UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Lehrbuch der Stereometrie

Hauck, Guido

Tübingen, 1893

41 - 61: Sphärik und Vielkant

urn:nbn:de:hbz:466:1-77777

Visual Library

hältnis der Entfernungen, f) sie habe gegen eine Ebene eine geg. Neigung, g) sie habe gegen eine Gerade eine geg. Neigung. — Unter den drei Bedingungen, welche die Ebene erfüllen soll, können auch zwei oder drei der nämlichen Art sein. Von den Bedingungen b, f und g dürfen jedoch nicht drei zugleich verwertet werden. (Kommt f oder g zweimal vor, so kommt II. Anh. Aufg. 34 zur Verwendung. Kommt c oder d zusammen mit f oder g vor, so benütze man einen einer Kugel umbeschriebenen Berührungskegel. Bei g ist die Gerade unter Umständen an geeigneten Ort parallel zu verschieben.)

38. Eine Ebene zu bestimmen, die eine der in der vor. Aufg. genannten Bedingungen und außerdem noch eine der folgenden erfülle: α) sie sei einer Geraden parallel und habe von ihr eine geg. Entfernung, β) sie schneide einen Cylinder nach einem Rechteck von geg. Inhalt, γ) sie schneide einen Kegel nach einem Dreieck von geg. Inhalt. (Kommt α oder β zusammen mit 37. f oder g vor, so kommt II. Aufg. 5. b zur Anwendung.)

39. Eine Ebene zu bestimmen, die eine von den Bedingungen a, c, d, e der Aufg. 37 erfülle und außerdem gegen drei geg. Gerade oder Ebenen gleich geneigt sei.

40. Eine Ebene zu bestimmen, die von vier nicht in einer Ebene liegenden Punkten a) geg. Verhältnisse der Entfernungen, b) gleiche Entfernungen habe. (II. Anh. 8. — Bei a erhält man 8 Lösungen. Bei b fällt eine dieser 8 Ebenen ins Unendliche.)

41—61: Sphärik und Vielkant.

41. Eine Kugel, auf welcher Meridiane und Parallelkreise in Abständen von je 15° mit N und S als Nord- und Südpol aufgezeichnet sind, wird durch eine beliebige Großkreis-Ebene in zwei Halbkugeln geteilt. Von einer derselben soll ein stereographisches Kartennetz gezeichnet werden, indem der nicht auf ihr liegende Pol P des Großkreises als Projektionszentrum genommen wird. (II. Anh. 52. — Eine in der Ebene PNS gezeichnete Hilfsfigur liefert die Projektionen N' und S' von N und S, sowie die Durchmesser der einzelnen Parallelkreis-Projektionen nach Größe und Lage. Die Meridian-Projektionen gehen in der Hauptfigur alle durch N' und S', ihre Mittelpunkte liegen auf dem Mittellot von N'S' und ergeben sich gemäß II. Anh. 52. b dadurch, daß man

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

an N'S' in N' die Komplemente der Winkel anlegt, die die einzelnen Meridiane mit dem durch P gehenden Meridian machen.)

42. Direkte Lösung von II. Aufg. 7. (Zwei Ebenen, die den W. α einschließen, sind durch eine dritte Ebene so zu schneiden, daß diese mit ihnen die W. β und γ macht. Mittels II. Einl. 4. e und II. Anh. Aufg. 34.)

43. Ein Dreikant zu konstr., von dem geg. sind:

a) zwei Seiten und die zur dritten gehörige Höhe (d. i. der Winkel, nach dem die betr. Höhenebene das Dreikant schneidet),

b) zwei Seiten und die zu einer derselben gehörige Höhe,

c) eine Seite und die zu den zwei andern gehörigen Höhen,

d) eine Seite, die zu ihr gehörige Höhe und eine weitere Höhe.

44. Auf der Oberfläche einer Kugel von geg. Halbmesser sind drei Punkte geg., deren Entfernungen mit dem Zirkel abgestochen werden mögen. Es sollen hieraus durch Konstruktion in einer Ebene die Seiten und Winkel des Dreikants gefunden werden, das von den in den drei Punkten an die Kugel gelegten Berührungsebenen gebildet wird.

45. Von einem durch seine drei Seiten geg. Dreikant folgende Stücke durch Konstruktion in einer Ebene zu finden: a) die Höhen, b) die Medianen (Winkel, nach denen die Medianebenen das Dreikant schneiden), c) die seitenhalbierenden Transversalen (Winkel, nach denen die Transversalebenen schneiden), d) der erzeugende Winkel des einbeschriebenen Kegels, e) der erzeugende Winkel des umbeschriebenen Kegels. (Man lehne die Konstr. an Fig. 40. b, S. 91 an. Bei a, b und c fasse man den Körper ins Auge, der von dem Dreikant und der Ebene eines der zwei rechtw. Dreiecke AFB oder AFC eingeschlossen wird, und ermittle dessen Schnittdreieck mit der betreffenden Ebene. Bei d und e gehe man auf den Schnittpunkt der Kegelachse mit der Ebene eines jener rechtw. Dreiecke aus.)

Anm. In den folgenden Aufgaben 46—61 ist die geg. Kugel massiv vorauszusetzen, und sind die Konstruktionen auf ihrer Oberfläche mit bloßer Anwendung des Zirkels auszuführen (vgl. II. Aufg. 10. Anm.).

† 46. Durch einen geg. Punkt einen Großkreis senkrecht zu einem geg. Großkreis zu legen. (II. Einl. 14. b.)

† 47. Von einem außerhalb eines Kleinkreises geg. Punkt

eine sphär. Tangente an den Kleinkreis zu legen. (Mittels II. Anh. Lehrs. 46, oder durch Konstr. eines Pols der sphär. Tangente mittels zweier Kreisbögen, die aus dem geg. Punkt und dem Mittelpunkt des Kleinkreises beschrieben werden.)

† 48. a. An einen Großkreis in einem geg. Punkt einen sphär. Winkel anzulegen, der gleich viel Grade habe wie ein geg. ebener Winkel. (Man bestimme durch ebene Konstr. die Länge des Äquatorbogens.)

† b. Durch einen geg. Punkt einen Großkreis zu legen, der einen geg. Großkreis unter geg. Winkel schneide. (Man wende Aufg. a an und lege durch den Punkt einen Parallelkreis zu dem geg. Großkreis; oder auch mittels II. Anh. 51 und II. Anh. Aufg. 47.)

49. Zu beweisen, daß die Aufgaben: auf der Oberfläche einer massiven Kugel a) eine sphär. Entfernung zu halbieren, b) einen sphär. Winkel zu halbieren, c) einem sphär. Dreieck einen Kreis um- und d) einzubeschreiben, e) ein sphär. Dreieck zu konstr. aus drei Seiten, f) — aus zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel, g) — aus zwei Seiten und einem Gegenwinkel, — die nämlichen Auflösungen haben, wie die entsprechenden Aufgaben der ebenen Geometrie.

50. Einen Kugelkreis von geg. sphär. Halbmesser zu zeichnen, der zwei geg. Kugelkreise berühre. (Wie in der ebenen Geom.)

† 51. An zwei Kugelkreise die vier gemeinschaftlichen sphär. Tangenten zu legen. (Spezialfall der vor. Aufg. — Hiernach andere Lösung von II. Anh. Aufg. 34.)

52. Ein sphär. Dreieck zu konstr., wenn geg. sind: a) die drei Winkel, b) eine Seite und die zwei anliegenden Winkel, c) zwei Winkel und eine Gegenseite. (Durch Zurückführung auf II. Anh. Aufg. 49. e—g mittels der Polardreiecke, oder direkt. Die direkte Lösung von a mittels II. Anh. 51 und vor. Aufg.)

53. Geg. zwei kongruente (oder symmetrische) sphär. Vielecke in bestimmter Lage auf der Kugeloberfläche. Einen Punkt auf ihr zu finden von der Eigenschaft, daß das eine Vieleck, wenn es in fester Verbindung mit dem Punkte gedacht, durch Drehung um ihn auf der Kugeloberfläche verschoben wird, mit dem andern Vieleck zur Deckung (bezw. in antipodische Lage) gelangt. (Das gedrehte Vieleck befindet sich in der verlangten Lage, sobald eine seiner Seiten sich darin befindet.)

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

54. Ein sphär. Zweieck durch einen Großkreisbogen von geg. Länge zu halbieren.

55. Ein sphär. Vieleck in ein Zweieck von gleichem Flächeninhalt zu verwandeln. (Der Zweieckswinkel ist nach II. 16 gleich dem halben sphär. Exzeß des Vielecks. Konstr. des sphär. Exzesses durch Addieren der Äquatorbögen.)

56. Von einem sphär. Zweieck a) ein gleichseitiges sphär. Dreieck abzuschneiden, b) ein gleichschenkliges sphär. Dreieck abzuschneiden, das der nte Teil des Zweiecks sei. (II. Anh. 51. Bei b wird der W. an der Grundl. bestimmt nach II. 14. Zus.)

57. Ein sphär. Dreieck zu konstr., von dem eine Seite, die zugehörige Höhe und der Inhalt geg. sind. (II. Anh. 45 u. 50.)

58. Ein sphär. Dreieck zu konstr., von dem zwei Winkel und der Umfang geg. sind. (II. Anh. 48. a und 51.)

59. Ein sphär. Dreieck zu konstr., von dem geg. sind:

a) eine Seite, ein anliegender Winkel und die Summe der zwei andern Seiten,

b) eine Seite, ein anliegender Winkel und der Inhalt. (b mittels a durch das Polardreieck.)

60. Ein sphär. Dreieck zu konstr., von dem geg. sind:

a) eine Seite, der gegenüberliegende Winkel und die Summe der zwei andern Seiten (II. Anh. 48. a und b, II. Anh. Aufg. 51),

b) eine Seite, der gegenüberliegende Winkel und der Inhalt (mittels a durch das Polardreieck).

61. Eine geg. Kugelfläche in ein Netz von lauter kongruenten regulären sphär. Dreiecken zu teilen, und zwar so, daß a) immer drei, b) vier, c) fünf Dreiecke mit gemeinschaftl. Ecke an einander stoßen. (Man teile die Kugeloberfläche von einem beliebigen Punkt aus in 3, 4, 5 gleiche sphär. Zweiecke und wende auf eines von ihnen II. Anh. Aufg. 56. a an.) Durch Verbinden der sphär. Mittelpunkte der Dreiecke in den Netzen b und c erhält man zwei weitere Netze, die aus lauter kongr. regul. Vierecken und Fünfecken bestehen.

Anm. Man formuliere die Aufgaben 49—53 und 56—61 und deren Lösungen für Dreikante und Kegelflächen.