Lehrbuch der Stereometrie

Hauck, Guido

Tübingen, 1893

C. Aufgaben.

vor. Der Satz ist also bewiesen für ein Vieleck von beliebig vielen Seiten. Da ferner eine krummlinige Figur als Vieleck von unendl. vielen unendl. kleinen Seiten betrachtet werden kann, so gilt der Satz auch, wenn die gedrehte Figur krummlinig ist.

Anm. Beide Beweise bleiben gültig, auch wenn eine Seite des gedrehten Vielecks in die Drehachse fällt. — Satz b gilt auch für den Fall, daß die gedrehte Figur ein nicht geschlossener polygonaler Zug (oder Kurvenbogen) ist.

Zusatz. Mittels dieser Sätze läßt sich Inhalt und Oberfläche von jedem Umdrehungskörper berechnen, sobald der Flächen-Schwerpunkt und Umfangs-Schwerpunkt des Halbmeridians bekannt ist. (Z. B. bestimme man hiernach Inhalt, Mantel und Oberfläche von Cylinder, Kegel und Kegelrumpf.) Die Sätze können aber auch umgekehrt verwendet werden, um die Schwerpunkte einer ebenen Figur zu bestimmen, sobald der Rauminhalt, bezw. die Oberfläche eines Körpers bekannt ist, der durch Drehung der Figur entstanden gedacht werden kann. Um z. B. Flächen-Schwerpunkt, Bogen-Schwerpunkt und Umfangs-Schwerpunkt eines Halbkreises zu bestimmen, verwende man die Kugel. Alle drei Punkte liegen auf dem zum Durchmesser des Halbkreises senkrechten Halbmesser. Bezeichnet man ihre Entfernungen vom Durchmesser bezw. mit x_f, x_b, x_u, und ist R der Halbmesser des Halbkreises, so hat man:

$$\frac{R^2\pi}{2} \cdot 2x_f\pi = \frac{4}{3}R^3\pi, \text{ woraus: } x_f = \frac{4R}{3\pi}.$$

$$R\pi \,.\, 2x_b\pi = 4R^2\pi, \quad '' \quad x_b = \frac{2R}{\pi}.$$

$$(R\pi + 2R) \,.\, 2x_u\pi = 4R^2\pi, \quad '' \quad x_u = \frac{2R}{2+\pi}.$$

C. Aufgaben.

Vorbemerkung.

Bei der algebraischen Behandlung von stereometrischen Aufgaben tritt nicht selten der Fall ein, daß das Resultat nur näherungsweise mit Zirkel und Lineal konstruiert werden kann, oder daß man sich mit dem bloßen Auftragen des numerischen Rechnungsresultates begnügen muß. Denn es lassen sich mit Zirkel und Lineal nur solche algebraische Ausdrücke konstruieren, die rational sind oder Quadratwurzeln enthalten, nicht aber solche mit Kubikwurzeln, wie sie bei stereometrischen Aufgaben häufig vorkommen. Ferner läßt sich die Länge eines Kreisbogens auf einer Geraden oder auf einer andern Kreislinie nur mittels einer Näherungskonstruktion auftragen.

1—10: Beispiele von Aufgaben mit algebraischer Lösung.

Aufgabe 1.

Die Höhe eines Cylinders zu bestimmen, dessen Halbmesser gegeben ist, und dessen Mantel einen geg. Flächeninhalt habe.

Auflösung. Der geg. Halbmesser sei r, der Flächeninhalt q^2, die gesuchte Höhe werde mit x bezeichnet. Dann muß sein. (III. 9. b):

$$2 r \pi x = q^2, \qquad \text{woraus folgt:}$$

$$x = \frac{q^2}{2 r \pi}.$$

Man hat daher den Kreis vom Halbmesser r zu rektifizieren, und zu seinem Umfang und q die dritte Proportionale zu bestimmen: so ist diese die gesuchte Höhe. Oder man berechnet aus den geg. Zahlenwerten von r und q^2 den Zahlenwert von x.

Aufgabe 2.

Einen Cylinder zu konstruieren, dessen Höhe gegeben ist, und der mit einem geg. Cylinder gleichen Rauminhalt habe.

Auflösung. Der geg. Cylinder habe den Halbmesser r

und die Höhe h, der gesuchte Cylinder habe die geg. Höhe h′ und den Halbmesser x. Dann muß sein (III. 9. a):

$$x^2 \pi h' = r^2 \pi h,$$

$$x^2 = \frac{r^2 h}{h'}.$$

Dieses Resultat, in der Form: $x^2 = r \cdot \frac{rh}{h'}$ geschrieben, besagt, daß x das geom. Mittel ist zwischen r und der vierten Proportionalen zu h′, r und h. Hiernach hat man für x folgende Konstruktion: Ist in einem Achsenschnitt des geg. Cylinders (Fig. 66) AB = h, BC = r, so trage man auf BA die Strecke BD = h′ auf, ziehe DC, und durch A die Parallele zu DC, welche BC in E schneidet; dann ist BE die vierte Proportionale zu h′, r und h. Beschreibt man hierauf über BE als Durchmesser einen Halbkreis, welcher die auf BE in C errichtete Senkrechte in F schneidet: so ist BF das geom. Mittel zwischen r und BE, also = x. Trägt man daher auf BE die Strecke BG = BF auf, so ist das Rechteck aus BD und BG das erzeugende Rechteck des gesuchten Cylinders.

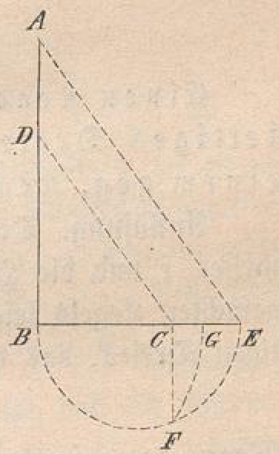

Fig. 66.

Aufgabe 3.

Einen Würfel zu konstruieren, der gleich einem geg. Quader sei.

Auflösung. Sind l, m, n die dreierlei Kanten des Quaders, und bezeichnet x die Kante des gesuchten Würfels, so muß sein (III. 6):

$$x^3 = l\,m\,n, \quad \text{woraus folgt:}$$

$$x = \sqrt[3]{l\,m\,n}.$$

Hiefür giebt es keine Konstruktion mit Zirkel und Lineal. Man muß daher l, m, n in Zahlen von Längeneinheiten ausdrücken, aus ihrem Produkt die Kubikwurzel ausziehen, die gefundene Zahl von Längeneinheiten auf einer Geraden auftragen, und aus der erhaltenen Strecke als Kante den gesuchten Würfel konstruieren.

Zusatz. Auf dieselbe Weise kann jeder Körper, dessen Inhalt sich überhaupt berechnen läßt, in einen Würfel verwandelt werden.

Aufgabe 4.

Einen Kegel zu ermitteln, der ein gleichseitiges Dreieck als Achsenschnitt habe und einem geg. Kegel gleich sei.

Auflösung. Der geg. Kegel habe den Grundkreis-Halbmesser r und die Höhe h; die entsprechenden Strecken des gesuchten Kegels seien x und y. Dann ist in dem gleichseitigen Dreieck, das den Achsenschnitt des letzteren vorstellt:

$$y = x\sqrt{3}.$$

Wegen der geforderten Gleichheit der zwei Kegel muß ferner sein (III. 13. a):

$$\tfrac{1}{3}\,x^2\pi y = \tfrac{1}{3}\,r^2\pi h.$$

Aus diesen beiden Gleichungen folgt:

$$x = \sqrt[3]{\frac{r^2h}{\sqrt{3}}} \qquad y = \sqrt[3]{3\,r^2\,h}.$$

Hieraus bestimmen sich x und y als Zahlenwerte.

Aufgabe 5.

Eine Pyramide durch Parallelschnitte in n gleiche Teile zu teilen.

Auflösung. Die Höhe der Pyramide sei h. Die gesuchten Parallelschnitte, die von der Spitze die Entfernungen x_1, x_2 ... (x_1 die kleinste) haben mögen, schneiden von der Pyramide Teil-Pyramiden ab, die der ganzen Pyramide ähnlich sind. Bezeichnet man also ihre Inhalte bezw. mit p_1, p_2 . . ., und den Inhalt der ganzen Pyramide mit P, so ist (III. 12. Zus. 2):

$$\frac{x_1^3}{h^3} = \frac{p_1}{P} = \frac{1}{n},$$

$$\frac{x_2^3}{h^3} = \frac{p_2}{P} = \frac{2}{n}, \text{ u. s. f.}$$

folglich:

$$x_1 = h\sqrt[3]{\frac{1}{n}},$$

$$x_2 = h\sqrt[3]{\frac{2}{n}}, \text{ u. s. f.}$$

Zusatz 1. Wird eine beliebige Seitenkante k der Pyramide von den einzelnen Parallelschnitten in Punkten geschnitten, deren Entfernungen von der Spitze $= y_1$, y_2 . . . sind, so geben die obigen Gleichungen die Werte von y_1, y_2 . . ., wenn man in ihnen h durch k ersetzt.

Zusatz 2. Da die Werte von x_1, x_2 . . . unabhängig von der Größe der Grundfläche sind, so folgt, daß alle Pyramiden von gleichen Höhen gleiche Werte von x_1, x_2 . . . haben, und daß bei Pyramiden von ungleichen Höhen die Werte von x_1, x_2 . . . das nämliche Verhältnis haben.

Aufgabe 6.

Einen Pyramidenrumpf durch Parallelschnitte in n gleiche Teile zu teilen.

Auflösung. Die beiden Grundflächen seien G und g, die Höhe sei h. Ergänzt man den Pyramidenrumpf zur Pyramide und bezeichnet die Höhe der ganzen Pyramide mit X, diejenige der Ergänzungspyramide mit x, so ist (vgl. Bew. von III. 14):

$$X = h\frac{\sqrt{G}}{\sqrt{G} - \sqrt{g}}, \quad x = h\frac{\sqrt{g}}{\sqrt{G} - \sqrt{g}}.$$

Die Entfernungen der Parallelschnitte von der Spitze der Ergänzungspyramide seien $x_1, x_2 \ldots$ (x_1 die kleinste). Bezeichnet man nun die Inhalte der einzelnen Pyramiden, deren Höhen $x, x_1, x_2 \ldots X$ sind, bezw. mit $p, p_1, p_2 \ldots P$, so hat man die Gleichungen:

$$\frac{p_1 - p}{P - p} = \frac{1}{n}, \quad \frac{p_2 - p}{P - p} = \frac{2}{n}, \quad \text{u. s. f.}$$

Da aber die Pyramiden alle unter sich ähnlich sind, so sind sie den Größen x^3, $x_1{}^3$, $x_2{}^3 \ldots X^3$ proportioniert (III. 12. Zus. 2). Daher ist auch:

$$\frac{x_1{}^3 - x^3}{X^3 - x^3} = \frac{1}{n}, \quad \frac{x_2{}^3 - x^3}{X^3 - x^3} = \frac{2}{n}, \quad \text{u. s. f.}$$

Hieraus folgt:

$$x_1{}^3 = \frac{1}{n}\left(X^3 - x^3\right) + x^3 = \frac{X^3 + (n-1)x^3}{n},$$

oder, wenn man die obigen Werte von X und x einsetzt:

$$x_1{}^3 = \frac{h^3\left(G\sqrt{G} + (n-1)g\sqrt{g}\right)}{n(\sqrt{G} - \sqrt{g})^3},$$

$$x_1 = \frac{h}{\sqrt{G} - \sqrt{g}}\sqrt[3]{\frac{G\sqrt{G} + (n-1)\,g\sqrt{g}}{n}}.$$

Ebenso findet man:

$$x_2 = \frac{h}{\sqrt{G} - \sqrt{g}}\sqrt[3]{\frac{2G\sqrt{G} + (n-2)\,g\sqrt{g}}{n}}.$$

u. s. f.

Zusatz 1. Zus. 1 der vor. Aufg. findet auch auf diese Aufgabe Anwendung.

Zusatz 2. Ist der Körper ein Kegelrumpf, dessen Grundkreis-Halbmesser $= R$ und r sind, so ergiebt sich:

$$x_1 = \frac{h}{R - r}\sqrt[3]{\frac{R^3 + (n-1)r^3}{n}}.$$

$$x_2 = \frac{h}{R - r}\sqrt[3]{\frac{2\,R^3 + (n-2)r^3}{n}}. \quad \text{u. s. f.}$$

Aufgabe 7.

Die Abwicklungsfigur des Mantels eines Kegelrumpfes zu konstruieren, dessen Achsenschnitt gegeben ist.

Auflösung. ABCD (Fig. 67) sei der halbe geg. Achsenschnitt des Kegelrumpfes, AB die Achse. Schneiden sich BA und CD verlängert in S, so ist S die Spitze des Ergänzungskegels. Beschreibt man ferner aus B mit Halbmesser BC den Quadranten BCE, so stellt dieser den vierten Teil des unteren Grundkreises des Kegelrumpfes vor. Man schlage nun aus S mit den Halbmessern SC und SD Kreise, trage die Länge des Quadrantenbogens CE mit Hilfe einer kleinen Zirkelöffnung nach und nach auf die Peripherie des mit SC beschriebenen Kreises von C nach F auf, und mache auf derselben Peripherie den Bogen CG = 4 CF. Zieht man dann SG, welche die Peripherie des mit SD beschriebenen Kreises in H schneidet, so ist der Kreisring-Ausschnitt CDHG die verlangte Abwicklungsfigur (III. Einl. 8. d und 10. c).

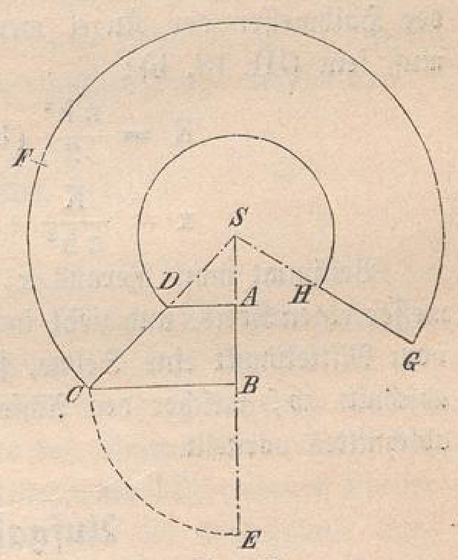

Fig. 67.

Anm. Sind die Bestimmungselemente des Achsenschnittes in Zahlen von Längeneinheiten gegeben, so kann man den Punkt G auch mit Hilfe des Transporteurs finden. Ist nämlich BC = r, AD = r′, DC = s, so ist: $SC = s\,\frac{r}{r - r'}$ (vgl. Bew. von III. 15. b).

Beträgt nun der (in Fig. 67 überstumpfe) Zentriwinkel CSG x Grade, so ist: $\frac{x}{360} = \frac{2r\pi}{2SC\pi} = \frac{r-r'}{s}$,

$$x = \frac{r-r'}{s}\,360.$$

Aufgabe 8.

Einen Kugelabschnitt zu konstruieren, dessen Höhe und Inhalt gegeben sind.

Auflösung. Der geg. Inhalt sei K, die geg. Höhe h; der Halbmesser der Kugel werde mit x bezeichnet. Dann muß sein (III. 18. b):

$$K = \frac{\pi h^2}{3}(3x - h), \quad \text{woraus folgt:}$$

$$x = \frac{K}{\pi h^2} + \frac{h}{3}.$$

Bestimmt man hieraus x, beschreibt mit x als Halbmesser einen Kreis, und zieht in ihm in der Entfernung $x - h$ vom Mittelpunkt eine Sehne, so schneidet diese einen Kreisabschnitt ab, welcher den Achsenschnitt des gesuchten Kugelabschnittes vorstellt.

Aufgabe 9.

Einen Kugelausschnitt zu konstruieren, dessen Inhalt und Haubenfläche gegeben sind.

Auflösung. Der geg. Inhalt sei K, die geg. Haubenfläche O; der Halbmesser der zugehörigen Kugel werde mit x, die Höhe der Kugelhaube mit y bezeichnet. Dann muß sein (III. 19 und 18. c.):

$$K = \tfrac{2}{3}x^2\pi y, \qquad O = 2x\pi y.$$

Hieraus folgt:

$$x = 3\frac{K}{O}, \qquad y = \frac{O^2}{6K\pi}.$$

Ist also $O = p^2$, $K = q^3$, und sind p und q als Strecken geg., so hat man die zwei Gleichungen:

$$x = 3\frac{q^3}{p^2} = 3\frac{\frac{q^4}{p^2}}{q}, \quad y = \frac{p^2}{2x\pi},$$

welche folgende Konstruktion veranlassen: Man bestimme (mittels rechtw. Dreiecke aus Segm. und Höhe) zu p und q die dritte Proportionale r, hierauf zu q und r die dritte Proportionale s: so ist $x = 3s$. Man beschreibe sodann mit Halbm. OA = x einen Kreis und bestimme zu dessen Umfang und zu p die dritte Proportionale y. Schneidet man nun von Halbm. OA ein Stück AB = y ab, legt durch B die zu OA senkrechte Sehne CD, und zieht OC u. OD: so ist OCAD der Achsenschnitt des verlangten Kugelausschnittes.

Aufgabe 10.

Einen Wulst*) zu ermitteln, der den gleichen Inhalt und eine n-mal so große Oberfläche habe wie eine geg. Kugel.

Auflösung. Der Halbmesser der geg. Kugel sei R, der Halbmesser des Meridiankreises des Wulstes werde mit x, der Halbmesser des von seinem Mittelpunkt beschriebenen Kreises („Mittelkreises") mit y bezeichnet. Da der Mittelpunkt eines Kreises sowohl dessen Flächen-Schwerpunkt als Umfangs-Schwerpunkt vorstellt, so muß sein (III. 20):

$$x^2\pi \,.\, 2y\pi = \tfrac{4}{3}R^3\pi,$$
$$2x\pi \,.\, 2y\pi = n \,.\, 4R^2\pi.$$

Aus diesen zwei Gleichungen folgt:

$$x = \frac{2}{3n}R, \qquad y = \frac{3n^2}{2\pi}R.$$

Hiernach kann x genau —, y durch eine Näherungskonstruktion gefunden werden.

---

*) D. i. ein Umdrehungskörper, der durch Drehung eines Kreises um eine in seiner Ebene liegende und ihn nicht schneidende Gerade entsteht.