Lehrbuch der Stereometrie

Hauck, Guido

Tübingen, 1893

A. Einleitung.

urn:nbn:de:hbz:466:1-77777

Drittes Buch.

Polyeder und Umdrehungskörper.

A. Einleitung.

1: Allgemeines.

1. a. Ein von lauter ebenen Flächen begrenzter Körper heißt ein Polyeder. Die Linien, nach denen je zwei an einander stoßende Begrenzungsflächen sich schneiden, heißen die Kanten, die Punkte, in denen mehrere benachbarte Begrenzungsflächen und deren Schnittkanten zusammentreffen, heißen die Ecken des Polyeders. Die Gesamtheit der in einer Ecke zusammentreffenden Begrenzungsflächen und Kanten bildet ein Vielkant. Die Gesamtheit der in einer Begrenzungsfläche liegenden Ecken und Kanten bildet ein ebenes Vieleck. Diese Vielecke heißen die Flächen des Polyeders, ihre Gesamtheit bildet seine Oberfläche. Die Verbindungsstrecke zweier nicht in der nämlichen Begrenzungsfläche liegenden Ecken heißt eine Diagonale. Legt man durch drei oder mehr Ecken, von denen höchstens zwei in der nämlichen Begrenzungsfläche liegen, eine Ebene, so heißt deren Schnittfigur mit dem Polyeder ein Diagonalschnitt.

b. Breitet man die Oberfläche eines Polyeders als ein zusammenhängendes Stück in einer Ebene aus, nachdem man vorher den Zusammenhang der einzelnen Flächen in den Kanten, soweit es nötig ist, gelöst hat: so heißt die hiedurch entstandene ebene Figur ein Netz des Polyeders. Ein solches kann umgekehrt dazu verwendet werden, von dem Polyeder ein Modell (etwa aus Karton) herzustellen. Das Netz eines Polyeders kann in der mannigfaltigsten Weise und Form gebildet werden. Über die gestaltlichen Eigenschaften einer Netzfigur läßt sich folgendes sagen:

Da das Ausbreiten der Oberfläche eines Vielkants in einer Ebene nur dadurch möglich wird, daß man das Vielkant längs einer Kante aufschneidet, so muß man bei Herstellung eines Polyeder-Netzes an jeder Ecke mindestens längs einer Kante aufschneiden. Die aufgeschnittenen Kanten bilden den Umriß der Netzfigur, und zwar enthält der Umriß jede aufgeschnittene Kante zweimal. Da nun von jeder Polyeder-Ecke mindestens eine aufgeschnittene Kante ausgeht, so müssen auch die Polyeder-Ecken sämtlich auf dem Umriß der Netzfigur liegen; die nicht aufgeschnittenen Kanten, welche ins Innere der Netzfigur fallen, können daher immer nur eine Ecke des Umrisses mit einer andern verbinden, oder: jede nicht aufgeschnittene Kante teilt die Netzfigur in zwei getrennte Teile. *)

Anm. Es werden im folgenden nur gewöhnliche Polyeder in Betracht gezogen, d. h. solche, welche nachstehenden zwei Bedingungen genügen:

1) Es muß möglich sein, sämtliche Ecken des Polyeders durch einen aus lauter Kanten zusammengesetzten polygonalen Zug, der sich nicht selbst durchschneidet, zu verbinden, so daß also, wenn man diesen Zug vom Anfangspunkt bis zum Endpunkt durchläuft, man sämtliche Ecken, und zwar jede Ecke nur einmal, passiert. **)

2) Schneidet man die Oberfläche des Polyeders nach einem der ersten Bedingung genügenden Kantenzug auf, so muß dadurch der Zusammenhang der Oberfläche in der Art gelöst sein, daß ein

---

*) Man kann hiezu Fig. 46 (S. 133) vergleichen.

**) Man kann hiezu das Polyeder Fig. 45. e (S. 130) vergleichen, wo einer der vielen möglichen Kantenzüge durch die eingeschriebenen Zahlen 1 . . . 12 angedeutet ist.

Ausbreiten derselben zu einem ebenen Netze möglich ist, ohne daß es nötig wäre, vorher noch nach einer weiteren, nicht durchlaufenen Kante aufzuschneiden.*)

Diese zwei Bedingungen treffen zu, wenn 1) das Polyeder nur einfach zusammenhängende Flächen (d. h. Flächen mit einer einzigen geschlossenen Randlinie**) besitzt, und wenn 2) die Gesamtoberfläche einfach zusammenhängend ist. (Ein Polyeder mit mehrfach zusammenhängender Oberfläche entsteht, wenn ein gewöhnliches Polyeder einfach oder mehrfach durchlocht wird.)

Ausdrücklich mag hervorgehoben werden, daß bei einem gewöhnlichen Polyeder sehr wohl auch einspringende Keile vorkommen können. — Ein Polyeder, das nur ausspringende Keile besitzt, heißt ein konvexes Polyeder.

c. Zwei Polyeder heißen kongruent, wenn sie zur Deckung gebracht werden können. Zwei Polyeder heißen symmetrisch, wenn sie in solche Lage gebracht werden können, daß jede Ecke des einen zu einer entsprechenden Ecke des andern in Beziehung auf eine Ebene symmetrisch ist. Zwei kongruente Polyeder und ebenso zwei symmetrische Polyeder haben die entsprechenden Kanten, Winkel und Keile bezw. gleich; je zwei entsprechende Flächen sind kongruent; je zwei entsprechende Vielkante sind entsprechend-gleich, und zwar bei kongruenten Polyedern kongruent, bei symmetrischen symmetrisch (I. Anh. 15. a und II. Anh. 28. a). Für kongruente und symmetrische Polyeder gebraucht man die gemeinsame Bezeichnung: entsprechend-gleich.

d. Zwei Polyeder heißen ähnlich, wenn sie von gleich vielen Flächen begrenzt sind, die unter sich einzeln ähnlich und in beiden Polyedern übereinstimmend gruppiert sind, und wenn die Vielkante an je zwei entsprechenden Ecken durchweg kongruent oder durchweg symmetrisch sind; sie haben also die entsprechenden Winkel und Keile bezw. gleich, und die Kanten des einen sind den entsprechenden Kanten des

*) Fig. 46 (S. 133) stellt das auf solche Weise hergestellte Netz des Polyeders Fig. 45. e (S. 130) vor.

**) Fig. 47 (S. 133) stellt z. B. eine Fläche mit zwei Randlinien vor.

andern proportioniert. Je nachdem die Vielkante an entsprechenden Ecken kongruent oder symmetrisch sind, heißen die Polyeder gleichstimmig ähnlich oder ungleichstimmig ähnlich. Zwei Polyeder, von denen jedes einem von zwei symmetrischen Polyedern gleichstimmig ähnlich ist, sind zu einander ungleichstimmig ähnlich.

2—6: Prisma.

2. a. Zieht man durch die Ecken eines ebenen Vielecks ABCD . . (Fig. 41) in beliebiger Richtung (aber nicht in der Ebene des Vielecks) Parallelen, und legt durch je zwei aufeinanderfolgende Parallelen Ebenen, so werden diese von einer zur Vielecksebene parallelen Ebene nach den Seiten eines zweiten Vielecks A′B′C′D′ . . geschnitten, das dem ersten kongruent ist. (Denn es sind, nach I. 2, je zwei entsprechende Vielecksseiten parallel, daher, nach I. 4. b, je zwei entsprechende Winkel gleich; ferner sind je zwei entsprechende Vielecksseiten gleich, da sie mit den parallelen Verbindungslinien ihrer Endpunkte ein Parallelogramm bilden.) Diese Parallelogramme samt den zwei Vielecken begrenzen ein Polyeder, welches Prisma heißt.

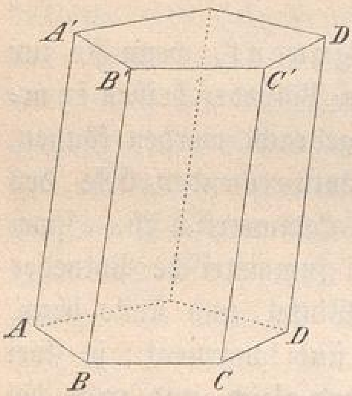

Fig. 41.

b. Ein Prisma ist also ein Polyeder, dessen Oberfläche aus zwei kongruenten und parallel liegenden Vielecken und aus eben so vielen Parallelogrammen besteht, als jedes Vieleck Seiten hat. Die Vielecke heißen die Grundflächen, die Parallelogramme die Seitenflächen des Prismas, die Gesamtheit der Seitenflächen bildet seinen Mantel. Die Seiten der Grundflächen heißen Grundkanten, die übrigen, unter sich gleichen und parallelen Kanten heißen Seitenkanten. An jeder Ecke befindet sich ein Dreikant. Die Entfernung der beiden Grundflächen heißt die Höhe des Prismas.

c. Ein Prisma heißt dreiseitig, vierseitig u. s. w., wenn seine Grundflächen Dreiecke, Vierecke u. s. w. sind.

d. Jede zu den Seitenkanten parallele Schnittebene schneidet das Prisma nach einem Parallelogramm (I. 1. a und I. 2). Insbesondere ist jeder durch zwei Seitenkanten gehende Diagonalschnitt ein Parallelogramm. Jede zu den Grundflächen parallele Schnittebene schneidet nach einem den Grundflächen kongruenten Vieleck; eine solche Schnittfigur heißt ein Parallelschnitt. Die Schnittfigur einer zu den Seitenkanten senkrechten Schnittebene heißt ein Querschnitt. Alle Querschnitte eines Prismas sind kongruent.

e. Wird der Mantel eines Prismas von einer Ebene geschnitten, die den Grundflächen nicht parallel ist, so wird dadurch das Prisma in zwei Polyeder zerlegt, von denen jedes ein schiefabgeschnittenes Prisma heißt.

3. a. Ein Prisma heißt senkrecht, wenn die Seitenkanten auf den Grundflächen senkrecht stehen; andernfalls heißt es schief. Im senkrechten Prisma sind die Seitenflächen und die durch je zwei Seitenkanten gehenden Diagonalschnitte Rechtecke; die Seitenkanten sind gleich der Höhe. Zwei senkrechte Prismen, die kongruente Grundflächen und gleiche Höhen haben, sind kongruent; denn sie können (gemäß I. 7. a) zur Deckung gebracht werden.

b. Ein Prisma heißt regulär, wenn es senkrecht ist und reguläre Vielecke zu Grundflächen hat. Im regulären Prisma sind alle Seitenflächen kongruent und alle Dreikante kongruent. Die Strecke zwischen den Mittelpunkten der Grundflächen ist den Seitenkanten parallel u. gleich und heißt die Achse des regulären Prismas.

c. Schneidet man den Mantel eines senkrechten Prismas längs einer Seitenkante auf, wickelt ihn als zusammenhängendes Stück von dem Prisma ab, und breitet ihn in einer

Ebene aus, so legen sich in der Netz- oder Abwicklungsfigur die Grundkanten beider Grundflächen je in eine Gerade. Der Umriß der Abwicklungsfigur wird also ein Rechteck, dessen eine Seite gleich der Seitenkante, dessen andere Seite gleich dem Umfang der Grundfläche ist.

d. Ein Cylinder kann als reguläres Prisma angesehen werden, dessen Grundflächen unendl. viele unendl. kleine Seiten haben. Daher kann der Mantel des Cylinders gleich dem Prismenmantel abgewickelt und in einer Ebene ausgebreitet werden. Die Abwicklungsfigur ist (nach c) ein Rechteck, dessen eine Seite gleich der Mantellinie, dessen andere Seite gleich dem Umfang des Grundkreises ist.

4. a. Ein Prisma, dessen Grundflächen Parallelogramme sind (Fig. 42), heißt Parallelflach oder Spat (auch Parallelepipedon). Von seinen sechs Flächen, die alle Parallelogramme sind, sind je zwei parallel und kongruent. Jedes Paar paralleler Flächen kann als Grundflächen betrachtet werden. Von den zwölf Kanten sind je vier parallel und gleich. Es sind also drei verschiedene Kantenlängen vorhanden. Von jeder Ecke gehen drei ungleiche Kanten aus.

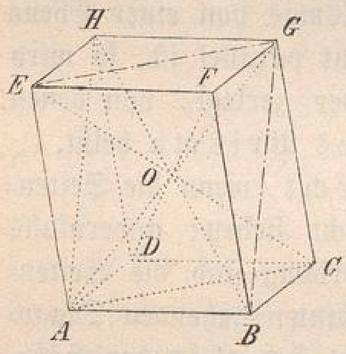

Fig. 42.

b. Zwei Ecken eines Parallelflachs, die nicht in der nämlichen Fläche liegen, heißen gegenüberliegende Ecken. Zu jeder Ecke ist nur eine gegenüberliegende vorhanden. Ihre Verbindungsstrecke ist eine Diagonale. Das Parallelflach hat vier Diagonalen. Von diesen ist jede zugleich Diagonale in zweien von den sechs Diagonalschnitt-Parallelogrammen, und je zwei sind Diagonalen in einem und demselben Diagonalschnitt. Hieraus folgt, daß sich alle vier Diagonalen in einem Punkt schneiden und gegenseitig halbieren. Dieser Punkt heißt der Mittelpunkt des Parallelflachs. (Z. B. halbieren sich in Fig. 42 AG und BH gegenseitig in O wegen Parallelogramm ABGH. CE geht ebenfalls durch O und wird in O halbiert wegen Parallelogramm ACGE, u. s. f.)

c. Die Dreikante an den acht Ecken stehen in derselben Beziehung zu einander wie die acht von drei Ebenen gebildeten Dreikante (II. Anh. 27). Insbesondere sind die Dreikante an zwei gegenüberliegenden Ecken symmetrisch.

5. a. Ein senkrechtes Prisma, dessen Grundflächen Rechtecke sind, heißt rechtwinkliges Parallelflach oder Quader. Seine Flächen und Diagonalschnitte sind (nach 3. a) alle Rechtecke. Von den Diagonalschnitten sind je zwei kongruent. Die vier Diagonalen sind gleich. Die Dreikante an den acht Ecken sind sämtlich Oktanten.

b. Sind in einem Parallelflach drei von einer Ecke ausgehende Kanten gleich, so sind alle zwölf Kanten gleich. Das Parallelflach ist also von lauter Rhomben umgeben und heißt Rhomboeder. — Unter Rhomboeder im engeren Sinn versteht man ein solches, dessen sechs Rhomben kongruent sind. Die zwei gegenüberliegenden Ecken, in denen alsdann drei gleiche Rhombenwinkel zusammenstoßen, heißen Hauptecken, ihre Verbindungsstrecke heißt Hauptdiagonale. Das Rhomboeder heißt spitz oder stumpf, je nachdem jene drei gleichen Winkel spitz oder stumpf sind.

c. Ein Quader, der zugleich Rhomboeder ist, dessen sechs Flächen also lauter Quadrate sind, heißt Würfel (auch Kubus oder reguläres Hexaeder). Im Würfel sind alle sechs Diagonalschnitte kongruent.

6. Zwei Quader sind kongruent, wenn sie drei von einer Ecke ausgehende Kanten einzeln gleich haben (3. a). Ein Quader ist also bestimmt durch drei von einer Ecke ausgehende Kanten. Ein Würfel ist daher bestimmt durch eine Kante. — Der Würfel, dessen Kante gleich der Längeneinheit ist, wird als Körpereinheit oder Kubikeinheit benützt. Unter dem Rauminhalt oder Kubikinhalt oder Volumen eines Körpers versteht man die Zahl der Kubikeinheiten, die er faßt. Zwei Körper, die gleichen Rauminhalt haben, heißen gleich.

7—10: Pyramide.

7. a. Zieht man nach den Ecken eines ebenen Vielecks ABCD.. (Fig. 43) von einem außerhalb seiner Ebene gelegenen Punkt S Strecken, und legt durch je zwei aufeinanderfolgende Strecken eine Ebene, so begrenzen die in diesen Ebenen liegenden Dreiecke zusammen mit dem Vieleck ein Polyeder, welches Pyramide heißt.

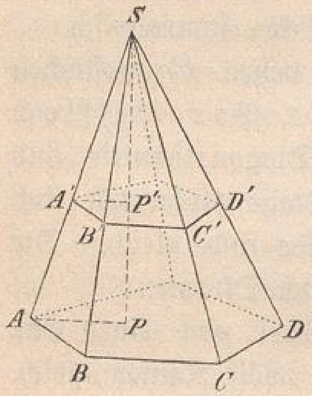

Fig. 43.

b. Eine Pyramide ist also ein Polyeder, dessen Oberfläche aus einem Vieleck und ebenso vielen Dreiecken besteht, als das Vieleck Seiten hat. Das Vieleck heißt die Grundfläche, die Dreiecke heißen die Seitenflächen, die Gesamtheit der Seitenflächen bildet den Mantel der Pyramide. Die Seiten der Grundfläche heißen Grundkanten, die übrigen, von S ausgehenden Kanten Seitenkanten. Die Ecke S heißt die Spitze, die Entfernung SP der Spitze von der Grundfläche die Höhe der Pyramide.

c. Eine Pyramide heißt dreiseitig, vierseitig u. s. w., wenn ihre Grundfläche ein Dreieck, Viereck u. s. w. ist. — An jeder Grundecke befindet sich ein Dreikant, an der Spitze ein Vielkant, und zwar ein n-kant, wenn die Pyramide n-seitig ist. — Die dreiseitige Pyramide heißt auch Vierflach (oder Tetraeder). Im Vierflach kann jede Fläche als Grundfläche, die ihr gegenüberliegende Ecke als Spitze betrachtet werden.

d. Jede durch die Spitze gehende Schnittebene schneidet die Pyramide nach einem Dreieck. Insbesondere ist jeder durch zwei Seitenkanten gehende Diagonalschnitt ein Dreieck. Diagonalen besitzt die Pyramide nicht. — Die Schnittfigur A′B′C′D′ . . (Fig. 43) einer zur Grundfläche parallelen Schnittebene heißt ein Parallelschnitt. Es wird (in B. 10. a) bewiesen werden, daß jeder Parallelschnitt der Grundfläche ähnlich ist.

8. a. Eine Pyramide heißt regulär, wenn die Grundfläche ein reguläres Vieleck ist, und die Spitze auf der Geraden liegt, die auf der Grundfläche in deren Mittelpunkt senkrecht steht. In einer regulären Pyramide sind daher die Grundkanten unter sich gleich, und die Seitenkanten unter sich gleich (I. 12. b). Die Seitenflächen sind kongruente gleichschenklige Dreiecke, und die Dreikante an den Grundecken sind kongruente gleichschenklige Dreikante (II. 8). Hieraus folgt weiter, daß das Vielkant an der Spitze regulär ist, sowie daß die Seitenflächen und Seitenkanten je unter sich gleiche Neigung gegen die Grundfläche haben.

b. Sind in einer regulären dreiseitigen Pyramide die Seitenflächen gleichseitige Dreiecke (und also der Grundfläche kongruent), so heißt das Polyeder: reguläres Tetraeder oder Tetraeder im engeren Sinn.*)

c. Schneidet man den Mantel einer regulären Pyramide längs einer Seitenkante auf, wickelt ihn als zusammenhängendes Stück von der Pyramide ab, und breitet ihn in einer Ebene aus, so erhält man als Netz- oder Abwicklungsfigur ein Vieleck von der Eigenschaft, daß eine Ecke von allen übrigen eine Entfernung gleich der Seitenkante hat, und daß die Summe aller nicht an jene Ecke anstoßenden Seiten gleich dem Umfang der Grundfläche ist.

d. Jeder Kegel kann als reguläre Pyramide angesehen werden, deren Grundfläche unendl. viele unendl. kleine Seiten hat. Daher kann der Mantel des Kegels gleich dem

*) Im folgenden wird unter Tetraeder schlechtweg — stets das reguläre Polyeder verstanden, während die allgemeine dreiseitige Pyramide durch Vierflach bezeichnet wird.

Pyramidenmantel abgewickelt und in einer Ebene ausgebreitet werden. Die Abwicklungsfigur ist (nach c) ein Kreisausschnitt, dessen Halbmesser gleich der Mantellinie, und dessen Bogen gleich dem Umfang des Grundkreises ist.

9. Jedes Polyeder kann man von einem beliebigen, in seinem Innern liegenden Punkt aus in Pyramiden zerlegen, indem man von dem Punkt nach sämtlichen Ecken Strahlen zieht und den Punkt als gemeinschaftliche Spitze, die Strahlen als Seitenkanten, die einzelnen Polyederflächen als Grundflächen der Pyramiden nimmt. Die gemeinschaftliche Spitze kann auch in eine Ecke des Polyeders verlegt werden.

10. a. Eine Pyramide S, ABCD . . (Fig. 43, S. 124) wird durch einen Parallelschnitt A′B′C′D′ . . in zwei Teile zerlegt, von welchen der zwischen Grundfläche und Parallelschnitt liegende Teil: Pyramidenrumpf heißt. Die letzteren zwei Flächen, welche ähnlich sind (7. d), heißen die Grundflächen, die übrigen, welche Trapeze sind, die Seitenflächen, die Entfernung der Grundflächen heißt die Höhe des Pyramidenrumpfs. Die Pyramide, die den Rumpf zur ganzen Pyramide ergänzt, heißt seine Ergänzungs-Pyramide.

b. Ein Pyramidenrumpf heißt regulär, wenn er von einer regulären Pyramide abgeschnitten ist. Im regulären Pyramidenrumpf sind die Grundflächen ähnliche reguläre Vielecke, die Seitenflächen kongruente gleichschenklige Trapeze; die Seitenkanten haben gleiche Länge.

c. Ein Kegel wird durch einen Parallelkreis in einen Kegelrumpf und dessen Ergänzungskegel zerlegt. Der Grundkreis des ursprünglichen Kegels und der Parallelkreis heißen die Grundkreise des Kegelrumpfes. Die Stücke der ursprünglichen Mantellinien zwischen den beiden Grundkreisen haben alle gleiche Länge und heißen die Mantellinien, das Stück der Achse zwischen den beiden Grundkreisen heißt die Achse des Kegelrumpfes. Der Achsenschnitt ist ein gleichschenkliges Trapez, dessen parallele Seiten Grundkreis-Durchmesser, und dessen Schenkel Mantellinien sind. Die Abwicklungsfigur des Mantels eines Kegelrumpfes ist ein Kreisring-Ausschnitt, welcher die Differenz der Abwicklungsfiguren des ganzen Kegels und des Ergänzungskegels vorstellt.

11—13: Prismatoid.

11. a. Ein Polyeder, das begrenzt ist von zwei beliebigen, in parallelen Ebenen liegenden Vielecken ABC .. und FGH .. (Fig. 44*), und außerdem von lauter Dreiecken, deren jedes mit dem einen Vieleck eine Seite, mit dem andern eine Ecke gemein hat, heißt Prismatoid. Die zwei Vielecke heißen seine Grundflächen, die Dreiecke seine Seitenflächen; die Seiten der Grundflächen heißen Grundkanten, die übrigen Kanten — Seitenkanten. Hat die eine Grundfläche m, die andere n Seiten, so hat das Prismatoid m + n Seitenflächen und m + n Seitenkanten, und heißt (m + n)-seitig. Die Entfernung der zwei parallelen Grundflächen heißt die Höhe des Prismatoids.

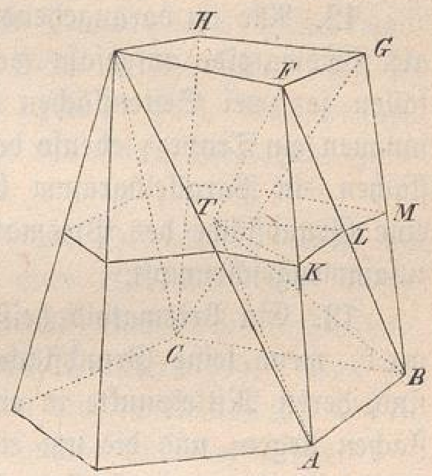

Fig. 44.

b. Ein Prismatoid ist durch die Gestalt und Lage seiner Grundflächen allein nicht vollständig bestimmt, da die Ecken noch auf die mannigfaltigste Weise durch Seitenkanten verbunden werden — und also die Seitenflächen noch die verschiedenartigsten Lagen haben können.

c. Eine durch die Mitte der Höhe parallel zu den Grundflächen gelegte Ebene halbiert sämtliche Seiten-

*) Man denke sich in Fig. 44 die von Punkt T ausgehenden Linien hinweg.

kanten (I. 14. d) und erzeugt eine Schnittfigur KLM . . (Fig. 44), welche der **Mittelschnitt** des Prismatoids heißt. Der Mittelschnitt ist ein $(m + n)$-eck, dessen Seiten parallel den Grundkanten und gleich ihren Hälften sind, und dessen Winkel gleich den Winkeln je zweier (in derselben oder in verschiedenen Grundflächen liegender) Grundkanten sind (I. 4. b und I. Einl. 4. d). Unter den Keilen an den Seitenkanten können sich auch einspringende Keile befinden. Daher kann der Mittelschnitt auch einspringende Winkel haben (wie z. B. an der Ecke L in Fig. 44).

12. Alle im vorangehenden betrachteten Polyeder können als Prismatoide aufgefaßt werden. Beim Pyramidenrumpf fallen je zwei Seitenflächen in eine Ebene und bilden zusammen ein Trapez; ebenso beim Prisma, wo je zwei Seitenflächen ein Parallelogramm bilden. Bei der Pyramide ist eine Grundfläche des Prismatoids zu einem Punkt (Spitze) zusammengeschrumpft.

13. Ein Prismatoid heißt **regulär** oder eine **Trommel**, wenn seine Grundflächen kongruente reguläre Vielecke sind, deren Mittelpunkte in einer Senkrechten zu den Grundflächen liegen, und die um einen halben Vieleckszentriwinkel gegen einander verdreht sind, so daß die im Zickzack laufenden Seitenkanten kongruente gleichschenklige Dreiecke als Seitenflächen einschließen. Der Mittelschnitt ist ein reguläres Vieleck, das doppelt so viel Seiten hat als eine Grundfläche. Im $2n$-seitigen regul. Prismatoid ist der Mittelschnitt ein regul. $2n$-eck.

14—16: Die regulären Polyeder.

14. a. Ein Polyeder heißt **regulär** (im engeren Sinn), wenn alle seine Flächen kongruente reguläre Vielecke sind und an allen seinen Ecken sich kongruente reguläre Vielkante befinden. Es sind also auch alle Kanten eines solchen Polyeders, alle Winkel und alle Keile je unter sich gleich. Unter den bisher betrachteten Polyedern treffen diese Eigenschaften zu beim Würfel und beim regulären Tetraeder.

b. Die Vielkante an den Ecken eines regulären Polyeders können bloß Dreikante oder Vierkante oder Fünfkante sein. Denn die Summe der Seiten eines Vielkants muß $< 4\,R$ sein (II. 17. b). Sechskante sind daher schon unmöglich, wenn die Flächen regul. Dreiecke sein sollen (weil $6 \cdot \frac{2}{3} R = 4\,R$). Noch weniger wären sie möglich, wenn die Flächen Quadrate, regul. Fünfecke u. s. w. sein sollten.

Die Flächen eines regulären Polyeders können bloß regul. Dreiecke oder Vierecke oder Fünfecke sein. Denn regul. Sechsecke sind schon unmöglich, wenn an den Ecken sich bloß Dreikante befinden sollen (weil $3 \cdot \frac{4}{3} R = 4\,R$). Noch weniger wären sie möglich, wenn sich an den Ecken Vierkante, Fünfkante u. s. w. befinden sollten.

c. Sind nun die Flächen regul. Dreiecke, so können die Vielkante entweder Dreikante oder Vierkante oder Fünfkante sein. Sind die Flächen regul. Vierecke oder Fünfecke, so können die Vielkante bloß noch Dreikante sein; denn ein Vierkant hätte schon bei Vierecken eine Seitensumme $= 4\,R$. Es kann demnach nur fünf reguläre Polyeder geben:

I. Dasjenige mit Dreiecken und

α) Dreikanten heißt regul. Tetraeder (= Vierflach),

β) Vierkanten — regul. Oktaeder (= Achtflach),

γ) Fünfkanten — regul. Ikosaeder (= Zwanzigflach).

II. Dasjenige mit Vierecken und Dreikanten heißt regul. Hexaeder (= Sechsflach, Würfel).

III. Dasjenige mit Fünfecken und Dreikanten heißt regul. Dodekaeder (= Zwölfflach).

15. Diese 5 regulären Polyeder (auch pythagoräische oder platonische Körper genannt) sind in Fig. 45 abgebildet. Tetraeder (Fig. a) und Hexaeder (Fig. b) wurden in 8. b und 5. c bereits besprochen. Zum Verständnis von Oktaeder (Fig. c), Dodekaeder (Fig. d) und Ikosaeder (Fig. e) mögen folgende Bemerkungen dienen:

a. Das Oktaeder (Fig. 45. c) kann aufgefaßt werden — entweder als reguläres sechsseitiges Prismatoid, dessen Seitenflächen regul. Dreiecke sind, oder als bestehend aus zwei kongruenten regulären vierseitigen Pyramiden, welche die quadratische Grundfläche gemeinsam haben, und deren Seitenflächen regul. Dreiecke sind.

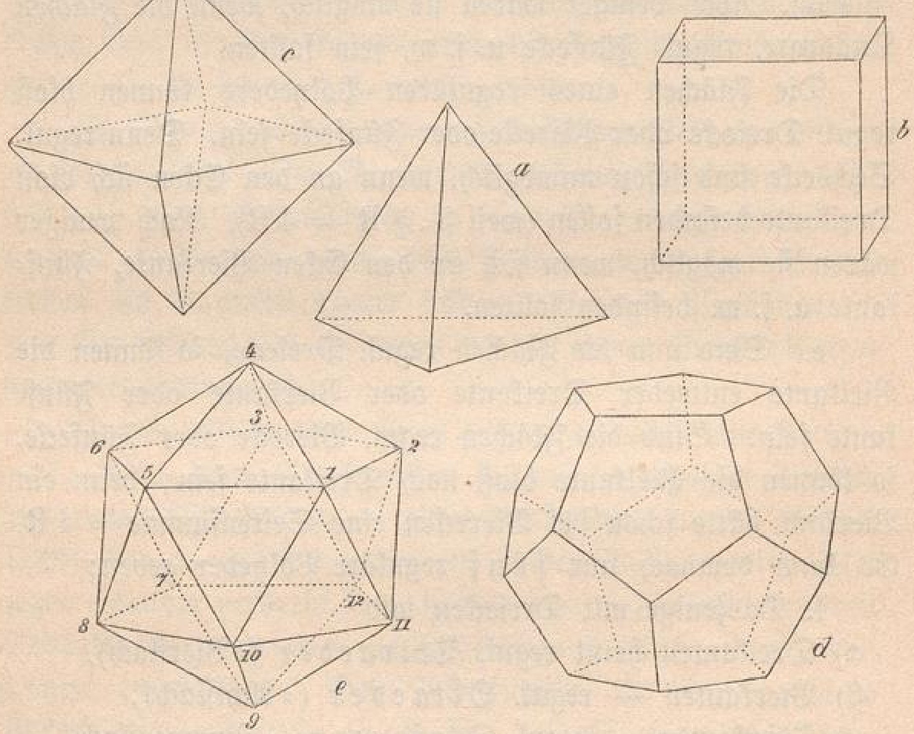

Fig. 45.
Die fünf regulären Polyeder.
a. Tetraeder, b. Hexaeder, c. Oktaeder, d. Dodekaeder, e. Ikosaeder.

b. Setzt man an jede Seite eines regul. Fünfecks ein ihm kongruentes regul. Fünfeck an, und zwar so, daß von den angesetzten Fünfecken je zwei benachbarte mit einer Seite an einander stoßen: so entsteht ein Korb-ähnliches Gebilde (Fig. 45. d). Das erste Fünfeck bildet den Boden, die fünf angesetzten Fünfecke bilden die Seitenwände des Korbes, der Rand ist eine Zickzacklinie. Würde man die Zacken geradlinig abschneiden, so würde ein regulärer fünfseitiger Pyramidenrumpf bleiben. Nimmt man nun zwei solche, einander kongruente Körbe und bringt sie in eine derartige Lage, daß die Zacken des einen in die Einschnitte des andern eingreifen, daß also die zwei Zickzacklinien sich decken: so entsteht ein Dodekaeder. — Ein Dodekaeder kann angesehen werden als bestehend aus einem regulären zehnseitigen Prismatoid und zwei kongruenten regulären fünfseitigen Pyramidenrümpfen, von denen jeder mit dem Prismatoid eine Grundfläche gemein hat. (Die zwei Pyramidenrümpfe wurden schon oben erwähnt; werden sie vom Dodekaeder weggenommen, so bleibt in der Mitte das Prismatoid, dessen Seitenflächen von den abgeschnittenen Zacken der zwei Körbe, und dessen Grundkanten von Fünfecksdiagonalen gebildet werden.)

c. Nimmt man ein reguläres zehnseitiges Prismatoid (Fig. 45. e), dessen Seitenflächen regul. Dreiecke sind, ferner zwei reguläre fünfseitige Pyramiden, deren Seitenflächen ebenfalls regul. Dreiecke, und deren Grundflächen mit den Grundflächen des Prismatoids kongruent sind, und setzt auf jede Grundfläche des Prismatoids eine der Pyramiden auf, so hat man ein Ikosaeder.

16. Außer den regulären Polyedern sind noch zu erwähnen die halbregulären Polyeder, von denen es zwei Gattungen giebt, nämlich:

a. gleicheckig-halbreguläre Polyeder (auch Archimedische Polyeder genannt), d. s. solche, deren Flächen reguläre Vielecke von zwei- oder dreierlei Art, und deren Vielkante sämtlich entsprechend-gleich (aber nicht regulär) sind,

b. gleichflächig-halbreguläre Polyeder, d. s. solche, an deren Ecken sich reguläre Vielkante von zwei- oder dreierlei Art befinden, und deren Flächen sämtlich kongruent (aber nicht regulär) sind.