Lehrbuch der Stereometrie

Hauck, Guido

Tübingen, 1893

II. Aufgaben.

fläche; ist nämlich O der Kugelmittelpunkt, Q der Gegenpunkt von P, A' die Projektion eines Punktes A des Kugelkreises, so ist: PA . PA' = PQ . PO = const. Bew. des zweiten Teils an der Schnittfigur der durch O, P und die Kegelspitze gelegten Ebene.)

† b. Die stereographischen Projektionen zweier sich schneidenden Kugelkreise schneiden sich unter dem gleichen Winkel wie die Kugelkreise selbst. (Schneiden die an die zwei Kugelkreise in ihrem Schnittpunkt A gezogenen Tangenten die Projektionsebene in den Punkten T und U, so läßt sich mittels II. Einl. 9. b und Bew. des Satzes a leicht zeigen, daß $\triangle$ TUA' $\cong$ TUA.)

II. Aufgaben.

1—20: Aufgaben zur Anwendung von geometrischen Örtern.

1. Auf einer geg. Kugel-, Kegel- oder Cylinderfläche einen Punkt zu finden, der a) von drei geg. Punkten — b) von drei Ebenen gleiche Entfernungen habe, c) von zwei Ebenen geg. Entfernungen habe. (II. Aufg. 1. b und 3. b.)

2. a. Den Mittelpunkt einer Kugel zu finden, wenn ihre Oberfläche oder ein Teil derselben geg. ist. (I. Anh. 18. b.)

b. Durch vier nicht in einer Ebene liegende Punkte —

c. durch eine Kreislinie und einen außerhalb ihrer Ebene liegenden Punkt eine Kugelfläche zu legen.

3. Durch einen im Innern einer Kugel gelegenen Punkt eine Sehne so zu ziehen, daß sie einer geg. Ebene parallel sei und in dem Punkt in einem geg. Verhältnis geteilt werde.

4. Durch eine geg. Gerade oder parallel einer geg. Ebene eine Ebene zu legen, die zwei konzentrische Kugelflächen so schneide, daß der Flächeninhalt des inneren Schnittkreises halb so groß sei als derjenige des äußeren. (II. Anh. 3 u. 7. — Determination?)

5. a. Den Mittelpunkt einer Kugelfläche von geg. Halbmesser zu finden, die irgend drei von folgenden Bedingungen erfülle: α) sie gehe durch einen geg. Punkt, β) sie berühre eine geg. Ebene oder γ) Kugelfläche, δ) sie schneide eine geg. Ebene oder ε) Kugelfläche nach einem Kreis von geg. Halbmesser. — Unter den drei Bedingungen, welche die Kugel erfüllen soll, können auch zwei oder drei der nämlichen Art sein.

b. Den Mittelpunkt einer Kugelfläche von geg. Halbmesser zu finden, die irgend zwei von den Bedingungen β und δ der Aufg. a erfülle und außerdem eine geg. Gerade berühre oder aus ihr eine Sehne von geg. Länge ausschneide. (II. Aufg. 3. b.)

6. a. Auf einer Geraden einen Punkt zu finden, der von zwei geg. Punkten ein geg. Verhältnis der Entfernungen habe. (II. Anh. 11. a.)

b. Auf einer Kreislinie einen Punkt zu finden, dessen Verbindungsstrecken mit zwei geg. Punkten einen rechten Winkel einschließen. (II. Anh. 10, II. Aufg. 2. b.)

7. a. Einen Punkt zu finden, von dem aus gesehen vier geg. Kugeln gleiche scheinbare Größe haben. (II. Anh. 21.)

b. Auf einer Ebene oder einer Kugeloberfläche einen Punkt zu finden, von dem aus gesehen drei geg. Kugeln gleiche scheinbare Größe haben.

8. a. Einen Punkt zu finden von der Eigenschaft, daß von ihm aus gesehen drei geg. Kugeln g e g. scheinbare Größen haben (d. h. daß die von ihm an die Kugeln gelegten Berührungskegel geg. Öffnungen haben). (II. Anh. 13.)

b. Auf einer Ebene oder einer Kugeloberfläche einen Punkt zu finden, von dem aus gesehen zwei geg. Kugeln geg. scheinbare Größen haben.

c. Eine Kugel zu konstr., die von vier geg. Punkten aus gesehen geg. scheinbare Größen habe. (II. Anh. 11. a.)

9. Einem Dreikant (oder regul. Vielkant) einen Kegelmantel a) umzubeschreiben, b) einzubeschreiben. (II. Anh. 35, 36 und 41. c.)

10. Auf einer Geraden einen Punkt zu finden, dessen Entfernungen von einer andern Geraden und von einem auf dieser liegenden Punkt ein geg. Verhältnis haben. (II. Aufg. 3. b.)

11. Andere Lösung von I. Aufg. 9 und I. Anh. Aufg. 27. a mittels II. Einl. 4. d.

Es ist ferner sehr lehrreich, die Aufgaben: I. Anh. Aufg. 21. a u. b, 23. a u. b, 24, 26, 28, 30. a u. b nochmals zu behandeln mit Anwendung von geom. Örtern; man kommt dabei auf die alten Lösungen. (Bei Aufg. 21. a kann entweder II. Einl. 8. d oder II. Anh. 10 verwendet werden.)

Anm. Bei den folgenden Aufgaben 12—15 benütze man II. Aufg. 6 (vgl. Zus.).

12. a. Eine gerade Linie zu ziehen, die zwei windschiefe Gerade unter geg. Winkeln schneide. (I. Anh. Anm. zu Aufg. 3.)

b. Behandlung von I. Anh. Aufg. 31 mittels II. Aufg. 6.

13. Eine Gerade zu ziehen, die gegen zwei Ebenen geg. Neigungen habe und a) durch einen geg. Punkt gehe, b) zwei windschiefe Gerade (oder eine Gerade und eine Kreislinie) schneide.

c. Zwischen zwei Ebenen eine Strecke von geg. Länge so zu legen, daß sie mit den Ebenen geg. Winkel mache und eine geg. Gerade schneide.

14. Zwischen eine Gerade und eine Ebene eine Strecke von geg. Länge so zu legen, daß sie mit jeder einen geg. Winkel mache.

15. Eine Kegelfläche von geg. erzeugendem Winkel zu konstr., die a) durch zwei geg. sich schneidende Gerade gehe, b) zwei Ebenen berühre, so daß die Spitze in einem geg. Punkt ihrer Schnittlinie liege, c) zwei Kegelflächen mit gemeinschaftlicher Spitze (nach zwei Mantellinien) berühre, d) durch eine Gerade gehe und eine Ebene berühre, u. s. w. — (Die Aufg. ist analog mit II. Anh. Aufg. 5. a. Was würde den dortigen Bedingungen δ und ε entsprechen?)

16. a. Durch einen geg. Punkt oder parallel einer geg. Richtung eine Gerade zu ziehen, welche α) die Mäntel zweier geg. Kegel oder zweier Cylinder oder eines Kegels und eines Cylinders — β) eine Kugel und einen Kegel- od. Cylindermantel — γ) zwei Kugeln berühre. (II. Einl. 2. d, 3. d und 9. a.)

b. Durch einen geg. Punkt oder parallel einer geg. Richtung eine Gerade zu ziehen, die zwei von folgenden Bedingungen erfülle: α) sie habe von einem geg. Punkt eine geg. Entfernung, β) sie schneide eine Kugel nach einer Sehne von geg. Länge, γ) sie habe von einer Geraden eine geg. kürzeste Entfernung. — Die Bedingungen, welche die Gerade erfüllen soll, können auch beide von der nämlichen Art sein.

17. a. Geg. zwei gleiche Strecken in bestimmter Lage im Raum. Eine Gerade zu ermitteln, um welche als Achse gedreht die eine Strecke in die Lage der andern übergeht.

b. Geg. zwei kongruente Dreiecke (Polygone) in bestimmter Lage im Raum. Einen Punkt zu finden, um welchen bewegt das eine Dreieck (Polygon) in die Lage des andern übergeführt werden kann. (Denkt man sich die zwei Polygone als Seitenflächen kongruenter Polyeder, so ist die Aufg. auch für diese gelöst.)

18. Eine Kugelfläche zu bestimmen, die vier geg. Kugelflächen rechtwinklig schneide. (II. Anh. 14.)

19. Durch einen geg. Punkt eine Gerade so zu ziehen, daß ihre zwischen eine geg. Kreislinie und eine geg. Kugelfläche fallende Strecke in dem Punkt nach einem geg. Verhältnis geteilt werde. (II. Anh. 18.)

20. Zwischen eine Kreislinie und eine Kugelfläche eine Strecke von geg. Länge so zu legen, daß sie einer geg. Geraden parallel sei.

21—40: Berührungs-Aufgaben.

21. Durch eine geg. Gerade eine Ebene zu legen, die eine geg. Kreislinie berühre.

22. Eine Kugel zu konstr., die eine geg. Kugel und eine geg. Ebene, und zwar die letztere in einem geg. Punkt, berühre.

23. Eine Kugel zu konstr., deren Oberfläche durch eine geg. Kreislinie gehe und eine geg. Gerade berühre. (Man ermittle den Abstand des Berührungspunkts der Geraden von ihrem Schnittpunkt mit der Kreisebene.)

24. Eine Kugel zu konstr., die eine geg. Ebene und eine geg. Kugel, und zwar die letztere in einem geg. Punkt, berühre.

25. Einem Dreikant eine Kugel von geg. Halbmesser einzubeschreiben, so daß sie a) die Seitenflächen, b) die Kanten des Dreikants berühre. (II. Anh. Aufg. 9. b u. a.)

26. a. In einen Kugelausschnitt —

b. in den von einem sphär. Dreieck und seinem zugehörigen Dreikant begrenzten Raum eine Kugel einzubeschreiben.

27. Einer Kegelfläche eine Kugel einzubeschreiben, die außerdem eine geg. Kugel berühre.

28. a. Einer Kegelfläche eine Kugel einzubeschreiben, die außerdem eine die Kegelfläche schneidende Gerade berühre. (Der Kreis, welcher dem von der Geraden und zwei Mantellinien gebildeten Dreieck einbeschrieben wird, liegt auf der gesuchten Kugel. Oder auch mittels Ähnlichkeitspunkt.)

b. Einem Dreikant α) eine flächenberührende — β) eine kantenberührende Kugel einzubeschreiben, die außerdem eine das Dreikant schneidende Gerade berühre.

29. Eine Kugel zu konstr., deren Mittelpunkt auf einer geg. Geraden liege, und deren Oberfläche eine geg. Ebene berühre und durch einen geg. Punkt gehe. (Man nehme den Schnittpunkt der Geraden mit der Ebene als Ähnlichkeitspunkt der gesuchten Kugel und einer Hilfskugel, die nur die zwei ersten Bedingungen erfüllt.)

30. Eine Kugel zu konstr., deren Oberfläche durch drei geg. Punkte gehe und a) eine geg. Ebene — b) eine geg. Kugel berühre. (Analog den entsprechenden Aufg. der ebenen Geom.)

31. Eine Kugel zu konstr., deren Oberfläche durch zwei geg. Punkte gehe und a) zwei geg. Ebenen — b) zwei Kugeln — c) eine Ebene und eine Kugel berühre. (Analog den entspr. Aufg. der ebenen Geom. II. Anh. 24 und 25. a.)

---

† 32. Durch einen geg. Punkt oder parallel einer geg. Geraden eine gemeinschaftliche Berührungsebene an zwei Kugeln zu legen. (II. Anh. 17. b, II. Aufg. 4. b oder 5.)

† 33. An drei Kugeln eine gemeinschaftliche Berührungsebene zu legen. (II. Anh. 19. — 8 Lösungen.)

† 34. An zwei Kegelflächen mit gemeinsamer Spitze eine gemeinschaftliche Berührungsebene zu legen. (II. Anh. 20 giebt die einfachste Lösung. Eine andere Lösung ist angedeutet in II. Anh. Aufg. 51.)

35. An eine Kegelfläche (oder Cylinderfläche) und eine Kugel eine gemeinschaftliche Berührungsebene zu legen. (II. Anh. 20.)

36. In einer Ebene durch einen geg. Punkt oder parallel einer geg. Richtung eine Gerade so zu ziehen, daß die Berührungsebenen, die durch sie an zwei auf derselben Seite der Ebene befindliche Kugeln gelegt werden, gegen die Ebene gleich geneigt seien. (Man bestimme zu einer der zwei Kugeln die symmetrische in Beziehung auf die geg. Ebene und wende II. Anh. Aufg. 32 an.)

37. Eine Ebene zu bestimmen, die irgend drei von folgenden Bedingungen erfülle: a) sie gehe durch einen geg. Punkt, b) sie sei einer geg. Geraden parallel, c) sie habe von einem Punkt eine geg. Entfernung, d) sie schneide eine Kugel nach einem Kreis von geg. Halbmesser, e) sie habe von zwei Punkten ein geg. Ver-

hältnis der Entfernungen, f) sie habe gegen eine Ebene eine geg. Neigung, g) sie habe gegen eine Gerade eine geg. Neigung. — Unter den drei Bedingungen, welche die Ebene erfüllen soll, können auch zwei oder drei der nämlichen Art sein. Von den Bedingungen b, f und g dürfen jedoch nicht drei zugleich verwertet werden. (Kommt f oder g zweimal vor, so kommt II. Anh. Aufg. 34 zur Verwendung. Kommt c oder d zusammen mit f oder g vor, so benütze man einen einer Kugel umbeschriebenen Berührungskegel. Bei g ist die Gerade unter Umständen an geeigneten Ort parallel zu verschieben.)

38. Eine Ebene zu bestimmen, die eine der in der vor. Aufg. genannten Bedingungen und außerdem noch eine der folgenden erfülle: α) sie sei einer Geraden parallel und habe von ihr eine geg. Entfernung, β) sie schneide einen Cylinder nach einem Rechteck von geg. Inhalt, γ) sie schneide einen Kegel nach einem Dreieck von geg. Inhalt. (Kommt α oder β zusammen mit 37. f oder g vor, so kommt II. Aufg. 5. b zur Anwendung.)

39. Eine Ebene zu bestimmen, die eine von den Bedingungen a, c, d, e der Aufg. 37 erfülle und außerdem gegen drei geg. Gerade oder Ebenen gleich geneigt sei.

40. Eine Ebene zu bestimmen, die von vier nicht in einer Ebene liegenden Punkten a) geg. Verhältnisse der Entfernungen, b) gleiche Entfernungen habe. (II. Anh. 8. — Bei a erhält man 8 Lösungen. Bei b fällt eine dieser 8 Ebenen ins Unendliche.)

41–61: Sphärik und Vielkant.

41. Eine Kugel, auf welcher Meridiane und Parallelkreise in Abständen von je 15° mit N und S als Nord- und Südpol aufgezeichnet sind, wird durch eine beliebige Großkreis-Ebene in zwei Halbkugeln geteilt. Von einer derselben soll ein stereographisches Kartennetz gezeichnet werden, indem der nicht auf ihr liegende Pol P des Großkreises als Projektionszentrum genommen wird. (II. Anh. 52. — Eine in der Ebene PNS gezeichnete Hilfsfigur liefert die Projektionen N' und S' von N und S, sowie die Durchmesser der einzelnen Parallelkreis-Projektionen nach Größe und Lage. Die Meridian-Projektionen gehen in der Hauptfigur alle durch N' und S', ihre Mittelpunkte liegen auf dem Mittellot von N'S' und ergeben sich gemäß II. Anh. 52. b dadurch, daß man

an N'S' in N' die Komplemente der Winkel anlegt, die die einzelnen Meridiane mit dem durch P gehenden Meridian machen.)

42. Direkte Lösung von II. Aufg. 7. (Zwei Ebenen, die den W. α einschließen, sind durch eine dritte Ebene so zu schneiden, daß diese mit ihnen die W. β und γ macht. Mittels II. Einl. 4. e und II. Anh. Aufg. 34.)

43. Ein Dreikant zu konstr., von dem geg. sind:

a) zwei Seiten und die zur dritten gehörige Höhe (d. i. der Winkel, nach dem die betr. Höhenebene das Dreikant schneidet),

b) zwei Seiten und die zu einer derselben gehörige Höhe,

c) eine Seite und die zu den zwei andern gehörigen Höhen,

d) eine Seite, die zu ihr gehörige Höhe und eine weitere Höhe.

44. Auf der Oberfläche einer Kugel von geg. Halbmesser sind drei Punkte geg., deren Entfernungen mit dem Zirkel abgestochen werden mögen. Es sollen hieraus durch Konstruktion in einer Ebene die Seiten und Winkel des Dreikants gefunden werden, das von den in den drei Punkten an die Kugel gelegten Berührungsebenen gebildet wird.

45. Von einem durch seine drei Seiten geg. Dreikant folgende Stücke durch Konstruktion in einer Ebene zu finden: a) die Höhen, b) die Medianen (Winkel, nach denen die Medianebenen das Dreikant schneiden), c) die seitenhalbierenden Transversalen (Winkel, nach denen die Transversalebenen schneiden), d) der erzeugende Winkel des einbeschriebenen Kegels, e) der erzeugende Winkel des umbeschriebenen Kegels. (Man lehne die Konstr. an Fig. 40. b, S. 91 an. Bei a, b und c fasse man den Körper ins Auge, der von dem Dreikant und der Ebene eines der zwei rechtw. Dreiecke AFB oder AFC eingeschlossen wird, und ermittle dessen Schnittdreieck mit der betreffenden Ebene. Bei d und e gehe man auf den Schnittpunkt der Kegelachse mit der Ebene eines jener rechtw. Dreiecke aus.)

Anm. In den folgenden Aufgaben 46—61 ist die geg. Kugel massiv vorauszusetzen, und sind die Konstruktionen auf ihrer Oberfläche mit bloßer Anwendung des Zirkels auszuführen (vgl. II. Aufg. 10. Anm.).

† 46. Durch einen geg. Punkt einen Großkreis senkrecht zu einem geg. Großkreis zu legen. (II. Einl. 14. b.)

† 47. Von einem außerhalb eines Kleinkreises geg. Punkt

eine sphär. Tangente an den Kleinkreis zu legen. (Mittels II. Anh. Lehrs. 46, oder durch Konstr. eines Pols der sphär. Tangente mittels zweier Kreisbögen, die aus dem geg. Punkt und dem Mittelpunkt des Kleinkreises beschrieben werden.)

† 48. a. An einen Großkreis in einem geg. Punkt einen sphär. Winkel anzulegen, der gleich viel Grade habe wie ein geg. ebener Winkel. (Man bestimme durch ebene Konstr. die Länge des Äquatorbogens.)

† b. Durch einen geg. Punkt einen Großkreis zu legen, der einen geg. Großkreis unter geg. Winkel schneide. (Man wende Aufg. a an und lege durch den Punkt einen Parallelkreis zu dem geg. Großkreis; oder auch mittels II. Anh. 51 und II. Anh. Aufg. 47.)

49. Zu beweisen, daß die Aufgaben: auf der Oberfläche einer massiven Kugel a) eine sphär. Entfernung zu halbieren, b) einen sphär. Winkel zu halbieren, c) einem sphär. Dreieck einen Kreis um- und d) einzubeschreiben, e) ein sphär. Dreieck zu konstr. aus drei Seiten, f) — aus zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel, g) — aus zwei Seiten und einem Gegenwinkel, — die nämlichen Auflösungen haben, wie die entsprechenden Aufgaben der ebenen Geometrie.

50. Einen Kugelkreis von geg. sphär. Halbmesser zu zeichnen, der zwei geg. Kugelkreise berühre. (Wie in der ebenen Geom.)

† 51. An zwei Kugelkreise die vier gemeinschaftlichen sphär. Tangenten zu legen. (Spezialfall der vor. Aufg. — Hiernach andere Lösung von II. Anh. Aufg. 34.)

52. Ein sphär. Dreieck zu konstr., wenn geg. sind: a) die drei Winkel, b) eine Seite und die zwei anliegenden Winkel, c) zwei Winkel und eine Gegenseite. (Durch Zurückführung auf II. Anh. Aufg. 49. e—g mittels der Polardreiecke, oder direkt. Die direkte Lösung von a mittels II. Anh. 51 und vor. Aufg.)

53. Geg. zwei kongruente (oder symmetrische) sphär. Vielecke in bestimmter Lage auf der Kugeloberfläche. Einen Punkt auf ihr zu finden von der Eigenschaft, daß das eine Vieleck, wenn es in fester Verbindung mit dem Punkte gedacht, durch Drehung um ihn auf der Kugeloberfläche verschoben wird, mit dem andern Vieleck zur Deckung (bezw. in antipodische Lage) gelangt. (Das gedrehte Vieleck befindet sich in der verlangten Lage, sobald eine seiner Seiten sich darin befindet.)

54. Ein sphär. Zweieck durch einen Großkreisbogen von geg. Länge zu halbieren.

55. Ein sphär. Vieleck in ein Zweieck von gleichem Flächeninhalt zu verwandeln. (Der Zweieckswinkel ist nach II. 16 gleich dem halben sphär. Exzeß des Vielecks. Konstr. des sphär. Exzesses durch Addieren der Äquatorbögen.)

56. Von einem sphär. Zweieck a) ein gleichseitiges sphär. Dreieck abzuschneiden, b) ein gleichschenkliges sphär. Dreieck abzuschneiden, das der nte Teil des Zweiecks sei. (II. Anh. 51. Bei b wird der W. an der Grundl. bestimmt nach II. 14. Zus.)

57. Ein sphär. Dreieck zu konstr., von dem eine Seite, die zugehörige Höhe und der Inhalt geg. sind. (II. Anh. 45 u. 50.)

58. Ein sphär. Dreieck zu konstr., von dem zwei Winkel und der Umfang geg. sind. (II. Anh. 48. a und 51.)

59. Ein sphär. Dreieck zu konstr., von dem geg. sind:

a) eine Seite, ein anliegender Winkel und die Summe der zwei andern Seiten,

b) eine Seite, ein anliegender Winkel und der Inhalt. (b mittels a durch das Polardreieck.)

60. Ein sphär. Dreieck zu konstr., von dem geg. sind:

a) eine Seite, der gegenüberliegende Winkel und die Summe der zwei andern Seiten (II. Anh. 48. a und b, II. Anh. Aufg. 51),

b) eine Seite, der gegenüberliegende Winkel und der Inhalt (mittels a durch das Polardreieck).

61. Eine geg. Kugelfläche in ein Netz von lauter kongruenten regulären sphär. Dreiecken zu teilen, und zwar so, daß a) immer drei, b) vier, c) fünf Dreiecke mit gemeinschaftl. Ecke an einander stoßen. (Man teile die Kugeloberfläche von einem beliebigen Punkt aus in 3, 4, 5 gleiche sphär. Zweiecke und wende auf eines von ihnen II. Anh. Aufg. 56. a an.) Durch Verbinden der sphär. Mittelpunkte der Dreiecke in den Netzen b und c erhält man zwei weitere Netze, die aus lauter kongr. regul. Vierecken und Fünfecken bestehen.

Anm. Man formuliere die Aufgaben 49—53 und 56—61 und deren Lösungen für Dreikante und Kegelflächen.