Lehrbuch der Stereometrie

Hauck, Guido

Tübingen, 1893

1 - 20: Aufg. zur Anwendung v. geom. Örtern

fläche; ist nämlich O der Kugelmittelpunkt, Q der Gegenpunkt von P, A' die Projektion eines Punktes A des Kugelkreises, so ist: PA . PA' = PQ . PO = const. Bew. des zweiten Teils an der Schnittfigur der durch O, P und die Kegelspitze gelegten Ebene.)

† b. Die stereographischen Projektionen zweier sich schneidenden Kugelkreise schneiden sich unter dem gleichen Winkel wie die Kugelkreise selbst. (Schneiden die an die zwei Kugelkreise in ihrem Schnittpunkt A gezogenen Tangenten die Projektionsebene in den Punkten T und U, so läßt sich mittels II. Einl. 9. b und Bew. des Satzes a leicht zeigen, daß $\triangle$ TUA' $\cong$ TUA.)

II. Aufgaben.

1—20: Aufgaben zur Anwendung von geometrischen Örtern.

1. Auf einer geg. Kugel-, Kegel- oder Cylinderfläche einen Punkt zu finden, der a) von drei geg. Punkten — b) von drei Ebenen gleiche Entfernungen habe, c) von zwei Ebenen geg. Entfernungen habe. (II. Aufg. 1. b und 3. b.)

2. a. Den Mittelpunkt einer Kugel zu finden, wenn ihre Oberfläche oder ein Teil derselben geg. ist. (I. Anh. 18. b.)

b. Durch vier nicht in einer Ebene liegende Punkte —

c. durch eine Kreislinie und einen außerhalb ihrer Ebene liegenden Punkt eine Kugelfläche zu legen.

3. Durch einen im Innern einer Kugel gelegenen Punkt eine Sehne so zu ziehen, daß sie einer geg. Ebene parallel sei und in dem Punkt in einem geg. Verhältnis geteilt werde.

4. Durch eine geg. Gerade oder parallel einer geg. Ebene eine Ebene zu legen, die zwei konzentrische Kugelflächen so schneide, daß der Flächeninhalt des inneren Schnittkreises halb so groß sei als derjenige des äußeren. (II. Anh. 3 u. 7. — Determination?)

5. a. Den Mittelpunkt einer Kugelfläche von geg. Halbmesser zu finden, die irgend drei von folgenden Bedingungen erfülle: α) sie gehe durch einen geg. Punkt, β) sie berühre eine geg. Ebene oder γ) Kugelfläche, δ) sie schneide eine geg. Ebene oder ε) Kugelfläche nach einem Kreis von geg. Halbmesser. — Unter den drei Bedingungen, welche die Kugel erfüllen soll, können auch zwei oder drei der nämlichen Art sein.

b. Den Mittelpunkt einer Kugelfläche von geg. Halbmesser zu finden, die irgend zwei von den Bedingungen β und δ der Aufg. a erfülle und außerdem eine geg. Gerade berühre oder aus ihr eine Sehne von geg. Länge ausschneide. (II. Aufg. 3. b.)

6. a. Auf einer Geraden einen Punkt zu finden, der von zwei geg. Punkten ein geg. Verhältnis der Entfernungen habe. (II. Anh. 11. a.)

b. Auf einer Kreislinie einen Punkt zu finden, dessen Verbindungsstrecken mit zwei geg. Punkten einen rechten Winkel einschließen. (II. Anh. 10, II. Aufg. 2. b.)

7. a. Einen Punkt zu finden, von dem aus gesehen vier geg. Kugeln gleiche scheinbare Größe haben. (II. Anh. 21.)

b. Auf einer Ebene oder einer Kugeloberfläche einen Punkt zu finden, von dem aus gesehen drei geg. Kugeln gleiche scheinbare Größe haben.

8. a. Einen Punkt zu finden von der Eigenschaft, daß von ihm aus gesehen drei geg. Kugeln geg. scheinbare Größen haben (d. h. daß die von ihm an die Kugeln gelegten Berührungskegel geg. Öffnungen haben). (II. Anh. 13.)

b. Auf einer Ebene oder einer Kugeloberfläche einen Punkt zu finden, von dem aus gesehen zwei geg. Kugeln geg. scheinbare Größen haben.

c. Eine Kugel zu konstr., die von vier geg. Punkten aus gesehen geg. scheinbare Größen habe. (II. Anh. 11. a.)

9. Einem Dreikant (oder regul. Vielkant) einen Kegelmantel a) umzubeschreiben, b) einzubeschreiben. (II. Anh. 35, 36 und 41. c.)

10. Auf einer Geraden einen Punkt zu finden, dessen Entfernungen von einer andern Geraden und von einem auf dieser liegenden Punkt ein geg. Verhältnis haben. (II. Aufg. 3. b.)

11. Andere Lösung von I. Aufg. 9 und I. Anh. Aufg. 27. a mittels II. Einl. 4. d.

Es ist ferner sehr lehrreich, die Aufgaben: I. Anh. Aufg. 21. a u. b, 23. a u. b, 24, 26, 28, 30. a u. b nochmals zu behandeln mit Anwendung von geom. Örtern; man kommt dabei auf die alten Lösungen. (Bei Aufg. 21. a kann entweder II. Einl. 8. d oder II. Anh. 10 verwendet werden.)

Anm. Bei den folgenden Aufgaben 12—15 benütze man II. Aufg. 6 (vgl. Zus.).

12. a. Eine gerade Linie zu ziehen, die zwei windschiefe Gerade unter geg. Winkeln schneide. (I. Anh. Anm. zu Aufg. 3.)

b. Behandlung von I. Anh. Aufg. 31 mittels II. Aufg. 6.

13. Eine Gerade zu ziehen, die gegen zwei Ebenen geg. Neigungen habe und a) durch einen geg. Punkt gehe, b) zwei windschiefe Gerade (oder eine Gerade und eine Kreislinie) schneide.

c. Zwischen zwei Ebenen eine Strecke von geg. Länge so zu legen, daß sie mit den Ebenen geg. Winkel mache und eine geg. Gerade schneide.

14. Zwischen eine Gerade und eine Ebene eine Strecke von geg. Länge so zu legen, daß sie mit jeder einen geg. Winkel mache.

15. Eine Kegelfläche von geg. erzeugendem Winkel zu konstr., die a) durch zwei geg. sich schneidende Gerade gehe, b) zwei Ebenen berühre, so daß die Spitze in einem geg. Punkt ihrer Schnittlinie liege, c) zwei Kegelflächen mit gemeinschaftlicher Spitze (nach zwei Mantellinien) berühre, d) durch eine Gerade gehe und eine Ebene berühre, u. s. w. — (Die Aufg. ist analog mit II. Anh. Aufg. 5. a. Was würde den dortigen Bedingungen δ und ε entsprechen?)

16. a. Durch einen geg. Punkt oder parallel einer geg. Richtung eine Gerade zu ziehen, welche α) die Mäntel zweier geg. Kegel oder zweier Cylinder oder eines Kegels und eines Cylinders — β) eine Kugel und einen Kegel- od. Cylindermantel — γ) zwei Kugeln berühre. (II. Einl. 2. d, 3. d und 9. a.)

b. Durch einen geg. Punkt oder parallel einer geg. Richtung eine Gerade zu ziehen, die zwei von folgenden Bedingungen erfülle: α) sie habe von einem geg. Punkt eine geg. Entfernung, β) sie schneide eine Kugel nach einer Sehne von geg. Länge, γ) sie habe von einer Geraden eine geg. kürzeste Entfernung. — Die Bedingungen, welche die Gerade erfüllen soll, können auch beide von der nämlichen Art sein.

17. a. Geg. zwei gleiche Strecken in bestimmter Lage im Raum. Eine Gerade zu ermitteln, um welche als Achse gedreht die eine Strecke in die Lage der andern übergeht.

b. Geg. zwei kongruente Dreiecke (Polygone) in bestimmter Lage im Raum. Einen Punkt zu finden, um welchen bewegt das eine Dreieck (Polygon) in die Lage des andern übergeführt werden kann. (Denkt man sich die zwei Polygone als Seitenflächen kongruenter Polyeder, so ist die Aufg. auch für diese gelöst.)

18. Eine Kugelfläche zu bestimmen, die vier geg. Kugelflächen rechtwinklig schneide. (II. Anh. 14.)

19. Durch einen geg. Punkt eine Gerade so zu ziehen, daß ihre zwischen eine geg. Kreislinie und eine geg. Kugelfläche fallende Strecke in dem Punkt nach einem geg. Verhältnis geteilt werde. (II. Anh. 18.)

20. Zwischen eine Kreislinie und eine Kugelfläche eine Strecke von geg. Länge so zu legen, daß sie einer geg. Geraden parallel sei.

21—40: Berührungs-Aufgaben.

21. Durch eine geg. Gerade eine Ebene zu legen, die eine geg. Kreislinie berühre.

22. Eine Kugel zu konstr., die eine geg. Kugel und eine geg. Ebene, und zwar die letztere in einem geg. Punkt, berühre.

23. Eine Kugel zu konstr., deren Oberfläche durch eine geg. Kreislinie gehe und eine geg. Gerade berühre. (Man ermittle den Abstand des Berührungspunkts der Geraden von ihrem Schnittpunkt mit der Kreisebene.)

24. Eine Kugel zu konstr., die eine geg. Ebene und eine geg. Kugel, und zwar die letztere in einem geg. Punkt, berühre.

25. Einem Dreikant eine Kugel von geg. Halbmesser einzubeschreiben, so daß sie a) die Seitenflächen, b) die Kanten des Dreikants berühre. (II. Anh. Aufg. 9. b u. a.)

26. a. In einen Kugelausschnitt —

b. in den von einem sphär. Dreieck und seinem zugehörigen Dreikant begrenzten Raum eine Kugel einzubeschreiben.

27. Einer Kegelfläche eine Kugel einzubeschreiben, die außerdem eine geg. Kugel berühre.

28. a. Einer Kegelfläche eine Kugel einzubeschreiben, die außerdem eine die Kegelfläche schneidende Gerade berühre. (Der Kreis, welcher dem von der Geraden und zwei Mantellinien gebildeten Dreieck einbeschrieben wird, liegt auf der gesuchten Kugel. Oder auch mittels Ähnlichkeitspunkt.)

b. Einem Dreikant α) eine flächenberührende — β) eine