Lehrbuch der Stereometrie

Hauck, Guido

Tübingen, 1893

6 - 16: Berechnung v. Prisma, Pyramide, Prismatoid, u.s.w.

urn:nbn:de:hbz:466:1-77777

6—16: **Berechnung von Prisma, Pyramide, Prismatoid, u. s. w.**

Lehrsatz 6.

Die Zahl der Kubikeinheiten, die ein Quader enthält, ist gleich dem Produkt aus den Zahlen der Längeneinheiten dreier von einer Ecke ausgehenden Kanten.

Beweis. Die Zahlen der Längeneinheiten der drei Kanten seien l, m, n; die Längeneinheit sei so klein gewählt, daß l, m, n ganze Zahlen seien. Das Rechteck mit den Kanten m und n (Fig. 49), das als Grundfläche angesehen werde, enthält mn quadratische Flächeneinheiten. Denkt man sich auf jede derselben einen Würfel gleich der Kubikeinheit gestellt, so bildet die Gesamtheit dieser Würfel einen Teil-Quader Q, dessen Höhe eine Längeneinheit, und dessen Inhalt mn Kubikeinheiten beträgt. Teilt man nun die dritte Kante in l Längeneinheiten und legt durch jeden Teilpunkt einen Parallelschnitt, so wird dadurch der ursprüngliche Quader in l Teil-Quader geteilt, die alle dem Quader Q kongruent sind (III. Einl. 6), also je mn Kubikeinheiten enthalten. Folglich enthält der ganze ursprüngliche Quader l . mn Kubikeinheiten.

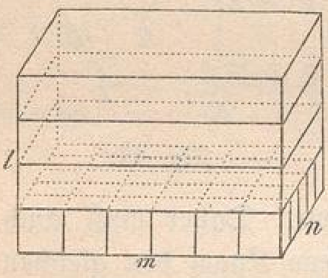

Fig. 49.

Zusatz 1. Kürzer drückt man den Lehrs. so aus: Der Inhalt eines Quaders ist gleich dem Produkt aus drei von einer Ecke ausgehenden Kanten. Bezeichnet man also den Inhalt mit K, die Kantenlängen mit l, m, n, so ist:

$$K = l \, . \, m \, . \, n.$$

Zusatz 2. Ist a die Kante eines Würfels, so ist (nach Zus. 1):

$$K = a^3.$$

Ist die Längeneinheit das Meter, so ist die Kubikeinheit das Kubikmeter; da seine Kante 10 Dezimeter enthält, so enthält das

Kubikmeter 1000 Kubikdezimeter, ebenso das Kubikdezimeter 1000 Kubikcentimeter u. s. w.

Anm. Der in Zus. 1 ausgesprochene Satz ist zunächst nur für den Fall bewiesen, daß l, m, n ganze Zahlen sind; er ist jedoch auch für den Fall von gebrochenen und von irrationalen Zahlen gültig. Sind nämlich l, m, n ursprünglich gebrochene rationale Zahlen, so kann man die Längeneinheit stets nachträglich so klein wählen, daß die Maßzahlen für die Kanten ganze Zahlen werden. Ist z. B. $l = \frac{\mathfrak{l}}{10}$ Millim., $m = \frac{\mathfrak{m}}{10}$ Millim., $n = \frac{\mathfrak{n}}{10}$ Millim., so wählt man ein Zehntelsmillimeter als Längeneinheit, und hat dann: $K = \mathfrak{l} . \mathfrak{m} . \mathfrak{n}$ Kub.-Zehntelsmillim. $= \frac{\mathfrak{l} . \mathfrak{m} . \mathfrak{n}}{1000}$ Kub.-Millim. (nach Zus. 2) $= \frac{\mathfrak{l}}{10} . \frac{\mathfrak{m}}{10} . \frac{\mathfrak{n}}{10}$ Kub.-Millim. $= l . m . n$ Kub.-Millim. — Sind ferner l, m, n irrationale Zahlen, und liegt l zwischen den zwei rationalen Zahlen $\mathfrak{l}$ und $\mathfrak{l}'$*), ebenso m zwischen $\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{m}'$, n zwischen $\mathfrak{n}$ und $\mathfrak{n}'$: so muß K zwischen den zwei Werten $\mathfrak{l}.\mathfrak{m}.\mathfrak{n}$ und $\mathfrak{l}'.\mathfrak{m}'.\mathfrak{n}'$ liegen; zwischen denselben Werten liegt auch das Produkt l.m.n. Es können nun die zwei Zahlen $\mathfrak{l}$ und $\mathfrak{l}'$, $\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{m}'$, $\mathfrak{n}$ und $\mathfrak{n}'$ einander ganz beliebig nahe genommen werden, so daß der Unterschied zwischen den zwei Werten $\mathfrak{l}.\mathfrak{m}.\mathfrak{n}$ und $\mathfrak{l}'.\mathfrak{m}'.\mathfrak{n}'$ beliebig klein wird.

Lehrsatz 7.

a. Jedes schiefe Prisma ist gleich einem senkrechten Prisma, dessen Höhe gleich der Seitenkante, und dessen Grundfläche gleich dem Querschnitt des schiefen Prismas ist.

b. Jedes Parallelflach wird durch einen Diagonalschnitt halbiert.

Beweis. a. Das schiefe Prisma sei ABC.., A'B'C'.. (Fig. 50). Zwei zu den Seitenkanten AA', BB',.. senkrechte Ebenen, deren Entfernung = AA' ist, mögen den Prismenmantel, bezw. dessen Verlängerung nach den Viel-

*) Ist z. B. $l = \sqrt{2} = 1{,}41421\ldots$, so liegt l zwischen den zwei rationalen Zahlen $\mathfrak{l} = 1{,}41421$ und $\mathfrak{l}' = 1{,}41422$.

ecken DEF.. und D′E′F′.. schneiden; dann ist DEF.., D′E′F′.. das senkrechte Prisma, dessen Höhe gleich der Seitenkante, und dessen Grundfläche gleich dem Querschnitt des schiefen Prismas ist. Nun ist DD′ = AA′, also auch AD = A′D′, ebenso BE = B′E′, CF = C′F′, u. s. f.; da diese Strecken auf den kongruenten Vielecken DEF.. und D′E′F′.. senkrecht stehen, so können (gemäß I. 7. a) die zwei Polyederstücke DEF.., ABC.. und D′E′F′.., A′B′C′.. zur Deckung gebracht werden und sind also gleich. Fügt man zu jedem das Stück DEF.., A′B′C′.. hinzu, so folgt: Prisma ABC.., A′B′C′.. = DEF.., D′E′F′...

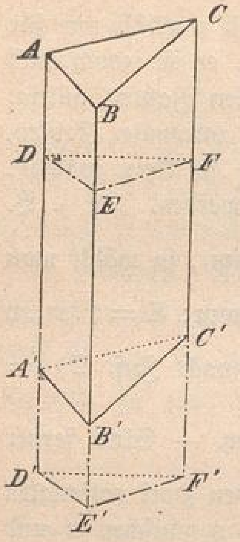

Fig. 50.

Anm. Sollte es nicht möglich sein, einen Querschnitt DEF.. zu legen, der ganz innerhalb des schiefen Prismas fällt, so bringe man beide Querschnitte DEF.. und D′E′F′.. an der Verlängerung des Prismenmantels an. Das schiefe und das senkrechte Prisma stellen sich dann als Differenzen gleicher Polyederstücke dar.

b. Ist ABCD, A′B′C′D′ (Fig. 51) ein schiefwinkliges Parallelflach, und ist EFGH ein zur Kante AA′ senkrechter Querschnitt desselben, so ist EFGH (nach I. 2) ein Parallelogramm, das durch die Diagonale FH in zwei kongruente Dreiecke zerlegt wird. Nun sind (nach a) die zwei schiefen dreiseitigen Prismen ABD, A′B′D′ und CDB, C′D′B′, in die das Parallelflach durch den Diagonalschnitt BDD′B′ zerlegt wird, einzeln gleich den senkrechten Prismen, deren Grundflächen jene zwei kongruenten Dreiecke, und deren Höhen gleich AA′ sind. Diese senkrechten Prismen aber sind kon-

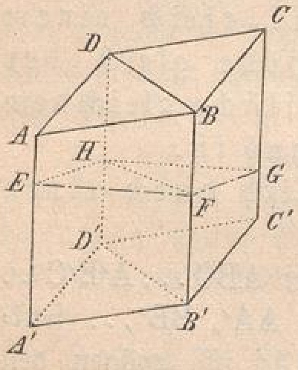

Fig. 51.

gruent (nach III. Einl. 3. a); folglich ſind auch die ſchiefen Prismen einander gleich.

Lehrſatz 8.

a. Zwei Parallelflache, die eine Grundfläche gemein haben, und deren andere Grundflächen in derſelben Ebene liegen, ſind gleich.

b. Jedes Parallelflach läßt ſich in einen Quader von inhaltsgleicher Grundfläche und gleicher Höhe verwandeln.

c. Der Inhalt eines Prismas iſt gleich dem Produkt aus Grundfläche und Höhe.

Beweis. a. ABCD (Fig. 52) ſei die gemeinſchaftliche

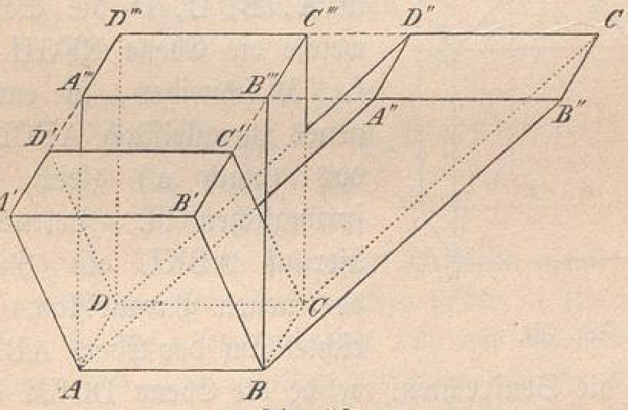

Fig. 52.

Grundfläche der zwei Parallelflache, A′B′C′D′ und A″B″C″D″ ſeien die zwei andern Grundflächen, die in der nämlichen Ebene liegen und kongruent ſind. Verlängert man die Seiten A′D′, B′C′ und B″A″, C″D″ bis zu ihrem gegenſeitigen Schnitt, ſo entſteht in derſelben Ebene ein drittes Parallelogramm A‴B‴C‴D‴, das mit den zwei vorigen — und alſo auch mit ABCD kongruent iſt. Weiter ſind die Verbindungsſtrecken der entſprechenden Ecken von A‴B‴C‴D‴ und ABCD parallel, (denn es iſt z. B. AA‴ ∥ BB‴, weil AB ⧺ A‴B‴). Daher iſt ABCD, A‴B‴C‴D‴ ebenfalls ein Parallelflach. — Nun sind die zwei dreiseitigen Prismen AA'A''', BB'B''' und DD'D''', CC'C''' gleich, da sie zur Deckung gebracht werden können, (denn bringt man die kongr. Grundflächen AA'A''' und DD'D''' zur Deckung, so müssen sich, nach II. Anh. 27, auch die Seitenkanten decken). Subtrahiert man jedes dieser dreiseitigen Prismen von dem vierseitigen Prisma ADD'''A', BCC'''B', so bleibt: Parallelflach ABCD, A'''B'''C'''D''' = ABCD, A'B'C'D'. Ebenso beweist man, daß ABCD, A'''B'''C'''D''' = ABCD, A''B''C''D'' ist. Folglich ist auch ABCD, A'B'C'D' = ABCD, A''B''C''D''.

b. ABCD, EFGH (Fig. 53) sei ein schiefwinkliges Parallelflach. Errichtet man auf der Ebene des als Grundfläche betrachteten Parallelogramms ABCD in A, B, C, D die Senkrechten, welche die Ebene EFGH in I, K, L, M schneiden, so entsteht ein neues Parallelflach ABCD, IKLM, das (nach a) gleich dem ursprünglichen ist. Betrachtet man hierauf ABKI als Grundfläche des neuen Parallelflachs und errichtet auf der Ebene ABKI in A, B, K, I die Senkrechten, welche die Ebene DCLM in O, N, P, Q schneiden, so entsteht ein drittes Parallelflach ABKI, ONPQ, das (nach a) gleich dem vorigen und also auch gleich dem ursprünglichen ist. Dieses dritte Parallelflach ist aber nach der Konstruktion ein Quader. Betrachtet man in ihm ABNO als Grundfläche, so ist diese gleich der Grundfläche ABCD des ursprünglichen Parallelflachs, und es sind die zugehörigen Höhen in Quader und Parallelflach gleich.

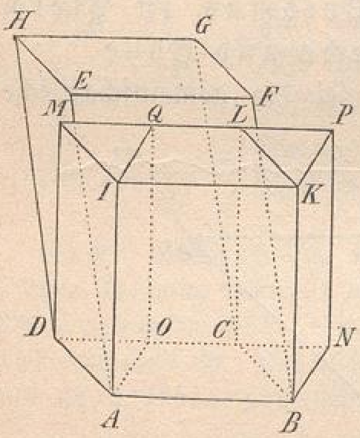

Fig. 53.

c. Die Grundfläche ABCD des Parallelflachs ABCD, EFGH (Fig. 53) sei = G, die zugehörige Höhe = h; dann ist:

Parallelfl. ABCD, EFGH = ABNO, IKPQ (nach b)
= AB . AO . AI (III. 6)
= G . h.

Folglich ist der Satz bewiesen für ein Parallelflach.

Hat man ferner ein dreiseitiges Prisma, dessen Grundfläche = G, Höhe = h ist: so ergänze man das Prisma zum Parallelflach, indem man seine dreieckige Grundfläche zum Parallelogramm ergänzt. Das letztere ist dann = 2 G, folglich das Parallelflach = 2 G . h. Der Inhalt des dreiseitigen Prismas ist aber halb so groß (III. 7. b), also = G . h.

Ein mehrseitiges Prisma endlich, dessen Grundfläche = G, Höhe = h, Inhalt = K ist, läßt sich durch Diagonalschnitte, die durch eine Seitenkante gelegt werden, in lauter dreiseitige Prismen von der Höhe h zerlegen. Sind nun g_1, g_2, g_3 . . . ihre Grundflächen, k_1, k_2, k_3 . . . ihre Inhalte, so ist:

$$\begin{aligned} K &= k_1 + k_2 + k_3 + \ldots \\ &= g_1 h + g_2 h + g_3 h + \ldots \\ &= (g_1 + g_2 + g_3 + \ldots) h \\ &= G . h. \end{aligned}$$

Zusatz 1. Demnach sind zwei Prismen gleich, wenn sie gleiche Grundflächen und gleiche Höhen haben. — Zwei Prismen von gleichen Grundflächen verhalten sich wie ihre Höhen, und zwei Prismen von gleichen Höhen verhalten sich wie ihre Grundflächen. — In zwei gleichen Prismen verhalten sich die Grundflächen umgekehrt wie die Höhen; und: verhalten sich in zwei Prismen die Grundflächen umgekehrt wie die Höhen, so sind sie gleich.

Zusatz 2. Der Inhalt eines Prismas ist gleich dem Produkt aus Querschnitt und Seitenkante (III. 7. a).

Lehrsatz 9.

Ist der Halbmesser eines Cylinders = r, seine Höhe = h, so ist

a. der Inhalt: $K = r^2\pi h$,

b. der Mantel: $M = 2r\pi h$,

c. die Oberfläche: $O = 2r\pi(r + h)$.

Beweis. a. Der Cylinder kann als Prisma betrachtet werden, dessen Grundfläche $= r^2\pi$ ist (III. Einl. 3. d). Daher ist sein Inhalt (III. 8. c):

$$K = r^2\pi h.$$

b. Der Mantel ist (nach III. Einl. 3. d) gleich einem Rechteck, dessen eine Seite $= 2r\pi$, dessen andere Seite $= h$ ist; folglich ist:

$$M = 2r\pi h.$$

c. Die Oberfläche setzt sich zusammen aus dem Mantel und den zwei Grundkreisen; folglich ist:

$$O = 2r\pi h + 2r^2\pi$$
$$= 2r\pi(r + h).$$

Zusatz 1. Die Oberfläche eines Cylinders ist (nach c) gleich dem Mantel eines um den Halbmesser erhöhten Cylinders. — Ist bei einem Cylinder die Höhe gleich dem Halbmesser, so ist sein Mantel gleich der Summe der zwei Grundflächen oder gleich der Hälfte der Oberfläche.

Zusatz 2. Bezeichnet man bei einer cylindrischen Röhre die Höhe mit h, die Halbmesser der zwei konzentrischen Grundkreise mit R und r, die Dicke mit d, so ist der (massive) Inhalt der Röhre:

$$K = (R^2 - r^2)\pi h = (R + r)(R - r)\pi h$$
$$= (2r + d)d\pi h.$$

Lehrsatz 10.

a. Jeder Parallelschnitt einer Pyramide ist ein ihrer Grundfläche ähnliches Vieleck.

b. Parallelschnitt und Grundfläche verhalten sich zu einander wie die Quadrate ihrer Entfernungen — oder der Entfernungen entsprechender Ecken — von der Spitze der Pyramide.

Beweis. **a.** Die Pyramide sei S,ABCD . . (Fig. 54), der Parallelschnitt sei A′B′C′D′ . . . Nach I. 2 sind je zwei entsprechende Seiten des Parallelschnittes und der Grundfläche parallel, daher (nach I. 4. b) je zwei entsprechende Winkel gleich. Ferner folgt aus der Parallelität der Seiten: $\frac{A'B'}{AB} = \frac{SB'}{SB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{SC'}{SC} = \frac{C'D'}{CD}$ u. s. f. Die zwei Vielecke haben also die Winkel einzeln gleich und die entsprechenden Seiten proportioniert, sind folglich ähnlich.

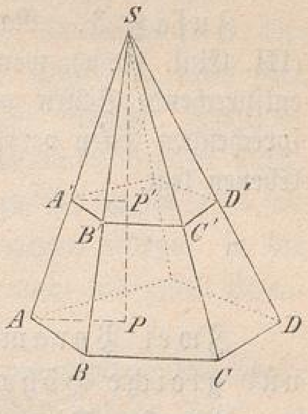

Fig. 54.

b. Sind SP und SP′ die Entfernungen der Spitze von der Grundfläche und vom Parallelschnitt, so ist: $\frac{SA'}{SA} = \frac{SP'}{SP}$ (I. 14. Zus. 3). Da nun A′B′C′D′ . . $\backsim$ ABCD . ., so ist:
$$\frac{A'B'C'D' \,..}{ABCD \,..} = \frac{A'B'^2}{AB^2} = \frac{SA'^2}{SA^2} = \frac{SP'^2}{SP^2}.$$

Zusatz 1. Beide Sätze bleiben gültig, auch wenn die mit der Grundfläche parallele Schnittebene nicht die Kanten selbst, sondern deren Verlängerungen über die Spitze schneidet. Es sind dann die einzelnen Seiten der Schnittfigur mit den entsprechenden Seiten der Grundfläche parallel und entgegengesetzt-gerichtet.

Zusatz 2. Satz a gilt auch umgekehrt: Liegen zwei ähnliche Vielecke ähnlich, d. h. so, daß ihre entsprechenden Seiten parallel sind, so schneiden sich die Verbindungslinien sämtlicher Paare entsprechender Ecken in einem Punkt, welcher der Ähnlichkeitspunkt der zwei Vielecke heißt. Seine Entfernungen von je zwei entsprechenden Ecken verhalten sich wie zwei entsprechende Seiten. Je nachdem die entsprechenden Seiten gleich- oder entgegengesetzt-gerichtet sind, liegt der Ähnlichkeitspunkt außerhalb der Verbindungsstrecken der entsprechenden Ecken oder innerhalb, und heißt demgemäß äußerer Ähnlichkeitspunkt oder innerer Ähnlichkeitspunkt.

Zuſatz 3. Nach Zuſ. 2 entſteht ein Pyramidenrumpf (III. Einl. 10. a), wenn man von zwei ähnlichen Vielecken, deren entſprechende Seiten parallel und gleich-gerichtet ſind, die entſprechenden Ecken verbindet und durch die entſprechenden Seiten Ebenen legt.

Lehrſatz 11.

Zwei Pyramiden, die gleiche Grundflächen und gleiche Höhen haben, ſind an Raum gleich.

Beweis. Die zwei Pyramiden (Fig. 55) können zwiſchen

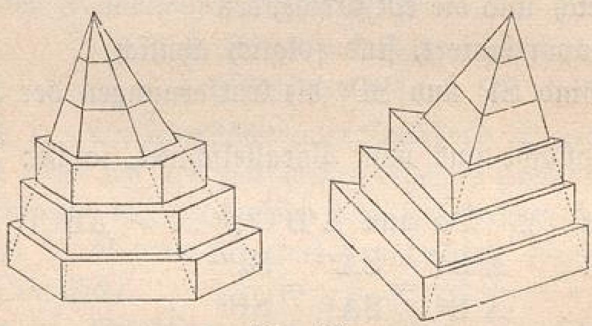

Fig. 55.

zwei parallele Ebenen gelegt werden, ſo daß die Grundflächen in der einen, die Spitzen in der andern liegen. Teilt man dann die Pyramidenhöhe H in n gleiche Teile und legt durch jeden Teilpunkt eine zu jenen Ebenen parallele Ebene, ſo erzeugt jede derſelben in den zwei Pyramiden Parallelſchnitte von gleicher Größe. Denn ſind die Grundflächen = G und G′, die Parallelſchnitte = g und g′, und iſt deren Entfernung von den Spitzen = h, ſo iſt: $\frac{g}{G} = \frac{h^2}{H^2} = \frac{g'}{G'}$, (III. 10. b); da aber $G = G'$, ſo iſt auch $g = g'$. — Man denke ſich nun in jeder Pyramide zwiſchen je zwei aufeinanderfolgenden Parallelſchnitt-Ebenen ein ſenkrechtes Prisma errichtet, deſſen Grundfläche immer der größere der zwei Parallelſchnitte ſei; dadurch entſtehen zwei aus je n Prismen zuſammengeſetzte staffelförmige Körper, deren Kerne die zwei Pyramiden bilden. Jedes Prisma der einen Pyramide ist (nach III. 8. Zus. 1) gleich dem zwischen denselben Parallelebenen liegenden Prisma der andern Pyramide; also sind auch ihre Summen, d. h. die zwei staffelförmigen Körper einander gleich. Dies gilt, wie groß auch n genommen werden mag; die zwei Körper sind also auch noch gleich, wenn $n = \infty$ wird. Dann aber gehen die staffelförmigen Körper in die Pyramiden selbst über; folglich sind auch die zwei Pyramiden gleich.

Zusatz. Der obige Beweis kann unmittelbar übertragen werden auf zwei Körper von irgend welcher andern Form, so daß man den allgemeinen Satz hat (Satz des Cavalieri): Liegen zwei Körper zwischen denselben zwei parallelen Ebenen, und werden sie von jeder beliebigen dritten Ebene, die den zwei ersten parallel ist, nach flächengleichen Figuren geschnitten, so sind sie an Raum gleich. Es sind ferner nicht bloß die ganzen Körper gleich, sondern auch irgend zwei Schichten derselben, die zwischen den nämlichen Parallelschnitt-Ebenen liegen. — Auch wenn die Schnittfiguren keine Vielecke, sondern krummlinige Figuren (z. B. Kreise) sind, bleibt der Satz gültig; denn jede krummlinige Figur kann als Vieleck von unendl. vielen unendl. kleinen Seiten angesehen werden.

Lehrsatz 12.

a. Jedes dreiseitige Prisma läßt sich in drei gleiche Pyramiden zerlegen.

b. Der Inhalt einer Pyramide ist der dritte Teil des Inhaltes eines Prismas, das gleiche Grundfläche und gleiche Höhe mit ihr hat.

c. Der Inhalt einer Pyramide ist der dritte Teil des Produktes aus Grundfläche und Höhe.

Beweis. a. Das dreiseitige Prisma sei ABC, A′B′C′

(Fig. 56). Legt man durch die drei Ecken A, B′, C eine Ebene, so schneidet diese von dem Prisma eine dreiseitige Pyramide B′, ABC ab, und es bleibt eine vierseitige Pyramide übrig, deren Spitze B′, und deren Grundfläche das Parallelogramm AA′C′C ist. Diese vierseitige Pyramide wird durch den Diagonalschnitt AC′B′ in zwei dreiseitige Pyramiden B′, AA′C′ und B′, C′CA zerlegt, welche gleiche Grundflächen AA′C′ = C′CA und gemeinschaftliche Spitze B′, also gleiche Höhen haben, und daher an Raum gleich sind (III. 11).

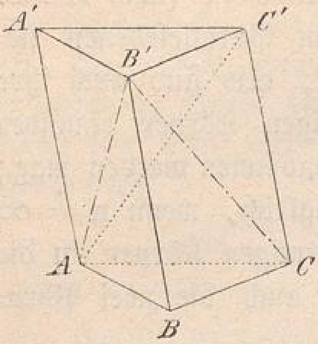

Fig. 56.

Um weiter zu beweisen, daß auch die zuerst abgeschnittene Pyramide B′, ABC gleich einer der zwei letzteren, z. B. gleich B′, C′CA ist, betrachte man in beiden die Ecke A als Spitze; dann haben sie gleiche Grundflächen CBB′ = B′C′C und gemeinschaftliche Spitze A, sind folglich gleich (III. 11). Das Prisma ist somit in drei gleiche Pyramiden zerlegt; jede Pyramide ist gleich dem dritten Teil des Prismas.

b. Die Pyramide sei A′, ABCD . . (Fig. 57). Man lege durch A′ eine Ebene parallel zur Grundfläche und ziehe durch B, C, D . . die Parallelen zu AA′, welche die Ebene schneiden in B′, C′, D′ . . . Dadurch entsteht ein Prisma ABCD . ., A′B′C′D′ . ., das dieselbe Grundfläche und gleiche Höhe wie die Pyramide hat. Die durch AA′ gelegten Diagonalebenen des Prismas sind auch Diagonalebenen der Pyramide und teilen sie in lauter dreiseitige Pyramiden. Von diesen ist jede (nach a) der dritte Teil des dreiseitigen Prismas, das mit ihr die nämliche Grundfläche hat. Daher ist auch die Summe aller Pyramiden der

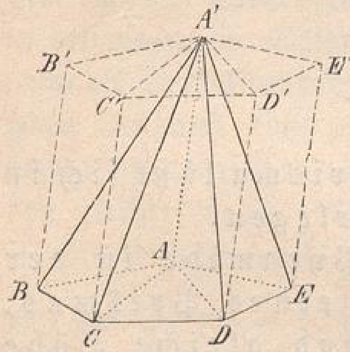

Fig. 57.

dritte Teil der Summe aller Prismen, oder: Pyramide $A', ABCD \ldots = \frac{1}{3}$ Prisma $ABCD \ldots, A'B'C'D' \ldots$ Dann aber ist die Pyramide auch der dritte Teil jedes andern Prismas, das gleiche Grundfläche und gleiche Höhe mit ihr hat (III. 8. Zus. 1).

c. Ist der Inhalt der Pyramide $= K$, die Grundfläche $= G$, die Höhe $= h$, so ist der Inhalt eines Prismas von gleicher Grundfläche und gleicher Höhe $= Gh$ (III. 8. c), folglich (nach b) der Inhalt der Pyramide:

$$K = \frac{1}{3} G h.$$

Zusatz 1. Zwei Pyramiden von gleichen Grundflächen und gleichen Höhen sind gleich. — Zwei Pyramiden von gleichen Grundflächen verhalten sich wie ihre Höhen, und zwei Pyramiden von gleichen Höhen verhalten sich wie ihre Grundflächen. — In zwei gleichen Pyramiden verhalten sich die Grundflächen umgekehrt wie die Höhen; und: zwei Pyramiden sind gleich, wenn sich die Grundflächen umgekehrt wie die Höhen verhalten.

Zusatz 2. In zwei ähnlichen Pyramiden sind sämtliche Paare entsprechender Strecken proportioniert. Sind daher die Grundflächen $= G$ und G', die Höhen $= h$ und h', und irgend zwei entsprechende Strecken $= a$ und a', so ist:

$$\frac{h}{h'} = \frac{a}{a'} \text{ und } \frac{G}{G'} = \frac{a^2}{a'^2}; \text{ daher: } \frac{K}{K'} = \frac{\frac{1}{3} G h}{\frac{1}{3} G' h'} = \frac{a^3}{a'^3}.$$

D. h.: Die Inhalte ähnlicher Pyramiden verhalten sich wie die Kuben entsprechender Strecken.

Zusatz 3. Hat man zwei ähnliche Polyeder und zerlegt sie von zwei entsprechenden Ecken aus in Pyramiden (III. Einl. 9), so sind von diesen je zwei entsprechende ähnlich; Zus. 2 gilt also für je zwei entsprechende Pyramiden, folglich auch für ihre Summen, d. h.: Die Inhalte ähnlicher Polyeder verhalten sich wie die Kuben entsprechender Strecken. — Da ferner die Flächeninhalte je zweier entsprechenden Flächen sich verhalten wie die Quadrate entsprechender Strecken, so gilt dies auch für ihre Summen, d. h.: Die Oberflächen ähnlicher Polyeder verhalten sich wie die Quadrate entsprechender Strecken. Dies gilt sowohl für Polyeder, die gleichstimmig ähnlich, als für solche, die ungleichſtimmig ähnlich ſind. Namentlich folgt: **Zwei ſymmetriſche Polyeder haben gleichen Rauminhalt und gleiche Oberfläche.**

Lehrſatz 13.

Iſt der Halbmeſſer des Grundkreiſes eines Kegels $= r$, ſeine Höhe $= h$, ſeine Mantellinie $= s$, ſo iſt

a. der Inhalt: $K = \frac{1}{3} r^2 \pi h$,

b. der Mantel: $M = r\pi s = r\pi\sqrt{r^2 + h^2}$,

c. die Oberfläche: $O = r\pi(r + s)$.

Beweis. a. Der Kegel kann als Pyramide betrachtet werden, deren Grundfläche $= r^2\pi$ iſt (III. Einl. 8. d). Daher iſt ſein Inhalt (III. 12. c):

$$K = \tfrac{1}{3} r^2 \pi . h.$$

b. Der Mantel des Kegels wird bei der Abwicklung ein Kreisausſchnitt (III. Einl. 8. d), deſſen Halbmeſſer $= s$, und deſſen Bogen $= 2r\pi$ iſt. Somit iſt:

$$M = \frac{2r\pi . s}{2} = r\pi s,$$

oder, da $s = \sqrt{r^2 + h^2}$ iſt:

$$M = r\pi\sqrt{r^2 + h^2}.$$

c. Die Oberfläche iſt gleich Grundkreis plus Mantel, alſo:

$$O = r^2\pi + r\pi s$$
$$= r\pi(r + s).$$

Lehrſatz 14.

Sind die Grundflächen eines Pyramidenrumpfes $= G$ und G', und iſt ſeine Höhe $= h$, ſo iſt ſein Inhalt:

$$K = \frac{h}{3}\left(G + \sqrt{GG'} + G'\right).$$

Beweis. Ergänzt man den Pyramidenrumpf ABC . ., A′B′C′ . . (Fig. 54, S. 145) zur Pyramide und bezeichnet die Höhe SP der ganzen Pyramide mit x, die Höhe SP′ der Ergänzungspyramide mit y, so hat man zur Bestimmung von x und y die zwei Gleichungen:

$$\frac{x}{y} = \frac{\sqrt{G}}{\sqrt{G'}} \qquad \text{(III. 10. b)},$$
$$x - y = h.$$

Hieraus folgt:

$$\frac{x}{h} = \frac{\sqrt{G}}{\sqrt{G} - \sqrt{G'}} \qquad \frac{y}{h} = \frac{\sqrt{G'}}{\sqrt{G} - \sqrt{G'}}$$
$$x = h\frac{\sqrt{G}}{\sqrt{G} - \sqrt{G'}} \qquad y = h\frac{\sqrt{G'}}{\sqrt{G} - \sqrt{G'}}.$$

Nun ist (nach III. 12. c):

$$K = \frac{Gx}{3} - \frac{G'y}{3}$$
$$= \frac{h}{3}\,\frac{G\sqrt{G} - G'\sqrt{G'}}{\sqrt{G} - \sqrt{G'}}$$
$$= \frac{h}{3}\left(G + \sqrt{GG'} + G'\right).$$

Zusatz. Demnach sind zwei Pyramidenrümpfe gleich, wenn ihre Grundflächen und Höhen bezw. gleich sind.

Lehrsatz 15.

Die Halbmesser der Grundkreise eines Kegelrumpfes seien = r und r′, seine Mantellinie sei = s, die Strecke des Mittellotes der Mantellinie zwischen dieser und der Achse = p; dann ist

a. der Inhalt: $K = \frac{\pi h}{3}\left(r^2 + rr' + r'^2\right)$, (1)

b. der Mantel: $M = (r + r')\pi s$, (2)

oder $M = 2p\pi h$. (3)

Beweis. a. Der Kegelrumpf kann als Pyramidenrumpf angesehen werden, in welchem $G = r^2\pi$, $G' = r'^2\pi$, also $\sqrt{GG'} = r r' \pi$ ist. Daher ist (nach III. 14):

$$K = \frac{\pi h}{3}\left(r^2 + r r' + r'^2\right). \qquad (1)$$

b. Ergänzt man den Kegelrumpf zum Kegel und bezeichnet die Mantellinie des ganzen Kegels mit x, diejenige des Ergänzungskegels mit y, so ist:

$$\frac{x}{y} = \frac{r}{r'}$$

$$x - y = s,$$

woraus folgt:

$$\frac{x}{s} = \frac{r}{r - r'} \qquad \frac{y}{s} = \frac{r'}{r - r'}$$

$$x = s\frac{r}{r - r'} \qquad y = s\frac{r'}{r - r'}.$$

Nun ist (nach III. 13. b):

$$M = r\pi x - r'\pi y = s\pi\frac{r^2 - r'^2}{r - r'}$$

$$= (r + r')\pi s. \qquad (2)$$

Ist ferner ABB'A' (Fig. 58) der halbe Achsenschnitt des Kegelrumpfes ($AB = r$, $A'B' = r'$, $AA' = h$, $BB' = s$), und errichtet man auf BB' in N das Mittellot, das die Achse AA' in P schneidet, so ist $NP = p$. Fällt man $B'C \perp AB$ und $NM \perp AA'$, so ist $\triangle MNP \sim CB'B$, daher: $\frac{MN}{NP} = \frac{CB'}{B'B}$, oder: $\frac{\frac{1}{2}(r + r')}{p} = \frac{h}{s}$, $(r + r')s = 2ph$.

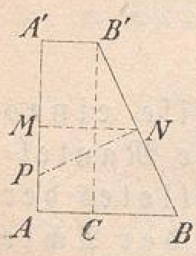
Fig. 58.

Dies eingesetzt in (2) giebt:

$$M = 2p\pi h. \qquad (3)$$

Zusatz 1. Gleichung (3) gilt auch für den ganzen Kegel; denn ein Kegel kann angesehen werden als Kegelrumpf, dessen einer Grundkreis Null ist.

Zusatz 2. Gleichung (2), in der Form: $M = 2\,\frac{r + r'}{2}\,\pi s$ geschrieben, besagt (vgl. III. 9. b), daß der Mantel des Kegelrumpfes gleich dem Mantel eines Cylinders ist, dessen Höhe gleich der Mantellinie, und dessen Halbmesser gleich dem arithmetischen Mittel der Grundkreis-Halbmesser des Kegelrumpfes ist. — Gleichung (3) lehrt ferner, daß der Mantel des Kegelrumpfes gleich dem Mantel eines Cylinders ist, der die gleiche Höhe, und das Mittellot der Mantellinie zum Halbmesser hat.

Zusatz 3. Soll der Mantel in der Höhe und den zwei Grundkreis-Halbmessern ausgedrückt werden, so ist in Gleichung (2) für s zu setzen:

$$s = \sqrt{h^2 + (r - r')^2}.$$

Lehrsatz 16.

Sind die Grundflächen eines Prismatoides $= G$ und G', und ist der Mittelschnitt $= M$, die Höhe $= h$, so ist der Inhalt:

$$K = \frac{h}{6}\left(G + G' + 4\,M\right).$$

Beweis. Die Grundflächen seien (Fig. 59) $ABC.. = G$ und $FGH.. = G'$, der Mittelschnitt sei $KLM.. = M$. Man zerlege den Mittelschnitt von einem in seinem Innern beliebig gewählten Punkt T aus in die Dreiecke $TKL = \triangle_1$, $TLM = \triangle_2$, u. s. f. Zerlegt man ferner das Prismatoid von demselben Punkt T aus in Pyramiden (III. Einl. 9), so zerfällt es in 3 Hauptteile:

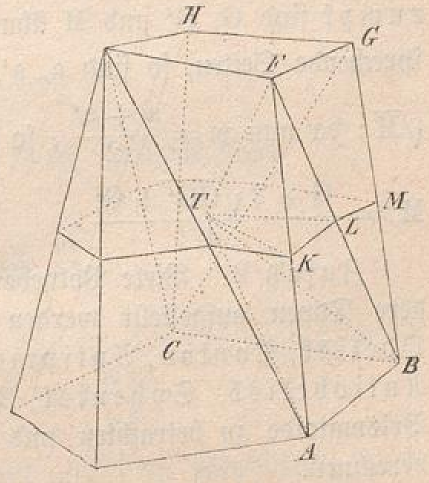

Fig. 59.

1) Pyr. $T,ABC.. = \frac{1}{3}G\,\frac{h}{2}$,

2) Pyr. $T,FGH.. = \frac{1}{3}G'\frac{h}{2}$,

3) alle dreiseitigen Pyramiden, deren Grundflächen die

Seitenflächen des Prismatoides bilden. Eine dieser letzteren Pyramiden sei T, ABF; von ihrer Grundfläche ABF wird durch die Seite KL des Mittelschnittes ein ähnliches Dreieck KLF mit halb so großen Seiten abgeschnitten; daher ist $\triangle$ ABF $= 4 . \triangle$ KLF, und folglich Pyr. T, ABF $= 4$. Pyr. T, KLF (III. 12. Zus. 1). Betrachtet man nun in Pyr. T, KLF das Dreieck TKL $= \triangle_1$ als Grundfläche, so ergiebt sich ihr Inhalt $= \frac{1}{3} \triangle_1 \frac{h}{2}$; folglich ist Pyr. T, ABF $= 4 . \frac{1}{3} \triangle_1 \frac{h}{2} = \frac{2}{3} \triangle_1 h$. Die Summe aller dreiseitigen Pyramiden ist daher $= \frac{2}{3}(\triangle_1 + \triangle_2 + \ldots) h = \frac{2}{3} M h$. — Der Inhalt des ganzen Prismatoides ist somit:

$$K = \frac{1}{3} G \frac{h}{2} + \frac{1}{3} G' \frac{h}{2} + \frac{2}{3} M h$$
$$= \frac{h}{6}\left(G + G' + 4 M\right).$$

Zusatz 1. In dieser Formel sind alle im vorangehenden bewiesenen Inhaltsformeln als spezielle Fälle enthalten (vgl. III. Einl. 12). Beim Prisma ist $G = G' = M$. — Bei der Pyramide ist $G' = 0$, $M = \frac{G}{4}$ (III. 10. b). — Beim Pyramidenrumpf sind G, G' und M ähnlich; sind also a, a', m drei entsprechende Seiten, so sind a, a', m proportioniert mit $\sqrt{G}$, $\sqrt{G'}$, $\sqrt{M}$; da nun $m = \frac{a + a'}{2}$, so ist auch $\sqrt{M} = \frac{\sqrt{G} + \sqrt{G'}}{2}$, also $M = \frac{G + 2\sqrt{GG'} + G'}{4}$.

Zusatz 2. Viele Polyederformen, die zuweilen als besondere Typen aufgestellt werden (z. B. mit den Benennungen: Obelisk, Ponton, Antiprisma, Antipyramidenrumpf, Antiobelisk, Sphenisk, Walm, u. s. f.) sind als einfache Prismatoide zu betrachten und nach der Prismatoid-Formel zu berechnen.

Als Beispiel für die Berechnung diene das schiefabgeschnittene dreiseitige Prisma. Sind von ihm geg.: die drei Parallelkanten a, b, c und der zu ihnen senkrechte Querschnitt Q, so betrachte man das Trapez mit den Seiten a und b als Grundfläche G, die Kante c als Grundfläche G'. Bezeichnet man die Entfernung der Kanten a und b mit e, und die Entfernung der Kante c von der Trapezfläche G mit h, so stellt h die Höhe des Prismatoides vor, und es ist: $Q = \frac{eh}{2}$.

Die Grundflächen des Prismatoides sind: $G = \frac{a+b}{2}e$, $G' = 0$; der Mittelschnitt M ist ein Trapez mit den Parallelseiten $\frac{a+c}{2}$ und $\frac{b+c}{2}$ und der Höhe $\frac{e}{2}$ also ist: $M = \frac{a+b+2c}{4} \cdot \frac{e}{2}$. Hiernach ergiebt sich:

$$K = \frac{h}{6}\left(\frac{a+b}{2}e + (a+b+2c)\frac{e}{2}\right)$$
$$= \frac{he}{6}(a+b+c)$$
$$= Q\frac{a+b+c}{3}.$$

Das schiefabgeschnittene dreiseitige Prisma ist also gleich einem senkrechten Prisma, dessen Grundfläche der Querschnitt, und dessen Höhe das arithmetische Mittel zwischen den Parallelkanten des schiefabgeschnittenen Prismas ist.

17—20: **Berechnung der Kugel. Guldins Regel.**

Lehrsatz 17.

Ist der Halbmesser einer Kugel $= R$, so ist

a. der Inhalt: $K = \frac{4}{3}R^3\pi$,

b. die Oberfläche: $O = 4R^2\pi$.

Beweis. a. Man denke sich auf dem Grundkreis einer von der Kugel abgeschnittenen Halbkugel einen Cylinder errichtet, dessen Höhe gleich dem Halbmesser ist. Auf dem