Lehrbuch der Stereometrie

Hauck, Guido

Tübingen, 1893

1 - 5: Allgemeine Polyedersätze

urn:nbn:de:hbz:466:1-77777

B. Lehrsätze.

1—5: Allgemeine Polyedersätze.

Lehrsatz 1.

Eulerscher Lehrsatz: Bezeichnet man die Anzahl der Ecken eines Polyeders mit E, die der Flächen mit F, die der Kanten mit K, so ist:

$$E + F = K + 2.$$

Beweis. Man denke sich sämtliche Ecken des Polyeders (Fig. 45. e, S. 130) durch einen aus lauter Kanten zusammengesetzten polygonalen Zug 1 2 3 . . . 12, der sich nicht selbst durchschneidet, verbunden (vgl. III. Einl. 1. b. Anm., Bedingung 1). Besteht dieser Zug aus k_1 Kanten, so ist:

$$E = k_1 + 1. \qquad (1)$$

Ist k_2 die Anzahl der nicht dem Zuge angehörigen Kanten, so ist:

$$k_1 + k_2 = K. \qquad (2)$$

Man denke sich hierauf die Oberfläche des Polyeders längs jenes Kantenzuges aufgeschnitten und in einer Ebene zu einem Netze (Fig. 46) ausgebreitet (vgl. III. Einl. 1. b. Anm., Bedingung 2). Dann läßt sich leicht zeigen, daß in der Netzfigur stets die Anzahl F der Flächen um 1 größer ist als die Anzahl k_2 der Kanten, in denen die Flächen noch zusammenhängen. Aus den in III. Einl. 1. b besprochenen Eigenschaften einer Netzfigur folgt nämlich, daß die Netzfigur betrachtet werden kann als ein Band von einfach an einander gereihten Flächen, von denen unter Umständen Seitenäste abzweigen, die ebenfalls eine einfache Reihe von Flächen bilden; von den letzteren können dann wieder Nebenzweige abzweigen, u. s. f. Denkt man sich nun das Hauptband von dessen äußerster Fläche bis zur letzten durchlaufen (Weg abcde in Fig. 46), so ist die Anzahl der durchlaufenen

Flächen um 1 größer als die Anzahl der überschrittenen Kanten. Beläuft man dann noch vom Hauptband aus die einzelnen Seitenäste (Wege bf, cg, dhi), und von diesen aus — deren Nebenzweige (Weg hk): so ist die Anzahl der neu hinzukommenden Flächen jedesmal gleich der Anzahl der neu überschrittenen Kanten. Es ist somit die Anzahl der im ganzen belaufenen Flächen um 1 größer als die Anzahl der im ganzen überschrittenen Kanten, d. h:

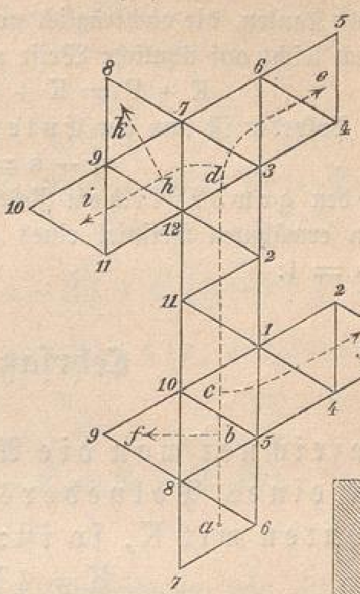

Fig. 46.

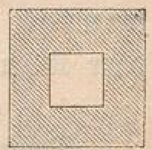

Fig. 47.

$$F = k_2 + 1 . \qquad (3)$$

Addiert man (1) und (3), so folgt mit Berücksichtigung von (2):

$$E + F = K + 2 .$$

Anm. Obiger Lehrsatz gilt für alle gewöhnlichen Polyeder (vgl. III. Einl. 1. b. Anm.). Auf ein außergewöhnliches Polyeder erstreckt sich der Beweis zunächst nicht. Doch giebt es auch unter ihnen „Eulersche Polyeder", d. h. solche, für welche der Satz gilt. Das Vorhandensein von mehrfach zusammenhängenden Flächen und das Mehrfachzusammenhängen der Gesamtoberfläche (III. Einl. 1. b. Anm.) kann sich nämlich unter Umständen kompensieren. Z. B. ist für ein röhrenförmiges Prisma, dessen Grundfläche durch Fig. 47 vorgestellt wird: $E = 16$, $F = 10$, $K = 24$, folglich die Eulersche Gleichung zutreffend. — Der Satz samt Beweis kann leicht verallgemeinert werden, so daß er sich auf sämtliche Klassen von Polyedern erstreckt: Ist es nämlich nicht möglich, die Ecken eines Polyeders durch einen einzigen Kantenzug zu verbinden, so nehme man mehrere getrennte Kantenzüge. Schneidet man hierauf die Polyederoberfläche nach den Kanten dieser Züge auf, und wird dadurch der Zusammenhang der Oberfläche noch nicht in der Art gelöst, daß ein Ausbreiten zu einem ebenen Netz möglich ist, so schneide man nachträglich noch nach weiteren Kanten auf (jedoch nur nach so vielen, daß man ein aus einem einzigen Stück bestehendes Netz erhält). Ist nun z die Anzahl der Kantenzüge, s die Anzahl der Kanten, die nachträglich noch durchschnitten werden mußten, so läßt sich leicht auf ähnliche Weise wie oben zeigen, daß jederzeit:

$$E + F = K + z - s + 1$$

ist. Ein Polyeder ist nun ein Eulersches, wenn

$$z - s = 1$$

ist. Bei den gewöhnlichen Polyedern ist $z = 1$, $s = 0$. Bei dem oben erwähnten Beispiel eines außergewöhnlichen Polyeders ist $z = 2$, $s = 1$.

Lehrsatz 2.

Bezeichnet man die Anzahl aller Vieleckswinkel eines Polyeders mit W, die Anzahl der Kanten mit K, so ist:

$$K = \tfrac{1}{2} W.$$

Beweis. Denkt man sich sämtliche Flächen einzeln von dem Polyeder abgehoben, so ist in jeder die Anzahl der Winkel gleich der Anzahl der Seiten; die Gesamtanzahl der Winkel ist also gleich der Gesamtanzahl der Vieleckseiten. Denkt man sich dann die Vielecke wieder auf das Polyeder aufgelegt, so vereinigen sich je zwei Vieleckseiten zu einer Kante, während die Anzahl der Winkel unverändert bleibt. Somit ist: $K = \frac{1}{2} W$.

Zusatz. Da K immer eine ganze Zahl ist, so muß W immer eine gerade Zahl sein. Daher können bei einem Polyeder Flächen von ungerader Seitenzahl oder Ecken von ungerader Kantenzahl nur in gerader Anzahl vorkommen.

Lehrsatz 3.

Hat ein Polyeder E Ecken, und betragen alle seine Vieleckswinkel zusammen N Rechte, so ist:

$$N = 4(E - 2).$$

Beweis. Die Oberfläche des Polyeders enthalte z_3 Dreiecke, z_4 Vierecke, z_5 Fünfecke u. s. w.; dann ist (mit

Benützung der Bezeichnungen der vorhergehenden Sätze):

$$z_3 + z_4 + z_5 + \cdots\cdots = F,$$

und

$$\begin{aligned} 3z_3 + 4z_4 + 5z_5 + \cdots &= W \\ &= 2K \quad \text{(III. 2).} \end{aligned}$$

Nun betragen die Winkel eines n-ecks: $2(n-2)$ Rechte, also ist:

$$\begin{aligned} N &= 2\left[z_3(3-2) + z_4(4-2) + z_5(5-2) + \cdots\right] \\ &= 2(3z_3 + 4z_4 + 5z_5 + \cdots) - 4(z_3 + z_4 + z_5 + \cdots) \\ &= 2.2K - 4F \\ &= 4(K - F), \end{aligned}$$

oder, da (nach III. 1) $K - F = E - 2$ ist:

$$N = 4(E-2).$$

Zusatz. Vermittels der (unabhängig von Lehrs. 1 bewiesenen) drittletzten Gleichung: $N = 4(K - F)$ ergiebt sich ein zweiter Beweis für Lehrs. 1. Projiziert man nämlich das Polyeder auf eine Ebene, die zu keiner seiner Flächen senkrecht ist, so ist die Projektion eines n-ecks wieder ein n-eck; daher ist die Summe aller Vieleckswinkel des Polyeders gleich der Summe ihrer Projektionen. Fallen nun die Projektionen von e_u Polyederecken auf den Umfang der Projektionsfigur, und die Projektionen von e_i Ecken ins Innere derselben, so ist die Summe aller Vieleckswinkel der Projektionsfigur $= 2.(e_u - 2)2R + e_i.4R = (e_u + e_i - 2).4R = (E-2)4R$; daher ist: $(E-2)4 = N = 4(K-F)$, oder: $E + F = K + 2$. — Dieser Bew. erstreckt sich jedoch nur auf konvexe Polyeder (vgl. III. Einl. 1. b. Anm.).

Lehrsatz 4.

	Flächen	Ecken	Kanten
a. Das Tetraeder hat . .	4	4	6
b. „ Hexaeder „ . .	6	8	12
c. „ Oktaeder „ . .	8	6	12
d. „ Dodekaeder „ . .	12	20	30
e. „ Ikosaeder „ . .	20	12	30

Beweis. Das Dodekaeder (welches als Beispiel dienen mag) hat 5-ecke und 3-kante. Da in jeder Fläche 5 Kanten liegen, aber jede Kante zweien Flächen zugleich angehört, so ist:

$$K = \frac{5F}{2} \quad \text{oder:} \quad F = \tfrac{2}{5}K.$$

Da ferner von jeder Ecke drei Kanten ausgehen, aber jede Kante zweien Ecken zugleich angehört, so ist:

$$K = \frac{3E}{2} \quad \text{oder:} \quad E = \tfrac{2}{3}K.$$

Setzt man nun diese Werte von F und E ein in die für alle Polyeder geltende Gleichung:

$$E + F = K + 2 \qquad \text{(III. 1)},$$

so folgt:

$$\tfrac{2}{3}K + \tfrac{2}{5}K = K + 2,$$

woraus:

$$K = 30,$$
$$F = \tfrac{2}{5} . 30 = 12,$$
$$E = \tfrac{2}{3} . 30 = 20.$$

Bei den übrigen Polyedern sind die Schlüsse analog.

Zusatz. Man bemerke, daß Hexaeder und Oktaeder gleiche Kantenzahl haben, und daß die Eckenzahl des einen gleich der Flächenzahl des andern ist. Man nennt daher diese zwei regul. Polyeder einander zugeordnet oder reziprok. Aus dem nämlichen Grunde sind Dodekaeder und Ikosaeder einander zugeordnet. Das Tetraeder, dessen Eckenzahl gleich der Flächenzahl ist, ist sich selbst zugeordnet.

Lehrsatz 5.

Um jedes reguläre Polyeder und in jedes reguläre Polyeder läßt sich eine Kugel beschreiben; beide Kugeln sind konzentrisch.

Beweis. Es seien P und Q (Fig. 48) die Mittelpunkte zweier benachbarten Flächen eines regulären Polyeders; M sei der Mittelpunkt der Kante AB, in der sie an einander stoßen. Errichtet man auf den zwei Flächen in P und Q die Senkrechten, so müssen diese sich schneiden, da sie (nach I. 8. a und c) beide in der Mittellotebene von AB (Ebene durch MP und MQ) liegen. Der Schnittpunkt O hat nun (nach I. 12. b) von sämtlichen Ecken der zwei Flächen gleiche Entfernung, ist folglich der Mittelpunkt der diesen zwei Flächen umbeschriebenen Kugel. Zieht man ferner OM, so ist $\triangle$ OPM $\cong$ OQM (weil PM = QM), folglich ist OP = OQ. Punkt O hat also auch von den zwei Flächen gleiche Entfernung. — Ist hierauf R der Mittelpunkt einer dritten Fläche des regul. Polyeders, welche mit der Fläche P die Kante CD gemein hat: so ist das aus den Flächen P und R bestehende Gebilde dem aus den Flächen P und Q bestehenden Gebilde kongruent. Daher muß auch die den Flächen P und R umbeschriebene Kugel den gleichen Halbmesser — und ihr Mittelpunkt O′ die gleiche Entfernung von beiden Flächen haben wie bei dem ersten Gebilde. Nun liegt O′ wieder auf der in P errichteten Senkrechten, also muß, weil PO′ = PO ist, O′ mit O zusammenfallen. — In gleicher Weise kann man dann zu einer vierten Fläche u. s. f. übergehen und der Reihe nach beweisen, daß die zuerst gefundene Kugelfläche auch durch sämtliche übrigen Ecken des Polyeders geht, sowie daß ihr Mittelpunkt von sämtlichen Flächen gleich weit entfernt ist, daß folglich eine aus O mit Halbmesser OP beschriebene Kugel sämtliche Flächen berührt.

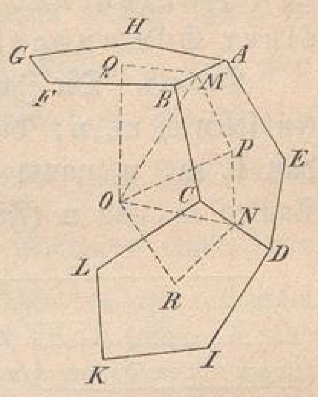

Fig. 48.

Zusatz. Die einbeschriebene Kugel berührt die Flächen in ihren Mittelpunkten.