Lehrbuch der Stereometrie

Hauck, Guido

Tübingen, 1893

D. Anhang.

urn:nbn:de:hbz:466:1-77777

D. Anhang
von Lehrsätzen und Aufgaben.

I. Lehrsätze.

1—5: Allgemeine Polyedersätze.

1. a. Die 3-fache Flächenzahl oder Eckenzahl eines Polyeders liegt zwischen der 2-fachen Kantenzahl und der um 6 vermehrten einfachen Kantenzahl:

$$2K \geqq 3F \geqq K + 6.$$
$$2K \geqq 3E \geqq K + 6.$$

(Da jede Fläche mindestens 3-seitig und jede Ecke mindestens 3-kantig ist, so ist W oder $2K \geqq 3F$ und $\geqq 3E$. Das übrige durch Kombinierung dieser Ungleichungen mit III. 1.)

b. Die 2-fache Flächenzahl eines Polyeders liegt zwischen der um 8 verminderten 4-fachen Eckenzahl und der um 4 vermehrten einfachen Eckenzahl. — Die 2-fache Eckenzahl eines Polyeders liegt zwischen der um 8 verminderten 4-fachen Flächenzahl und der um 4 vermehrten einfachen Flächenzahl:

$$4E - 8 \geqq 2F \geqq E + 4.$$
$$4F - 8 \geqq 2E \geqq F + 4.$$

2. a. Es giebt kein Polyeder, in dem alle Flächen mehr als 5-seitig sind, oder in dem alle Ecken mehr als 5-kantig sind. (III. Anh. 1. a.)

b. Es giebt kein Polyeder mit 7 Kanten. (III. Anh. 1. a.)

† 3. Bildet man von einem Polyeder ein ebenes Netz und fügt dieses wieder zu einer geschlossenen Polyederoberfläche so zusammen, daß je zwei Randlinien des Netzes, die vorher zu einer Kante vereinigt waren, wieder zu einer Kante vereinigt werden, daß aber die vorherige Außenseite der Polyederoberfläche nunmehr zur Innenseite wird: so ist das neu entstandene Polyeder zu dem ursprünglichen symmetrisch. Aus jedem ebenen Netz lassen sich also zwei symmetrische Polyederformen herstellen.

4. a. Zieht man von sämtlichen Ecken eines Polyeders in derselben Richtung parallele und gleiche Strecken, so bestimmen

deren Endpunkte die Ecken eines zweiten Polyeders, das mit dem ersten kongruent ist.

b. Zieht man von den Ecken eines Polyeders nach einem Punkte Strecken und verlängert jede über den Punkt um sich selbst, so bestimmen die Endpunkte der Verlängerungen die Ecken eines zweiten Polyeders, das mit dem ersten symmetrisch ist.

c. Fällt man von den Ecken eines Polyeders die Senkrechten auf eine gerade Linie und verlängert jede über ihren Fußpunkt um sich selbst, so bestimmen die Endpunkte der Verlängerungen die Ecken eines zweiten Polyeders, das mit dem ersten kongruent ist.

† 5. a. Zieht man von einem Punkt S nach den Ecken eines Polyeders Strecken und teilt diese sämtlich in dem nämlichen Verhältnis, so bestimmen die Teilpunkte die Ecken eines zweiten Polyeders, das mit dem ersten ähnlich ist, und zwar gleichstimmig ähnlich oder ungleichstimmig ähnlich, je nachdem die Teilpunkte auf derselben Seite vom Punkt S angenommen werden, auf der das ursprüngl. Polyeder liegt, oder auf der entgegengesetzten Seite. Zwei entsprechende Kanten der zwei Polyeder verhalten sich wie die Entfernungen zweier entsprechenden Ecken vom Punkt S. (Vgl. II. Anh. 18.)

† b. Der Satz: III. 10. Zus. 2 gilt auch für ähnliche und ähnlich liegende Polyeder. Je nachdem die zwei Polyeder gleichstimmig ähnlich oder ungleichstimmig ähnlich sind, sind bei der ähnlichen Lage je zwei entsprechende Kanten gleich-gerichtet oder entgegengesetzt-gerichtet, und ist der Ähnlichkeitspunkt ein äußerer oder ein innerer.

c. Drei ähnliche und ähnlich liegende Vielecke oder Polyeder haben zusammen drei Ähnlichkeitspunkte (und zwar entweder drei äußere oder einen äußeren und zwei innere), welche in gerader Linie liegen (äußere oder innere Ähnlichkeitsachse). (Vgl. II. Anh. 19. — Man beweise, daß die drei Ähnlichkeitspunkte in zwei Ebenen, und folglich in deren Schnittlinie liegen müssen.)

6—13: Prisma.

6. a. Der Rauminhalt eines Würfels, dessen Kante die Summe zweier Strecken a und b ist, ist gleich dem Würfel aus

der Kante a, plus dem dreifachen Quader aus a, a und b, plus dem dreifachen Quader aus a, b und b, plus dem Würfel aus b.

b. Analoger Satz für einen Würfel, dessen Kante die Differenz zweier Strecken ist.

7. a. In jedem Quader ist das Quadrat einer Diagonale gleich der Summe der Quadrate dreier von einer Ecke ausgehenden Kanten.

b. Projiziert man eine Strecke auf die drei Kanten eines Oktanten (indem man von den Endpunkten der Strecke die Senkrechten auf die Kanten fällt), so ist das Quadrat der Strecke gleich der Summe der Quadrate ihrer drei Projektionen.

8. a. Die Summe der Quadrate der vier Diagonalen eines Parallelflachs ist gleich der Summe der Quadrate der zwölf Kanten.

b. Die Summe der Quadrate der sechs Diagonalflächen eines Parallelflachs ist gleich der doppelten Summe der Quadrate der sechs Seitenflächen. (Man stelle zuerst eine Beziehung auf zwischen 2 Diagonalflächen und 4 Seitenflächen, die zwischen den nämlichen vier Parallelkanten liegen.)

9. a. Jede durch den Mittelpunkt eines Parallelflachs oder den Mittelpunkt der Achse eines regul. Prismas von gerader Seitenzahl (Cylinders) gezogene und von der Oberfläche begrenzte Strecke wird in jenem Mittelpunkt halbiert.

b. Jede durch den Mittelpunkt gelegte Schnittebene teilt den Körper in zwei symmetrische Teile.

c. Schneidet man einen Cylinder durch zwei beliebige Ebenen (die sich selbst nicht innerhalb des Cylinders schneiden), so hat das zwischen ihnen enthaltene Cylinderstück gleichen Inhalt und gleiche Mantelfläche mit einer Zone des Cylinders, die das Stück der Achse zwischen den zwei Schnittebenen zur Höhe hat. (Vgl. auch III. Anh. 12. c.)

10. a. Jedem Quader läßt sich eine Kugel um beschreiben.

b. Jedem Rhomboeder*) läßt sich eine Kugel ein beschreiben.

11. a. Jedes Rhomboeder kann in ein reguläres sechsseitiges Prismatoid und zwei kongruente dreiseitige Pyramiden, die

---

*) Unter „Rhomboeder" ist hier und im folgenden stets ein Rhomboeder im engeren Sinne (vgl. III. Einl. 5. b) verstanden.

mit dem Prismatoid die Grundflächen gemein haben, zerlegt werden. Die Seitenflächen des Prismatoids und der Pyramiden sind kongruent, die Höhen sind gleich und fallen in die Hauptdiagonale des Rhomboeders. Das Prismatoid ist $= \frac{2}{3}$, jede Pyramide $= \frac{1}{6}$ des Rhomboeders.

b. Die Mitten von sechs Kanten eines Würfels, die nicht durch die nämlichen zwei gegenüberliegenden Ecken gehen, liegen in einer Ebene und bilden die Ecken eines regulären Sechsecks.

12. a. Schneidet man ein Prisma durch eine beliebige Ebene, so liegt der Flächen-Schwerpunkt der Schnittfigur auf der Verbindungslinie der Schwerpunkte der zwei Grundflächen. (Man bew. den Satz zuerst für ein dreiseitiges Prisma, zerlege ein mehrseitiges Prisma in lauter dreiseitige, und konstr. die Schwerpunkte der Flächen wie im Bew. von III. 20. a. — Die Teildreiecke der Schnittfigur sind nach I. Anh. 31 denen der Grundflächen proportioniert.)

b. Der Schwerpunkt einer ebenen Figur projiziert sich als Schwerpunkt der Projektionsfigur.

c. Der Inhalt eines schiefabgeschnittenen mehrseitigen Prismas ist gleich dem Inhalt eines senkrechten Prismas, das den gleichen Querschnitt, und die Strecke zwischen den Schwerpunkten der Endpolygone zur Höhe hat. (Man berechne den Inhalt mittels III. 16. Zus. 2, und die Strecke zwischen den zwei Schwerpunkten mittels des S. 164 erwähnten Trapez-Satzes.)

13. Ein Prisma wird von zwei Ebenen, deren Medianebene senkrecht zu den Seitenkanten ist, nach kongruenten Vielecken geschnitten (Wechselschnitte).

14—29: Vierflach. Schwerpunkt.

14. Die Summe der sechs Keile eines Vierflachs liegt zwischen 4 R und 6 R. (Die Summe der sphär. Exzesse der Dreikante an den vier Ecken muß > 0 und < 4 R sein. Zum Bew. bringe man die Spitzen der vier Dreikante durch Parallelverschiebung in den Mittelpunkt einer Kugel.)

15. Die Mittellotebenen der 6 Kanten eines Vierflachs schneiden sich zu je dreien nach 4 Geraden (den *Mittelloten der Flächen*) und gehen alle 6 durch *einen* Punkt, welcher

der Mittelpunkt der dem Vierflach umbeschriebenen Kugel ist.

16. a. Die inneren Medianebenen der sechs Kanten eines Vierflachs schneiden sich zu je dreien nach vier Geraden (den 4 inneren Medianen) und gehen alle sechs durch einen Punkt, welcher der Mittelpunkt der dem Vierflach einbeschriebenen Kugel ist. (II. Anh. 36.)

b. Die äußeren Medianebenen dreier in einer Fläche liegenden Kanten und die inneren Medianebenen der drei übrigen Kanten schneiden sich zu je dreien nach vier Geraden und gehen alle sechs durch einen Punkt, welcher der Mittelpunkt der dem Vierflach an jene Fläche anbeschriebenen Kugel ist. Von den vier Geraden ist eine eine innere Mediane, die drei andern sind äußere Medianen. Es giebt 12 äußere Medianen und 4 anbeschriebene Kugeln.

c. Die inneren Medianebenen zweier gegenüberliegenden Kanten und die äußeren Medianebenen der vier übrigen Kanten schneiden sich zu je dreien nach vier Geraden (äußeren Medianen) und gehen alle sechs durch einen Punkt. Dieser ist der Mittelpunkt einer Berührungskugel, die dem zweieckigen Scheitelkeilraum des Vierflachs an einer der zwei gegenüberliegenden Kanten einbeschrieben ist. Es giebt im allgem. 3 solcher Kugeln.

d. Von den 4 inneren und 12 äußeren Medianen eines Vierflachs schneiden sich also a) die 4 inneren —, b) 4mal 3 äußere und 1e innere —, c) 3mal 4 äußere in je einem Punkt.

(Eine analoge Lage wie die 8 Kugelmittelpunkte haben die 8 Punkte in I. Anh. Aufg. 10. b.)

17. a. Jede (innere oder äußere) Medianebene einer Kante eines Vierflachs teilt die gegenüberliegende Kante in zwei Teile, die sich verhalten wie die der ersten Kante anliegenden Flächen. (III. 12. Zus. 1 und I. Anh. 20.)

b. Jede (innere oder äußere) Mediane eines Vierflachs schneidet die gegenüberliegende Fläche in einem Punkte, dessen Verbindungslinien mit den drei Ecken der Fläche diese in drei Teile teilen, die sich verhalten wie die drei anliegenden Flächen.

18. a. Läßt sich in einem Vierflach eine Kugel beschreiben, die sämtliche sechs Kanten innerhalb der Kanten berührt, so sind die drei Summen je zweier Gegenkanten gleich.

b. Sind die drei Summen je zweier Gegenkanten eines Vierflachs gleich, so schneiden sich die Senkrechten, die auf den vier Flächen in den Mittelpunkten ihrer einbeschriebenen Kreise errichtet werden, in einem Punkt, welcher der Mittelpunkt der in diesem Falle vorhandenen kantenberührenden Innenkugel ist. Außerdem gibt es sechs Kugeln, von denen jede eine Kante und die Verlängerungen der vier anliegenden Kanten berührt.

19. a. Ein Vierflach wird von einer zu zwei Gegenkanten parallelen Ebene nach einem Parallelogramm geschnitten, das die von den zwei Kanten gebildeten Winkel enthält. Insbesondere bilden die Mittelpunkte der vier geschnittenen Kanten die Ecken eines Parallelogramms, dessen Seiten die Hälften der zwei Gegenkanten sind. Jedes Vierflach hat 3 solche Mittelparallelogramme. (Vgl. I. Anh. 14 und 13. a.)

b. Die drei Mitteltransversalen (d. s. die Verbindungsstrecken der Mitten zweier Gegenkanten) eines Vierflachs schneiden sich in einem Punkt und halbieren sich in demselben gegenseitig. (Sie bilden die Diagonalen der drei Mittelparallelogramme.) — Die Mittelpunkte aller zu zwei Gegenkanten parallelen Schnittparallelogramme liegen auf der zugehörigen Mitteltransversale.

c. Zieht man in jeder der vier Flächen eines Vierflachs die drei Verbindungsstrecken der Kantenmitten, so bilden diese 12 Strecken die Kanten eines dem Vierflach einbeschriebenen Achtflachs (Oktaeders im weiteren Sinn), das die drei Mittelparallelogramme zu Diagonalflächen und die drei Mitteltransversalen zu Diagonalen hat. Es kann als 6-seitiges Prismatoid, und zwar mit jeder seiner acht Flächen als Grundfläche, betrachtet werden. — Das Vierflach bildet den Halbflächner des Achtflachs; es kann nämlich aus dem Achtflach entstanden gedacht werden dadurch, daß von dessen 8 Flächen 4 nicht in einer Kante zusammenstoßende unterdrückt, und die 4 übrigen (die den vier ersten einzeln parallel sind) erweitert werden, bis sie sich schneiden.

d. Jedem Vierflach kann ein Parallelflach umbeschrieben werden, indem durch jede Kante eine Ebene parallel zu ihrer Gegenkante gelegt wird. Die Kanten des Parallelflachs sind gleich und parallel den Mitteltransversalen des Vierflachs. —

Umgekehrt können jedem Parallelflach zwei Vierflache einbeschrieben werden, deren Kanten die Diagonalen der Flächen des Parallelflachs sind. Sie haben die Mitteltransversalen und die Mittelparallelogramme gemein und stellen die 2 Halbflächner des ihren gemeinschaftlichen Kern bildenden einbeschriebenen Achtflachs vor, dessen Ecken die Mittelpunkte der Flächen des Parallelflachs bilden, und das dem Parallelflach zugeordnet heißt. Die zwei Vierflache, von denen jedes das Gegenvierflach des andern heißt, sind entsprechend-gleich, und zwar symmetrisch; sie liegen ähnlich und haben den Schnittpunkt der Mitteltransversalen zum Ähnlichkeitspunkt (III. Anh. 4. b). Jedes ist gleich dem dritten Teil des Parallelflachs.

e. Legt man durch die Mitte jeder Kante eines Vierflachs eine Ebene senkrecht zu ihrer Gegenkante, so schneiden sich diese sechs Ebenen in einem Punkt, welcher symmetrisch liegt mit dem Mittelpunkt der umbeschriebenen Kugel in Beziehung auf den Schnittpunkt der Mitteltransversalen. (Satz von Monge. — Bew. mit Hilfe des Gegenvierflachs.)

20. Die Schwerpunkte aller Parallelschnitte einer Pyramide liegen in einer Geraden, welche die Spitze mit dem Schwerpunkt der Grundfläche verbindet und die Schwerlinie der Pyramide heißt.

21. a. Die sechs Schwerebenen eines Vierflachs (d. s. die durch je eine Kante und die Mitte der Gegenkante gelegten Ebenen) schneiden sich zu je dreien nach den vier Schwerlinien des Vierflachs und gehen alle sechs durch einen Punkt, welcher der Schwerpunkt des Vierflachs heißt. Die vier Schwerlinien teilen sich im Schwerpunkt gegenseitig im Verhältnis 3 zu 1, so daß die größeren Abschnitte an die Ecken stoßen. — Die vier Pyramiden, in die das Vierflach vom Schwerpunkt aus zerlegt werden kann, haben gleichen Inhalt.

b. Der Schwerpunkt ist identisch mit dem Schnittpunkt der drei Mitteltransversalen, und also identisch mit dem Mittelpunkt des einbeschriebenen Achtflachs und des umbeschriebenen Parallelflachs.

Anm. Besteht ein Körper aus zwei Teilen, deren Rauminhalte $= k_1$ und k_2, und deren Schwerpunkte s_1 und s_2 sind, so erhält man den Schwerpunkt S des ganzen Körpers, wenn man $s_1 s_2$ im Verh. $s_1 S : S s_2 = k_2 : k_1$ teilt.

† 22. Teilt man die Schwerlinie (III. Anh. 20) einer mehrseitigen Pyramide im Verhältnis 3 zu 1 so, daß der größere Abschnitt an die Spitze stößt, so ist der Teilpunkt der Schwerpunkt der Pyramide. (Satz von Lionardo da Vinci. — Man zerlege die Pyramide durch Diagonalschnitte in Vierflache.)

Mittels dieses Satzes kann man gemäß der vorstehenden Anm. von jedem Polyeder den Schwerpunkt konstruieren, indem man es in Pyramiden zerlegt (III. Einl. 9).

23. a. Die Summe der Quadrate zweier Gegenkanten eines Vierflachs vermehrt um das 4-fache Quadrat der zugehörigen Mitteltransversale ist gleich der Summe der Quadrate der vier andern Kanten.

b. Die Summe der Quadrate der drei Mitteltransversalen ist gleich $\frac{1}{4}$ der Quadratsumme der sechs Kanten.

24. a. Das Quadrat einer Schwerlinie eines Vierflachs ist gleich $\frac{1}{3}$ der Quadratsumme der von der nämlichen Ecke ausgehenden drei Kanten weniger $\frac{1}{9}$ der Quadratsumme der drei übrigen Kanten. (Ist in einem $\triangle$ ABC die S. BC in M im Verh. BM : MC $= 1:2$ geteilt, so ist: $2\,AB^2 + AC^2 = 3\,AM^2 + 6\,BM^2$.)

b. Die 9-fache Quadratsumme der vier Schwerlinien ist gleich der 4-fachen Quadratsumme der sechs Kanten.

c. Die Quadratsumme der Entfernungen des Schwerpunktes von den vier Ecken ist gleich der Quadratsumme der drei Mitteltransversalen. (III. Anh. 23. b.)

25. a. Der Inhalt eines Vierflachs ist doppelt so groß als der Inhalt einer Pyramide, die ein Mittelparallelogramm zur Grundfläche und die kürzeste Entfernung der zwei ihm parallelen Gegenkanten zur Höhe hat. (III. 16.)

b. Jede durch eine Mitteltransversale eines Vierflachs gelegte Schnittebene teilt das Vierflach in zwei gleiche Teile. (Satz von Bobillier. — Die zwei Pyramiden, die zwischen der Schnittebene und einem durch die Mitteltransversale gehenden Mittelparallelogramm liegen, sind gleich.)

26. a. Das rhombische Vierflach oder Sphenoid. Haben in einem Vierflach je zwei gegenüberliegende Kanten gleiche Länge, so sind alle vier Flächen kongruent, und die Dreikante an allen vier Ecken kongruent; das Vierflach ist also gleicheckig-

gleichflächig und heißt Sphenoid. Das Netz eines solchen erhält man, wenn man durch die Ecken eines beliebigen, als Seitenfläche gewählten Dreiecks die Parallelen zu den Gegenseiten zieht. Im Sphenoid sind die drei Mittelparallelogramme Rhomben, (daher auch die Bezeichnung: rhombisches Vierflach). Die drei Mitteltransversalen stehen auf einander senkrecht. Das einbeschriebene Achtflach (III. Anh. 19. c) hat lauter kongruente Flächen. Das umbeschriebene Parallelflach (III. Anh. 19. d) ist ein Quader.

b. Das symmetrische Sphenoid hat kongr. gleichschenklige Dreiecke zu Flächen. Es hat also 4 gleiche Kanten (Gegenkanten-Paare); die zwei andern Kanten sind zu einander rechtwinklig. Die Dreikante sind gleichschenklig. Ein Mittelparallelogramm ist quadratisch, die zwei andern sind kongruent. Zwei Mitteltransversalen sind gleich.

27. a. Das Oblong-Vierflach. Bilden in einem Vierflach zwei Kanten mit ihren Gegenkanten rechte Winkel, so ist dies auch für das dritte Kantenpaar der Fall. Die drei Mittelparallelogramme sind Rechtecke, (daher die Bez.: Oblong-Vierflach). Die drei Mitteltransversalen sind gleich. Die Summe der Quadrate je zweier Gegenkanten ist konstant. Das einbeschriebene Achtflach besitzt eine umbeschriebene Kugel. Das umbeschriebene Parallelflach ist ein Rhomboeder (im weiteren Sinn).

b. Im Oblong-Vierflach schneiden sich die vier Höhen in einem Punkt (was beim allgemeinen Vierflach nicht der Fall ist). Durch diesen Punkt gehen auch die kürzesten Entfernungen der drei Paare von Gegenkanten.

c. Im Oblong-Vierflach liegen die Fußpunkte der vier Höhen, die Schwerpunkte der vier Seitenflächen, sowie die Punkte, welche die oberen Abschnitte der vier Höhen vom Höhenschnittpunkt aus im Verhältnis 1 : 2 teilen, auf einer Kugelfläche (Feuerbach'sche Kugel), deren Halbmesser gleich $\frac{1}{3}$ des Halbmessers der umbeschriebenen Kugel ist, und deren Mittelpunkt die Verbindungsstrecke von Höhenschnittpunkt und Mittelpunkt der umbeschriebenen Kugel im Verhältnis 1:2 teilt. (Satz von H. Vogt. — Die Teilpunkte zweier Höhenabschnitte und die Schwerpunkte der zugehörigen zwei Seitenflächen bilden die Ecken eines Rechtecks, dessen Mittelpunkt der Mittelpunkt der Kugel ist. Das durch die vier Teilpunkte der Höhenabschnitte bestimmte Vierflach ist mit dem Haupt-Vierflach ähnlich und ähnlich liegend.)

28. In jedem Vierflach ist der reziproke Wert des Halbmessers der einbeschriebenen Kugel gleich der Summe der reziproken Werte der vier Höhen und gleich der halben Summe der reziproken Werte der vier Halbmesser der anbeschriebenen Kugeln. (Sind a_1, a_2, a_3, a_4 die vier Seitenflächen, h_1, h_2, h_3, h_4 die zugehörigen Höhen, r_1, r_2, r_3, r_4 die Halbmesser der anbeschriebenen Kugeln, r der Halbm. der einbeschriebenen Kugel, so ist:

$$\frac{a_1}{\frac{1}{h_1}} = \frac{a_2}{\frac{1}{h_2}} = \frac{a_3}{\frac{1}{h_3}} = \frac{a_4}{\frac{1}{h_4}} = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4}{\frac{1}{r}} = \frac{a_1 + a_2 + a_3 - a_4}{\frac{1}{r_4}} \text{ u.s.w.)}$$

29. a. Zieht man in einem Vierflach von den Ecken A, B, C, D nach den gegenüberliegenden Flächen vier Strecken AA', BB', CC', DD', die sich in einem Punkte O schneiden, so ist:

$$\frac{OA'}{AA'} + \frac{OB'}{BB'} + \frac{OC'}{CC'} + \frac{OD'}{DD'} = 1, \text{ und: } \frac{AO}{AA'} + \frac{BO}{BB'} + \frac{CO}{CC'} + \frac{DO}{DD'} = 3.$$

(Mittels der Verh. der vier Teilpyramiden zum ganzen Vierflach.)

b. Fällt man von einem beliebigen Punkt im Innern eines Vierflachs die Senkrechten auf die Flächen, so ist die Summe der vier Verhältnisse aus je einer Senkrechten und der ihr parallelen Höhe $= 1$.

c. Die Summe der Entfernungen eines beliebigen Punktes im Innern eines regul. Tetraeders von den vier Flächen ist konstant, und zwar gleich der Höhe des Tetraeders.

30—37: Pyramide und Kegel, Pyramiden- und Kegelrumpf.

30. a. In einer dreiseitigen Pyramide, deren Dreikant an der Spitze ein Oktant ist, sind die Winkel der Grundfläche alle spitz; die Projektionen der Seitenkanten auf die Grundfläche fallen in die Höhen der Grundfläche, die Projektion der Spitze fällt in den Schnittpunkt der Höhen.

b. Das Quadrat der Grundfläche ist gleich der Summe der Quadrate der Seitenflächen.

31. a. Um jede reguläre Pyramide und in jede reguläre Pyramide läßt sich eine Kugel beschreiben.

b. Um jeden regul. Pyramidenrumpf läßt sich eine Kugel beschreiben.

c. In einen Kegelrumpf läßt sich eine Kugel beschreiben, wenn die Mantellinie gleich der Summe der Grundkreis-Halbmesser ist.

32. a. Stellt man das Netz einer Pyramide dadurch her, daß man längs den Seitenkanten aufschneidet und die Seitenflächen durch Drehung um die Grundkanten in die Ebene der Grundfläche umlegt, so schneiden sich in dieser Netzfigur die Senkrechten, die von den freien Ecken der Seitenflächen auf die zugehörigen Grundkanten gefällt werden, in einem Punkt, welcher den Fußpunkt der Höhe der Pyramide vorstellt.

b. In jeder Pyramide ist die Summe der Seitenflächen größer als die Grundfläche.

c. Legt man in einem Prisma oder Pyramidenrumpf zwei Seitenflächen, die eine Seitenkante BB' gemein haben, durch Drehung um die Grundkanten AB und BC in die Ebene der unteren Grundfläche um, so schneiden sich die Senkrechten, die von den zwei Umlegungen des Punktes B' auf die entsprechenden Grundkanten gefällt werden, in einem Punkt, der die Projektion der Ecke B' auf die untere Grundfläche vorstellt.

33. Die Abwicklungsfigur des Mantels eines Kegels, dessen Achsenschnitt ein gleichseitiges Dreieck ist, ist ein Halbkreis.

34. Wird eine reguläre quadratische Pyramide von einer durch eine Grundkante gelegten Schnittebene halbiert, so werden zwei Seitenkanten von ihr golden geschnitten. (III. 16. Zus. 2.)

35. Der Rauminhalt eines Polyeders, in das sich eine Kugel einbeschreiben läßt, ist gleich $\frac{1}{3}$ mal Oberfläche mal Halbmesser der einbeschriebenen Kugel.

36. Haben zwei dreiseitige Pyramiden an den Spitzen entsprechend-gleiche Dreikante, so verhalten sich ihre Inhalte wie die Produkte ihrer Seitenkanten.

37. a. Verhalten sich in einem Pyramidenrumpf zwei entsprechende Seiten der Grundflächen G und G' wie m zu m', und teilt ein Parallelschnitt die Höhe im Verhältnis $\sqrt{m}$ zu $\sqrt{m'}$, so daß der größere Abschnitt an die größere Grundfläche stößt, so ist die Schnittfigur: $S = \sqrt{GG'}$. Der Inhalt des Pyramidenrumpfes ist also gleich der Summe der drei Pyramiden, welche die drei Flächen G, G', S zu Grundflächen und die Höhe des Pyramidenrumpfes zur Höhe haben.

b. Der Rauminhalt eines Kegelrumpfes ist gleich einem Cylinder von der gleichen Höhe und einem Halbmesser gleich der halben Summe der Grundkreis-Halbmesser des Rumpfes, plus einem Kegel von der gleichen Höhe und einem Grundkreis-Halbmesser gleich der halben Differenz der Grundkreis-Halbmesser des Rumpfes.

38—39: Prismatoid.

38. a. Der Inhalt eines Prismas, dessen Grundflächen Trapeze sind, ist gleich dem arithm. Mittel zwischen den zwei parallelen Seitenflächen — mal ihrer Entfernung.

b. Der Inhalt eines schiefabgeschnittenen Parallelflachs ist gleich dem arithm. Mittel zwischen den vier Parallelkanten oder zwischen zwei gegenüberliegenden Parallelkanten — mal dem zu ihnen senkrechten Querschnitt. (III. 16. Zus. 2.)

39. a. Ein Prismatoid werde auf die Ebene seiner unteren Grundfläche G projiziert; die obere Grundfläche (Deckfläche) sei D. Die algebr. Summe der Projektionen derjenigen Seitenflächen, die mit D eine Kante gemein haben, (Oberdreiecke) werde durch O, diejenige der übrigen Seitenflächen (Unterdreiecke) durch U bezeichnet; so zwar, daß in den zwei algebr. Summen jede Fläche mit positivem oder negativem Vorzeichen versehen wird, je nachdem sie sich mit obenliegender Außenseite oder Innenseite projiziert. Man hat dann stets: $D + O + U = G$. Ist die Höhe des Prismatoids $= h$, so ist sein Inhalt: $K = \frac{h}{3}(3D + 2O + U)$ oder $= \frac{h}{3}(2D + G + O)$. (Satz von E. Gusserow.) (Man berücksichtige auch den Fall, daß zwei Seitenflächen, die einen einspringenden Keil einschließen, in der Projektion auf die nämliche Seite der Keilkante zu liegen kommen, so daß in der Nähe der Kante die Polyederoberfläche von einer zur Grundfläche senkrechten Linie in vier Punkten geschnitten wird.)

b. Ist die Höhe eines Prismatoides $= h$, eine Grundfläche $= G$, und derjenige Parallelschnitt, der von G eine Entfernung $= \frac{h}{3}$ hat, $= S$, so ist der Inhalt: $K = \frac{h}{4}(G + 3S)$.

40—46: Kugel und Umdrehungskörper.

† 40. Werden zwei Körper von verschiedenen Höhen durch jedes Paar Ebenen, die zu den Höhen senkrecht sind und sie im nämlichen Verhältnis teilen, nach flächengleichen Figuren geschnitten, so verhalten sich die Rauminhalte der zwei Körper wie ihre Höhen. (Bew. ähnlich wie III. 11, mittels III. 8. Zus. 1.)

41. a. Wird ein Kreisabschnitt um den mit seiner Sehne parallelen Kreisdurchmesser gedreht, so entsteht ein Umdrehungskörper, der den gleichen Inhalt hat wie die über der Sehne als Durchmesser beschriebene Kugel. (III. 11. Zus.)

b. Wird ein Kreisabschnitt um einen beliebigen, ihn nicht schneidenden Durchmesser seines Kreises gedreht, so entsteht ein Umdrehungskörper, der sich zu der über der Sehne als Durchmesser beschriebenen Kugel verhält wie die Projektion der Sehne auf die Drehachse zur Sehne. (III. Anh. 40.)

42. Beschreibt man einer Kugel einen Kegelrumpf um, so daß sie von den beiden Grundkreisen und dem Mantel berührt wird, so ist der Raum zwischen den Oberflächen der Kugel und des Kegelrumpfes gleich der Summe der zwei Kegel, welche die Grundkreise des Kegelrumpfes zu Grundkreisen und den Mittelpunkt des Berührungskreises zur gemeinschaftlichen Spitze haben. (Verallgemeinerung von III. 17. a, Beweis.)

43. Zieht man in den zwei Grundkreisen einer Kugelzone zwei parallele Durchmesser und bezeichnet die Verbindungsstrecken der zwei Endpunkte des einen Durchmessers mit einem Endpunkt des andern durch s und s', so ist die krumme Oberfläche der Zone $= s s' \pi$. (Verallgem. von III. 18. Zus. 2.)

44. a. Berühren zwei zu einander senkrechte windschiefe Gerade eine Kugel in den Endpunkten eines Durchmessers, und schneidet man auf einer derselben eine Strecke gleich dem Durchmesser, auf der andern eine Strecke gleich der Großkreis-Peripherie der Kugel beliebig ab, so werden das durch die vier Endpunkte der Strecken bestimmte Vierflach und die Kugel von jeder zum Berührungsdurchmesser senkrechten Ebene nach flächengleichen Figuren geschnitten (Satz von A. Schmidt. — Hiernach Berechnung von Kugel, Kugelzone und Kugelabschnitt.)

b. Ein Kreuzsatteldach entsteht dadurch, daß zwei kongruente Satteldächer mit gleichschenkl. Dreiecken als Stirnflächen auf gemeinschaftl. quadratischer Basis ruhen und sich so durchdringen, daß die Firstkanten sich rechtwinklig schneiden und gegenseitig halbieren. Ist die Grundfläche des Kreuzsatteldaches gleich dem Grundkreis, und seine Höhe gleich dem Halbmesser einer Halbkugel, so haben irgend zwei Parallelschnitte beider Körper in gleichen Abständen von den Grundflächen — gleichen Flächeninhalt. (Man betrachte das Kreuzsatteldach als Differenz eines Quaders und vier quadratischer Pyramiden.)

c. Die Prismatoidformel (III. 16) gilt auch für Kugel, Kugelzone und Kugelabschnitt.

d. Hat ein Faß- oder Kessel-förmiger Körper zu einer Kugelzone, bezw. einem Kugelabschnitt eine solche Beziehung, daß die zwei Körper von jedem Paar Ebenen, die zu den beiderseitigen Höhen senkrecht sind und sie im nämlichen Verhältnis teilen, nach flächengleichen Figuren geschnitten werden, so gilt für den Körper die Prismatoidformel. (III. Anh. 40.) Daher giebt die Prismatoidformel brauchbare Näherungswerte für die Berechnung von Fässern und Kesseln, deren krumme Oberfläche geometrisch nicht genau definiert ist. Ist also die (innere) Höhe eines Fasses $= h$, der Bodendurchmesser $= d$, der Spunddurchmesser $= D$, so kann man setzen: $K = \frac{\pi h}{12}(d^2 + 2D^2)$.

45. Dreht man ein Dreieck um eine seiner Schwerlinien als Achse, so beschreiben seine beiden Teile gleich große Rotationskörper. — Die Inhalte der drei durch Drehung um die drei Schwerlinien erzeugten Rotationskörper verhalten sich wie die reziproken Werte der Schwerlinien.

46. Dreht man eine ebene Figur, die aus zwei symmetrischen Hälften besteht, um eine sie nicht schneidende Achse, die parallel zur Symmetralachse ist, so ist die halbe Differenz der Inhalte oder Oberflächen der von den zwei Hälften beschriebenen Umdrehungskörper gleich dem Inhalt oder der Oberfläche des Umdrehungskörpers, der durch Drehung der Figur um ihre Symmetralachse entsteht.

47—63: Reguläre und halbreguläre Polyeder. Regul. Krystallsystem.

47. a. Je zwei Gegenkanten eines regul. Tetraeders sind zu einander senkrecht. Die Verbindungsstrecke ihrer Mittelpunkte stellt ihre kürzeste Entfernung vor.

b. Bei Dodekaeder und Ikosaeder sind 5 Gruppen von je 3 Paaren paralleler Kanten vorhanden, deren Richtungen zu einander senkrecht sind.

48. Für jedes regul. Polyeder läßt sich eine Kugel konstruieren, die sämtliche Kanten in deren Halbierungspunkten berührt. Ihr Mittelpunkt fällt mit dem Mittelpunkt der ein- und der umbeschriebenen Kugel zusammen.

49. a. Die Mittelpunkte der Flächen eines regul. Polyeders bilden die Ecken eines andern, dem ersten zugeordneten regul. Polyeders. (Vgl. III. 4. Zus.)

b. Ist einer Kugel ein regul. Polyeder einbeschrieben, und legt man in seinen Ecken die Berührungsebenen an die Kugel, so schließen diese ein zweites, dem ersten zugeordnetes regul. Polyeder ein; und umgekehrt.

c. Die Ebenen, die durch die Endpunkte der von je einer Ecke ausgehenden Kanten eines regul. Polyeders — oder durch Punkte dieser Kanten, die von der Ecke gleich weit abstehen — gelegt werden, schließen ein zweites, dem ersten zugeordnetes regul. Polyeder ein.

Man sagt daher, die Flächen des einen von zwei zugeordneten regul. Polyedern *stumpfen die Ecken des andern ab.*

50. Die Ecken jedes der in II. Anh. Aufg. 61 besprochenen fünf Netze von regul. sphär. Vielecken auf einer Kugeloberfläche bilden die Ecken eines der Kugel einbeschriebenen — oder die Berührungspunkte der Flächen eines der Kugel umbeschriebenen regul. Polyeders. (Hiernach kann man auch von der Sphärik aus zu den regul. Polyedern gelangen, und zwar reichen hiezu die drei regul. Dreiecksnetze aus.)

51. Haben zwei einander zugeordnete regul. Polyeder gleiche Halbmesser der umbeschriebenen Kugeln, so haben sie auch

a. gleiche Halbmesser der ihren Flächen umbeschriebenen Kreise, und daher auch gleiche Halbmesser der einbeschriebenen Kugeln. (Die sphär. Mittelpunkte der den Flächen des einen umbeschr. Kreise bilden die Ecken eines mit dem andern kongr. Polyeders.)

b. Das Produkt der Halbmesser der kantenberührenden Kugeln ist gleich dem Produkt der Halbmesser der einbeschriebenen und der umbeschriebenen Kugel: $\rho\rho' = rR$. (Bei der in a. angedeuteten Lage liegt je ein ρ und ein R des einen Pol. bezw. mit einem ρ' und einem r des andern in der nämlichen Geraden.)

c. Die Rauminhalte der zwei Polyeder verhalten sich wie die Halbmesser ihrer kantenberührenden Kugeln. (Satz von Dostor.)

52. a. Unter den Ecken eines Würfels sind 2 Gruppen von je 4 Ecken vorhanden, die zugleich Ecken eines regul. Tetraeders sind; die Tetraederkanten werden durch Quadratdiagonalen vorgestellt. (Vgl. III. Anh. 19. d.)

b. Unter den Ecken eines Dodekaeders sind 5 Gruppen von je 8 Ecken vorhanden, die zugleich Ecken eines Würfels sind; die Würfelkanten werden durch Fünfecksdiagonalen vorgestellt (III. Anh. 47. b). Das Dodekaeder kann aufgefaßt werden als Würfel, auf dessen sechs Flächen kongruente Walmdächer aufsitzen; jede Dreiecksfläche eines Walmdaches bildet mit einer Trapezfläche eines andern zusammen ein regul. Fünfeck.

53. a. Unter den Flächen eines regul. Oktaeders sind 2 Gruppen von je 4 Flächen vorhanden, die (erweitert gedacht) zugleich Flächen eines regul. Tetraeders sind. (Vgl. III. Anh. 19. c und d.)

b. Unter den Flächen eines Ikosaeders sind 5 Gruppen von je 8 Flächen vorhanden, die zugleich Flächen eines Oktaeders sind. (III. Anh. 52. b und 49. b.)

54. a. Die Mitten der 6 Kanten eines Tetraeders bilden die Ecken eines Oktaeders. (Vgl. III. Anh. 19. c.)

b. Die Mitten der 12 Kanten eines Würfels oder eines Oktaeders bilden die Ecken des nämlichen gleicheckig-halbregul. Polyeders, dessen Oberfläche aus 8 kongr. regul. Dreiecken und 6 kongr. Quadraten besteht, und an dessen Ecken sich kongr. Vierkante befinden.

c. Die Mitten der 30 Kanten eines Dodekaeders oder eines Ikosaeders bilden die Ecken des nämlichen gleicheckig-halbregul. Polyeders, dessen Oberfläche aus 20 kongr. regul. Dreiecken und

12 kongr. regul. Fünfecken besteht, und an dessen Ecken sich kongr. Vierkante befinden.

Durch Erweiterung der Flächen der in a, b, c genannten Polyeder erhält man je zwei zugeordnete regul. Polyeder in sternförmiger Durchdringung (zwei zugeordnete regul. Polyeder „im Gleichgewicht".)

55. Legt man durch jede Kante eines regul. Polyeders eine Ebene, die mit den anstoßenden Flächen gleiche Keile bildet und das Polyeder nicht schneidet, so umschließen diese Ebenen

a. beim Tetraeder die Flächen eines Würfels. (Vgl. III. Anh. 52. a.)

b. Beim Würfel und beim Oktaeder umschießen die 12 Ebenen das nämliche gleichflächig-halbregul. Polyeder, welches Rhomben-Dodekaeder oder Granatoeder heißt. Seine Oberfläche besteht aus 12 kongr. Rhomben, deren kleinere Diagonalen die Würfelkanten, deren größere Diagonalen die Oktaederkanten sind. Es hat 14 Ecken; an den 8 Würfelecken befinden sich kongr. regul. Dreikante, an den 6 Oktaederecken kongr. regul. Vierkante.

c. Beim Dodekaeder und beim Ikosaeder umschließen die durch die 30 Kanten gelegten Ebenen das nämliche gleichflächig-halbregul. Polyeder, welches Rhomben-Triakontaeder oder ikosaedrisches Granatoeder heißt. Seine Oberfläche besteht aus 30 kongr. Rhomben, deren kleinere Diagonalen die Dodekaederkanten, deren größere die Ikosaederkanten sind. Es hat 32 Ecken; an den 20 Dodekaederecken befinden sich kongr. regul. Dreikante, an den 12 Ikosaederecken kongr. regul. Fünfkante.

Man sagt, die in a, b, c genannten Polyeder stumpfen die Kanten der ursprüngl. Polyeder ab. — Die beiden Granatoeder heißen auch Keplerische Körper.

56. Die Flächen der in 55. a, b, c genannten Polyeder berühren die kantenberührende Kugel des ursprünglichen Polyeders; die Berührungspunkte fallen in die Mittelpunkte der Flächen und bilden die Ecken der in 54. a, b, c genannten Körper, (die Flächen der ersteren stumpfen die Ecken der letzteren ab). Die Diagonalen der Flächen der in 55 genannten Polyeder bilden die scharfen Kanten der in 54 (Schlußbemerkung) genannten sternförmigen Körper.

57. a. Das oktaedr. Granatoeder kann in 4 kongr. stumpfe Rhomboeder (vgl. III. Einl. 5. b) zerlegt werden. (4 Würfelecken des Granatoeders, die zugleich Tetraederecken sind, stellen von jedem Rhomboeder eine Hauptecke vor, die 4 andern Hauptecken liegen im Mittelpunkt.)

b. Die 6 Granatoederflächen, welche an dem als 6-seitiges Prismatoid aufgefaßten Oktaeder die Seitenkanten abstumpfen, gehören einem regul. 6-seitigen Prismenmantel an, dessen 6 Kanten der Prismatoid-Höhe parallel sind. Das Granatoeder kann (in 4-facher Weise) aufgefaßt werden als 6-seitiges Prisma, das durch je 3 Flächen oben und unten dachförmig (rhomboedrisch) zugespitzt ist. Sämtliche Keile sind $= 120^\circ$.

Beim ikosaedr. Granatoeder sind 6 Gruppen von je 10 Flächen vorhanden, die einem regul. 10-seitigen Prismenmantel angehören. Jeder Keil ist $= 144^\circ$.

c. Verbindet man in einem regulären 6-seitigen Prisma einen auf der oberen Verlängerung der Prismenachse beliebig gewählten Punkt mit drei nicht auf einander folgenden Ecken der oberen Grundfläche und legt durch je zwei Verbindungslinien eine Ebene, so schließen diese drei Ebenen zusammen mit dem Prismenmantel und der untern Grundfläche einen Körper ein, der von 3 kongr. Rhomben, 6 kongr. Trapezen und einem regul. Sechseck begrenzt ist. Er hat stets den gleichen Rauminhalt, wie auch der Punkt auf der Achse angenommen werden mag. Die Oberfläche dagegen ist veränderlich; sie ist am kleinsten für diejenige Annahme, welche mit der Granatoederform übereinstimmt. (Form der Bienenzellen.)

---

58. Die 6 Ecken eines Oktaeders seien mit A, die Mittelpunkte seiner 8 Flächen mit f, die Mittelpunkte seiner 12 Kanten mit k bezeichnet, sein Mittelpunkt sei O. Auf den 6 Strahlen OA seien ferner 6 gleiche Strecken $OB > OA$ abgeschnitten. Die 6 Strahlen OA bilden die Kanten von 8 Oktanten. 3 Punkte A oder B, die auf verschiedenen Kanten des nämlichen Oktanten liegen, werden im folgenden diesem Oktanten *zugehörig* genannt. Ein Punkt, der auf einem Strahl Of oder Ok liegt, wird mit F oder K bezeichnet.

a. Legt man durch je 3 Punkte A, A und B, die dem nämlichen Oktanten zugehören, eine Ebene, so umschließen die 24 auf diese Weise möglichen Ebenen ein Polyeder, das Pyramidenoktaeder heißt*). Es kann nämlich aufgefaßt werden als Oktaeder, auf dessen 8 Flächen kongr. regul. Pyramiden aufgesetzt sind. Die Spitzen F dieser Pyramiden liegen auf den Strahlen Of und bilden die Ecken eines Würfels. Die 24 Flächen des Körpers sind kongr. gleichschenklige Dreiecke. An den 8 Würfelecken F befinden sich kongr. regul. 3-kante, an den 6 Oktaederecken A: kongr. (nicht regul.) 8-kante. — Ist OB gleich OA plus der Oktaederkante, so sind auch die 8-kante regulär, der Körper gehört also dann zu den gleichflächig-halbregulären Polyedern. — Wird OB = ∞ gewählt, so fallen je zwei an eine Oktaederkante anstoßende Dreiecksflächen in eine Ebene: das Pyramidenoktaeder geht in das Granatoeder über.

b. Legt man durch je 3 Punkte A, B und B, die dem nämlichen Oktanten zugehören, eine Ebene, so umschließen die 24 auf diese Weise möglichen Ebenen ein Polyeder, das Leuzitoeder heißt. Die 24 Flächen des Körpers sind kongr. Deltoide (Vierecke, die in Beziehung auf eine Diagonale symmetrisch sind). Der Körper hat 26 Ecken von 3erlei Art, nämlich: 6 Oktaederecken A, 8 Ecken F (Würfelecken), 12 Ecken K (welche die Ecken des in Anh. 54. b genannten Körpers bilden). Die 48 Kanten sind von 2erlei Art; die 24 Kanten AK können als gebrochene Oktaederkanten, die 24 Kanten FK als gebrochene Würfelkanten bezeichnet werden. An den Ecken A befinden sich kongr. regul. 4-kante, an den Ecken F: kongr. regul. 3-kante, an den Ecken K: kongr. (nicht regul.) 4-kante. — Ist OB gleich OA plus der Oktaederkante, so sind auch die letztgenannten 4-kante regul., das Polyeder ist also gleichflächig-halbregulär. — Ist OB = 2 OA, so bilden die Hauptdiagonalen der Deltoide die Kanten eines Granatoeders, der Körper stumpft alsdann die Kanten des Granatoeders ab. — Wird OB = ∞ gewählt, so geht das Leuzitoeder in den Würfel über.

c. Legt man durch je 2 dem nämlichen Oktanten zugehörige Punkte A und B parallel zu seiner dritten Kante eine

*) Um hier und im folgenden rasch eine Vorstellung von dem fraglichen Körper zu gewinnen, betrachte man jedesmal zunächst nur die zu einem Oktanten gehörigen Ebenen.

Ebene, so umschließen die 24 auf diese Weise möglichen Ebenen ein Polyeder, das Pyramidenwürfel heißt und aufgefaßt werden kann als Würfel, auf dessen 6 Flächen kongr. regul. Pyramiden aufgesetzt sind. Die 24 Flächen sind kongr. gleichschenklige Dreiecke. Der Körper hat 6 Ecken A und 8 Ecken F (Würfelecken). An den Ecken A befinden sich kongr. regul. 4-kante, an den Ecken F: kongr. (nicht regul.) 6-kante. — Ist $OB = 2\,OA$, so ist der Körper gleichflächig-halbregulär, (Krystallform von Gold und Silber). — Ist $OB = OA$, so geht der Pyramidenwürfel in das Granatoeder über.

Die Flächen des (allgem.) Pyramidenwürfels stumpfen die gebrochenen Oktaederkanten eines Leuzitoeders ab. Umgekehrt stumpfen die Flächen des Leuzitoeders die Pyramidenkanten eines Pyramidenwürfels ab.

59. Auf den 6 Halbdiagonalen OA eines Oktaeders seien 6 gleiche Strecken OB und 6 gleiche Strecken OC abgeschnitten, und zwar sei $OC > OB > OA$. Im übrigen mögen die nämlichen Bezeichnungen gelten wie in 58. — Legt man durch je 3 Punkte A, B, C die dem nämlichen Oktanten zugehören, eine Ebene, so umschließen die 48 auf diese Weise möglichen Ebenen ein Polyeder, das Achtundvierzigflächner oder Diamantoeder heißt. Die 48 Flächen sind kongr. ungleichseitige Dreiecke. Der Körper hat 26 Ecken, und zwar von dem nämlichen Charakter wie das Leuzitoeder (6 Ecken A, 8 Ecken F, 12 Ecken K). Vergleicht man das Diamantoeder mit dem Leuzitoeder, so erscheinen die Deltoidflächen des letzteren längs ihren Hauptdiagonalen gebrochen. — Für den Fall, daß $\frac{1}{OB} + \frac{1}{OC} = \frac{1}{OA}$ ist, liegen je zwei Ecken A mit zwei Ecken F in einer Ebene und bilden die Ecken eines Rhombus; man hat dann die spezielle Form des Pyramidengranatoeders. — Die 72 Kanten des Diamantoeders sind von 3erlei Art: die 24 Kanten AK können als gebrochene Oktaederkanten, die 24 Kanten FK als gebrochene Würfelkanten, die 24 Kanten AF als Pyramidenoktaeder- oder Pyramidenwürfel-Kanten (eventuell als Granatoederkanten) bezeichnet werden. An den Ecken A befinden sich kongr. (nicht regul.) 8-kante, an den Ecken F — 6-kante, an den Ecken K — 4-kante. — Ist OB gleich 3 OA minus der Oktaederkante, und OC gleich

OA plus der doppelten Oktaederkante: so ist der Körper gleichflächig-halbregulär. (Zum Beweis betrachte man die Schnittfigur einer durch zwei Strahlen OA und Of gelegten Ebene. In dieser seien A, F, K drei auf einander folgende Ecken. Macht man kl parallel und gleich-gerichtet mit OA und gleich der halben Oktaederkante, so muß KF durch l gehen, wenn das Vierkant bei K regul. sein soll. Schneiden sich ferner FK und Ak in m, so muß Fm = FA sein, wenn das 6-kant bei F regul. sein soll. Da sich nun Ak und OF in f schneiden, und fk = $\frac{1}{2}$ fA ist, so muß sein: km = $\frac{1}{3}$ Ak; folglich, wenn OA und KF sich in B schneiden: OB — OA = 4 kl, u. s. w.)

Anm. Oktaeder, Pyramidenoktaeder, Granatoeder, Leuzitoeder, Würfel, Pyramidenwürfel, Diamantoeder stellen die 7 einzig möglichen (vollständigen) Formen des regulären Krystallsystems vor. Das Diamantoeder ist die allgemeinste Form, von der die 6 übrigen als spezielle Fälle angesehen werden können. — Uebrigens sind krystallographisch nur solche Formen möglich, für welche die Achsenabschnitte OA, OB, OC in rationalem Verhältnis stehen. Es haben daher die in 58. a. u. b und in 59 erwähnten halbregulären Formen nur geometrisches Interesse.

60. a. Unterdrückt man bei einem Pyramidenwürfel die Hälfte der Flächen und läßt die andere Hälfte bis zu ihrem gegenseitigen Schnitt sich ausdehnen, so zwar, daß immer drei solche Flächen unterdrückt werden, die mit einer bleibenden Fläche eine Kante gemein haben, und umgekehrt: so entsteht (als Halbflächner des Pyramidenwürfels) ein von 12 Fünfecken begrenzter Körper, welcher Pyritoeder heißt (Krystallform des Schwefelkies mit OB = 2 OA). Ist im ursprüngl. Pyramidenwürfel OB = $\frac{1}{2}$ OA $(1+\sqrt{5})$, so ist der Körper identisch mit dem regul. Dodekaeder. Andernfalls sind die 12 Fünfecke nicht regulär, aber symmetrisch gestaltet. Der allgem. Körper kann (wie das regul. Dodekaeder, vgl. III. Anh. 52. b) aufgefaßt werden als Würfel, auf dessen 6 Flächen kongr. Walmdächer aufsitzen; doch haben deren Firstkanten eine andere Länge als die übrigen unter sich gleichen Kanten. — Läßt man die seither unterdrückten Flächen des Pyramidenwürfels bis zu ihrem gegenseitigen Schnitt sich ausdehnen, so entsteht ein zweites, dem ersten kongr. Pyritoeder, welches das erste so durchdringt, daß je zwei

Firstkanten sich rechtwinklig durchschneiden und gegenseitig halbieren. („Zwilling des eisernen Kreuzes.")

b. Verfährt man beim Diamantoeder ebenso wie in a), so erhält man als Halbflächner einen von 24 (unsymmetr.) Fünfecken begrenzten Körper, welcher Gyroeder heißt. Geht man zunächst vom Pyramidengranatoeder aus, so verhält sich dessen Halbflächner zum Granatoeder ähnlich wie das Pyritoeder zum Würfel: er kann aufgefaßt werden als Granatoeder, auf dessen 12 Flächen rhombische (schief-symmetrisch gestaltete) Walmdächer aufsitzen. Beim allgemeinen Gyroeder erscheint die Grundfläche jedes Walmdaches längs einer Diagonale gebrochen. Der Körper hat 38 Ecken; die 6 Ecken A und 8 Ecken F des Diamantoeders sind geblieben, dazu kommen als neue Ecken (anstatt der 12 Ecken K) die 24 Endpunkte E der Firstkanten. An den Ecken A befinden sich regul. 4-kante, an F: regul. 3-kante, an E: nicht regul. 3-kante. Die 60 Kanten haben 3erlei Längen*).

61. a. Setzt man zwei kongruente regul. Pyramiden so an einander, daß die Grundflächen sich decken, so heißt der entstehende Körper eine Doppelpyramide. Sind die Keile an den Grundkanten der Pyramiden halb so groß als die Keile an den Seitenkanten, so ist der Körper gleichflächig-halbregulär.

b. Sind die zwei Pyramiden 2n-seitig, und wendet man auf die Doppelpyramide dasselbe Verfahren an wie in 60, so erhält man als Halbflächner ein von 2n kongr. Deltoiden umschlossenes Polyeder, welches Trapezoeder heißt. Dasselbe entsteht auch, wenn man in einem regul. 2n-seitigen Prismatoid die Grundflächen unterdrückt und die Seitenflächen sich pyramidal erweitern läßt. — Ist in den zwei ursprüngl. Pyramiden die Grundkante = a, der Halbmesser des der Grundfläche umbeschriebenen Kreises = R, der Halbmesser der den zwei Pyramiden-Mänteln aus dem Mittelpunkt der Grundfläche einbeschriebenen Berührungskugel

---

*) Es giebt auch eine gleichflächig-halbreguläre Form des Gyroeders. Sie entsteht, wenn in dem ursprüngl. Diamantoeder zwischen $OA = a$, $OB = b$, $OC = c$ die zwei Beziehungen gelten:

$$b^3 - ab^2 - a^2b - a^3 = 0, \qquad c^3 - 3ac^2 - a^2c - a^3 = 0.$$

Doch bietet die Ableitung dieser Beziehungen auf elementarem Wege Schwierigkeiten.

$= r$, und besteht die Beziehung: $r = \frac{R^2}{\sqrt{R^2 + a^2}}$, so ist das Trapezoeder gleichflächig-halbregulär. (Man drücke aus, daß die Berührungspunkte der Kugel mit drei an eine Fläche anstoßenden Flächen der Doppelpyramide die Ecken eines gleichseitigen Dreiecks bilden müssen. — Das 10-seitige halbregul. Trapezoeder ergiebt sich leicht aus dem regul. Dodekaeder.)

62. a. Um jedes gleich e c k i g - halbregul. Polyeder und i n jedes gleich f l ä c h i g - halbregul. Polyeder läßt sich eine Kugel beschreiben. (Man betrachte, wie in III. 5, die je aus einer Fläche und deren Nachbarflächen — bezw. die je aus einer Ecke und deren Nachbarecken — bestehenden Gebilde.)

b. Ist einem gleich e c k i g - halbregul. Polyeder eine Kugel u m beschrieben, und legt man an sie in sämtlichen Ecken die Berührungsebenen, so umschließen diese ein gleich f l ä c h i g - halbregul. Polyeder, das dem ursprünglichen z u g e o r d n e t oder r e z i p r o k heißt. Hat das ursprüngl. Polyeder ν regul. n-ecke, ν' n'-ecke, ν'' n''-ecke und π entspr.-gleiche p-kante, so hat das reziproke Polyeder ν regul. n-kante, ν' n'-kante, ν'' n''-kante und π kongr. p-ecke. — Umgekehrt: Ist einem gleich f l ä c h i g - halbregul. Polyeder eine Kugel e i n beschrieben, so bilden die Berührungspunkte die Ecken des ihm reziproken gleich e c k i g - halbregul. Polyeders. — Zu jedem halbregul. Polyeder der einen Gattung ist daher ein bestimmtes ihm reziprokes der andern Gattung vorhanden; jede Gattung kann aus der andern abgeleitet werden.

c. Die entsprechend - gleichen Vielkante eines gleich e c k i g - halbregul. Polyeders sind solche, u m welche sich Kegelflächen beschreiben lassen. — Die kongr. Vielecke eines gleich f l ä c h i g - halbregul. Polyeders sind solche, i n welche sich Kreise beschreiben lassen.

63. a. Reziprok zu den in 61 genannten gleichflächig-halbregul. Doppelpyramiden und Trapezoedern sind die regul. Prismen mit quadratischen Seitenflächen und die regul. Prismatoide mit regul. Dreiecken als Seitenflächen. Außer diesen Körpern, deren Anzahl unbegrenzt ist, giebt es (und k a n n nur geben) von jeder Gattung der halbregul. Polyeder noch 13 Individuen. Ein Teil von ihnen ist im vorangehenden aufgeführt, die übrigen können auf ähnliche Weise erzeugt werden wie jene. Man kann

nämlich zu Pyramidenoktaeder und Pyramidenwürfel auch für die übrigen regul. Polyeder Analoga konstruieren. Ferner kann man die in 58, 59 und 60. b für das Oktaeder besprochenen Konstruktionen auch auf das Ikosaeder (Ecken A, Mittelpunkt O) anwenden, indem man mit Bez. auf die 20 von den Strahlen OA gebildeten Dreikante genau ebenso verfährt, wie beim Oktaeder mit Bez. auf die 8 Oktanten verfahren wurde. Die 13 gleichflächig-halbregul. Polyeder sind hiernach folgende: Pyramiden-Tetraeder, -Würfel, -Oktaeder, -Dodekaeder, -Ikosaeder; oktaedrisches Granatoeder, -Leuzitoeder, -Diamantoeder, -Gyroeder; ikosaedrisches Granatoeder, -Leuzitoeder, -Diamantoeder, -Gyroeder.

b. Hiemit sind (nach 62. b) zugleich auch die 13 möglichen gleicheckig-halbregul. Formen gefunden. Sie lassen sich übrigens auch direkt aus den regul. Polyedern durch regelmäßiges Abstumpfen ihrer Ecken und Kanten erzeugen, wozu in III. Anh. Aufg. 18. b die Anleitung gegeben wird. (Von ihnen auszugehen und aus ihnen die gleichflächig-halbregul. Formen nach 62. b abzuleiten, ist eigentlich der leichtere Weg. Doch bieten die letzteren das größere Interesse.)

II. Konstruktions-Aufgaben.

1—21: Konstruktionen von Polyedern und Polyedernetzen.

1. Von einer Pyramide sind die Grundfläche und zwei Seitenflächen gegeben. Es sollen die übrigen Seitenflächen, ferner die Höhe und sämtliche Keilwinkel durch Konstruktion in einer Ebene gefunden werden. (Die Seitenflächen findet man mit Hilfe von III. Anh. 32. a, die Höhe und die Keilwinkel an den Grundkanten mittels rechtw. Dreiecke, die Keilwinkel an den Seitenkanten wie W. α in II. Aufg. 6.)

2. a. Von einem Prisma sind geg: die Grundfläche und α) zwei an einander stoßende — β) zwei nicht an einander stoßende Seitenflächen. Es sollen die übrigen Seitenflächen, ferner die Höhe und sämtliche Keilwinkel durch Konstruktion in einer

Ebene gefunden werden. (III. Anh. 32. c. Im übrigen wie bei der vor. Aufg. — β führe man auf α zurück, indem man die den zwei geg. Seitenflächen angehörigen Grundkanten bis zu ihrem Schnitt verlängert. Letztere dürfen nicht parallel sein, wenn die Aufg. bestimmt sein soll.)

b. Die gleiche Aufgabe für einen Pyramidenrumpf.

3. Einen dreiseitigen Pyramidenrumpf zu konstr., wenn geg. sind: eine Grundfläche, eine Seite der andern Grundfläche, und die drei Seitenkanten.

4. Ueber einem geg. (spitzwinkligen) Dreieck als Grundfläche eine Pyramide zu errichten, deren Dreikant an der Spitze ein Oktant sei. (II. Anh. 10 u. II. Aufg. 2. c führen auf die nämliche Lösung wie III. Anh. 30. a.)

5. Ein Vierflach zu konstr., von dessen Flächen die eine einem geg. Dreieck kongruent, eine zweite einem geg. Dreieck ähnlich, eine dritte mit einem geg. Dreieck inhaltsgleich sei.

6. Ein Vierflach zu konstr., von dem zwei Flächen geg. sind, und dessen Inhalt gleich einem geg. Würfel sei.

7. Ein Vierflach zu konstr., von dem eine Fläche und drei Höhen geg. sind. (Zwei Fälle zu berücksichtigen.)

8. Ein Vierflach zu konstr., von dem geg. sind: eine Fläche, die zugehörige Schwerlinie, und die Verhältnisse der von derselben Ecke ausgehenden Kanten. (II. Anh. 11. b.)

9. Eine Pyramide zu konstr., wenn geg. sind: die rechteckige Grundfläche, die Höhe, und die von je zwei gegenüberliegenden Seitenflächen gebildeten Keile. (II. Anh. 9.)

10. Eine Pyramide zu konstr., wenn geg. sind: die Grundfläche, der Rauminhalt, die Länge einer Seitenkante, und der Grundneigungswinkel einer zweiten Seitenkante.

11. Eine Pyramide zu konstr., wenn geg. sind: die Grundfläche und die Grundneigungswinkel einer Seitenfläche und der in dieser liegenden zwei Seitenkanten.

12. Von einem Parallelflach sind die Längen der von einer Ecke ausgehenden drei Kanten und die an ihnen befindlichen Keilwinkel gegeben. Es sollen die vier Diagonalen durch Konstruktion in einer Ebene gefunden werden.

13. Ein Rhomboeder zu konstr., von dem die Hauptdiagonale und ein Rhombenwinkel geg. sind. (2 Lösungen.)

14. In einem durch seine drei Seiten geg. Dreikant werden von den Kanten drei geg. Strecken abgeschnitten und durch die Endpunkte Ebenen senkrecht zu den Kanten gelegt. Von dem durch diese drei Ebenen aus dem Dreikant ausgeschnittenen Körper soll das Netz konstr. werden. (Vgl. II. 5, zweiter Bew.)

---

15. Die Netze der fünf regul. Polyeder zu konstr.

16. a. Die Schnittfigur eines durch seine Kantenlänge geg. Dodekaeders oder Ikosaeders mit einer Ebene zu konstr., die durch zwei parallele Kanten geht. (Vgl. III. Anh. 47. b.)

b. Von jedem der fünf regul. Polyeder die Halbmesser der umbeschriebenen, der einbeschriebenen und der kantenberührenden Kugel, sowie den Keilwinkel an den Kanten durch Konstruktion in einer Ebene zu finden, wenn die Kantenlänge geg. ist. (Für Dodek. und Ikos. enthält die Schnittfigur der Aufg. a sämtliche gesuchten Stücke.)

17. Die Gestalt der Flächen der in III. Anh. 58, 59 und 60 aufgeführten Polyeder zu konstr., wenn die Achsenabschnitte OA, OB, OC geg. sind.

18. a. Die 13 gleich e c k i g-halbregulären Polyeder, die zu den in III. Anh. 63. a aufgezählten gleich f l ä c h i g-halbregulären reziprok sind, zu diskutieren. (III. Anh. 62. b.)

b. Diese Polyeder zu konstr. durch Abstumpfung der Ecken und Kanten der regul. Polyeder. (Stumpft man die Ecken von Tetraeder, Oktaeder, Würfel, Ikosaeder, Dodekaeder so ab, daß aus jeder ursprünglichen Fläche ein regul. Vieleck von doppelter Seitenzahl wird, so erhält man die bezw. mit Pyramiden-Tetraeder, -Würfel, -Oktaeder, -Dodekaeder, -Ikosaeder reziproken. — Mit den beiden Granatoedern sind reziprok die Körper in III. Anh. 54. b u. c, vgl. 56. — Das mit dem oktaedr., bezw. ikosaedr. Leuzitoeder reziproke erhält man, wenn man Ecken und Kanten eines Würfels oder Oktaeders, bezw. Dodekaeders oder Ikosaeders, so abstumpft, daß in jeder Fläche ein mit ihr ähnliches und konzentrisch-ähnlich liegendes Vieleck entsteht, von dem immer zwei Ecken mit zwei Ecken eines benachbarten Vielecks die Ecken eines Quadrates bilden. — Stumpft man so ab, daß in jeder Fläche ein mit ihr konzentrisches Vieleck von doppelter Seitenzahl entsteht, und beobachtet im übrigen das nämliche wie vorhin, so erhält man die mit den beiden Diamantoedern reziproken*). — Zeichnet man in jeder Fläche eines Würfels oder Oktaeders, bezw. Dodekaeders oder Ikosaeders, ein mit ihr ähnliches und konzentrisch-verdreht liegendes Vieleck von solcher Größe und Lage, daß immer zwei Ecken eines Vielecks mit zwei Ecken des in einer Nachbarfläche liegenden Vielecks ein aus zwei regul. Dreiecken bestehendes windschiefes Viereck bilden: so erhält man das mit dem oktaedr., bezw. ikosaedr. Gyroeder reziproke.)

c. Die Netze der in b aufgeführten 13 Polyeder zu konstr., wenn die Kantenlänge geg. ist.

d. Die Kantenlängen der in b aufgeführten 13 Polyeder zu konstr., wenn der Halbmesser der umbeschriebenen Kugel geg. ist.

e. Die Flächengestalt der 13 gleichflächig-halbregul. Polyeder zu konstr., wenn der Halbmesser der einbeschriebenen Kugel geg. ist.

f. Für sämtliche halbregul. Polyeder die Keilwinkel an den Kanten durch ebene Konstr. zu finden.

19. a. Zwei kongr. Würfel von geg. Kantenlänge durchdringen sich so, daß sie eine Diagonale gemeinsam haben und um 180° gegen einander verdreht sind. Aus jeder Fläche des einen ragt eine Ecke des andern als dreiseitige Pyramide hervor. Schneidet man diese zwölf kongr. Pyramiden weg, so bleibt als Kern eine aus zwei regul. sechsseit. Pyram. bestehende Doppelpyramide übrig. Von diesem Kern, sowie von den zwölf Pyramiden sollen die Netze konstr. werden. (Salmiak-Zwilling.)

b. Zwei kongr. Oktaeder durchdringen sich so, daß, wenn sie als Prismatoide betrachtet werden, ihre Grundflächen in der nämlichen Ebene konzentrisch und um 180° gegen einander verdreht liegen. Es soll der beiden Körpern gemeinschaftliche Kern diskutiert und sein Netz konstruiert werden.

20. Zwei kongr. regul. sechsseitige Prismen, durch deren Achsen je eine Ebene senkrecht zu zwei parallelen Seitenflächen

*) Die mit den beiden Leuzitoedern und Diamantoedern reziproken kann man auch durch Abstumpfen der beiden Granatoeder erhalten, indem man in jeden Rhombus ein Quadrat einzeichnet, dessen Seiten den Rhombendiagonalen parallel sind, und dessen Ecken 1) auf den Rhombenseiten, 2) innerhalb der Rhomben liegen.

geht, werden so gelegt, daß diese zwei Ebenen zusammenfallen und die Achsen sich rechtwinklig schneiden. Es soll eine der zwei (ebenen) Schnittfiguren der Prismenmäntel in wahrer Größe gezeichnet und das Netz des den Prismen gemeinschaftlichen Kerns konstruiert werden.

21. Ein geg. stumpfes Rhomboeder wird durchdrungen von einem spitzen Rhomboeder, das mit dem stumpfen den Mittelpunkt, die Richtung der Hauptdiagonale und die einbeschriebene Kugel gemein hat, und dessen von einer Hauptecke ausgehende Kanten parallel sind mit den von der entsprechenden Hauptecke ausgehenden Rhombendiagonalen des stumpfen. Es soll der beiden Körpern gemeinschaftl. Kern ermittelt und dessen Netz gezeichnet werden. (Die Hauptecken des stumpfen Rhomboeders gehören auch dem Kernkörper an. In den 2 mal 6 Flächen der zwei Rhomboeder entstehen als Flächen des Kernkörpers 2 mal 6 symmetrisch gestaltete Fünfecke von zweierlei Art. Im stumpfen Rhomboeder sind zwei Fünfecksseiten parallel mit einer Rhombendiagonale; im spitzen fallen zwei Fünfecksseiten in Kanten, zwei andere sind diesen parallel. Mittels einer in einem gemeinschaftl. Diagonalschnitt beider Rhomboeder gezeichneten Hilfsfigur lassen sich in die beiderlei Rhomboederflächen die bezügl. Fünfecke leicht einzeichnen.)

22—35: Konstruktionen an Polyedern. Ebene Schnitte.

22. Im Innern eines geg. Vierflachs einen Punkt zu finden von der Eigenschaft, daß seine Verbindungsebenen mit den 6 Kanten das Vierflach in vier dreiseitige Pyramiden teilen, deren Rauminhalte sich verhalten wie $m:n:p:q$.

23. a. Den Schwerpunkt eines Pyramidenrumpfes —

b. eines Körpers zu bestimmen, der aus zwei verschiedenen Kegelrümpfen mit gemeinschaftlicher Grundfläche zusammengesetzt ist. (III. Anh. 21. Anm.)

24. Den Mantel a) eines Kegels — b) eines Kegelrumpfes durch Parallelkreise in n gleiche Teile zu teilen.

25. a. Den Halbmesser einer Kugel zu finden, deren Oberfläche gleich der Summe der Oberflächen zweier geg. Kugeln sei.

b. Die Halbmesser zweier Kugeln zu finden, wenn die

Summe ihrer Oberflächen gleich der Oberfläche einer geg. Kugel sein soll, und wenn die Summe oder die Differenz oder das Verhältnis beider Halbmesser geg. ist.

Anm. Die folgenden Aufgaben 26—29 über ebene Schnitte von Polyedern sollen ohne Benützung von I. Aufg. 6. durch bloßes Ziehen von geraden Linien gelöst werden (I. Einl. 6. d).

26. Auf drei Kanten eines Parallelflachs, von denen a) je zwei — b) keine zwei der nämlichen Fläche angehören, sind drei Punkte gegeben. Die Schnittfigur der durch sie gelegten Ebene zu konstr. (Je zwei Seiten des Schnittpolygons schneiden sich verlängert auf der Schnittkante der zwei Flächen, in denen sie liegen. Bei b schneide man ein Stück von dem Parallelflach weg, indem man durch zwei geg. Punkte und die Kante, auf der einer von ihnen liegt, einen Schnitt führt, und betrachte zunächst den Restkörper.)

27. Die Schnittfigur einer mehrseitigen Pyramide mit einer Ebene zu zeichnen, welche drei a) auf einander folgende — b) nicht auf einander folgende Seitenkanten nach geg. Verhältnissen schneide. (Mittels der Schnittlinien von je zwei nicht an einander stoßenden Seitenflächen oder Diagonalschnitten.)

28. Die Schnittfigur einer Pyramide mit einer Ebene zu zeichnen, die durch eine in der Ebene der Grundfläche geg. Gerade und durch einen auf einer Seitenkante geg. Punkt gehe. (Die Seiten des Schnittpolygons und der Grundfläche schneiden sich je zu zweien auf der geg. Geraden.)

29. Geg. ein senkrechtes Prisma und eine in der Ebene seiner Grundfläche liegende Gerade. Das Prisma durch eine Ebene, die durch die Gerade gehe, so zu schneiden, daß die Schnittfigur einen geg. Winkel enthalte, dessen Spitze auf einer bestimmten Seitenkante liege. (Das von der Spitze des Winkels und den Spurpunkten seiner Schenkel gebildete Dreieck kann in umgelegter Lage leicht gezeichnet werden.)

30. Eine geg. vierseitige Pyramide nach einem gleichschenkligen Trapez zu schneiden, von dessen parallelen Seiten die eine in einer bestimmten Seitenfläche liege, die andere in der Grundfläche liege und eine geg. Länge habe.

31. Ein geg. Vierkant durch eine Ebene so zu schneiden, daß die Schnittfigur ein Parallelogramm von geg. Inhalt sei.

32. Einen Oktanten durch eine Ebene so zu schneiden, daß das Schnittdreieck einem geg. Dreieck kongruent sei. (Man findet die in den Seitenflächen liegenden rechtwinkl. Dreiecke entweder durch III. Anh. Aufg. 4 oder direkt durch Bestimmung ihrer Katheten.)

33. In einer Fläche eines regul. Tetraeders ist eine Gerade parallel einer Kante geg. Durch dieselbe eine Ebene so zu legen, daß sie das Tetraeder nach einem Trapez schneide, in das sich ein Kreis einbeschreiben läßt. (Die zwei Verbindungslinien der Mittelpunkte der Gegenseiten eines jeden durch die Gerade gehenden Schnitttrapezes liegen in zwei festen Ebenen.)

34. In einem geg. Sechseck sind die sechs Winkel gleich, und die erste, dritte und fünfte Seite haben gleiche Länge; es soll a) ein Oktaeder, b) ein Würfel gefunden werden, dem das Sechseck als Schnittfigur angehört.

35. Dieselbe Aufg. für ein Dodekaeder. (Wann erhält man 1, 2, 3 Lösungen?)

36—60: Ein- und umbeschriebene Polyeder.

(Lösung meist mit Hilfe von Ähnlichkeitspunkten oder dadurch, daß man sich zuerst durch Lösung der umgekehrten Aufgabe ein dem gesuchten ähnliches Gebilde verschafft.)

36. Einem geg. Kegel a) einen Würfel, b) ein Oktaeder einzubeschreiben, so daß eine Fläche in der Grundfläche des Kegels liege, die übrigen Ecken auf seinem Mantel liegen.

37. Einem geg. Kugelabschnitt a) ein gleicheckig-halbregul. n-seitiges Prisma, b) ein gleicheckig-halbregul. 2n-seitiges Prismatoid einzubeschreiben, so daß eine Grundfläche in der Grundkreisebene des Kugelabschnittes liege, die übrigen Ecken auf seiner Haubenfläche liegen. (Vgl. III. Anh. 63. a.)

38. In ein geg. Vierflach einen Würfel einzubeschreiben, so daß in einer Fläche des Vierflachs vier Würfelecken liegen, in einer zweiten Fläche zwei, in den zwei übrigen Flächen je eine.

39. In einen geg. Kugeloktanten einen Würfel einzubeschreiben, so daß eine seiner Flächen in einer Seitenfläche des Oktanten liege, zwei Kanten in den zwei andern Seitenflächen, und zwei Ecken auf der Kugelfläche.

40. Einen Kegelrumpf, von dem der Grundneigungswinkel der Mantellinien und a) das Verhältnis der Grundkreise, b) die Höhe geg. ist, in einen geg. Kugeloktanten so einzubeschreiben, daß ein Grundkreis auf der Kugeloberfläche liege, der andere Grundkreis die drei Seitenflächen des Oktanten berühre.

41. Einer geg. Kugel ein Vierflach einzubeschreiben, a) das einem geg. Vierflach ähnlich sei, b) dessen Flächen mit vier geg. Ebenen parallel seien.

42. Einer geg. Kugel a) ein gleicheckig-halbregul. 2n-seitiges Prismatoid einzubeschreiben, b) ein gleichflächig-halbregul. 2n-seitiges Trapezoeder umzubeschreiben. (Vgl. III. Anh. 61. b.)

43. Ein Vierflach zu konstr., das einem geg. Vierflach ähnlich sei, und von dessen Ecken jede auf der Oberfläche einer von vier geg. konzentrischen Kugeln liege. (II. Anh. 11. a.)

44. Einem geg. Vierflach einen Wulst (vgl. III. Aufg. 10) von geg. Verhältnis der Halbmesser des Meridiankreises und des Mittelkreises so einzubeschreiben, daß er jede Fläche berühre, und daß seine Achse einer geg. Geraden parallel sei.

45. In eine geg. Kugel acht gleiche Kugeln so einzubeschreiben, daß ihre Mittelpunkte die Ecken eines Würfels bilden, und daß jede die geg. Kugel und drei der übrigen Kugeln berühre.

46. Einer geg. Kugel vier andere Kugeln, von denen drei gleich groß seien und der Halbmesser der vierten zum Halbmesser der drei ersten ein geg. Verhältnis habe, so einzubeschreiben, daß jede die andern drei sowie die geg. Kugel berühre.

47. Einem geg. Würfel a) zwei gleiche Kugeln, b) zwei Kugeln, deren Halbmesser ein geg. Verhältnis haben, so einzubeschreiben, daß ihre Mittelpunkte auf einer Würfeldiagonale liegen, und daß sie einander und je drei in einer Ecke zusammenstoßende Flächen berühren.

48. Einem geg. Rhomboeder ein Oktaeder so einzubeschreiben, daß in jeder Rhomboederfläche eine Oktaederecke liege.

49. Einem Rhomboeder, von dem die Kantenlänge und ein Rhombenwinkel geg. ist, ist ein Cylinder von geg. Verhältnis des Halbmessers zur Höhe so einbeschrieben, daß seine Achse in die Hauptdiagonale des Rhomboeders fällt und die zwei Grundkreise je drei Rhomboederflächen berühren. Es soll der Achsenschnitt des Cylinders durch ebene Konstr. gefunden werden.

50. Ein Rhomboeder zu konstr., das so in einen geg. Cylinder gelegt werden kann, daß seine Hauptecken in die Grundkreis-Ebenen, die übrigen Ecken auf die Mantelfläche zu liegen kommen. — Wie müssen sich Höhe und Halbmesser des Cylinders verhalten, damit das Rhomboeder zum Würfel werde?

51. Einer geg. Kugel ein Rhomboeder umzubeschreiben, von dem ein Rhombenwinkel geg. ist.

52. Einem geg. Oktaeder einen Würfel so einzubeschreiben, daß seine acht Ecken auf den von zwei gegenüberliegenden Ecken ausgehenden Kanten des Oktaeders liegen.

53. Einem geg. Oktaeder ein Tetraeder so einzubeschreiben, daß eine Mitteltransversale des Tetraeders in eine Oktaederdiagonale falle, und daß seine Ecken a) in vier Oktaederflächen, b) auf vier Oktaederkanten liegen. (III. Anh. 52. a, 49. a und vor. Aufg.)

54. a. Einem geg. Tetraeder einen Würfel so einzubeschreiben, daß in jeder Tetraederfläche eine Würfelecke liege. (Entw. direkt od. durch III. Anh. 53. a und 49. a.)

b. Einem geg. Dodekaeder ein Oktaeder so umzubeschreiben, daß die acht Oktaederflächen durch acht Ecken des Dodekaeders gehen. (III. Anh. 52. b oder 53. b.)

c. Einem geg. Würfel ein Ikosaeder so umzubeschreiben, daß acht Flächen des Ikosaeders durch die acht Würfelecken gehen.

55. a. Ein Körper, der aus einem Cylinder und aus zwei auf dessen Grundflächen aufgesetzten kongr. Kegeln besteht, kann so in ein oktaedr. Granatoeder einbeschrieben werden, α) daß der Cylinder 4, und jeder Kegel 4 Flächen berührt, β) daß der Cylinder 6, und jeder Kegel 3 Flächen berührt. Es soll beidemal der Achsenschnitt des Körpers gezeichnet werden.

b. Ein Körper, der aus einem Cylinder, aus zwei auf dessen Grundflächen aufgesetzten kongr. Kegelrümpfen, und aus zwei auf die andern Grundflächen der Kegelrümpfe aufgesetzten kongr. Kegeln besteht, kann so in ein ikosaedr. Granatoeder einbeschrieben werden, daß der Cylinder 10, jeder Kegelrumpf und jeder Kegel 5 Flächen berührt. Es soll der Achsenschnitt des Körpers gezeichnet werden. (Ein Großkreis der dem Granatoeder einbeschriebenen Kugel muß die Seiten des Achsenschnittes berühren. Sämtliche Berührungsmantellinien fallen in Rhombendiagonalen.)

56. Aus einem geg. Pyramidentetraeder ein Leuzitoeder auszuschneiden, so daß in jeder Fläche des Pyramidentetraeders eine Fläche des Leuzitoeders liege. (Die Mittelpunkte der Tetraederkanten bilden die Oktaederecken des Leuzitoeders.)

57. Einem geg. Wulst ein regul. 10-seitiges Prismatoid berührend umzubeschreiben, dessen Höhe gleich dem Durchmesser des Meridiankreises sei. Grundfläche und Seitenfläche sollen durch ebene Konstruktion gefunden werden, wenn die Halbmesser des Meridiankreises und des Mittelkreises geg. sind.

58. Ein Kegel hat mit einem Cylinder den Grundkreis gemein, und seine Spitze liegt im Mittelpunkt des andern Grundkreises des Cylinders. In den Raum zwischen Kegelmantel, Cylindermantel und Cylindergrundkreis sind a) sechs — b) fünf gleiche Berührungskugeln so einbeschrieben, daß jede ihre zwei Nachbarkugeln berührt. Es soll der Achsenschnitt des Cylinders konstr. werden, wenn der Halbmesser der Kugeln geg. ist.

59. a. Einer geg. Kugel einen Kegelrumpf einzubeschreiben, der gleiche Höhe und gleiche Mantelfläche mit einem geg. Cylinder habe.

b. Einer geg. Kugel einen Kegelrumpf umzubeschreiben, dessen Mantel gleich einem geg. Kreis sei.

60. Einer geg. Kugel einen Kegelrumpf einzubeschreiben, wenn die Verhältnisse der Mantelfläche zu den zwei Grundkreisen geg. sind.

III. Berechnungs-Aufgaben.

Vorbemerkung.

Bei der Anwendung der Körperberechnung auf praktische Beispiele kommt auch das Gewicht in Betracht. Zu seiner Bestimmung ist die Kenntnis des spezifischen Gewichtes des Stoffes, woraus der betreffende Körper besteht, erforderlich.

Unter dem spezifischen Gewichte eines Stoffes versteht man diejenige Zahl, die angiebt, wie vielmal ein aus dem Stoff bestehender

Körper von beliebigem Volumen schwerer ist als ein gleich großes Volumen Wasser. Man erhält also das spez. Gewicht, wenn man das Gewicht des Körpers dividiert durch das Gewicht des gleichen Volumens Wasser. Tab. 1 (S. 224) giebt ein Verzeichnis der spezifischen Gewichte der am häufigsten vorkommenden Stoffe.

Ist V das Volumen eines Körpers, S sein spezifisches Gewicht, W das Gewicht der Kubikeinheit Wasser, so bestimmt sich hieraus das Gewicht P des Körpers auf folgende Weise:

Bezeichnet man mit p das Gewicht der Kubikeinheit des Stoffes, so ist nach obiger Erklärung: $S = \frac{p}{W}$, also $p = SW$. Dies ist das Gewicht der Volumeinheit, folglich ist das Gewicht des Volumens V: $P = V \cdot p$, oder:

$$P = VSW.$$

Man erhält also das Gewicht durch Multiplikation des Volumens mit dem spezifischen Gewicht und dem Gewicht der Kubikeinheit Wasser.

Im metrischen Maßsystem besteht zwischen Gewichtsmaß und Längenmaß die Beziehung, daß das Gramm das Gewicht eines Kubik-Centimeters —, also das Kilogramm das Gewicht eines Kubik-Dezimeters (oder Liters) Wasser ist. Wird daher als Längeneinheit das Centimeter und gleichzeitig als Gewichtseinheit das Gramm, oder als Längeneinheit das Dezimeter und gleichzeitig als Gewichtseinheit das Kilogramm gewählt, so ist beidemal: $W = 1$. Das spezifische Gewicht ist also dann gleich dem Gewicht der Kubikeinheit des betr. Stoffes, und das Gewicht des Volumens V ist:

$$P = VS.$$

Tab. 2 (S. 225) giebt die Maße und Gewichte der Länder, in denen das metrische Maßsystem noch nicht eingeführt ist, verglichen mit dem letzteren.

1—8: Würfel.

1. Ein Würfel hält K (423,03) englische Kubikfuß. a) Wie viel hält er in Kubikmetern? b) Wie groß ist seine Oberfläche in Quadratmetern? — Antw.: a) 11,978 cbm, b) 31,411 qm.

2. Wie groß ist das Gewicht W der Kubikeinheit Wasser in den verschiedenen Maßsystemen? (Vgl. Tab. 2, S. 225.) — Antw.:
Im metr. Maßsystem (1 cbm) . . W.= 1000 kg.

In England } (1 Kub.-Fuß) . . W = 62,424 Pfund.
„ Nordamerika }
„ Rußland „ . . W = 69,144 „

3. Die Diagonale eines Würfels ist d (= 4,58 dm); wie groß ist sein Volumen? — Antw.: 18,489 cdm.

4. Der Diagonalschnitt eines Würfels ist S (= 17,235 qcm); wie groß ist seine Oberfläche? — Antw.: 73,122 qcm.

5. Die Oberflächen zweier Würfel verhalten sich wie m zu n (9 zu 20); wie verhalten sich ihre Inhalte? — Antw.: Wie 0,30187 zu 1.

6. Ein Würfel von Sandstein wiegt P (180) kg; wie groß ist seine Kante? — Antw.: 4,16 dm.

7. Ein messingner Würfel vom Gewicht P (= 1,5 kg) soll vergoldet werden; wieviel kostet die Vergoldung, wenn die Vergoldung des Quadratmeters m (60) Mark kostet? — Antw.: 1,14 Mark.

8. Die Kante eines gußeisernen Würfels ist a (= 20,8 cm); wie lang ist die Kante eines gleich schweren Würfels von Tannenholz? — Antw.: 50,7 cm.

9—13: Quader.

9. Die Kanten eines Quaders verhalten sich wie die Zahlen l, m, n (7, 9, 13), seine Diagonale ist d (= 25,7 m); wie groß ist sein Volumen? — Antw.: 2688,9 cbm.

10. Zwei Balken von quadratischem Querschnitt haben gleiches Volumen; ihre Längen verhalten sich wie m zu n (8 zu 11); wie verhalten sich die Seiten der Querschnittsquadrate? — Antw.: Wie 1,1726 zu 1.

11. Wieviel qm Blech braucht man zu einer Wanne ohne Deckel, die K (1440) Liter halten soll, wenn der Boden l (1,2) m lang und b (0,8) m breit werden soll? — Antw.: 6,96.

12. Wie schwer ist eine Kiste von Tannenholz samt Deckel, deren Kanten im lichten die Längen l, m, n (= 60, 80, 100 cm), und deren Wände die Dicke d (= 2,5 cm) haben? Wieviel Kilogramm dürfen in sie gelegt werden, wenn sie im Wasser bis zur Mitte der mit l parallelen äußeren Kante einsinken soll?*)

*) Bei Aufgaben über schwimmende Körper kommt der Satz („Ar-

— Antw.: Gew. der Kiste = 50,06 kg; Belastung = 240 kg.

13. Wieviel kosten die Backsteine zu einem quadratischen Turm, der eine Breite b (= 4,2 m), eine Höhe h (= 10,8 m), und eine Mauerdicke d (= 0,6 m) hat, wenn ein Backstein die Dimensionen l, m, n (= 24, 12, 6 cm) hat, wenn das Hundert Backsteine k (3) Mark kostet, und wenn wegen des Abfalls p (8) Prozent mehr genommen werden müssen? — Antw.: 1749,60 Mark.

14—18: Prisma.

14. Wie groß ist der Inhalt eines regulären dreiseitigen Prismas, in dem jede Kante die Länge a (= 6,2 cm) hat? — Antw.: 103,2 ccm.

15. Ein reguläres fünfseitiges Prisma, dessen Höhe das Dreifache einer Grundkante ist, hat den Inhalt K (= 248 cdm). Wie lang ist seine Grundkante? — Antw.: 3,635 dm.

16. Wie groß ist der Inhalt K eines spitzen bezw. stumpfen Rhomboeders, wenn die von den Hauptecken ausgehenden Rhombendiagonalen die Länge d (= 3 cm, bezw. 2 cm), die übrigen Rhombendiagonalen die Länge d' (= 2 cm, bezw. 3 cm) haben? (III. Anh. 11. a). — Antw.: $K = \frac{1}{4} d'^2 \sqrt{3 d^2 - d'^2} = 4{,}796$ ccm, bezw. 3,897 ccm.

17. Wie groß ist das Gewicht eines Dachsparrens von Tannenholz, der als Querschnitt ein Quadrat von der Seitenlänge a (= 16 cm) hat und an beiden Enden durch rechteckige Flächen so abgeschrägt ist, daß zwei parallele Seitenflächen des Sparrens gleichschenklige Trapeze sind, in denen der spitze Winkel $\frac{1}{2}$ R beträgt und die größere Parallelseite die Länge l (= 5 m) hat? — Antw.: 61,95 kg.

18. Eine gußeiserne hohle Säule von der Form eines regul. sechsseitigen Prismas hat die Höhe h (= 10 Fuß), die äußere Grundkante a (= 6 Zoll) und die Dicke d (= 10 Lin.). Wie groß ist ihr Gewicht? — Antw.: In Nordamerika 867 Pfund.

---

chimedisches Prinzip") zur Anwendung, daß das Gewicht des schwimmenden Körpers gleich ist dem Gewichte der von ihm verdrängten Flüssigkeitsmasse.

19—28: Cylinder.

19. Der Inhalt eines Cylinders ist K (= 33 cdm), der Halbmesser seines Grundkreises r (= 2,6 dm); wie groß ist seine Höhe und sein Mantel? — Antw.: Höhe = 1,554 dm, Mantel = 25,385 qdm.

20. Die Wandfläche eines cylindrischen Innenraumes ist M (= 160 qm), seine Höhe ist gleich dem Durchmesser der Grundfläche; wie groß ist sein Rauminhalt? — Antw.: 285,46 cbm.

21. In eine cylindrische Glasröhre werden P (1,5) Gramm Quecksilber gebracht und nehmen darin einen Raum von der Länge l (= 168 mm) ein. Wie groß ist der innere Durchmesser der Röhre? — Antw.: 0,91 mm.

22. Der Mantel eines cylindrischen Blechgefässes ist M (= 27 qdm), sein Inhalt K (= 30 l); wie groß ist seine Höhe und sein Halbmesser? — Antw.: Höhe = 1,934 dm, Halbm. = 2,222 dm.

23. Aus einem Blechstreifen gehämmerten Silbers werden runde Stücke zu Münzen geschlagen; der Streifen hat die Länge l (= 60 cm), die Breite b (= 4,5 cm), die Dicke d (= 0,25 cm), der Durchmesser einer Münze ist 2 r (= 4,25 cm). Wieviel wiegt der Abfall des Streifens, wenn die Löcher von den Längenkanten und von einander gleich weit entfernt sind? — Antw.: 227,21 g.

24. Ein Gewichtsystem von Messing besteht aus lauter Cylindern, in denen die Höhe das anderthalbfache des Durchmessers der Grundfläche ist; wie groß sind die Höhen der einzelnen Gewichtstücke, wenn diese 1, 2, 3 u. s. w. Kilogramm halten sollen? — Antw.: 1) 6,99 cm, 2) $6{,}99 \sqrt[3]{2} = 8{,}80$ cm, 3) $6{,}99 \sqrt[3]{3} = 10{,}08$ cm, u. s. f.

25. Wie schwer ist ein cylindrischer Mühlstein aus Sandstein, von dem die Höhe h (= 63 cm), der äußere Durchmesser 2 R (= 176 cm), und der Lochdurchmesser 2 r (= 20 cm) geg. ist? — Antw.: 3782 kg.

26. Zu dem Guß von 10 gleichen eisernen Röhren von der Länge l (= 12 Fuß) und dem lichten Durchmesser 2 r (= 6 Zoll) werden P (5700) Pfund Eisen verwendet; es bleibt ein Rückstand

von P' (154) Pfund übrig. Wie dick werden die Röhren? — Antw.: In England: 8,4 Lin.

27. Ein Silberdraht von 1 (2) Meter Länge und P (10,8) Gramm Gewicht soll mit P' (3) Gramm Gold vergoldet werden. a) Wie dick ist der Silberdraht? b) Wie dick wird die Vergoldung? — Antw.: a) 0,8 mm, b) 0,03 mm.

28. Ein Cylinder vom Halbmesser r (= 2 cm) wird durch eine zu seiner Achse schiefe Ebene so geschnitten, daß das eine Teilstück den Inhalt K (= 160 ccm) und die Gesamtoberfläche (Mantel + Grundkreis + Schnittellipse) O (= 200 qcm) hat. Wie groß sind die zwei parallelen Seiten des Trapezes, das den zur Schnittebene senkrechten Achsenschnitt des Teilstückes bildet? (Vgl. III. Anh. 9. c und II. Anh. 22. c.) — Antw.: 16,614 cm und 8,851 cm.

29—34: Pyramide.

29. Eine Pyramide hat den Inhalt K (= 365 cbm) und die Grundfläche G (= 22,5 qm). Wie groß ist ihre Höhe? — Antw.: 48,67 m.

30. Eine reguläre achteckige Pyramide hat die Grundkante a (= 7 cm), ihre Höhe ist gleich dem Durchmesser des der Grundfläche umbeschriebenen Kreises; wie groß ist ihr Inhalt? — Antw.: 1442,6 ccm.

31. Ein Parallelschnitt einer Pyramide ist die Hälfte der Grundfläche; wie verhält sich seine Entfernung von der Spitze zur Höhe der Pyramide? — Antw.: Wie 1 zu $\sqrt{2}$.

32. Eine reguläre vierseitige Pyramide, deren Seitenkanten gleich den Grundkanten sind, hat den Inhalt K (= 126,59 cbm); wie lang sind die Kanten? — Antw.: 8,128 m.

33. Wie groß ist der Inhalt eines Sphenoids (vgl. III. Anh. 26. a), dessen drei Kanten die Längen a, b, c (= 4, 5, 6 cm) haben? (III. Anh. 19. d). — Antw.:

$$K = \tfrac{1}{6}\sqrt{\tfrac{1}{2}(a^2+b^2-c^2)(b^2+c^2-a^2)(c^2+a^2-b^2)} = 9{,}1855 \text{ ccm}.$$

34. Aus K (1) cdm Thon wird das gleicheckig-halbregul. Polyeder modelliert, dessen Ecken die Mitten der Oktaederkanten bilden (vgl. III. Anh. 54. b). Wie groß wird die Kantenlänge des Polyeders? — Antw.: 7,5 cm.

35—41: Kegel.

35. Ein kegelförmiges Turmdach hat das Volumen V (= 11,9 cbm) und die Höhe h (= 6,7 m); wie groß ist der Halbmesser der Grundfläche? — Antw.: 1,3 m.

36. Der Achsenschnitt eines Kegels ist ein gleichseitiges Dreieck von der Seitenlänge s (= 15 cm); wie groß ist der Mantel und der Inhalt des Kegels? — Antw.: M = 353,43 qcm, K = 765,20 ccm.

37. Das Zelttuch eines kegelförmigen Zeltdaches mißt M (100) qm; sein Achsenschnitt ist ein gleichschenklig-rechtwinkliges Dreieck; wie groß ist sein Rauminhalt? — Antw.: 111,82 cbm.

38. Ein bleierner Kegel hat den Grundkreis-Halbmesser r (= 3 cm); wie groß ist der Halbmesser eines gleich hohen und gleich schweren Kegels von Gußeisen? — Antw.: 3,76 cm.

39. In einen Kegel ist ein Cylinder einbeschrieben, dessen Höhe gleich der halben Höhe des Kegels ist; wie verhalten sich die Inhalte beider Körper? — Antw.: Wie 8 zu 3.

40. Die Oberfläche eines Kegels ist O (= 5 qm), der Halbmesser seines Grundkreises r (= 1 dm); wieviel Grade mißt der Kreisausschnitt, der die Abwicklung des Mantels vorstellt? — Antw.: $2^\circ\ 16'\ 34''$.

41. Ein kreisförmiges Stück Filtrierpapier wird nach zwei zu einander senkrechten Durchmessern gebrochen, zu einem Quadranten zusammengefaltet und derart zu einem kegelförmigen Filter geöffnet, daß die eine Hälfte des Mantels aus einer, die andere Hälfte aus drei Lagen Papier besteht. a) Wie groß muß die Öffnung eines kegelförmigen Glastrichters sein, damit sich das Papierfilter an seine Innenwand längs deren ganzen Ausdehnung glatt anlegen kann? b) Wie groß muß der Durchmesser des ursprünglichen Papierblattes mindestens sein, damit das Filter 1 Liter Flüssigkeit fassen kann? — Antw.: a) 60°, b) 32,8 cm.

42—50: Pyramiden- und Kegelrumpf.

42. Ein Pyramidenrumpf hat den Inhalt K (= 230 cbm), seine Grundflächen sind Quadrate von den Seitenlängen a und a'

(= 6,94 und 3,55 m); wie groß ist seine Höhe, und wie groß die Höhe seiner Ergänzungspyramide? — Antw.: 8,08 m, und 8,46 m.

43. Ein Monument aus Sandstein hat die Form eines regulären dreiseitigen Pyramidenrumpfes; die untere Grundkante ist a (= 90 cm), die obere a′ (= 50 cm), die Seitenkante k (= 180 cm). Wie groß ist das Gewicht des Monumentes? — Antw.: 972,7 kg.

44. In einem Pyramidenrumpf mit den Grundflächen G und G′ (= 27 und 16 qdm) halbiert ein Parallelschnitt die Höhe; wie groß ist dieser Parallelschnitt? — Antw.: 21,142 qdm.

45. Wie viele Fuhren Erde, jede zu F (1,5) cbm, müssen fortgeschafft werden, wenn in den Boden eine kreisförmige Grube gegraben wird, die eine Tiefe h (= 2 m), einen oberen Durchmesser 2 R (= 40 m), und einen Böschungswinkel von 45° erhalten soll? — Antw.: 1513,6.

46. Ein papierner Lampenschirm soll die Höhe h (= 9 cm) und die Grundkreis-Durchmesser 2 R u. 2 r (= 15 u. 7,5 cm) bekommen. Wie groß werden die zwei Halbmesser der Abwicklungsfigur, und wieviel Grade messen ihre Bögen? — Antw.: Halbm. = 19,5 und 9,75 cm, Bogen = 138° 27′ 41″.

47. Eine irdene Schüssel soll ein Liter Flüssigkeit halten, der innere Bodendurchmesser soll 2 r (= 7 cm), die lichte Höhe — h (= 4 cm) sein. Wie groß muß der lichte Randdurchmesser werden? — Antw.: 26,8 cm.

48. Ein Cylinder vom Halbmesser r (= 50 cm) wird konisch ausgebohrt, so daß die mit den Grundkreisen des Cylinders konzentrischen, kreisförmigen Öffnungen sich verhalten wie m zu n (1 zu 2), und daß das Gewicht des durchbohrten Körpers die Hälfte von dem Gewichte des Vollcylinders ist; wie groß werden die Durchmesser der Öffnungen? — Antw.: 58,29 cm und 82,44 cm.

49. Ein runder Turm von der Höhe h (= 18 m) hat oben den Durchmesser 2 r (= 4,2 m), unten den Durchmesser 2 R (= 5,7 m). Wieviel kostet das Übertünchen des Turmes, wenn pro Quadratmeter m (4) Mark gerechnet werden? — Antw.: 1120,63 Mark.

50. Ein Cylinder und ein Kegelrumpf haben gleiche Höhe

h (= 5 cm) und konzentrische Grundflächen, ihre Mäntel durchschneiden sich in der Mitte der Höhe, die Grundkreishalbmesser des Kegelrumpfes sind R und r (= 15 cm und 9 cm). a) Wie verhalten sich die Inhalte, b) wie die Mäntel beider Körper? c) in welcher Höhe müßten sich die Mäntel schneiden, wenn die Inhalte — d) in welcher Höhe, wenn die Mäntel gleich sein sollten? — Antw.: a) Wie 48 zu 49, b) wie 0,64 zu 1, c) 2,40 cm, d) — 3,12 cm.

51—56: Prismatoid.

51. Von einem regulären dreiseitigen Prisma, dessen Grundkanten und Seitenkanten die Längen g und s (= 3,7 und 20 dm) haben, werden an beiden Enden Stücke weggeschnitten. Die eine Schnittebene schneidet von den drei Seitenkanten unten die Strecken l, m, n (= 1, 2, 3 dm) ab, die andere Schnittebene geht durch den oberen Endpunkt der ersten Seitenkante und schneidet von den zwei anderen die Strecken m′ und n′ (= 3 und 5 dm) ab. Wie groß ist der Inhalt des schiefabgeschnittenen Prismas? — Antw.: 90,895 cdm.

52. Ein reguläres 12-seitiges Prismatoid hat die Grundkante a und die Höhe h. α) Wie groß ist sein Inhalt? β) Wie groß ist der Inhalt des 12-seitigen Trapezoeders, das durch Erweitern der Seitenflächen des Prismatoides entsteht (vgl. III. Anh. 61. b)? γ) Wie verhält sich das Trapezoeder zu der Doppelpyramide, deren Halbflächner es vorstellt? — Antw.: α) $a^2h(1+\sqrt{3})$. β) $a^2h(7+4\sqrt{3})$. γ) Wie $4(2-\sqrt{3}):1$.

53. Wie groß ist der Inhalt eines Walmdaches, dessen Grundfläche ein Rechteck mit den Seiten l und b (= 50 und 20 m) ist, dessen Firstkante gleich der Differenz von l und b ist, und dessen Dreiecksflächen gleichseitig sind? — Antw.: 6128,3 cbm.

54. Ein Grabstein aus Granit kann in einen Obelisken mit rechteckigen Grundflächen und trapezförmigen Seitenflächen — und in ein Walmdach zerlegt werden. Das untere Grundrechteck des Obelisken hat die Seiten a und b (= 125 und 75 cm), das obere hat die Seiten a′ und b′ (= 75 und 50 cm), die Höhe ist h (= 200 cm). Das Walmdach hat das obere Rechteck zur Grundfläche; seine Trapezflächen stoßen an die kürzeren Rechtecksseiten, seine

Dreiecksflächen liegen in denselben Ebenen mit den breiteren Trapezflächen des Obelisken und bilden mit diesen zusammen zwei symmetrische Fünfecke; die Höhe des Walmdaches ist h' (= 25 cm). Wie groß ist das Gewicht des Grabsteines? — Antw.: 3884,4 kg.

55. Das Ufer eines Wasserbeckens hat die Gestalt eines rechtwinkligen Trapezes; die zwei parallelen Uferkanten sind a und b (= 20 und 14 m), die zu ihnen senkrechte Uferkante ist c (= 8 m); die Tiefe des Beckens ist h (= 2 m); die Böschungen haben eine Neigung von 45°. Wieviel Wasser enthält das Becken, wenn der Wasserstand um $\frac{1}{n}$ h (n = 4) niedriger ist als das Ufer? — Antw.: 1183 hl.

56. Ein Faß hat eine (innere) Höhe h (= 100 cm), einen Bodendurchmesser d (= 70 cm), einen Spunddurchmesser D (= 85 cm). Wieviel Liter hält es? (III. Anh. 44. d.) — Antw.: 506,6 Liter.

57—63: Reguläre Polyeder.

57. Bei jedem der fünf regul. Polyeder bezeichne: a die Kantenlänge, R den Halbmesser der umbeschr. Kugel, r — der einbeschr. Kugel, ρ — der kantenberührenden Kugel, O die Oberfläche, K den Inhalt. Wie groß sind R, r, ρ, O, K, ausgedrückt in a? — Antw.: in der nachstehenden Tabelle:

	Tetraeder.	Hexaeder.	Oktaeder.	Dodekaeder.	Ikosaeder.
R =	$\frac{a}{4}\sqrt{6}$	$\frac{a}{2}\sqrt{3}$	$\frac{a}{\sqrt{2}}$	$\frac{a}{4}\left(\sqrt{15}+\sqrt{3}\right)$	$\frac{a}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$
r =	$\frac{a}{2\sqrt{6}}$	$\frac{a}{2}$	$\frac{a}{\sqrt{6}}$	$\frac{a}{2}\sqrt{\frac{25+11\sqrt{5}}{10}}$	$\frac{a}{4}\,\frac{3+\sqrt{5}}{\sqrt{3}}$
ρ =	$\frac{a}{2\sqrt{2}}$	$\frac{a}{\sqrt{2}}$	$\frac{a}{2}$	$\frac{a}{4}\left(3+\sqrt{5}\right)$	$\frac{a}{4}\left(1+\sqrt{5}\right)$
O =	$a^2\sqrt{3}$	$6\,a^2$	$2a^2\sqrt{3}$	$3\,a^2\sqrt{5(5+2\sqrt{5})}$	$5\,a^2\sqrt{3}$
K =	$\frac{a^3}{12}\sqrt{2}$	a^3	$\frac{a^3}{3}\sqrt{2}$	$\frac{a^3}{4}\left(15+7\sqrt{5}\right)$	$\frac{5\,a^3}{12}\left(3+\sqrt{5}\right)$

(Bei Dodek. und Ikos. berechne man zuerst 2 ρ als Diagonale einer Grundfläche der in III. Einl. 15. b und c erwähnten Prismatoide, hierauf 2 R als Diagon. eines Rechtecks aus a und 2 ρ. Zerlegt man sodann das Polyeder vom Mittelpunkt aus in Pyramiden, so sind diese regul. und kongr., eine Seitenkante = R, die Höhe = r, die Summe aller Pyr. = K.) — Durch Elimination von a aus je zweien der obigen Formeln, die dem nämlichen Polyeder angehören, kann von den Größen R, r, ρ, O, K jede in jeder andern ausgedrückt werden.

58. Wie verhält sich der Würfel a) zu dem ihm einbeschriebenen Oktaeder, b) zu dem ihm umbeschriebenen Oktaeder (dessen Flächen durch die Würfelecken gehen), c) zu dem Oktaeder, dessen Kanten die Würfelkanten in deren Mitten schneiden (vgl. III. Anh. 54. Schlußbem.)? — Antw.: a) Wie 6 zu 1, b) wie 2 zu 9, c) wie 3 zu 4.

59. Wie verhält sich das Tetraeder a) zu dem ihm einbeschriebenen Oktaeder (vgl. III. Anh. 54. a), b) zu dem ihm umbeschriebenen Oktaeder (vgl. III. Anh. 52. a und 49. a)? — Antw.: a) Wie 2 zu 1, b) wie 2 zu 27.

60. Ein hohles Ikosaeder von Zinkblech, dessen Wände die Dicke d (= 0,5 mm) haben, wiegt P (198,1) g. Wie groß ist seine äußere Kante? — Antw.: 8 cm.

61. Wie groß sind die zwei regul. Pyramidenrümpfe und das Prismatoid, in die ein Dodekaeder von der Kantenlänge a zerlegt werden kann? — Antw.: Die drei Teile haben gleiche Größe: $K = \frac{a^3}{12}(15 + 7\sqrt{5})$.

62. Wie groß ist der Inhalt des oktaedrischen und des ikosaedrischen Granatoeders, ausgedrückt α) in der Granatoederkante g, β) im Halbmesser der einbeschr. Kugel r, γ) in den Kanten o und w, bezw. i und d des zugehörigen Oktaeders und Würfels, bezw. Ikosaeders und Dodekaeders? (III. Anh. 55. b und c). — Antw.:

$$K_o = \frac{16}{9} g^3\sqrt{3} = 4r^3\sqrt{2} = \tfrac{1}{2} o^3\sqrt{2} = 2\,w^3.$$

$$K_i = 4\,g^3\sqrt{5+2\sqrt{5}} = 20\,r^3(\sqrt{5}-2) = \tfrac{5}{2} i^3 = \tfrac{5}{2} d^3(\sqrt{5} + 2).$$

63. Ein Tetraeder von Holz schwimmt im Wasser so, daß die außerhalb des Wassers befindliche Kante horizontal ist. Die Länge der Kante ist a (= 6 cm), die Entfernung der horizontalen

Kante vom Wasserspiegel e (= 1,5 cm). Wie groß ist das spezifische Gewicht des Holzes? — Antw.: 0,713.

64—82: Kugel und Kugelteile.

64. Wie groß ist der Halbmesser einer Kugel vom Inhalt K (= 324 ccm)? — Antw.: 4,26 cm.

65. Die Inhalte zweier Kugeln verhalten sich wie m zu n (3 zu 10); wie verhalten sich ihre Oberflächen? — Antw.: Wie 0,44814 zu 1.

66. Aus drei Kugeln von den Halbmessern r_1, r_2, r_3 (= 7, 9, 15 cm) wird eine einzige gegossen; wie groß wird ihr Halbmesser? — Antw.: 16,4 cm.

67. Eine halbkugelförmige Schale von Gußeisen hat den äußeren Durchmesser 2 R (= 20 cm) und die Dicke d (= 1,5 cm). a) Wie groß ist ihr Gewicht? b) Wie groß dürfte die Dicke höchstens sein, damit die Schale in Wasser schwimmen könnte? — Antw.: a) 5,860 kg; b) 0,48 cm.

68. Aus einem kugelförmigen Tropfen Seifenwasser vom Durchmesser d (= 4 mm) wird eine Seifenblase vom Durchmesser D (= 6 cm) geblasen. Wie dick ist die Blase? — Antw.: 0,003 mm.

69. Wie viele Kugeln lassen sich aus P (82) russ. Pfund Blei gießen, wenn der Durchmesser einer jeden 2 r (4) russ. Lin. mißt? — Antw.: 9269.

70. Ein Gefäß, dessen Innenraum die Form eines regulären sechsseitigen Prismas von der Grundkante a (= 5 cm) hat, enthält Wasser. Darin wird eine Kugel untergetaucht, welche die Wände berührt. Um wieviel steigt dadurch der Wasserspiegel? — Antw.: Um 5,24 cm.

71. a) Um wieviel Kilogramm ist ein mit Wasserstoff gefüllter kugelförmiger Luftballon leichter als die Luft, die er verdrängt, wenn der Durchmesser des Ballons 2 r (25) Meter mißt, und wenn das Quadratmeter der Hülle P (0,03) Kilogramm wiegt? b) Wie groß ist das spezifische Gewicht der Luft in derjenigen Höhe, wo der Ballon dasselbe Gewicht hat wie die verdrängte Luftkugel? — Antw.: a) 9842,8; b) 0,000097.

72. Wie verhält sich der Inhalt einer Kugel zu dem In-

halt des einbeschriebenen und des umbeschriebenen Tetraeders, Würfels, Oktaeders, Dodekaeders, Ikosaeders?

Antw.: Ist K der Inhalt der Kugel, T_i der des einbeschr. —, T_u der des umbeschr. Tetraeders u. s. w., so ist:

$$\frac{K}{T_i}=\frac{3\pi\sqrt{3}}{2}=\frac{1}{0{,}12252}. \qquad \frac{K}{T_u}=\frac{\pi}{6\sqrt{3}}=\frac{1}{3{,}30797}.$$

$$\frac{K}{H_i}=\frac{\pi\sqrt{3}}{2}=\frac{1}{0{,}36755}. \qquad \frac{K}{H_u}=\frac{\pi}{6}=\frac{1}{1{,}90986}.$$

$$\frac{K}{O_i}=\pi=\frac{1}{0{,}31831}. \qquad \frac{K}{O_u}=\frac{\pi}{3\sqrt{3}}=\frac{1}{1{,}65399}.$$

$$\frac{K}{D_i}=\frac{\pi\sqrt{3}(5-\sqrt{5})}{10}=\frac{1}{0{,}66491}. \qquad \frac{K}{D_u}=\frac{\pi\sqrt{65+29\sqrt{5}}}{15\sqrt{10}}=\frac{1}{1{,}32503}.$$

$$\frac{K}{J_i}=\pi\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}=\frac{1}{0{,}60546}. \qquad \frac{K}{J_u}=\frac{\pi(3+\sqrt{5})^2}{60\sqrt{3}}=\frac{1}{1{,}20657}.$$

73. Eine Kugel vom Durchmesser 2 R (= 15 cm) wird durch zwei parallele Kugelkreise in eine Zone und zwei Kugelabschnitte geteilt. Wie groß sind die Inhalte dieser drei Teile, wenn ihre Höhen sich verhalten wie l : m : n (3 : 4 : 5)? — Antw.: 276,12 ccm, 826,30 ccm und 664,73 ccm.

74. Eine hölzerne Kegelkugel schwimmt im Wasser, so daß die benetzte Kugelhaube größer als die Halbkugel ist. Durch Anwendung von II. Aufg. 10. a und b wird der ebene Halbmesser des nassen Randkreises r (= 5,2 cm) und der Kugelhalbmesser R (= 6 cm) gefunden. Wie groß ist das spez. Gewicht der Kugel? — Antw.: 0,843.

75. In welchem Verhältnis wird die Achse eines Kugelausschnittes durch den zugehörigen Kugelkreis geteilt, a) wenn der Kugelkreis den Inhalt — b) wenn er die Oberfläche halbiert? — Antw.: a) Im Verh. des goldenen Schnittes $\frac{1}{2}(1+\sqrt{5}):1 = 1{,}618:1$; b) Im Verh. 3 : 2.

76. Auf der Oberfläche einer Kugel vom Halbmesser R (= 10 cm) befindet sich ein sphär. Dreieck mit den Winkeln α, β, γ (= 93° 40′, 67° 32′ 16″, 105° 36′ 44″). Wie groß ist der Inhalt des Körpers, der von dem zugehör. Dreikant aus der Kugel ausgeschnitten wird? — Antw.: 505,08 ccm.

77. a) Wie groß ist der Flächenraum, der von einer Höhe

h (= 1 geogr. Meile) über der Erdoberfläche überschaut werden kann? b) Wie hoch muß man sich über die Erdoberfläche erheben, um eine Fläche von 1000 Quadratmeilen überschauen zu können? (Erddurchmesser = 1719 geogr. Meilen.) — Antw.: a) 5394 Quadratmeilen; b) 0,1852 Meilen = 1,374 km.

78. Die krumme Oberfläche einer Kugelzone, deren Grundkreise gleich sind, soll mit einem einzigen Papierstreifen ohne Falten überklebt werden, so daß längs den Grundkreisen keine —, längs dem zugehörigen Aequator die größte Dehnung des Papiers stattfindet. Wie groß darf die Höhe der Zone höchstens sein, wenn die Längenausdehnungsfähigkeit des feuchten Papiers $\frac{1}{n}\left(=\frac{1}{24}\right)$ ist? — Antw.: $\frac{\sqrt{2n+1}}{n+1} = 0{,}28$ des Kugeldurchm.

79. Eine Kugel vom Halbmesser R (= 20 cm) wird cylindrisch ausgebohrt, so daß die Cylinderachse durch den Mittelpunkt geht und der Halbmesser des Loches r (= 8 cm) ist. Wie groß ist der Inhalt des ausgehöhlten Körpers? (III. Anh. 41. a.) — Antw.: 25799 ccm.

80. Die Grundflächen eines Kegelrumpfes haben die Halbmesser r und r' (= 4 und 3 cm), seine Höhe ist h (= 2 cm); a) wie groß ist der Halbmesser der dem Kegelrumpf umbeschriebenen Kugel? b) wie verhält sich der Inhalt des Kegelrumpfes zum Inhalt der umbeschriebenen Kugelzone? c) wie verhält sich der Mantel des Kegelrumpfes zur krummen Oberfläche der Zone? — Antw.: a) 4,0697 cm; b) wie 74 zu 79; c) wie 0,96155 zu 1.

81. In eine Kugel vom Halbmesser R (= 6 cm), sind vier gleiche Berührungskugeln so einbeschrieben, daß alle einander berühren; wie groß ist ihr Halbmesser? — Antw.: 2,697 cm.

82. Wie schwer ist eine gläserne Bikonvexlinse, deren Oberfläche aus zwei Kugelhauben mit gemeinsamem Grundkreis besteht, wenn die zugehör. Kugeln die Halbm. R u. R' (= 50 u. 30 cm) haben, und wenn die Linse die (längs der Achse gemessene) Dicke a (= 0,5 cm) hat? — Antw.: 44,06 g.

83—90: Umdrehungskörper.

83. Eine Kette von Schmiedeisen besteht aus n (100) gleichen wulstförmigen Ringen. Wird sie geradlinig ausgespannt,

so daß sich die Ringe paarweise berühren, und daß ihre Berührungspunkte und Mittelpunkte alle in gerader Linie liegen, so befindet sich zwischen jedem ersten und dritten Ring ein Spielraum gleich der Dicke eines Ringes, und beträgt die Gesamtlänge der Kette (zwischen den zwei äußersten Punkten gemessen) 1 (3,02) Meter. Wie groß ist das Gewicht der Kette? — Antwort: 7,686 kg.

84. Ein Dreieck ABC wird um eine zu AB parallele Gerade MN gedreht. In welchen Abständen von AB muß MN angenommen werden, wenn der Inhalt des erzeugten Umdrehungskörpers 2, 3, ... n-mal so groß sein soll als der Inhalt des durch Drehung des Dreiecks um AB erzeugten Umdrehungskörpers? — Antw.: In den Abständen: $\frac{1}{3}h$, $\frac{2}{3}h$, ... $\frac{n-1}{3}h$, wenn h die zu AB gehörige Höhe des Dreiecks ist.

85. Die Ecken eines Dreiecks ABC haben von einer in seiner Ebene liegenden Geraden MN die Entfernungen a, b, c (= 13, 9, 2). Von der Ecke A soll eine Transversale AT so gezogen werden, daß, wenn das Dreieck um MN als Achse gedreht wird, die von den beiden Teildreiecken ATB und ATC beschriebenen Umdrehungskörper einander gleich sind. In welchem Verhältnis ist BC im Punkt T zu teilen? (Vgl. Bew. von III. 20. a.) — Antw.: Im Verh. $\frac{\sqrt{(a+b+c)^2+(b-c)^2}-(b-c)}{a+b+c}=\frac{3}{4}$.

86. Der Bogen eines Kreisabschnittes mißt 120°, sein Halbmesser ist R (= 6 cm). Wie groß ist a) die Entfernung des Flächenschwerpunktes des Kreisabschnittes von seiner Sehne, b) der Inhalt des durch Drehung des Kreisabschnittes um seine Sehne erzeugten Umdrehungskörpers? (Mittels III. Anh. 41. a.) — Antw.: a) 1,23 cm. b) 170,895 ccm.

87. In einem Wulst vom Mittelkreishalbmesser R (= 4 cm) und Meridianhalbmesser r (= 2 cm) wird durch die zwei Parallelkreise, die gleich dem Mittelkreis sind, eine Kugelfläche gelegt. Wie groß sind die zwei ringförmigen Teile, in die der Wulst durch sie geteilt wird? — Antw.: Jeder ist gleich der Hälfte des Wulstes $= R r^2 \pi^2 = 157{,}914$ ccm.

88. Auf einer Geraden sind folgende Strecken abgetragen: ab = 6, bc = 5, cd = 1, de = $1\frac{1}{2}$, ef = $10\frac{1}{2}$; in den

Punkten a, b, c . . . sind auf der Geraden nach der nämlichen Seite hin die Senkrechten errichtet: aA = bB = $16\frac{1}{2}$, bB' = cC' = 14, cC = dD = eE' = $13\frac{1}{2}$, eE = fF = 12; endlich ist AB gezogen, über B'C' nach außen ein Halbkreis errichtet, CD gezogen, E mit D durch einen Viertelskreis verbunden, dessen Mittelpunkt E' ist, und EF gezogen. Die hiedurch entstandene Figur bildet den halben Achsenschnitt eines Toskanischen Säulenfußes, dessen unterster Teil eine quadratische Platte (mit aA als halber Grundkante und ab als Höhe) ist, und dessen übrige Teile durch Drehung der übrigen Figur um bf als Achse entstehen. Wie groß ist das Gewicht des in Sandstein ausgeführten Säulenfußes, wenn die obigen Maße als Dezimeter verstanden werden? — Antw.: 41451 kg.

89. Wie groß ist der Inhalt eines gestreckten Umdrehungsellipsoides, das durch Drehung einer Ellipse von den Halbachsen a u. b (= 4 u. 3 cm) um die große Achse 2a entsteht? (Vgl. II. Anh. 22. c u. III. Anh. 40.) — Antw.: $\frac{4}{3}ab^2\pi$ = 150,8 ccm.

90. Wie groß ist der Inhalt eines abgeplatteten Umdrehungsellipsoides, das durch Drehung einer Ellipse von den Halbachsen a u. b um die kleine Achse 2 b entsteht? (Vgl. II. Anh. 22. c, III. Anh. 12. b, III. 20. Zus.) — Was ist der Rauminhalt des als abgeplattetes Rotationsellipsoid aufgefaßten Erdkörpers, wenn die Abplattung $\frac{a-b}{a} = \frac{1}{299}$, und ein Grad des Aequators gleich 15 geogr. Meilen ist? — Antw. $\frac{4}{3}a^2b\pi$ = 1 082 840 Millionen Kubikkilometer.

IV. Tabellen.

Tab. 1. Spezifische Gewichte.

	Spez. Gew.	log.
Wasser	1	0,00 000
Blei	11,4	1,05 690
Eisen (Gußeisen)	7,251	0,86 040
„ (Schmiedeisen) . . .	7,788	0,89 143
Glas (gemeines)	2,6	0,41 497
„ (Kristallglas)	3,0	0,47 712
Gold (gegossen)	19,26	1,28 466
„ (gehämmert)	19,36	1,28 691
Granit	2,95	0,46 982
Holz (Kork)	0,24	0,38 021—1
„ (trockenes Tannenholz) .	0,5	0,69 897—1
„ (trockenes Eichenholz) . .	0,8	0,90 309—1
Kalkstein, Marmor	2,72	0,43 457
Kupfer (gegossen)	8,788	0,94 389
„ (gehämmert)	9,0	0,95 424
Luft (v. 0° Temp. b. 770 mm Barometerst.)	0,0013	0,11 394—3
Messing	8,4	0,92 428
Platin	21,314	1,32 866
Quecksilber	13,597	1,13 344
Sandstein	2,5	0,39 794
Silber (gegossen)	10,47	1,01 995
„ (gehämmert)	10,62	1,02 612
Wasserstoffgas	0,0000897	0,95 279—5
Zink	7,213	0,85 812
Zinn	7,291	0,86 279

Tab. 2. Verschiedene Maße und Gewichte,

vergleichen mit Meter und Kilogramm.

		Meter			Kilogr.
1 englischer	Fuß		1 englisches	Pfd.	= 0,4536
1 nordamer.	(à 12 Zoll	= 0,3048	1 nordamer.		
1 russischer	à 12 Lin.)		1 russisches	„	= 0,4095

1 geograph. Meile $(= \frac{1}{15}{}^{0}$ des Aeq.$)$ = 7420,44.

Tab. 3. Stereometrische Formeln.

Körper.	Bestimmungselemente.	Inhalt.	Mantel.	Oberfläche.
Quader.	Die drei von einer Ecke ausgehenden Kanten $= l, m, n.$	$lmn.$	—	$2(lm+mn+nl).$
Prisma.	Grundfläche $= G$, Höhe $= h.$	$Gh.$	—	—
Cylinder.	Halbmesser $= r$, Höhe $= h.$	$r^2\pi h.$	$2r\pi h.$	$2r\pi(r+h).$
Pyramide.	Grundfläche $= G$, Höhe $= h.$	$\frac{1}{3} G\, h.$	—	—
Kegel.	Halbmesser des Grundkreises $= r$, Höhe $= h$, Mantellinie $= s = \sqrt{r^2+h^2}$, Mittellot der Mantellinie (zwischen Mantellinie und Achse) $= p.$	$\frac{1}{3} r^2\pi h.$	$r\pi s.$ $2p\pi h.$	$r\pi(r+s).$
Pyramidenrumpf.	Grundflächen $= G$ und G', Höhe $= h.$	$\frac{h}{3}\left(G^2+\sqrt{GG'}+G'\right).$	—	—
Kegelrumpf.	Halbmesser der Grundkreise $= r$ und r', Höhe $= h$, Mantellinie $= s = \sqrt{h^2+(r-r')^2}$, Mittellot der Mantellinie (zwischen Mantellinie und Achse) $= p.$	$\frac{\pi h}{3}\left(r^2+rr'+r'^2\right).$	$(r+r')\pi s.$ $2p\pi h.$	—
Prismatoid.	Grundflächen $= G$ und G', Mittelschnitt $= M$, Höhe $= h.$	$\frac{h}{6}\left(G+G'+4M\right).$	—	—
Kugel.	Halbmesser $= R.$	$\frac{4}{3} R^3\pi.$	—	$4 R^2\pi.$
Kugelzone.	Halbmesser der Kugel $= R$, Halbmesser der Grundkreise $= r$ und r', Entfernungen der Grundkreise vom Mittelpunkt $= e$ und $e-h$, Höhe $= h.$	$\frac{\pi h}{3}\left(3R^2-3e^2+3eh-h^2\right).$ $\frac{\pi h}{6}\left(3r^2+3r'^2+h^2\right).$	$2R\pi h.$	—
Kugelabschnitt (Kugelhaube).	Halbmesser der Kugel $= R$, Halbmesser des Grundkreises $= r$, Höhe $= h.$	$\frac{\pi h^2}{3}\left(3R-h\right).$ $\frac{\pi h}{6}\left(3r^2+h^2\right).$	$2R\pi h.$ $(r^2+h^2)\pi.$	—
Kugelausschnitt.	Halbmesser der Kugel $= R$, Höhe des zugehörigen Kugelabschnittes $= h.$	$\frac{2}{3} R^2\pi h.$	—	—