Lehrbuch der Stereometrie

Hauck, Guido

Tübingen, 1893

26 - 52: Sphärik und Vielkant

Y, die andere in X' und Y' schneidet, wobei Halbm. OX ∥ O'X', OY ∥ O'Y' sei, so ist: SX . SY' = SX' . SY = const.

25. a. Werden zwei Kugeln von einer dritten berührt, so geht die Verbindungslinie der beiden Berührungspunkte durch einen Ähnlichkeitspunkt der zwei ersten Kugeln, und zwar durch den äußeren oder den inneren, je nachdem die zwei Berührungen gleichartig (d. i. entw. beide von außen od. beide von innen) oder ungleichartig sind.

b. Werden drei Kugeln von einer vierten berührt, so geht die durch die drei Berührungspunkte gelegte Ebene durch eine Ähnlichkeitsachse der drei ersten Kugeln, und zwar durch die äußere oder eine innere, je nachdem die drei Berührungen gleichartig sind oder nicht.

26—52: Sphärik und Vielkant.

26. Die Sätze II. 5. a und b gelten auch für ein sphär. Vieleck oder ein Vielkant. (I. Anh. 9.)

† 27. Zwei Dreikante (Vielkante), deren Kanten parallel und gleich gerichtet sind, sind kongruent. — Zwei Dreikante (Vielkante), deren Kanten parallel und entgegengesetzt gerichtet sind, sind symmetrisch.

† 28. a. Nimmt man auf jeder Kante eines Vielkants einen Punkt an, und bestimmt zu jedem dieser Punkte sowie zur Spitze den symmetrischen Punkt in Beziehung auf eine beliebige Ebene, so bilden die Verbindungslinien des zur Spitze symmetrischen Punktes mit den übrigen symmetrischen Punkten ein Vielkant, das mit dem ursprünglichen Vielkant entsprechend-gleich, und zwar symmetrisch ist. (I. Anh. 15.)

b. Legt man durch zwei Gegenpunkte P und Q einer Kugeloberfläche eine Anzahl von Großkreisen und schneidet auf jedem vier gleiche Bögen von beliebiger Länge PA = PA' = QA'' = QA''', PB = PB' = QB'' = QB''', u. s. f. ab, so zwar, daß die Punkte A'',B'', . . mit A,B, . . — , A''',B''', . . mit A',B', . . je auf dem nämlichen Halbkreis liegen, so bilden diese Punkte die Ecken von vier entsprechend-gleichen sphär. Vielecken, von denen je zwei kongruent oder symmetrisch sind, je nachdem sie auf derselben Seite des zu P und Q gehörigen Äquators liegen, oder auf verschiedenen Seiten.

Anm. Man formuliere in den folgenden Nummern 29 bis 38 die nur für Dreikante ausgesprochenen Sätze jedesmal auch für *sphärische Dreiecke* gleicher Kugeln.

29. Die Summe zweier Seiten eines Dreikants und die Summe ihrer Gegenwinkel sind beide gleichzeitig entweder größer oder kleiner als 180°. (Mit Hilfe eines Nebendreikants, das mit dem ursprüngl. Dreikant eine der zwei fraglichen Seiten gemein hat. II. 12.)

† 30. a. Zwei Dreikante sind entsprechend-gleich, wenn sie zwei Seiten und den Gegenwinkel einer derselben bezw. gleich haben, und wenn die Gegenwinkel des andern Paars gleicher Seiten entweder beide spitz oder beide stumpf sind. (Indirekt: Wären die dritten Seiten nicht gleich, so könnte man von der einen ein Stück gleich der andern abschneiden u. s. w.)

† b. Zwei Dreikante sind entsprechend-gleich, wenn sie zwei Winkel und die Gegenseite eines derselben bezw. gleich haben, und wenn die Gegenseiten des andern Paars gleicher Winkel entweder beide spitz oder beide stumpf sind. (Durch Satz a mit Hilfe der Polardreikante.)

31. Zwei rechtwinklige Dreikante (mit nur einem rechten W.) sind entsprechend-gleich, a) wenn sie die Hypotenuse und eine Kathete bezw. gleich haben, b) wenn sie die Hypotenuse und einen der Hypotenuse anliegenden Winkel bezw. gleich haben.

32. Sind in einem Dreikant zwei Winkel = 90°, so sind auch die gegenüberliegenden Seiten = 90°; und umgekehrt.

33. a. In einem gleichschenkligen Dreikant fallen die zur Grundfläche gehörige Höhenebene, Mittellotebene, seitenhalbierende Transversalebene und Medianebene zusammen.

b. In einem allgem. Dreikant wird jede Seite von der zugehörigen Höhenebene in zwei ungleiche Segmente geteilt, von denen das größere der größeren —, das kleinere der kleineren der zwei andern Seiten anliegt. (I. 13. b mit Zus. 1.)

34. Haben zwei Dreikante zwei Seiten bezw. gleich, und ist der von ihnen eingeschlossene Winkel im einen größer als im andern, so ist auch die dritte Seite im einen größer als im andern; und umgekehrt. (Bew. wie in der ebenen Geometrie.)

† 35. Die Mittellotebenen der Seiten eines Dreikants schneiden sich nach *einer* Geraden, welche mit den drei Kanten gleiche

Winkel macht. (I. Anh. 19. b. — Achse des umbeschriebenen Kegelmantels; Mittelpunkt des einem sphär. Dreieck umbeschr. Kreises.)

† 36. Die drei inneren Medianebenen eines Dreikants schneiden sich nach einer Geraden, welche gegen die drei Seitenflächen gleich geneigt ist. Dasselbe gilt von je einer inneren und zwei äußeren Medianebenen. (I. Anh. 20. — Achsen des einbeschriebenen und der drei anbeschriebenen Kegelmäntel; Mittelpunkte des einem sphär. Dreieck einbeschriebenen Kreises und der drei anbeschriebenen Kreise, die letzteren sind den drei Nebendreiecken einbeschrieben.)

37. Die seitenhalbierenden Transversalebenen eines Dreikants schneiden sich nach einer Geraden. (Mittels eines Schnittdreiecks, dessen Ecken von der Spitze gleich weit entfernt sind.)

38. Die Höhenebenen eines Dreikants schneiden sich nach einer Geraden. (Man lege senkrecht zu einer Kante eine Ebene und betrachte das Schnittdreieck.)

39. Die Großkreisbögen, welche die Ecken eines sphär. Dreiecks mit den Ecken seines Polardreiecks verbinden, schneiden sich in einem Punkt. (Vor. Satz.)

40. Die Mittellote der Seiten eines sphär. Dreiecks sind identisch mit den Medianen seines Polardreiecks. Der umbeschriebene Kreis des einen Dreiecks und der einbeschriebene Kreis des andern haben daher denselben sphär. Mittelpunkt, und ihre sphär. Halbmesser ergänzen sich zu 90°.

† 41. a. Ist das in II. Einl. 22. a zur Erzeugung eines Vielkants benützte ebene Vieleck regulär, und liegt die Spitze auf der Geraden, die auf der Ebene des Vielecks in seinem Mittelpunkt senkrecht steht, so ist das erzeugte Vielkant regulär.

b. In einem regulären Vielkant schneiden sich sämtliche innere Medianebenen und die Mittellotebenen sämtlicher Seiten nach einer und derselben Geraden.

c. Jedem regulären Vielkant läßt sich ein Kegelmantel umbeschreiben und ein Kegelmantel einbeschreiben. Sie haben die in b genannte Gerade zur gemeinsamen Achse.

(Entsprechende Sätze fürs reguläre sphär. Vieleck.)

Anm. Man formuliere in den folgenden Nummern 42 bis 51 die für Kugelkreise ausgesprochenen Sätze jedesmal auch für Kegelflächen.

42. a. Liegt auf einer Kugeloberfläche ein Kugelkreis und ein Punkt A, so sind die sphär. Entfernungen der einzelnen Kreispunkte von A um so größer, je größere Winkel die nach ihnen gezogenen sphär. Halbmesser mit dem nach A gerichteten Halbmesser machen. Für die kleinste Entfernung ist dieser Winkel = 0, für die größte = 180°. Je zwei Entfernungen, die zu beiden Seiten des nach A gerichteten Halbmessers symmetrisch zu ihm liegen, sind gleich. (II. Anh. 34 und II. 6.)

† b. Unter den sphär. Entfernungen eines Punktes der Kugeloberfläche von den einzelnen Punkten eines Großkreises sind die zwei auf dem Großkreise senkrechten die größte und die kleinste. Die letztere wird als die sphär. Entfernung des Punktes von dem Großkreise bezeichnet.

† 43. a. Ein Großkreis, der auf einem sphär. Halbmesser eines Kleinkreises in dessen Endpunkt senkrecht steht, hat mit dem Kleinkreis nur diesen einen Punkt gemein. Er heißt die sphär. Tangente des Kleinkreises in dem Punkt. Seine Ebene ist Berührungsebene an den dem Kleinkreis zugehörigen Kegel. Die Schnittlinie seiner Ebene mit der Ebene des Kleinkreises ist Tangente sowohl an den Kleinkreis als an den Großkreis.

b. Die zwei von einem Punkt einer Kugeloberfläche an einen Kleinkreis gelegten sphär. Tangenten sind gleich. (II. Anh. 31. a.)

44. a. Läßt sich in ein sphär. Viereck ein Kreis einbeschreiben, so ist die Summe zweier Gegenseiten des Vierecks gleich der Summe der zwei andern Gegenseiten; und umgekehrt. (Vor. Satz.)

b. Läßt sich um ein sphär. Viereck ein Kreis beschreiben, so ist die Summe zweier Gegenwinkel des Vierecks gleich der Summe der zwei andern Gegenwinkel; und umgekehrt.

† 45. Der geom. Ort eines Punktes auf einer Kugeloberfläche, der von einem Großkreise eine geg. sphär. Entfernung hat, besteht aus zwei gleichen Kleinkreisen, die zu beiden Seiten des Großkreises liegen und mit ihm die Pole gemein haben.

46. Der geom. Ort eines Punktes auf einer Kugeloberfläche von der Eigenschaft, daß die von ihm an einen festen Kleinkreis gelegten sphär. Tangenten eine geg. Länge haben oder einen geg. Winkel einschließen, ist ein mit dem Kleinkreis konzentrischer Kugelkreis.

47. Der geom. Ort eines Punktes auf einer Kugeloberfläche

von der Eigenschaft, daß die von ihm an zwei feste Kleinkreise gelegten sphär. Tangenten gleiche Länge haben, ist ein Großkreis, dessen Ebene durch die Schnittlinie der Ebenen der Kleinkreise geht. (Die von einem Punkt jener Schnittlinie an die zwei Kreise gezogenen geradlinigen Tangenten sind gleich.)

48. a. Alle sphär. Dreiecke, die einen Winkel und den der Gegenseite anbeschriebenen Kreis gemeinsam haben, haben den gleichen Umfang. (II. Anh. 43. b.)

b. Alle sphär. Dreiecke, die einen Winkel und den einbeschriebenen Kreis gemeinsam haben, haben den gleichen Überschuß der Summe der zwei den Winkel einschließenden Seiten über die dritte Seite.

49. Alle sphär. Dreiecke, welche die Grundlinie und den umbeschriebenen Kreis gemeinsam haben, haben den gleichen Überschuß der Summe der Winkel an der Grundlinie über den Winkel an der Spitze. (Man ziehe die sphär. Halbmesser nach den Ecken.)

50. Der geom. Ort der Spitzen C aller flächengleichen sphär. Dreiecke auf der nämlichen Grundlinie AB ist ein durch die Gegenpunkte A', B' gehender Kugelkreis. (Satz von Lexell.) (Bewegt sich C auf dem genannten Kugelkreis, so ist in $\triangle$ A'B'C nach dem vor. Satz W. A' + B' — C konstant.)

† 51. Der geom. Ort eines Großkreises, der einen festen Großkreis unter einem geg. Winkel schneidet, besteht aus zwei gleichen, mit dem festen Großkreis konzentrischen Kleinkreisen, deren sphär. Halbmesser den Äquatorbogen des geg. Winkels komplementieren.

† 52. a. Ist P derjenige Pol des Grundkreises einer Halbkugel, der nicht auf der Halbkugel liegt, und zieht man von P nach einem beliebigen Punkt A eine Gerade, welche die Ebene des Grundkreises in A' schneidet, so heißt A' die stereographische Projektion von A. Die Ebene des Grundkreises heißt die Projektionsebene, P das Projektionszentrum, PA der projizierende Strahl. — Die stereogr. Projektion eines Kugelkreises ist ein Kreis (Satz von Hipparch), dessen Mittelpunkt die stereogr. Projektion der Spitze des Berührungskegels ist, der die Kugel längs des Kugelkreises berührt (Satz von Chasles). (Der Kugelkreis und seine Projektion liegen auf einer Kugel-

fläche; ist nämlich O der Kugelmittelpunkt, Q der Gegenpunkt von P, A′ die Projektion eines Punktes A des Kugelkreises, so ist: PA . PA′ = PQ . PO = const. Bew. des zweiten Teils an der Schnittfigur der durch O, P und die Kegelspitze gelegten Ebene.)

† b. Die stereographischen Projektionen zweier sich schneidenden Kugelkreise schneiden sich unter dem gleichen Winkel wie die Kugelkreise selbst. (Schneiden die an die zwei Kugelkreise in ihrem Schnittpunkt A gezogenen Tangenten die Projektionsebene in den Punkten T und U, so läßt sich mittels II. Einl. 9. b und Bew. des Satzes a leicht zeigen, daß $\triangle$ TUA′ $\cong$ TUA.)

II. Aufgaben.

1—20: Aufgaben zur Anwendung von geometrischen Örtern.

1. Auf einer geg. Kugel-, Kegel- oder Cylinderfläche einen Punkt zu finden, der a) von drei geg. Punkten — b) von drei Ebenen gleiche Entfernungen habe, c) von zwei Ebenen geg. Entfernungen habe. (II. Aufg. 1. b und 3. b.)

2. a. Den Mittelpunkt einer Kugel zu finden, wenn ihre Oberfläche oder ein Teil derselben geg. ist. (I. Anh. 18. b.)

b. Durch vier nicht in einer Ebene liegende Punkte —

c. durch eine Kreislinie und einen außerhalb ihrer Ebene liegenden Punkt eine Kugelfläche zu legen.

3. Durch einen im Innern einer Kugel gelegenen Punkt eine Sehne so zu ziehen, daß sie einer geg. Ebene parallel sei und in dem Punkt in einem geg. Verhältnis geteilt werde.

4. Durch eine geg. Gerade oder parallel einer geg. Ebene eine Ebene zu legen, die zwei konzentrische Kugelflächen so schneide, daß der Flächeninhalt des inneren Schnittkreises halb so groß sei als derjenige des äußeren. (II. Anh. 3 u. 7. — Determination?)

5. a. Den Mittelpunkt einer Kugelfläche von geg. Halbmesser zu finden, die irgend drei von folgenden Bedingungen erfülle: α) sie gehe durch einen geg. Punkt, β) sie berühre eine geg. Ebene oder γ) Kugelfläche, δ) sie schneide eine geg. Ebene oder ε) Kugelfläche nach einem Kreis von geg. Halbmesser. — Unter den drei Bedingungen, welche die Kugel erfüllen soll, können auch zwei oder drei der nämlichen Art sein.