine konstante Summe der Entfernungen von den zwei Berührungspunkten haben. — Schneidet man ebenso den Mantel des inneren gemeinschaftl. Berührungskegels durch eine äußere gemeinschaftl. Berührungsebene, so haben die Punkte der Schnittkurve eine konstante Differenz der Entfernungen von den zwei Berührungspunkten. Die Schnittkurve heißt im ersten Fall Ellipse, im zweiten Fall

*) Die scheinbare Größe ist abhängig von der Öffnung des von dem Punkt an die Kugel gelegten Berührungskegels.

Hyperbel; die zwei Berührungspunkte heißen ihre Brennpunkte. (Die konstante Summe oder Differenz ist gleich dem Stück einer Mantellinie des Berührungskegels zwischen den beiden Berührungskreisen. II. Einl. 8. c u. 9. b.)

b. Eine Cylinderfläche wird von jeder Ebene, die nicht parallel ihrer Achse ist, nach einer Ellipse geschnitten. (Man beschreibe der Cylinderfläche zwei Berührungskugeln ein, welche die Schnittebene berühren.)

c. Der Schnittpunkt der Cylinderachse mit der Ebene heißt der Mittelpunkt der Ellipse, er halbiert die Strecke zwischen den zwei Brennpunkten und hat die Eigenschaft, daß jede durch ihn gezogene Ellipsensehne (Durchmesser) in ihm halbiert wird. Der Durchmesser, auf dem die zwei Brennpunkte liegen, heißt die große —, der zu ihm senkrechte Durchmesser die kleine Achse der Ellipse; der letztere ist gleich dem Durchmesser des Cylinders. Die konstante Summe der Entfernungen eines Ellipsenpunktes von den zwei Brennpunkten ist gleich der großen Achse. (Wie findet man hiernach die Brennpunkte einer Ellipse, von der die Achsen geg. sind?) — Jeder Parallelkreis des Cylinders kann als eine Projektion der Ellipse angesehen werden. Sind a und b die Halbachsen der Ellipse, so ist ihr Flächeninhalt $= a b \pi$. (I. Anh. 31.)

23. Ist einem Kegelmantel eine Berührungskugel einbeschrieben, und legt man parallel mit einer beliebigen Berührungsebene des Kegels eine Berührungsebene M an die Kugel, so schneidet M den Kegelmantel nach einer Kurve von der Eigenschaft, daß jeder ihrer Punkte gleiche Entfernungen hat von dem Berührungspunkt der Ebene M und von ihrer Schnittlinie mit der Ebene des Berührungskreises des Kegelmantels. Die Kurve heißt Parabel, der Berührungspunkt heißt ihr Brennpunkt, jene Schnittlinie ihre Direktrix. (Ist S die Kegelspitze, F der Brennpunkt, A ein beliebiger Kurvenpunkt, AB die auf die Direktrix gefällte Senkrechte, T der Schnittpunkt von SA mit dem Berührungskreis, U der Schnittpunkt der zur Ebene M parallelen Mantellinie mit dem Berührungskreis, so ist $AF = AT$, $AB \parallel SU$, $\triangle\, ABT \backsim SUT$.)

24. Zieht man durch einen Ähnlichkeitspunkt S zweier Kugeln eine beliebige Gerade, welche die eine Kugelfläche in X und

Y, die andere in X′ und Y′ schneidet, wobei Halbm. $OX \parallel O'X'$, $OY \parallel O'Y'$ sei, so ist: $SX . SY' = SX' . SY = \text{const.}$

25. a. Werden zwei Kugeln von einer dritten berührt, so geht die Verbindungslinie der beiden Berührungspunkte durch einen Ähnlichkeitspunkt der zwei ersten Kugeln, und zwar durch den äußeren oder den inneren, je nachdem die zwei Berührungen gleichartig (d. i. entw. beide von außen od. beide von innen) oder ungleichartig sind.

b. Werden drei Kugeln von einer vierten berührt, so geht die durch die drei Berührungspunkte gelegte Ebene durch eine Ähnlichkeitsachse der drei ersten Kugeln, und zwar durch die äußere oder eine innere, je nachdem die drei Berührungen gleichartig sind oder nicht.

26—52: Sphärik und Vielkant.

26. Die Sätze II. 5. a und b gelten auch für ein sphär. Vieleck oder ein Vielkant. (I. Anh. 9.)

† 27. Zwei Dreikante (Vielkante), deren Kanten parallel und gleich gerichtet sind, sind kongruent. — Zwei Dreikante (Vielkante), deren Kanten parallel und entgegengesetzt gerichtet sind, sind symmetrisch.

† 28. a. Nimmt man auf jeder Kante eines Vielkants einen Punkt an, und bestimmt zu jedem dieser Punkte sowie zur Spitze den symmetrischen Punkt in Beziehung auf eine beliebige Ebene, so bilden die Verbindungslinien des zur Spitze symmetrischen Punktes mit den übrigen symmetrischen Punkten ein Vielkant, das mit dem ursprünglichen Vielkant entsprechend-gleich, und zwar symmetrisch ist. (I. Anh. 15.)

b. Legt man durch zwei Gegenpunkte P und Q einer Kugeloberfläche eine Anzahl von Großkreisen und schneidet auf jedem vier gleiche Bögen von beliebiger Länge $PA = PA' = QA'' = QA'''$, $PB = PB' = QB'' = QB'''$, u. s. f. ab, so zwar, daß die Punkte $A'', B'', \ldots$ mit $A, B, \ldots$ — , $A''', B''', \ldots$ mit $A', B', \ldots$ je auf dem nämlichen Halbkreis liegen, so bilden diese Punkte die Ecken von vier entsprechend-gleichen sphär. Vielecken, von denen je zwei kongruent oder symmetrisch sind, je nachdem sie auf derselben Seite des zu P und Q gehörigen Äquators liegen, oder auf verschiedenen Seiten.