Lehrbuch der Stereometrie

Hauck, Guido

Tübingen, 1893

17 - 20: Berechnung der Kugel. Guldins Regel

urn:nbn:de:hbz:466:1-77777

rallelkanten a, b, c und der zu ihnen senkrechte Querschnitt Q, so betrachte man das Trapez mit den Seiten a und b als Grundfläche G, die Kante c als Grundfläche G'. Bezeichnet man die Entfernung der Kanten a und b mit e, und die Entfernung der Kante c von der Trapezfläche G mit h, so stellt h die Höhe des Prismatoides vor, und es ist: $Q = \frac{eh}{2}$.

Die Grundflächen des Prismatoides sind: $G = \frac{a+b}{2}e$, $G' = 0$; der Mittelschnitt M ist ein Trapez mit den Parallelseiten $\frac{a+c}{2}$ und $\frac{b+c}{2}$ und der Höhe $\frac{e}{2}$ also ist: $M = \frac{a+b+2c}{4} \cdot \frac{e}{2}$. Hiernach ergiebt sich:

$$K = \frac{h}{6}\left(\frac{a+b}{2}e + (a+b+2c)\frac{e}{2}\right)$$
$$= \frac{he}{6}(a+b+c)$$
$$= Q\frac{a+b+c}{3}.$$

Das schiefabgeschnittene dreiseitige Prisma ist also gleich einem senkrechten Prisma, dessen Grundfläche der Querschnitt, und dessen Höhe das arithmetische Mittel zwischen den Parallelkanten des schiefabgeschnittenen Prismas ist.

17—20: **Berechnung der Kugel. Guldins Regel.**

Lehrsatz 17.

Ist der Halbmesser einer Kugel $= R$, so ist

a. der Inhalt: $K = \frac{4}{3}R^3\pi$,

b. die Oberfläche: $O = 4R^2\pi$.

Beweis. a. Man denke sich auf dem Grundkreis einer von der Kugel abgeschnittenen Halbkugel einen Cylinder errichtet, dessen Höhe gleich dem Halbmesser ist. Auf dem andern Grundkreis des Cylinders, dessen Ebene die Halbkugel berührt, denke man sich einen Kegel errichtet, dessen Spitze im Mittelpunkt der Kugel liegt. Fig. 60*) stellt einen durch die gemeinschaftliche Achse OA der drei Körper gelegten Achsenschnitt vor: Halbkr. BAC ist der Achsenschnitt der Halbkugel, Rechteck BCDE — des Cylinders, Dreieck DEO — des Kegels. Die Differenz von Cylinder und Kegel ist ein Umdrehungskörper, dessen Halbmeridian $\triangle$ OBE ist.

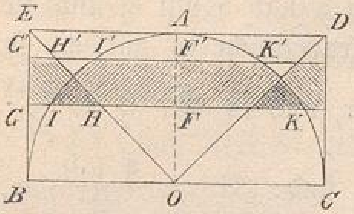

Fig. 60.

Ein beliebiger Parallelschnitt des Cylinders, dessen Entfernung OF vom Kugelmittelpunkt $= x$ sei, erzeugt als Schnittfigur des Umdrehungskörpers einen Kreisring, als Schnittfigur der Halbkugel einen Kugelkreis. Die zwei Halbmesser des Kreisringes sind: $FG = R$, $FH = x$ (weil W. $FOH = \frac{1}{2} R$); folglich ist der Inhalt des Ringes $= (R^2 - x^2)\pi$. Der Halbmesser des Kugelkreises ist: $FI = \sqrt{OI^2 - OF^2} = \sqrt{R^2 - x^2}$, folglich sein Inhalt: $= (R^2 - x^2)\pi$. Es haben somit die von jeder beliebigen Parallelschnitt-Ebene erzeugten Schnittfiguren des Umdrehungskörpers und der Halbkugel gleichen Flächeninhalt. Hieraus folgt (nach III. 11. Zus.), daß die Halbkugel gleich dem Umdrehungskörper ist; (die im Beweise von III. 11 betrachteten, zwischen je zwei Parallelschnitten errichteten senkrechten Prismen sind bei der Halbkugel Cylinder, bei dem Umdrehungskörper cylindrische Röhren.) Nun ist der Inhalt des Cylinders $= R^3\pi$ (III. 9. a), der Inhalt des Kegels $= \frac{1}{3} R^3\pi$ (III. 13. a), daher der Inhalt des Umdrehungskörpers $= \frac{2}{3} R^3\pi$. Der Inhalt der Halbkugel hat denselben Wert; folglich ist der Inhalt der ganzen Kugel:

$$K = \frac{4}{3} R^3\pi.$$

---

*) Man denke sich in Fig. 60 die Linie G'H'I'F'K' sowie die Schraffierstriche hinweg.

b. Teilt man einen Halbkreis PAP′ (Fig. 61) in eine beliebige Anzahl gleicher Teile, verbindet die einzelnen Teilpunkte durch Sehnen, und fällt von den Teilpunkten die Senkrechten auf den Durchmesser PP′: so erhält man dadurch in den Halbkreis ein Vieleck einbeschrieben, das aus lauter rechtw. Trapezen und zwei rechtw. Dreiecken zusammengesetzt ist. Dreht man das ganze Gebilde um den Durchmesser PP′, so beschreibt der Halbkreis eine Kugel, jedes der zwei Dreiecke einen Kegel, und jedes Trapez einen Kegelrumpf. Sämtliche Kegelrümpfe und Kegel bilden zusammen einen der Kugel einbeschriebenen Umdrehungskörper. Ist p die Entfernung der gleichen Sehnen vom Mittelpunkt des Halbkreises, so sind die Mittellote der Mantellinien der einzelnen Kegelrümpfe und Kegel sämtlich gleich p. Bezeichnet man daher die Höhen der einzelnen Kegelrümpfe und Kegel mit h_1, $h_2 \ldots$, die Oberfläche des einbeschriebenen Umdrehungskörpers mit O_i und den Halbmesser der Kugel mit R, so ist (nach III. 15. b u. Zus. 1):

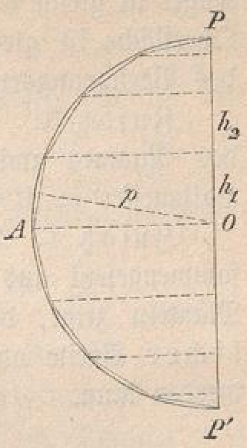

Fig. 61.

$$O_i = 2p\pi h_1 + 2p\pi h_2 + \ldots$$
$$= 2p\pi(h_1 + h_2 + \ldots) = 2p\pi . 2R.$$

Läßt man nun die Sehnen unendlich klein werden, so wird $p = R$, der Halbmeridian des Umdrehungskörpers geht in den Halbkreis, also die Oberfläche des Umdrehungskörpers in die Oberfläche der Kugel über; man erhält daher:

$$O = 4R^2\pi.$$

Zusatz 1. Die Inhalte zweier Kugeln verhalten sich wie die Kuben —, die Oberflächen wie die Quadrate ihrer Halbmesser. (Vgl. III. 12. Zus. 3.)

Zusatz 2. Die Oberfläche einer Kugel ist gleich dem Vierfachen eines Großkreises. — Da der Inhalt des Berührungscylinders der Kugel (im engeren Sinn, vgl. II. Einl. 9. d) $= 2R^3\pi$, sein Mantel $= 4R^2\pi$, seine Oberfläche $= 6R^2\pi$ ist

(III. 9), so kann man den Satz aussprechen: Der Inhalt der Kugel ist gleich $\frac{2}{3}$ des Inhalts ihres Berührungscylinders, ihre Oberfläche ist gleich dem Mantel oder gleich $\frac{2}{3}$ der Oberfläche des Berührungscylinders.

Zusatz 3. Der massive Inhalt einer Hohlkugel, d. i. des Raumes zwischen zwei konzentrischen Kugelflächen, deren Halbmesser $= R$ und r sind, ist $= \frac{4}{3}(R^3 - r^3)\pi$.

Zusatz 4. Die Betrachtung der Kugeloberfläche als zusammengesetzt aus unendl. vielen unendl. schmalen Kegelrumpf-Mänteln zeigt, daß ein Stück der Kugeloberfläche von endlicher Breite ohne Dehnung nicht in eine Ebene abgewickelt werden kann.

Lehrsatz 18.

a. Befindet sich in einer Kugel vom Halbmesser R eine Kugelzone, deren Höhe $= h$ ist, und deren Grundkreise die Halbmesser r und r' und die Entfernungen e und $e - h$ vom Kugelmittelpunkt haben, so ist der Inhalt der Kugelzone:

$$K_z = \frac{\pi h}{3}\left(3R^2 - 3e^2 + 3eh - h^2\right). \quad (1)$$

$$K_z = \frac{\pi h}{6}\left(3r^2 + 3r'^2 + h^2\right). \quad (2)$$

b. Befindet sich in einer Kugel vom Halbmesser R ein Kugelabschnitt, dessen Höhe $= h$, und dessen Grundkreis-Halbmesser $= r$ ist, so ist der Inhalt des Kugelabschnittes:

$$K_a = \frac{\pi h^2}{3}\left(3R - h\right). \quad (3)$$

$$K_a = \frac{\pi h}{6}\left(3r^2 + h^2\right). \quad (4)$$

c. Mit Zugrundelegung derselben Bezeichnungen ist die krumme Oberfläche der

Kugelzone und ebenso des Kugelabschnittes oder der Kugelhaube:

$$O = 2 R \pi h. \qquad (5)$$

Beweis. a. Es sei (Fig. 62) FF' die Achse, $JKK'J'$ der Achsenschnitt der Kugelzone, A der Pol ihrer Grundkreise, O der Mittelpunkt ihrer Kugel. Dann ist: $OA = R$, $FF' = h$, $OF' = e$, $OF = e - h$, $FJ = r$, $F'J' = r'$. Man denke sich den zu den Grundkreisen der Kugelzone parallelen Großkreis der Kugel, und über ihm die nämliche Konstruktion ausgeführt wie im Beweis von III. 17. a. Dann folgt aus III. 11. Zus. und aus dem Beweise von III. 17. a, daß die Kugelzone gleich ist dem zwischen ihren zwei Grundkreis-Ebenen enthaltenen Teile des in III. 17. a betrachteten Umdrehungskörpers. In Fig. 62 stellt das Trapez $GHH'G'$ den halben Achsenschnitt dieses Teiles vor. Er kann berechnet werden als Differenz eines Cylinders und eines Kegelrumpfes: der Cylinder hat die Höhe $FF' = h$ und den Halbmesser $FG = R$; der Kegelrumpf hat die Höhe $FF' = h$ und die Grundkreis-Halbmesser $F'H' = e$, $FH = e - h$. Daher ist (gemäß III. 9. a und 15. a):

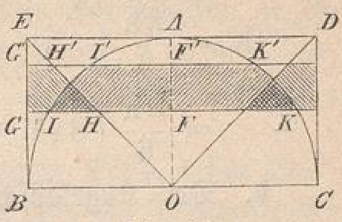

Fig. 62.

$$K_z = R^2 \pi h - \frac{\pi h}{3}\left(e^2 + e(e-h) + (e-h)^2\right)$$

$$= R^2 \pi h - \frac{\pi h}{3}\left(3e^2 - 3eh + h^2\right)$$

$$= \frac{\pi h}{3}\left(3R^2 - 3e^2 + 3eh - h^2\right). \qquad (1)$$

Aus Gleichung (1) ergiebt sich weiter Gleichung (2), wenn R und e in r und r' ausgedrückt werden. Zu diesem Behufe liefern die zwei rechtw. Dreiecke OFJ und $OF'J'$:

$$r^2 = R^2 - (e-h)^2,$$

$$r'^2 = R^2 - e^2,$$

$$\text{subtr.:} \quad r^2 - r'^2 = 2eh - h^2,$$

also: $$e\,h = \frac{r^2 - r'^2 + h^2}{2};$$

ferner folgt: $3\,R^2 - 3\,e^2 = 3\,r'^2$.

Werden diese zwei Werte in (1) eingesetzt, so erhält man:

$$K_z = \frac{\pi h}{3}\left(3\,r'^2 + \frac{3\,(r^2 - r'^2 + h^2)}{2} - h^2\right)$$

$$= \frac{\pi h}{6}\left(3\,r^2 + 3\,r'^2 + h^2\right). \qquad (2)$$

b. Der Kugelabschnitt kann als Kugelzone angesehen werden, in der ein Grundkreis $= 0$, also $e = R$ ist. Setzt man daher in den Gleichungen (1) und (2): $e = R$ und $r' = 0$, so erhält man:

$$K_a = \frac{\pi h^2}{3}\left(3\,R - h\right). \qquad (3)$$

$$K_a = \frac{\pi h}{6}\left(3\,r^2 + h^2\right). \qquad (4)$$

c. Teilt man den Bogen des halben Achsenschnittes der Kugelzone oder Kugelhaube in eine beliebige Anzahl gleicher Teile und verfährt im übrigen ganz ebenso wie im Beweise von III. 17. b, so ergiebt sich:

$$O = 2\,R\pi h. \qquad (5)$$

Anm. Sämtliche fünf Formeln gelten auch für den Fall, daß der Kugelmittelpunkt im Innern der Kugelzone oder des Kugelabschnittes liegt. Um dies für Formel (1), worin dann $h > e$ ist, nachzuweisen, teile man die Kugelzone durch den zu ihren Grundkreisen parallelen Großkreis in zwei Teile, deren Höhen e und $h - e$ sind, und addiere die nach (1) berechneten Inhalte beider Teile. — Formel (2) ergiebt sich sodann aus Formel (1) in derselben Weise wie oben (mit $h - e$ statt $e - h$).

Zusatz 1. Aus (5) folgt: *Ist einer Kugel ein Berührungscylinder umbeschrieben, so schneiden irgend zwei Parallelschnitte des Cylinders von der Kugeloberfläche und vom Cylindermantel flächengleiche Zonen ab.*

Mit Beziehung auf III. 15, Gleichung (3) folgt ferner: die krumme Oberfläche einer Kugelzone oder einer Kugelhaube ist gleich dem Mantel eines Kegelrumpfes, der mit ihr die Achse gemein hat, und dessen Mantel die Zone oder Haube nach demjenigen Parallelkreis berührt, dessen Ebene die Achse halbiert.

Zusatz 2. Ist s die geradlinige Entfernung des Pols einer Kugelhaube von der Peripherie ihres Grundkreises, so ist: $s^2 = 2Rh$, also:

$$\begin{aligned} O_a &= s^2\pi \\ &= (r^2 + h^2)\pi . \end{aligned}$$

In Worten: die Kugelhaube ist gleich einem Kreis, dessen Halbmesser gleich der Entfernung ihres Pols von der Peripherie des Grundkreises ist.

Lehrsatz 19.

Befindet sich in einer Kugel vom Halbmesser R ein Kugelausschnitt, dessen zugehöriger Kugelabschnitt die Höhe h hat, so ist der Inhalt des Kugelausschnittes:

$$K = \tfrac{2}{3} R^2\pi h .$$

Beweis. Man denke sich in den Kugelausschnitt ein Polyeder einbeschrieben, bestehend aus lauter Pyramiden, deren Spitzen im Mittelpunkt der Kugel, und deren Grundecken sämtlich auf der Haubenfläche des Kugelausschnittes liegen. Sind $g_1, g_2 \ldots$ die Grundflächen, $h_1, h_2 \ldots$ die zugehörigen Höhen dieser Pyramiden, so ist der Inhalt des einbeschriebenen Polyeders $= \frac{1}{3}(g_1 h_1 + g_2 h_2 + \ldots)$ (III. 12. c). Werden nun die Grundflächen unendlich klein gedacht, so werden die Pyramidenhöhen $h_1, h_2 \ldots$ sämtlich $= R$, die Summe der Grundflächen wird gleich der Haube des Kugelausschnittes, und das Polyeder geht in den Kugelausschnitt über. Man hat daher:

$$\begin{aligned} K &= \frac{R}{3} \cdot \left(g_1 + g_2 + \ldots\right) = \frac{R}{3} \cdot 2R\pi h \\ &= \tfrac{2}{3} R^2\pi h . \end{aligned}$$

Anm. Die Formel gilt auch für einen solchen Kugelausschnitt, der größer als die Halbkugel ist (vgl. II. Einl. 12. a).

Zusatz 1. Auf diesem Wege hätte auch der Inhalt der Kugel berechnet werden können; denn die Kugel kann als Kugelausschnitt angesehen werden (II. Einl. 12. c). Hiernach ist ihr Inhalt gleich einer Pyramide, deren Grundfläche gleich der Kugeloberfläche, und deren Höhe gleich dem Kugelhalbmesser ist. — Der Kugelabschnitt hätte als Differenz eines Kugelausschnittes und eines Kegels, und hierauf die Kugelzone als Differenz zweier Kugelabschnitte berechnet werden können.

Zusatz 2. Auf dieselbe Weise läßt sich das Stück einer Kugel berechnen, das von einem sphär. Vieleck und dem zugehörigen Vielkant begrenzt ist. Der Inhalt eines solchen Körpers ist gleich einer Pyramide, deren Grundfläche gleichen Flächeninhalt mit dem sphär. Vieleck hat (II. 16), und deren Höhe gleich dem Halbmesser der Kugel ist.

Zusatz 3. Zwei Kugelausschnitte gleicher Kugeln verhalten sich dem Inhalte nach wie die Höhen der zugehörigen Kugelabschnitte.

Zusatz 4. Ein Hohlkugelausschnitt (Kugelgewölbe) ist die Differenz zweier Kugelausschnitte, welche konzentrischen Kugeln angehören und die Achse und den erzeugenden Winkel gemein haben. Die Halbmesser der zwei Kugeln seien = R und r, die Höhen der zugehörigen Kugelabschnitte = H und h (die „lichte" Höhe = h). Ist nun O (Fig. 63) der Mittelpunkt der zwei Kugeln, AOB der Achsenschnitt des größeren —, aOb der Achsenschnitt des kleineren Kugelausschnittes, sind ferner CD und cd die Höhen der zugehörigen Kugelabschnitte, und zieht man AC und ac: so ist $\triangle ACD \backsim acd$, also:

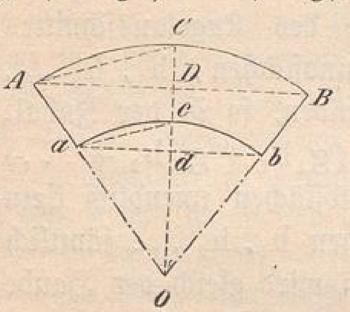

Fig. 63.

$$\frac{H}{h} = \frac{AD}{ad} = \frac{R}{r}; \quad H = \frac{Rh}{r}.$$

Der Inhalt des Hohlkugelausschnittes ist folglich:

$$K = \frac{2}{3} R^2\pi H - \frac{2}{3} r^2\pi h = \frac{2\pi}{3}\left(\frac{R^3h}{r} - r^2h\right)$$

$$= \frac{2\pi h\,(R^3 - r^3)}{3r}.$$

Lehrſatz 20.

Guldins Regel: Wird durch Drehung einer ebenen Figur um eine in ihrer Ebene liegende und die Figur nicht ſchneidende Achſe ein Umdrehungskörper erzeugt, ſo iſt:

a. deſſen Inhalt gleich dem Inhalt eines ſenkrechten Prismas, das die gedrehte Figur zur Grundfläche, und die Länge der vom Schwerpunkt ihrer Fläche beſchriebenen Kreisperipherie zur Höhe hat.

b. Die Oberfläche iſt gleich dem Mantel eines ſenkrechten Prismas, das die gedrehte Figur zur Grundfläche, und die Länge der vom Schwerpunkt ihres Umfanges beſchriebenen Kreisperipherie zur Höhe hat.

Beweis. a. Um den Satz zunächſt für den Fall zu beweiſen, daß die gedrehte Figur ein Dreieck iſt, fälle man von deſſen Ecken A, B, C (Fig. 64) die Senkrechten AA′, BB′, CC′ auf die Drehachſe. Iſt O ein beliebiger Punkt der Drehachſe, ſo bezeichne man die Strecken OA′, OB′, OC′ (Abſciſſen) mit a, b, c, und die Senkrechten AA′, BB′, CC′ (Ordinaten) mit a′, b′, c′. Der Inhalt des Dreiecks läßt ſich nun als algebraiſche Summe von drei rechtw. Trapezen berechnen, deren Höhen A′B′, B′C′, C′A′ ſind. Der Inhalt iſt alſo:

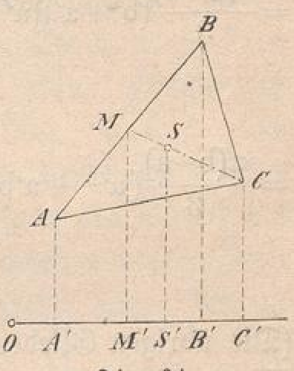

Fig. 64.

$$J = (b - a)\frac{b' + a'}{2} + (c - b)\frac{c' + b'}{2} + (a - c)\frac{a' + c'}{2},$$

und zwar gilt dieſe Gleichung, wie auch immer das Dreieck gegen die Drehachſe liegen mag.

Der Flächenſchwerpunkt S des Dreiecks liegt auf einer der

Schwerlinien CM so, daß CS = 2 SM ist. Um seine Entfernung SS' von der Drehachse zu finden, benütze man den Satz der ebenen Geom., daß, wenn in einem Trapez ABB'A' eine zu den parallelen Seiten AA' und BB' parallele Gerade MM' die nicht parallelen Seiten AB und A'B' im Verhältnis $\frac{AM}{MB} = \frac{\alpha}{\beta}$ teilt: $MM' = \frac{\beta \,.\, AA' + \alpha \,.\, BB'}{\alpha + \beta}$ ist. Mit Hilfe dieses Satzes erhält man:

$$SS' = \frac{a' + b' + c'}{3}.$$

Dies ist nun der Halbmesser des vom Schwerpunkt beschriebenen Kreises. Der Inhalt des senkrechten Prismas, welches das Dreieck zur Grundfläche und die Länge der Kreisperipherie zur Höhe hat, ist daher:

$$\begin{aligned}
K &= J \,.\, 2\, SS'\pi \\
&= \left[(b-a)\frac{b'+a'}{2} + (c-b)\frac{c'+b'}{2} + (a-c)\frac{a'+c'}{2}\right]\frac{2(a'+b'+c')\pi}{3} \\
&= \frac{\pi(b-a)}{3}(b'+a')(a'+b'+c') + \frac{\pi(c-b)}{3}(c'+b')(a'+b'+c') \\
&\qquad + \frac{\pi(a-c)}{3}(a'+c')(a'+b'+c') \\
&= \frac{\pi(b-a)}{3}(a'^2 + a'b' + b'^2) + \frac{\pi(c-b)}{3}(b'^2 + b'c' + c'^2) \\
&\qquad + \frac{\pi(a-c)}{3}(c'^2 + c'a' + a'^2)\,.
\end{aligned}$$

(Die übrigen Glieder heben sich weg.) Dies stellt aber (nach III. 15. a) die algebraische Summe der Inhalte der von den einzelnen Seiten des Dreiecks beschriebenen Kegelrümpfe, d. h. den Inhalt des von dem Dreieck beschriebenen Umdrehungskörpers vor. Der Satz ist also bewiesen für ein Dreieck.

Ist die gedrehte Figur ein Viereck, so teile man dasselbe durch eine Diagonale in zwei Dreiecke, deren Inhalte $= i_1$ u. i_2, und deren Schwerpunkte s_1 u. s_2 seien. Man erhält dann den Schwerpunkt S des Vierecks, wenn man die Strecke $s_1 s_2$ im Verhältnis $\frac{s_1 S}{S s_2} = \frac{i_2}{i_1}$ teilt. Fällt man daher von s_1, s_2, S die Senkrechten $s_1 s_1'$, $s_2 s_2'$, SS′ auf die Drehachse, so ist nach dem oben erwähnten Trapez-Satze:

$$SS' = \frac{i_1 . s_1 s_1' + i_2 . s_2 s_2'}{i_1 + i_2};$$

folglich ist der Inhalt des senkrechten Prismas, welches das Viereck zur Grundfläche und die Länge der von SS′ beschriebenen Kreisperipherie zur Höhe hat:

$$K = (i_1 + i_2) \frac{2\,(i_1 . s_1 s_1' + i_2 . s_2 s_2')\,\pi}{i_1 + i_2}$$
$$= i_1 . 2\, s_1 s_1' \pi + i_2 . 2\, s_2 s_2' \pi .$$

Dies stellt aber (nach dem ersten Teil des Beweises) die Summe der von den zwei einzelnen Dreiecken beschriebenen Umdrehungskörper, d. h. den Inhalt des von dem ganzen Viereck beschriebenen Umdrehungskörpers vor.

Ist die gedrehte Figur ein Fünfeck, so teile man dasselbe durch eine Diagonale in ein Dreieck und ein Viereck, deren Inhalte $= i_1$ u. i_2, deren Schwerpunkte s_1 u. s_2 seien, und mache den nämlichen Schluß wie oben. Ebenso geht man dann vom Fünfeck zum Sechseck über, u. s. f. Der Satz gilt also für ein Vieleck von jeder beliebigen Seitenzahl. — Da ferner eine krummlinige Figur als Vieleck von unendl. vielen unendl. kleinen Seiten angesehen werden kann, so gilt der Satz auch, wenn die gedrehte Figur krummlinig ist.

b. ABCDE . . . (Fig. 65) sei das gedrehte Vieleck. Man erhält den Schwerpunkt seines Umfanges dadurch, daß man die Seiten AB, BC, CD, DE . . . in den Punkten H, J, K, L . . . halbiert, HJ zieht und HJ im Punkt O im Verhältnis $\frac{HO}{OJ} = \frac{BC}{AB}$ teilt, ferner OK zieht und OK im Punkt P im Verhältnis $\frac{OP}{PK} = \frac{CD}{AB + BC}$ teilt, ferner PL zieht und

PL im Punkt Q im Verhältnis DE zu AB + BC + CD teilt, u. s. f. Der letzte Teilpunkt S ist dann der Schwer-

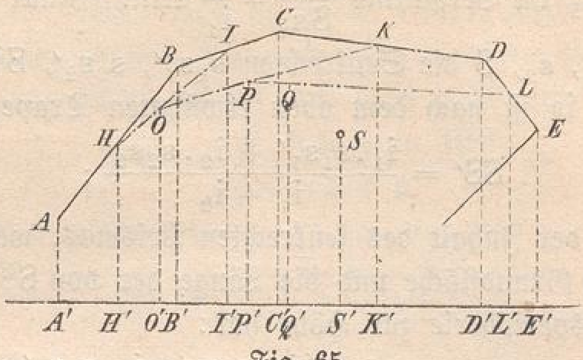

Fig. 65.

punkt. Fällt man von sämtlichen Punkten die Senkrechten AA′, BB′, ... HH′, JJ′, ... OO,′ PP′, ... SS′ auf die Drehachse und bezeichnet deren Längen mit a′, b′, ... h′, i′, ... o′, p′, ... s′: so ist nach dem in a) erwähnten Trapez-Satze:

$$o' = \frac{AB \,.\, h' + BC \,.\, i'}{AB + BC},$$

$$p' = \frac{(AB + BC)\, o' + CD \,.\, k'}{AB + BC + CD} = \frac{AB \,.\, h' + BC \,.\, i' + CD \,.\, k'}{AB + BC + CD},$$

$$q' = \frac{(AB + BC + CD)\, p' + DE \,.\, l'}{AB + BC + CD + DE} = \frac{AB \,.\, h' + BC \,.\, i' + CD \,.\, k' + DE \,.\, l'}{AB + BC + CD + DE},$$

. . . .

$$s' = \frac{AB \,.\, h' + BC \,.\, i' + CD \,.\, k' + \ldots}{AB + BC + CD + \ldots}$$

$$= \frac{AB \,.\, \frac{a' + b'}{2} + BC \,.\, \frac{b' + c'}{2} + CD \,.\, \frac{c' + d'}{2} + \ldots}{AB + BC + CD + \cdots}.$$

Der Mantel des senkrechten Primas, welches das Vieleck zur Grundfläche und die Länge der von S beschriebenen Kreisperipherie zur Höhe hat, ist nun:

$$M = (AB + BC + CD + \ldots) \,.\, 2\, s'\pi$$
$$= (a' + b')\pi \,.\, AB + (b' + c')\pi \,.\, BC + (c' + d')\pi \,.\, CD + \ldots.$$

Dies stellt aber (nach III. 15. b) die Summe der Mäntel der von den einzelnen Seiten des Vielecks beschriebenen Kegelrümpfe, d. h. die Oberfläche des Umdrehungskörpers vor. Der Satz ist also bewiesen für ein Vieleck von beliebig vielen Seiten. Da ferner eine krummlinige Figur als Vieleck von unendl. vielen unendl. kleinen Seiten betrachtet werden kann, so gilt der Satz auch, wenn die gedrehte Figur krummlinig ist.

Anm. Beide Beweise bleiben gültig, auch wenn eine Seite des gedrehten Vielecks in die Drehachse fällt. — Satz b gilt auch für den Fall, daß die gedrehte Figur ein nicht geschlossener polygonaler Zug (oder Kurvenbogen) ist.

Zusatz. Mittels dieser Sätze läßt sich Inhalt und Oberfläche von jedem Umdrehungskörper berechnen, sobald der Flächen-Schwerpunkt und Umfangs-Schwerpunkt des Halbmeridians bekannt ist. (Z. B. bestimme man hiernach Inhalt, Mantel und Oberfläche von Cylinder, Kegel und Kegelrumpf.) Die Sätze können aber auch umgekehrt verwendet werden, um die Schwerpunkte einer ebenen Figur zu bestimmen, sobald der Rauminhalt, bezw. die Oberfläche eines Körpers bekannt ist, der durch Drehung der Figur entstanden gedacht werden kann. Um z. B. Flächen-Schwerpunkt, Bogen-Schwerpunkt und Umfangs-Schwerpunkt eines Halbkreises zu bestimmen, verwende man die Kugel. Alle drei Punkte liegen auf dem zum Durchmesser des Halbkreises senkrechten Halbmesser. Bezeichnet man ihre Entfernungen vom Durchmesser bezw. mit x_f, x_b, x_u, und ist R der Halbmesser des Halbkreises, so hat man:

$$\frac{R^2\pi}{2} \cdot 2x_f\pi = \frac{4}{3}R^3\pi, \text{ woraus: } x_f = \frac{4R}{3\pi}.$$

$$R\pi \,.\, 2x_b\pi = 4R^2\pi, \quad " \quad x_b = \frac{2R}{\pi}.$$

$$(R\pi + 2R) \,.\, 2x_u\pi = 4R^2\pi, \quad " \quad x_u = \frac{2R}{2+\pi}.$$

C. Aufgaben.

Vorbemerkung.

Bei der algebraischen Behandlung von stereometrischen Aufgaben tritt nicht selten der Fall ein, daß das Resultat nur nähe-