Lehrbuch der Stereometrie

Hauck, Guido

Tübingen, 1893

1: Allgemeines

Drittes Buch.

Polyeder und Umdrehungskörper.

A. Einleitung.

1: Allgemeines.

1. a. Ein von lauter ebenen Flächen begrenzter Körper heißt ein Polyeder. Die Linien, nach denen je zwei an einander stoßende Begrenzungsflächen sich schneiden, heißen die Kanten, die Punkte, in denen mehrere benachbarte Begrenzungsflächen und deren Schnittkanten zusammentreffen, heißen die Ecken des Polyeders. Die Gesamtheit der in einer Ecke zusammentreffenden Begrenzungsflächen und Kanten bildet ein Vielkant. Die Gesamtheit der in einer Begrenzungsfläche liegenden Ecken und Kanten bildet ein ebenes Vieleck. Diese Vielecke heißen die Flächen des Polyeders, ihre Gesamtheit bildet seine Oberfläche. Die Verbindungsstrecke zweier nicht in der nämlichen Begrenzungsfläche liegenden Ecken heißt eine Diagonale. Legt man durch drei oder mehr Ecken, von denen höchstens zwei in der nämlichen Begrenzungsfläche liegen, eine Ebene, so heißt deren Schnittfigur mit dem Polyeder ein Diagonalschnitt.

b. Breitet man die Oberfläche eines Polyeders als ein zusammenhängendes Stück in einer Ebene aus, nachdem man vorher den Zusammenhang der einzelnen Flächen in den Kanten, *soweit es nötig ist*, gelöst hat: so heißt die hiedurch entstandene ebene Figur ein *Netz* des Polyeders. Ein solches kann umgekehrt dazu verwendet werden, von dem Polyeder ein Modell (etwa aus Karton) herzustellen. Das Netz eines Polyeders kann in der mannigfaltigsten Weise und Form gebildet werden. Über die gestaltlichen Eigenschaften einer Netzfigur läßt sich folgendes sagen:

Da das Ausbreiten der Oberfläche eines Vielkants in einer Ebene nur dadurch möglich wird, daß man das Vielkant längs einer Kante aufschneidet, so muß man bei Herstellung eines Polyeder-Netzes an jeder Ecke mindestens längs einer Kante aufschneiden. Die aufgeschnittenen Kanten bilden den Umriß der Netzfigur, und zwar enthält der Umriß jede aufgeschnittene Kante zweimal. Da nun von jeder Polyeder-Ecke mindestens eine aufgeschnittene Kante ausgeht, so müssen auch die Polyeder-Ecken sämtlich auf dem Umriß der Netzfigur liegen; die nicht aufgeschnittenen Kanten, welche ins Innere der Netzfigur fallen, können daher immer nur eine Ecke des Umrisses mit einer andern verbinden, oder: jede nicht aufgeschnittene Kante teilt die Netzfigur in zwei getrennte Teile. *)

Anm. Es werden im folgenden nur *gewöhnliche* Polyeder in Betracht gezogen, d. h. solche, welche nachstehenden zwei Bedingungen genügen:

1) Es muß möglich sein, sämtliche Ecken des Polyeders durch einen aus lauter Kanten zusammengesetzten polygonalen Zug, der sich nicht selbst durchschneidet, zu verbinden, so daß also, wenn man diesen Zug vom Anfangspunkt bis zum Endpunkt durchläuft, man sämtliche Ecken, und zwar jede Ecke nur einmal, passiert. **)

2) Schneidet man die Oberfläche des Polyeders nach einem der ersten Bedingung genügenden Kantenzug auf, so muß dadurch der Zusammenhang der Oberfläche in der Art gelöst sein, daß ein

*) Man kann hiezu Fig. 46 (S. 133) vergleichen.

**) Man kann hiezu das Polyeder Fig. 45. e (S. 130) vergleichen, wo einer der vielen möglichen Kantenzüge durch die eingeschriebenen Zahlen 1 . . . 12 angedeutet ist.

Ausbreiten derselben zu einem ebenen Netze möglich ist, ohne daß es nötig wäre, vorher noch nach einer weiteren, nicht durchlaufenen Kante aufzuschneiden.*)

Diese zwei Bedingungen treffen zu, wenn 1) das Polyeder nur einfach zusammenhängende Flächen (d. h. Flächen mit einer einzigen geschlossenen Randlinie**) besitzt, und wenn 2) die Gesamtoberfläche einfach zusammenhängend ist. (Ein Polyeder mit mehrfach zusammenhängender Oberfläche entsteht, wenn ein gewöhnliches Polyeder einfach oder mehrfach durchlocht wird.)

Ausdrücklich mag hervorgehoben werden, daß bei einem gewöhnlichen Polyeder sehr wohl auch einspringende Keile vorkommen können. — Ein Polyeder, das nur ausspringende Keile besitzt, heißt ein konvexes Polyeder.

c. Zwei Polyeder heißen kongruent, wenn sie zur Deckung gebracht werden können. Zwei Polyeder heißen symmetrisch, wenn sie in solche Lage gebracht werden können, daß jede Ecke des einen zu einer entsprechenden Ecke des andern in Beziehung auf eine Ebene symmetrisch ist. Zwei kongruente Polyeder und ebenso zwei symmetrische Polyeder haben die entsprechenden Kanten, Winkel und Keile bezw. gleich; je zwei entsprechende Flächen sind kongruent; je zwei entsprechende Vielkante sind entsprechend-gleich, und zwar bei kongruenten Polyedern kongruent, bei symmetrischen symmetrisch (I. Anh. 15. a und II. Anh. 28. a). Für kongruente und symmetrische Polyeder gebraucht man die gemeinsame Bezeichnung: entsprechend-gleich.

d. Zwei Polyeder heißen ähnlich, wenn sie von gleich vielen Flächen begrenzt sind, die unter sich einzeln ähnlich und in beiden Polyedern übereinstimmend gruppiert sind, und wenn die Vielkante an je zwei entsprechenden Ecken durchweg kongruent oder durchweg symmetrisch sind; sie haben also die entsprechenden Winkel und Keile bezw. gleich, und die Kanten des einen sind den entsprechenden Kanten des

*) Fig. 46 (S. 133) stellt das auf solche Weise hergestellte Netz des Polyeders Fig. 45. e (S. 130) vor.

**) Fig. 47 (S. 133) stellt z. B. eine Fläche mit zwei Randlinien vor.

andern proportioniert. Je nachdem die Vielkante an entsprechenden Ecken kongruent oder symmetrisch sind, heißen die Polyeder gleichstimmig ähnlich oder ungleichstimmig ähnlich. Zwei Polyeder, von denen jedes einem von zwei symmetrischen Polyedern gleichstimmig ähnlich ist, sind zu einander ungleichstimmig ähnlich.

2—6: Prisma.

2. a. Zieht man durch die Ecken eines ebenen Vielecks ABCD . . (Fig. 41) in beliebiger Richtung (aber nicht in der Ebene des Vielecks) Parallelen, und legt durch je zwei aufeinanderfolgende Parallelen Ebenen, so werden diese von einer zur Vielecksebene parallelen Ebene nach den Seiten eines zweiten Vielecks A′B′C′D′ . . geschnitten, das dem ersten kongruent ist. (Denn es sind, nach I. 2, je zwei entsprechende Vielecksseiten parallel, daher, nach I. 4. b, je zwei entsprechende Winkel gleich; ferner sind je zwei entsprechende Vielecksseiten gleich, da sie mit den parallelen Verbindungslinien ihrer Endpunkte ein Parallelogramm bilden.) Diese Parallelogramme samt den zwei Vielecken begrenzen ein Polyeder, welches **Prisma** heißt.

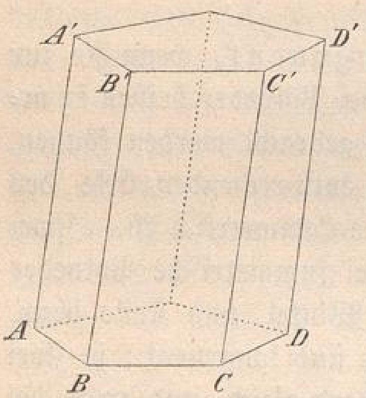

Fig. 41.

b. Ein Prisma ist also ein Polyeder, dessen Oberfläche aus zwei kongruenten und parallel liegenden Vielecken und aus eben so vielen Parallelogrammen besteht, als jedes Vieleck Seiten hat. Die Vielecke heißen die **Grundflächen**, die Parallelogramme die **Seitenflächen** des Prismas, die Gesamtheit der Seitenflächen bildet seinen **Mantel**. Die Seiten der Grundflächen heißen **Grundkanten**, die übrigen, unter sich gleichen und parallelen Kanten heißen **Seitenkanten**. An jeder Ecke befindet sich ein Drei-