Lehrbuch der Stereometrie

Hauck, Guido

Tübingen, 1893

I. Lehrsätze.

D. Anhang

von Lehrsätzen und Aufgaben.

I. Lehrsätze.

1—5: Allgemeine Polyedersätze.

1. a. Die 3-fache Flächenzahl oder Eckenzahl eines Polyeders liegt zwischen der 2-fachen Kantenzahl und der um 6 vermehrten einfachen Kantenzahl:

$$2\,K \geqq 3\,F \geqq K + 6\,.$$
$$2\,K \geqq 3\,E \geqq K + 6\,.$$

(Da jede Fläche mindestens 3-seitig und jede Ecke mindestens 3-kantig ist, so ist W oder $2\,K \geqq 3\,F$ und $\geqq 3\,E$. Das übrige durch Kombinierung dieser Ungleichungen mit III. 1.)

b. Die 2-fache Flächenzahl eines Polyeders liegt zwischen der um 8 verminderten 4-fachen Eckenzahl und der um 4 vermehrten einfachen Eckenzahl. — Die 2-fache Eckenzahl eines Polyeders liegt zwischen der um 8 verminderten 4-fachen Flächenzahl und der um 4 vermehrten einfachen Flächenzahl:

$$4\,E - 8 \geqq 2\,F \geqq E + 4\,.$$
$$4\,F - 8 \geqq 2\,E \geqq F + 4\,.$$

2. a. Es giebt kein Polyeder, in dem alle Flächen mehr als 5-seitig sind, oder in dem alle Ecken mehr als 5-kantig sind. (III. Anh. 1. a.)

b. Es giebt kein Polyeder mit 7 Kanten. (III. Anh. 1. a.)

† 3. Bildet man von einem Polyeder ein ebenes Netz und fügt dieses wieder zu einer geschlossenen Polyederoberfläche so zusammen, daß je zwei Randlinien des Netzes, die vorher zu einer Kante vereinigt waren, wieder zu einer Kante vereinigt werden, daß aber die vorherige Außenseite der Polyederoberfläche nunmehr zur Innenseite wird: so ist das neu entstandene Polyeder zu dem ursprünglichen symmetrisch. Aus jedem ebenen Netz lassen sich also zwei symmetrische Polyederformen herstellen.

4. a. Zieht man von sämtlichen Ecken eines Polyeders in derselben Richtung parallele und gleiche Strecken, so bestimmen

deren Endpunkte die Ecken eines zweiten Polyeders, das mit dem ersten kongruent ist.

b. Zieht man von den Ecken eines Polyeders nach einem Punkte Strecken und verlängert jede über den Punkt um sich selbst, so bestimmen die Endpunkte der Verlängerungen die Ecken eines zweiten Polyeders, das mit dem ersten symmetrisch ist.

c. Fällt man von den Ecken eines Polyeders die Senkrechten auf eine gerade Linie und verlängert jede über ihren Fußpunkt um sich selbst, so bestimmen die Endpunkte der Verlängerungen die Ecken eines zweiten Polyeders, das mit dem ersten kongruent ist.

† 5. a. Zieht man von einem Punkt S nach den Ecken eines Polyeders Strecken und teilt diese sämtlich in dem nämlichen Verhältnis, so bestimmen die Teilpunkte die Ecken eines zweiten Polyeders, das mit dem ersten ähnlich ist, und zwar gleichstimmig ähnlich oder ungleichstimmig ähnlich, je nachdem die Teilpunkte auf derselben Seite vom Punkt S angenommen werden, auf der das ursprüngl. Polyeder liegt, oder auf der entgegengesetzten Seite. Zwei entsprechende Kanten der zwei Polyeder verhalten sich wie die Entfernungen zweier entsprechenden Ecken vom Punkt S. (Vgl. II. Anh. 18.)

† b. Der Satz: III. 10. Zus. 2 gilt auch für ähnliche und ähnlich liegende Polyeder. Je nachdem die zwei Polyeder gleichstimmig ähnlich oder ungleichstimmig ähnlich sind, sind bei der ähnlichen Lage je zwei entsprechende Kanten gleich-gerichtet oder entgegengesetzt-gerichtet, und ist der Ähnlichkeitspunkt ein äußerer oder ein innerer.

c. Drei ähnliche und ähnlich liegende Vielecke oder Polyeder haben zusammen drei Ähnlichkeitspunkte (und zwar entweder drei äußere oder einen äußeren und zwei innere), welche in gerader Linie liegen (äußere oder innere Ähnlichkeitsachse). (Vgl. II. Anh. 19. — Man beweise, daß die drei Ähnlichkeitspunkte in zwei Ebenen, und folglich in deren Schnittlinie liegen müssen.)

6—13: Prisma.

6. a. Der Rauminhalt eines Würfels, dessen Kante die Summe zweier Strecken a und b ist, ist gleich dem Würfel aus

der Kante a, plus dem dreifachen Quader aus a, a und b, plus dem dreifachen Quader aus a, b und b, plus dem Würfel aus b.

b. Analoger Satz für einen Würfel, dessen Kante die Differenz zweier Strecken ist.

7. a. In jedem Quader ist das Quadrat einer Diagonale gleich der Summe der Quadrate dreier von einer Ecke ausgehenden Kanten.

b. Projiziert man eine Strecke auf die drei Kanten eines Oktanten (indem man von den Endpunkten der Strecke die Senkrechten auf die Kanten fällt), so ist das Quadrat der Strecke gleich der Summe der Quadrate ihrer drei Projektionen.

8. a. Die Summe der Quadrate der vier Diagonalen eines Parallelflachs ist gleich der Summe der Quadrate der zwölf Kanten.

b. Die Summe der Quadrate der sechs Diagonalflächen eines Parallelflachs ist gleich der doppelten Summe der Quadrate der sechs Seitenflächen. (Man stelle zuerst eine Beziehung auf zwischen 2 Diagonalflächen und 4 Seitenflächen, die zwischen den nämlichen vier Parallelkanten liegen.)

9. a. Jede durch den Mittelpunkt eines Parallelflachs oder den Mittelpunkt der Achse eines regul. Prismas von gerader Seitenzahl (Cylinders) gezogene und von der Oberfläche begrenzte Strecke wird in jenem Mittelpunkt halbiert.

b. Jede durch den Mittelpunkt gelegte Schnittebene teilt den Körper in zwei symmetrische Teile.

c. Schneidet man einen Cylinder durch zwei beliebige Ebenen (die sich selbst nicht innerhalb des Cylinders schneiden), so hat das zwischen ihnen enthaltene Cylinderstück gleichen Inhalt und gleiche Mantelfläche mit einer Zone des Cylinders, die das Stück der Achse zwischen den zwei Schnittebenen zur Höhe hat. (Vgl. auch III. Anh. 12. c.)

10. a. Jedem Quader läßt sich eine Kugel um beschreiben.

b. Jedem Rhomboeder*) läßt sich eine Kugel ein beschreiben.

11. a. Jedes Rhomboeder kann in ein reguläres sechsseitiges Prismatoid und zwei kongruente dreiseitige Pyramiden, die

---

*) Unter „Rhomboeder" ist hier und im folgenden stets ein Rhomboeder im engeren Sinne (vgl. III. Einl. 5. b) verstanden.

mit dem Prismatoid die Grundflächen gemein haben, zerlegt werden. Die Seitenflächen des Prismatoids und der Pyramiden sind kongruent, die Höhen sind gleich und fallen in die Hauptdiagonale des Rhomboeders. Das Prismatoid ist $= \frac{2}{3}$, jede Pyramide $= \frac{1}{6}$ des Rhomboeders.

b. Die Mitten von sechs Kanten eines Würfels, die nicht durch die nämlichen zwei gegenüberliegenden Ecken gehen, liegen in einer Ebene und bilden die Ecken eines regulären Sechsecks.

12. a. Schneidet man ein Prisma durch eine beliebige Ebene, so liegt der Flächen-Schwerpunkt der Schnittfigur auf der Verbindungslinie der Schwerpunkte der zwei Grundflächen. (Man bew. den Satz zuerst für ein dreiseitiges Prisma, zerlege ein mehrseitiges Prisma in lauter dreiseitige, und konstr. die Schwerpunkte der Flächen wie im Bew. von III. 20. a. — Die Teildreiecke der Schnittfigur sind nach I. Anh. 31 denen der Grundflächen proportioniert.)

b. Der Schwerpunkt einer ebenen Figur projiziert sich als Schwerpunkt der Projektionsfigur.

c. Der Inhalt eines schiefabgeschnittenen mehrseitigen Prismas ist gleich dem Inhalt eines senkrechten Prismas, das den gleichen Querschnitt, und die Strecke zwischen den Schwerpunkten der Endpolygone zur Höhe hat. (Man berechne den Inhalt mittels III. 16. Zus. 2, und die Strecke zwischen den zwei Schwerpunkten mittels des S. 164 erwähnten Trapez-Satzes.)

13. Ein Prisma wird von zwei Ebenen, deren Medianebene senkrecht zu den Seitenkanten ist, nach kongruenten Vielecken geschnitten (Wechselschnitte).

14—29: Vierflach. Schwerpunkt.

14. Die Summe der sechs Keile eines Vierflachs liegt zwischen 4 R und 6 R. (Die Summe der sphär. Exzesse der Dreikante an den vier Ecken muß > 0 und < 4 R sein. Zum Bew. bringe man die Spitzen der vier Dreikante durch Parallelverschiebung in den Mittelpunkt einer Kugel.)

15. Die Mittellotebenen der 6 Kanten eines Vierflachs schneiden sich zu je dreien nach 4 Geraden (den Mittelloten der Flächen) und gehen alle 6 durch einen Punkt, welcher

der Mittelpunkt der dem Vierflach umbeschriebenen Kugel ist.

16. a. Die inneren Medianebenen der sechs Kanten eines Vierflachs schneiden sich zu je dreien nach vier Geraden (den 4 inneren Medianen) und gehen alle sechs durch einen Punkt, welcher der Mittelpunkt der dem Vierflach einbeschriebenen Kugel ist. (II. Anh. 36.)

b. Die äußeren Medianebenen dreier in einer Fläche liegenden Kanten und die inneren Medianebenen der drei übrigen Kanten schneiden sich zu je dreien nach vier Geraden und gehen alle sechs durch einen Punkt, welcher der Mittelpunkt der dem Vierflach an jene Fläche anbeschriebenen Kugel ist. Von den vier Geraden ist eine eine innere Mediane, die drei andern sind äußere Medianen. Es giebt 12 äußere Medianen und 4 anbeschriebene Kugeln.

c. Die inneren Medianebenen zweier gegenüberliegenden Kanten und die äußeren Medianebenen der vier übrigen Kanten schneiden sich zu je dreien nach vier Geraden (äußeren Medianen) und gehen alle sechs durch einen Punkt. Dieser ist der Mittelpunkt einer Berührungskugel, die dem zweieckigen Scheitelkeilraum des Vierflachs an einer der zwei gegenüberliegenden Kanten einbeschrieben ist. Es giebt im allgem. 3 solcher Kugeln.

d. Von den 4 inneren und 12 äußeren Medianen eines Vierflachs schneiden sich also a) die 4 inneren —, b) 4mal 3 äußere und 1e innere —, c) 3mal 4 äußere in je einem Punkt.

(Eine analoge Lage wie die 8 Kugelmittelpunkte haben die 8 Punkte in I. Anh. Aufg. 10. b.)

17. a. Jede (innere oder äußere) Medianebene einer Kante eines Vierflachs teilt die gegenüberliegende Kante in zwei Teile, die sich verhalten wie die der ersten Kante anliegenden Flächen. (III. 12. Zus. 1 und I. Anh. 20.)

b. Jede (innere oder äußere) Mediane eines Vierflachs schneidet die gegenüberliegende Fläche in einem Punkte, dessen Verbindungslinien mit den drei Ecken der Fläche diese in drei Teile teilen, die sich verhalten wie die drei anliegenden Flächen.

18. a. Läßt sich in einem Vierflach eine Kugel beschreiben, die sämtliche sechs Kanten innerhalb der Kanten berührt, so sind die drei Summen je zweier Gegenkanten gleich.

b. Sind die drei Summen je zweier Gegenkanten eines Vierflachs gleich, so schneiden sich die Senkrechten, die auf den vier Flächen in den Mittelpunkten ihrer einbeschriebenen Kreise errichtet werden, in einem Punkt, welcher der Mittelpunkt der in diesem Falle vorhandenen kantenberührenden Innenkugel ist. Außerdem gibt es sechs Kugeln, von denen jede eine Kante und die Verlängerungen der vier anliegenden Kanten berührt.

19. a. Ein Vierflach wird von einer zu zwei Gegenkanten parallelen Ebene nach einem Parallelogramm geschnitten, das die von den zwei Kanten gebildeten Winkel enthält. Insbesondere bilden die Mittelpunkte der vier geschnittenen Kanten die Ecken eines Parallelogramms, dessen Seiten die Hälften der zwei Gegenkanten sind. Jedes Vierflach hat 3 solche Mittelparallelogramme. (Vgl. I. Anh. 14 und 13. a.)

b. Die drei Mitteltransversalen (d. s. die Verbindungsstrecken der Mitten zweier Gegenkanten) eines Vierflachs schneiden sich in einem Punkt und halbieren sich in demselben gegenseitig. (Sie bilden die Diagonalen der drei Mittelparallelogramme.) — Die Mittelpunkte aller zu zwei Gegenkanten parallelen Schnittparallelogramme liegen auf der zugehörigen Mitteltransversale.

c. Zieht man in jeder der vier Flächen eines Vierflachs die drei Verbindungsstrecken der Kantenmitten, so bilden diese 12 Strecken die Kanten eines dem Vierflach einbeschriebenen Achtflachs (Oktaeders im weiteren Sinn), das die drei Mittelparallelogramme zu Diagonalflächen und die drei Mitteltransversalen zu Diagonalen hat. Es kann als 6-seitiges Prismatoid, und zwar mit jeder seiner acht Flächen als Grundfläche, betrachtet werden. — Das Vierflach bildet den Halbflächner des Achtflachs; es kann nämlich aus dem Achtflach entstanden gedacht werden dadurch, daß von dessen 8 Flächen 4 nicht in einer Kante zusammenstoßende unterdrückt, und die 4 übrigen (die den vier ersten einzeln parallel sind) erweitert werden, bis sie sich schneiden.

d. Jedem Vierflach kann ein Parallelflach umbeschrieben werden, indem durch jede Kante eine Ebene parallel zu ihrer Gegenkante gelegt wird. Die Kanten des Parallelflachs sind gleich und parallel den Mitteltransversalen des Vierflachs. —

Umgekehrt können jedem Parallelflach zwei Vierflache einbeschrieben werden, deren Kanten die Diagonalen der Flächen des Parallelflachs sind. Sie haben die Mitteltransversalen und die Mittelparallelogramme gemein und stellen die 2 Halbflächner des ihren gemeinschaftlichen Kern bildenden einbeschriebenen Achtflachs vor, dessen Ecken die Mittelpunkte der Flächen des Parallelflachs bilden, und das dem Parallelflach zugeordnet heißt. Die zwei Vierflache, von denen jedes das Gegenvierflach des andern heißt, sind entsprechend-gleich, und zwar symmetrisch; sie liegen ähnlich und haben den Schnittpunkt der Mitteltransversalen zum Ähnlichkeitspunkt (III. Anh. 4. b). Jedes ist gleich dem dritten Teil des Parallelflachs.

e. Legt man durch die Mitte jeder Kante eines Vierflachs eine Ebene senkrecht zu ihrer Gegenkante, so schneiden sich diese sechs Ebenen in einem Punkt, welcher symmetrisch liegt mit dem Mittelpunkt der umbeschriebenen Kugel in Beziehung auf den Schnittpunkt der Mitteltransversalen. (Satz von Monge. — Bew. mit Hilfe des Gegenvierflachs.)

20. Die Schwerpunkte aller Parallelschnitte einer Pyramide liegen in einer Geraden, welche die Spitze mit dem Schwerpunkt der Grundfläche verbindet und die Schwerlinie der Pyramide heißt.

21. a. Die sechs Schwerebenen eines Vierflachs (d. i. die durch je eine Kante und die Mitte der Gegenkante gelegten Ebenen) schneiden sich zu je dreien nach den vier Schwerlinien des Vierflachs und gehen alle sechs durch einen Punkt, welcher der Schwerpunkt des Vierflachs heißt. Die vier Schwerlinien teilen sich im Schwerpunkt gegenseitig im Verhältnis 3 zu 1, so daß die größeren Abschnitte an die Ecken stoßen. — Die vier Pyramiden, in die das Vierflach vom Schwerpunkt aus zerlegt werden kann, haben gleichen Inhalt.

b. Der Schwerpunkt ist identisch mit dem Schnittpunkt der drei Mitteltransversalen, und also identisch mit dem Mittelpunkt des einbeschriebenen Achtflachs und des umbeschriebenen Parallelflachs.

Anm. Besteht ein Körper aus zwei Teilen, deren Rauminhalte $= k_1$ und k_2, und deren Schwerpunkte s_1 und s_2 sind, so erhält man den Schwerpunkt S des ganzen Körpers, wenn man $s_1 s_2$ im Verh. $s_1 S : S s_2 = k_2 : k_1$ teilt.

† 22. Teilt man die Schwerlinie (III. Anh. 20) einer mehrseitigen Pyramide im Verhältnis 3 zu 1 so, daß der größere Abschnitt an die Spitze stößt, so ist der Teilpunkt der Schwerpunkt der Pyramide. (Satz von Lionardo da Vinci. — Man zerlege die Pyramide durch Diagonalschnitte in Vierflache.)

Mittels dieses Satzes kann man gemäß der vorstehenden Anm. von jedem Polyeder den Schwerpunkt konstruieren, indem man es in Pyramiden zerlegt (III. Einl. 9).

23. a. Die Summe der Quadrate zweier Gegenkanten eines Vierflachs vermehrt um das 4-fache Quadrat der zugehörigen Mitteltransversale ist gleich der Summe der Quadrate der vier andern Kanten.

b. Die Summe der Quadrate der drei Mitteltransversalen ist gleich $\frac{1}{4}$ der Quadratsumme der sechs Kanten.

24. a. Das Quadrat einer Schwerlinie eines Vierflachs ist gleich $\frac{1}{3}$ der Quadratsumme der von der nämlichen Ecke ausgehenden drei Kanten weniger $\frac{1}{9}$ der Quadratsumme der drei übrigen Kanten. (Ist in einem $\triangle$ ABC die S. BC in M im Verh. $BM : MC = 1:2$ geteilt, so ist: $2\,AB^2 + AC^2 = 3\,AM^2 + 6\,BM^2$.)

b. Die 9-fache Quadratsumme der vier Schwerlinien ist gleich der 4-fachen Quadratsumme der sechs Kanten.

c. Die Quadratsumme der Entfernungen des Schwerpunktes von den vier Ecken ist gleich der Quadratsumme der drei Mitteltransversalen. (III. Anh. 23. b.)

25. a. Der Inhalt eines Vierflachs ist doppelt so groß als der Inhalt einer Pyramide, die ein Mittelparallelogramm zur Grundfläche und die kürzeste Entfernung der zwei ihm parallelen Gegenkanten zur Höhe hat. (III. 16.)

b. Jede durch eine Mitteltransversale eines Vierflachs gelegte Schnittebene teilt das Vierflach in zwei gleiche Teile. (Satz von Bobillier. — Die zwei Pyramiden, die zwischen der Schnittebene und einem durch die Mitteltransversale gehenden Mittelparallelogramm liegen, sind gleich.)

26. a. Das rhombische Vierflach oder Sphenoid. Haben in einem Vierflach je zwei gegenüberliegende Kanten gleiche Länge, so sind alle vier Flächen kongruent, und die Dreikante an allen vier Ecken kongruent; das Vierflach ist also gleicheckig-

gleichflächig und heißt Sphenoid. Das Netz eines solchen erhält man, wenn man durch die Ecken eines beliebigen, als Seitenfläche gewählten Dreiecks die Parallelen zu den Gegenseiten zieht. Im Sphenoid sind die drei Mittelparallelogramme Rhomben, (daher auch die Bezeichnung: rhombisches Vierflach). Die drei Mitteltransversalen stehen auf einander senkrecht. Das einbeschriebene Achtflach (III. Anh. 19. c) hat lauter kongruente Flächen. Das umbeschriebene Parallelflach (III. Anh. 19. d) ist ein Quader.

b. Das symmetrische Sphenoid hat kongr. gleichschenklige Dreiecke zu Flächen. Es hat also 4 gleiche Kanten (Gegenkanten-Paare); die zwei andern Kanten sind zu einander rechtwinklig. Die Dreikante sind gleichschenklig. Ein Mittelparallelogramm ist quadratisch, die zwei andern sind kongruent. Zwei Mitteltransversalen sind gleich.

27. a. Das Oblong-Vierflach. Bilden in einem Vierflach zwei Kanten mit ihren Gegenkanten rechte Winkel, so ist dies auch für das dritte Kantenpaar der Fall. Die drei Mittelparallelogramme sind Rechtecke, (daher die Bez.: Oblong-Vierflach). Die drei Mitteltransversalen sind gleich. Die Summe der Quadrate je zweier Gegenkanten ist konstant. Das einbeschriebene Achtflach besitzt eine umbeschriebene Kugel. Das umbeschriebene Parallelflach ist ein Rhomboeder (im weiteren Sinn).

b. Im Oblong-Vierflach schneiden sich die vier Höhen in einem Punkt (was beim allgemeinen Vierflach nicht der Fall ist). Durch diesen Punkt gehen auch die kürzesten Entfernungen der drei Paare von Gegenkanten.

c. Im Oblong-Vierflach liegen die Fußpunkte der vier Höhen, die Schwerpunkte der vier Seitenflächen, sowie die Punkte, welche die oberen Abschnitte der vier Höhen vom Höhenschnittpunkt aus im Verhältnis 1 : 2 teilen, auf einer Kugelfläche (Feuerbach'sche Kugel), deren Halbmesser gleich $\frac{1}{3}$ des Halbmessers der umbeschriebenen Kugel ist, und deren Mittelpunkt die Verbindungsstrecke von Höhenschnittpunkt und Mittelpunkt der umbeschriebenen Kugel im Verhältnis 1:2 teilt. (Satz von H. Vogt. — Die Teilpunkte zweier Höhenabschnitte und die Schwerpunkte der zugehörigen zwei Seitenflächen bilden die Ecken eines Rechtecks, dessen Mittelpunkt der Mittelpunkt der Kugel ist. Das durch die vier Teilpunkte der Höhenabschnitte bestimmte Vierflach ist mit dem Haupt-Vierflach ähnlich und ähnlich liegend.)

28. In jedem Vierflach ist der reziproke Wert des Halbmessers der einbeschriebenen Kugel gleich der Summe der reziproken Werte der vier Höhen und gleich der halben Summe der reziproken Werte der vier Halbmesser der anbeschriebenen Kugeln. (Sind a_1, a_2, a_3, a_4 die vier Seitenflächen, h_1, h_2, h_3, h_4 die zugehörigen Höhen, r_1, r_2, r_3, r_4 die Halbmesser der anbeschriebenen Kugeln, r der Halbm. der einbeschriebenen Kugel, so ist:

$$\frac{a_1}{\frac{1}{h_1}} = \frac{a_2}{\frac{1}{h_2}} = \frac{a_3}{\frac{1}{h_3}} = \frac{a_4}{\frac{1}{h_4}} = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4}{\frac{1}{r}} = \frac{a_1 + a_2 + a_3 - a_4}{\frac{1}{r_4}} \text{ u.s.w.})$$

29. a. Zieht man in einem Vierflach von den Ecken A, B, C, D nach den gegenüberliegenden Flächen vier Strecken AA', BB', CC', DD', die sich in einem Punkte O schneiden, so ist:

$$\frac{OA'}{AA'} + \frac{OB'}{BB'} + \frac{OC'}{CC'} + \frac{OD'}{DD'} = 1, \text{ und: } \frac{AO}{AA'} + \frac{BO}{BB'} + \frac{CO}{CC'} + \frac{DO}{DD'} = 3.$$

(Mittels der Verh. der vier Teilpyramiden zum ganzen Vierflach.)

b. Fällt man von einem beliebigen Punkt im Innern eines Vierflachs die Senkrechten auf die Flächen, so ist die Summe der vier Verhältnisse aus je einer Senkrechten und der ihr parallelen Höhe = 1.

c. Die Summe der Entfernungen eines beliebigen Punktes im Innern eines regul. Tetraeders von den vier Flächen ist konstant, und zwar gleich der Höhe des Tetraeders.

30—37: Pyramide und Kegel, Pyramiden- und Kegelrumpf.

30. a. In einer dreiseitigen Pyramide, deren Dreikant an der Spitze ein Oktant ist, sind die Winkel der Grundfläche alle spitz; die Projektionen der Seitenkanten auf die Grundfläche fallen in die Höhen der Grundfläche, die Projektion der Spitze fällt in den Schnittpunkt der Höhen.

b. Das Quadrat der Grundfläche ist gleich der Summe der Quadrate der Seitenflächen.

31. a. Um jede reguläre Pyramide und in jede reguläre Pyramide läßt sich eine Kugel beschreiben.

b. Um jeden regul. Pyramidenrumpf läßt sich eine Kugel beschreiben.

c. In einen Kegelrumpf läßt sich eine Kugel beschreiben, wenn die Mantellinie gleich der Summe der Grundkreis-Halbmesser ist.

32. a. Stellt man das Netz einer Pyramide dadurch her, daß man längs den Seitenkanten aufschneidet und die Seitenflächen durch Drehung um die Grundkanten in die Ebene der Grundfläche umlegt, so schneiden sich in dieser Netzfigur die Senkrechten, die von den freien Ecken der Seitenflächen auf die zugehörigen Grundkanten gefällt werden, in einem Punkt, welcher den Fußpunkt der Höhe der Pyramide vorstellt.

b. In jeder Pyramide ist die Summe der Seitenflächen größer als die Grundfläche.

c. Legt man in einem Prisma oder Pyramidenrumpf zwei Seitenflächen, die eine Seitenkante BB' gemein haben, durch Drehung um die Grundkanten AB und BC in die Ebene der unteren Grundfläche um, so schneiden sich die Senkrechten, die von den zwei Umlegungen des Punktes B' auf die entsprechenden Grundkanten gefällt werden, in einem Punkt, der die Projektion der Ecke B' auf die untere Grundfläche vorstellt.

33. Die Abwicklungsfigur des Mantels eines Kegels, dessen Achsenschnitt ein gleichseitiges Dreieck ist, ist ein Halbkreis.

34. Wird eine reguläre quadratische Pyramide von einer durch eine Grundkante gelegten Schnittebene halbiert, so werden zwei Seitenkanten von ihr golden geschnitten. (III. 16. Zus. 2.)

35. Der Rauminhalt eines Polyeders, in das sich eine Kugel einbeschreiben läßt, ist gleich $\frac{1}{3}$ mal Oberfläche mal Halbmesser der einbeschriebenen Kugel.

36. Haben zwei dreiseitige Pyramiden an den Spitzen entsprechend-gleiche Dreikante, so verhalten sich ihre Inhalte wie die Produkte ihrer Seitenkanten.

37. a. Verhalten sich in einem Pyramidenrumpf zwei entsprechende Seiten der Grundflächen G und G' wie m zu m', und teilt ein Parallelschnitt die Höhe im Verhältnis $\sqrt{m}$ zu $\sqrt{m'}$, so daß der größere Abschnitt an die größere Grundfläche stößt, so ist die Schnittfigur: $S = \sqrt{GG'}$. Der Inhalt des Pyramidenrumpfes ist also gleich der Summe der drei Pyramiden, welche die drei Flächen G, G', S zu Grundflächen und die Höhe des Pyramidenrumpfes zur Höhe haben.

b. Der Rauminhalt eines Kegelrumpfes ist gleich einem Cylinder von der gleichen Höhe und einem Halbmesser gleich der halben Summe der Grundkreis-Halbmesser des Rumpfes, plus einem Kegel von der gleichen Höhe und einem Grundkreis-Halbmesser gleich der halben Differenz der Grundkreis-Halbmesser des Rumpfes.

38—39: Prismatoid.

38. a. Der Inhalt eines Prismas, dessen Grundflächen Trapeze sind, ist gleich dem arithm. Mittel zwischen den zwei parallelen Seitenflächen — mal ihrer Entfernung.

b. Der Inhalt eines schiefabgeschnittenen Parallelflachs ist gleich dem arithm. Mittel zwischen den vier Parallelkanten oder zwischen zwei gegenüberliegenden Parallelkanten — mal dem zu ihnen senkrechten Querschnitt. (III. 16. Zus. 2.)

39. a. Ein Prismatoid werde auf die Ebene seiner unteren Grundfläche G projiziert; die obere Grundfläche (Deckfläche) sei D. Die algebr. Summe der Projektionen derjenigen Seitenflächen, die mit D eine Kante gemein haben, (Oberdreiecke) werde durch O, diejenige der übrigen Seitenflächen (Unterdreiecke) durch U bezeichnet; so zwar, daß in den zwei algebr. Summen jede Fläche mit positivem oder negativem Vorzeichen versehen wird, je nachdem sie sich mit obenliegender Außenseite oder Innenseite projiziert. Man hat dann stets: $D + O + U = G$. Ist die Höhe des Prismatoids $= h$, so ist sein Inhalt: $K = \frac{h}{3}(3D + 2O + U)$ oder $= \frac{h}{3}(2D + G + O)$. (Satz von E. Gusserow.) (Man berücksichtige auch den Fall, daß zwei Seitenflächen, die einen einspringenden Keil einschließen, in der Projektion auf die nämliche Seite der Keilkante zu liegen kommen, so daß in der Nähe der Kante die Polyederoberfläche von einer zur Grundfläche senkrechten Linie in vier Punkten geschnitten wird.)

b. Ist die Höhe eines Prismatoides $= h$, eine Grundfläche $= G$, und derjenige Parallelschnitt, der von G eine Entfernung $= \frac{h}{3}$ hat, $= S$, so ist der Inhalt: $K = \frac{h}{4}(G + 3S)$.

40—46: Kugel und Umdrehungskörper.

† 40. Werden zwei Körper von verschiedenen Höhen durch jedes Paar Ebenen, die zu den Höhen senkrecht sind und sie im nämlichen Verhältnis teilen, nach flächengleichen Figuren geschnitten, so verhalten sich die Rauminhalte der zwei Körper wie ihre Höhen. (Bew. ähnlich wie III. 11, mittels III. 8. Zus. 1.)

41. a. Wird ein Kreisabschnitt um den mit seiner Sehne parallelen Kreisdurchmesser gedreht, so entsteht ein Umdrehungskörper, der den gleichen Inhalt hat wie die über der Sehne als Durchmesser beschriebene Kugel. (III. 11. Zus.)

b. Wird ein Kreisabschnitt um einen beliebigen, ihn nicht schneidenden Durchmesser seines Kreises gedreht, so entsteht ein Umdrehungskörper, der sich zu der über der Sehne als Durchmesser beschriebenen Kugel verhält wie die Projektion der Sehne auf die Drehachse zur Sehne. (III. Anh. 40.)

42. Beschreibt man einer Kugel einen Kegelrumpf um, so daß sie von den beiden Grundkreisen und dem Mantel berührt wird, so ist der Raum zwischen den Oberflächen der Kugel und des Kegelrumpfes gleich der Summe der zwei Kegel, welche die Grundkreise des Kegelrumpfes zu Grundkreisen und den Mittelpunkt des Berührungskreises zur gemeinschaftlichen Spitze haben. (Verallgemeinerung von III. 17. a, Beweis.)

43. Zieht man in den zwei Grundkreisen einer Kugelzone zwei parallele Durchmesser und bezeichnet die Verbindungsstrecken der zwei Endpunkte des einen Durchmessers mit einem Endpunkt des andern durch s und s', so ist die krumme Oberfläche der Zone $= s s' \pi$. (Verallgem. von III. 18. Zus. 2.)

44. a. Berühren zwei zu einander senkrechte windschiefe Gerade eine Kugel in den Endpunkten eines Durchmessers, und schneidet man auf einer derselben eine Strecke gleich dem Durchmesser, auf der andern eine Strecke gleich der Großkreis-Peripherie der Kugel beliebig ab, so werden das durch die vier Endpunkte der Strecken bestimmte Vierflach und die Kugel von jeder zum Berührungsdurchmesser senkrechten Ebene nach flächengleichen Figuren geschnitten (Satz von A. Schmidt. — Hiernach Berechnung von Kugel, Kugelzone und Kugelabschnitt.)

b. Ein Kreuzsatteldach entsteht dadurch, daß zwei kongruente Satteldächer mit gleichschenkl. Dreiecken als Stirnflächen auf gemeinschaftl. quadratischer Basis ruhen und sich so durchdringen, daß die Firstkanten sich rechtwinklig schneiden und gegenseitig halbieren. Ist die Grundfläche des Kreuzsatteldaches gleich dem Grundkreis, und seine Höhe gleich dem Halbmesser einer Halbkugel, so haben irgend zwei Parallelschnitte beider Körper in gleichen Abständen von den Grundflächen — gleichen Flächeninhalt. (Man betrachte das Kreuzsatteldach als Differenz eines Quaders und vier quadratischer Pyramiden.)

c. Die Prismatoidformel (III. 16) gilt auch für Kugel, Kugelzone und Kugelabschnitt.

d. Hat ein Faß= oder Kessel=förmiger Körper zu einer Kugelzone, bezw. einem Kugelabschnitt eine solche Beziehung, daß die zwei Körper von jedem Paar Ebenen, die zu den beiderseitigen Höhen senkrecht sind und sie im nämlichen Verhältnis teilen, nach flächengleichen Figuren geschnitten werden, so gilt für den Körper die Prismatoidformel. (III. Anh. 40.) Daher giebt die Prismatoidformel brauchbare Näherungswerte für die Berechnung von Fässern und Kesseln, deren krumme Oberfläche geometrisch nicht genau definiert ist. Ist also die (innere) Höhe eines Fasses $= h$, der Bodendurchmesser $= d$, der Spunddurchmesser $= D$, so kann man setzen: $K = \frac{\pi h}{12}(d^2 + 2D^2)$.

45. Dreht man ein Dreieck um eine seiner Schwerlinien als Achse, so beschreiben seine beiden Teile gleich große Rotationskörper. — Die Inhalte der drei durch Drehung um die drei Schwerlinien erzeugten Rotationskörper verhalten sich wie die reziproken Werte der Schwerlinien.

46. Dreht man eine ebene Figur, die aus zwei symmetrischen Hälften besteht, um eine sie nicht schneidende Achse, die parallel zur Symmetralachse ist, so ist die halbe Differenz der Inhalte oder Oberflächen der von den zwei Hälften beschriebenen Umdrehungskörper gleich dem Inhalt oder der Oberfläche des Umdrehungskörpers, der durch Drehung der Figur um ihre Symmetralachse entsteht.

47–63: Reguläre und halbreguläre Polyeder. Regul. Krystallsystem.

47. a. Je zwei Gegenkanten eines regul. Tetraeders sind zu einander senkrecht. Die Verbindungsstrecke ihrer Mittelpunkte stellt ihre kürzeste Entfernung vor.

b. Bei Dodekaeder und Ikosaeder sind 5 Gruppen von je 3 Paaren paralleler Kanten vorhanden, deren Richtungen zu einander senkrecht sind.

48. Für jedes regul. Polyeder läßt sich eine Kugel konstruieren, die sämtliche Kanten in deren Halbierungspunkten berührt. Ihr Mittelpunkt fällt mit dem Mittelpunkt der ein- und der umbeschriebenen Kugel zusammen.

49. a. Die Mittelpunkte der Flächen eines regul. Polyeders bilden die Ecken eines andern, dem ersten zugeordneten regul. Polyeders. (Vgl. III. 4. Zus.)

b. Ist einer Kugel ein regul. Polyeder einbeschrieben, und legt man in seinen Ecken die Berührungsebenen an die Kugel, so schließen diese ein zweites, dem ersten zugeordnetes regul. Polyeder ein; und umgekehrt.

c. Die Ebenen, die durch die Endpunkte der von je einer Ecke ausgehenden Kanten eines regul. Polyeders — oder durch Punkte dieser Kanten, die von der Ecke gleich weit abstehen — gelegt werden, schließen ein zweites, dem ersten zugeordnetes regul. Polyeder ein.

Man sagt daher, die Flächen des einen von zwei zugeordneten regul. Polyedern *stumpfen die Ecken des andern ab.*

50. Die Ecken jedes der in II. Anh. Aufg. 61 besprochenen fünf Netze von regul. sphär. Vielecken auf einer Kugeloberfläche bilden die Ecken eines der Kugel einbeschriebenen — oder die Berührungspunkte der Flächen eines der Kugel umbeschriebenen regul. Polyeders. (Hiernach kann man auch von der Sphärik aus zu den regul. Polyedern gelangen, und zwar reichen hiezu die drei regul. Dreiecksnetze aus.)

51. Haben zwei einander zugeordnete regul. Polyeder gleiche Halbmesser der umbeschriebenen Kugeln, so haben sie auch

a. gleiche Halbmesser der ihren Flächen umbeschriebenen Kreise, und daher auch gleiche Halbmesser der einbeschriebenen Kugeln. (Die sphär. Mittelpunkte der den Flächen des einen umbeschr. Kreise bilden die Ecken eines mit dem andern kongr. Polyeders.)

b. Das Produkt der Halbmesser der kantenberührenden Kugeln ist gleich dem Produkt der Halbmesser der einbeschriebenen und der umbeschriebenen Kugel: $\rho\rho' = r R$. (Bei der in a. angedeuteten Lage liegt je ein ρ und ein R des einen Pol. bezw. mit einem ρ' und einem r des andern in der nämlichen Geraden.)

c. Die Rauminhalte der zwei Polyeder verhalten sich wie die Halbmesser ihrer kantenberührenden Kugeln. (Satz von Dostor.)

52. a. Unter den Ecken eines Würfels sind 2 Gruppen von je 4 Ecken vorhanden, die zugleich Ecken eines regul. Tetraeders sind; die Tetraederkanten werden durch Quadratdiagonalen vorgestellt. (Vgl. III. Anh. 19. d.)

b. Unter den Ecken eines Dodekaeders sind 5 Gruppen von je 8 Ecken vorhanden, die zugleich Ecken eines Würfels sind; die Würfelkanten werden durch Fünfecksdiagonalen vorgestellt (III. Anh. 47. b). Das Dodekaeder kann aufgefaßt werden als Würfel, auf dessen sechs Flächen kongruente Walmdächer aufsitzen; jede Dreiecksfläche eines Walmdaches bildet mit einer Trapezfläche eines andern zusammen ein regul. Fünfeck.

53. a. Unter den Flächen eines regul. Oktaeders sind 2 Gruppen von je 4 Flächen vorhanden, die (erweitert gedacht) zugleich Flächen eines regul. Tetraeders sind. (Vgl. III. Anh. 19. c und d.)

b. Unter den Flächen eines Ikosaeders sind 5 Gruppen von je 8 Flächen vorhanden, die zugleich Flächen eines Oktaeders sind. (III. Anh. 52. b und 49. b.)

54. a. Die Mitten der 6 Kanten eines Tetraeders bilden die Ecken eines Oktaeders. (Vgl. III. Anh. 19. c.)

b. Die Mitten der 12 Kanten eines Würfels oder eines Oktaeders bilden die Ecken des nämlichen gleicheckig-halbregul. Polyeders, dessen Oberfläche aus 8 kongr. regul. Dreiecken und 6 kongr. Quadraten besteht, und an dessen Ecken sich kongr. Vierkante befinden.

c. Die Mitten der 30 Kanten eines Dodekaeders oder eines Ikosaeders bilden die Ecken des nämlichen gleicheckig-halbregul. Polyeders, dessen Oberfläche aus 20 kongr. regul. Dreiecken und

12 kongr. regul. Fünfecken besteht, und an dessen Ecken sich kongr. Vierkante befinden.

Durch Erweiterung der Flächen der in a, b, c genannten Polyeder erhält man je zwei zugeordnete regul. Polyeder in sternförmiger Durchdringung (zwei zugeordnete regul. Polyeder „im Gleichgewicht".)

55. Legt man durch jede Kante eines regul. Polyeders eine Ebene, die mit den anstoßenden Flächen gleiche Keile bildet und das Polyeder nicht schneidet, so umschließen diese Ebenen

a. beim Tetraeder die Flächen eines Würfels. (Vgl. III. Anh. 52. a.)

b. Beim Würfel und beim Oktaeder umschießen die 12 Ebenen das nämliche gleichflächig-halbregul. Polyeder, welches Rhomben-Dodekaeder oder Granatoeder heißt. Seine Oberfläche besteht aus 12 kongr. Rhomben, deren kleinere Diagonalen die Würfelkanten, deren größere Diagonalen die Oktaederkanten sind. Es hat 14 Ecken; an den 8 Würfelecken befinden sich kongr. regul. Dreikante, an den 6 Oktaederecken kongr. regul. Vierkante.

c. Beim Dodekaeder und beim Ikosaeder umschließen die durch die 30 Kanten gelegten Ebenen das nämliche gleichflächig-halbregul. Polyeder, welches Rhomben-Triakontaeder oder ikosaedrisches Granatoeder heißt. Seine Oberfläche besteht aus 30 kongr. Rhomben, deren kleinere Diagonalen die Dodekaederkanten, deren größere die Ikosaederkanten sind. Es hat 32 Ecken; an den 20 Dodekaederecken befinden sich kongr. regul. Dreikante, an den 12 Ikosaederecken kongr. regul. Fünfkante.

Man sagt, die in a, b, c genannten Polyeder stumpfen die Kanten der ursprüngl. Polyeder ab. — Die beiden Granatoeder heißen auch Keplerische Körper.

56. Die Flächen der in 55. a, b, c genannten Polyeder berühren die kantenberührende Kugel des ursprünglichen Polyeders; die Berührungspunkte fallen in die Mittelpunkte der Flächen und bilden die Ecken der in 54. a, b, c genannten Körper, (die Flächen der ersteren stumpfen die Ecken der letzteren ab). Die Diagonalen der Flächen der in 55 genannten Polyeder bilden die scharfen Kanten der in 54 (Schlußbemerkung) genannten sternförmigen Körper.

57. a. Das oktaedr. Granatoeder kann in 4 kongr. stumpfe Rhomboeder (vgl. III. Einl. 5. b) zerlegt werden. (4 Würfelecken des Granatoeders, die zugleich Tetraederecken sind, stellen von jedem Rhomboeder eine Hauptecke vor, die 4 andern Hauptecken liegen im Mittelpunkt.)

b. Die 6 Granatoederflächen, welche an dem als 6-seitiges Prismatoid aufgefaßten Oktaeder die Seitenkanten abstumpfen, gehören einem regul. 6-seitigen Prismenmantel an, dessen 6 Kanten der Prismatoid-Höhe parallel sind. Das Granatoeder kann (in 4-facher Weise) aufgefaßt werden als 6-seitiges Prisma, das durch je 3 Flächen oben und unten dachförmig (rhomboedrisch) zugespitzt ist. Sämtliche Keile sind $= 120^{\circ}$.

Beim ikosaedr. Granatoeder sind 6 Gruppen von je 10 Flächen vorhanden, die einem regul. 10-seitigen Prismenmantel angehören. Jeder Keil ist $= 144^{\circ}$.

c. Verbindet man in einem regulären 6-seitigen Prisma einen auf der oberen Verlängerung der Prismenachse beliebig gewählten Punkt mit drei nicht auf einander folgenden Ecken der oberen Grundfläche und legt durch je zwei Verbindungslinien eine Ebene, so schließen diese drei Ebenen zusammen mit dem Prismenmantel und der untern Grundfläche einen Körper ein, der von 3 kongr. Rhomben, 6 kongr. Trapezen und einem regul. Sechseck begrenzt ist. Er hat stets den gleichen Rauminhalt, wie auch der Punkt auf der Achse angenommen werden mag. Die Oberfläche dagegen ist veränderlich; sie ist am kleinsten für diejenige Annahme, welche mit der Granatoederform übereinstimmt. (Form der Bienenzellen.)

---

58. Die 6 Ecken eines Oktaeders seien mit A, die Mittelpunkte seiner 8 Flächen mit f, die Mittelpunkte seiner 12 Kanten mit k bezeichnet, sein Mittelpunkt sei O. Auf den 6 Strahlen OA seien ferner 6 gleiche Strecken $OB > OA$ abgeschnitten. Die 6 Strahlen OA bilden die Kanten von 8 Oktanten. 3 Punkte A oder B, die auf verschiedenen Kanten des nämlichen Oktanten liegen, werden im folgenden diesem Oktanten zugehörig genannt. Ein Punkt, der auf einem Strahl Of oder Ok liegt, wird mit F oder K bezeichnet.

a. Legt man durch je 3 Punkte A, A und B, die dem nämlichen Oktanten zugehören, eine Ebene, so umschließen die 24 auf diese Weise möglichen Ebenen ein Polyeder, das **Pyramidenoktaeder** heißt*). Es kann nämlich aufgefaßt werden als Oktaeder, auf dessen 8 Flächen kongr. regul. Pyramiden aufgesetzt sind. Die Spitzen F dieser Pyramiden liegen auf den Strahlen Of und bilden die Ecken eines Würfels. Die 24 Flächen des Körpers sind kongr. gleichschenklige Dreiecke. An den 8 Würfelecken F befinden sich kongr. regul. 3-kante, an den 6 Oktaederecken A: kongr. (nicht regul.) 8-kante. — Ist OB gleich OA plus der Oktaederkante, so sind auch die 8-kante regulär, der Körper gehört also dann zu den gleichflächig-halbregulären Polyedern. — Wird OB = ∞ gewählt, so fallen je zwei an eine Oktaederkante anstoßende Dreiecksflächen in eine Ebene: das Pyramidenoktaeder geht in das **Granatoeder** über.

b. Legt man durch je 3 Punkte A, B und B, die dem nämlichen Oktanten zugehören, eine Ebene, so umschließen die 24 auf diese Weise möglichen Ebenen ein Polyeder, das **Leuzitoeder** heißt. Die 24 Flächen des Körpers sind kongr. Deltoide (Vierecke, die in Beziehung auf eine Diagonale symmetrisch sind). Der Körper hat 26 Ecken von 3erlei Art, nämlich: 6 Oktaederecken A, 8 Ecken F (Würfelecken), 12 Ecken K (welche die Ecken des in Anh. 54. b genannten Körpers bilden). Die 48 Kanten sind von 2erlei Art; die 24 Kanten AK können als **gebrochene** Oktaederkanten, die 24 Kanten FK als **gebrochene** Würfelkanten bezeichnet werden. An den Ecken A befinden sich kongr. regul. 4-kante, an den Ecken F: kongr. regul. 3-kante, an den Ecken K: kongr. (nicht regul.) 4-kante. — Ist OB gleich OA plus der Oktaederkante, so sind auch die letztgenannten 4-kante regul., das Polyeder ist also gleichflächig-halbregulär. — Ist OB = 2 OA, so bilden die Hauptdiagonalen der Deltoide die Kanten eines Granatoeders, der Körper stumpft alsdann die Kanten des Granatoeders ab. — Wird OB = ∞ gewählt, so geht das Leuzitoeder in den **Würfel** über.

c. Legt man durch je 2 dem nämlichen Oktanten zugehörige Punkte A und B parallel zu seiner dritten Kante eine

*) Um hier und im folgenden rasch eine Vorstellung von dem fraglichen Körper zu gewinnen, betrachte man jedesmal zunächst nur die zu **einem** Oktanten gehörigen Ebenen.

Ebene, so umschließen die 24 auf diese Weise möglichen Ebenen ein Polyeder, das Pyramidenwürfel heißt und aufgefaßt werden kann als Würfel, auf dessen 6 Flächen kongr. regul. Pyramiden aufgesetzt sind. Die 24 Flächen sind kongr. gleichschenklige Dreiecke. Der Körper hat 6 Ecken A und 8 Ecken F (Würfelecken). An den Ecken A befinden sich kongr. regul. 4-kante, an den Ecken F: kongr. (nicht regul.) 6-kante. — Ist $OB = 2\,OA$, so ist der Körper gleichflächig-halbregulär, (Krystallform von Gold und Silber). — Ist $OB = OA$, so geht der Pyramidenwürfel in das Granatoeder über.

Die Flächen des (allgem.) Pyramidenwürfels stumpfen die gebrochenen Oktaederkanten eines Leuzitoeders ab. Umgekehrt stumpfen die Flächen des Leuzitoeders die Pyramidenkanten eines Pyramidenwürfels ab.

59. Auf den 6 Halbdiagonalen OA eines Oktaeders seien 6 gleiche Strecken OB und 6 gleiche Strecken OC abgeschnitten, und zwar sei $OC > OB > OA$. Im übrigen mögen die nämlichen Bezeichnungen gelten wie in 58. — Legt man durch je 3 Punkte A, B, C die dem nämlichen Oktanten zugehören, eine Ebene, so umschließen die 48 auf diese Weise möglichen Ebenen ein Polyeder, das Achtundvierzigflächner oder Diamantoeder heißt. Die 48 Flächen sind kongr. ungleichseitige Dreiecke. Der Körper hat 26 Ecken, und zwar von dem nämlichen Charakter wie das Leuzitoeder (6 Ecken A, 8 Ecken F, 12 Ecken K). Vergleicht man das Diamantoeder mit dem Leuzitoeder, so erscheinen die Deltoidflächen des letzteren längs ihren Hauptdiagonalen gebrochen. — Für den Fall, daß $\frac{1}{OB} + \frac{1}{OC} = \frac{1}{OA}$ ist, liegen je zwei Ecken A mit zwei Ecken F in einer Ebene und bilden die Ecken eines Rhombus; man hat dann die spezielle Form des Pyramidengranatoeders. — Die 72 Kanten des Diamantoeders sind von 3erlei Art: die 24 Kanten AK können als gebrochene Oktaederkanten, die 24 Kanten FK als gebrochene Würfelkanten, die 24 Kanten AF als Pyramidenoktaeder- oder Pyramidenwürfel-Kanten (eventuell als Granatoederkanten) bezeichnet werden. An den Ecken A befinden sich kongr. (nicht regul.) 8-kante, an den Ecken F — 6-kante, an den Ecken K — 4-kante. — Ist OB gleich 3 OA minus der Oktaederkante, und OC gleich

OA plus der doppelten Oktaederkante: so ist der Körper gleichflächig-halbregulär. (Zum Beweis betrachte man die Schnittfigur einer durch zwei Strahlen OA und Of gelegten Ebene. In dieser seien A, F, K drei auf einander folgende Ecken. Macht man kl parallel und gleich-gerichtet mit OA und gleich der halben Oktaederkante, so muß KF durch l gehen, wenn das Vierkant bei K regul. sein soll. Schneiden sich ferner FK und Ak in m, so muß Fm = FA sein, wenn das 6-kant bei F regul. sein soll. Da sich nun Ak und OF in f schneiden, und $fk = \frac{1}{2} fA$ ist, so muß sein: $km = \frac{1}{3} Ak$; folglich, wenn OA und KF sich in B schneiden: $OB - OA = 4\,kl$, u. s. w.)

Anm. Oktaeder, Pyramidenoktaeder, Granatoeder, Leuzitoeder, Würfel, Pyramidenwürfel, Diamantoeder stellen die 7 einzig möglichen (vollständigen) Formen des regulären Krystallsystems vor. Das Diamantoeder ist die allgemeinste Form, von der die 6 übrigen als spezielle Fälle angesehen werden können. — Uebrigens sind krystallographisch nur solche Formen möglich, für welche die Achsenabschnitte OA, OB, OC in rationalem Verhältnis stehen. Es haben daher die in 58. a. u. b und in 59 erwähnten halbregulären Formen nur geometrisches Interesse.

60. a. Unterdrückt man bei einem Pyramidenwürfel die Hälfte der Flächen und läßt die andere Hälfte bis zu ihrem gegenseitigen Schnitt sich ausdehnen, so zwar, daß immer drei solche Flächen unterdrückt werden, die mit einer bleibenden Fläche eine Kante gemein haben, und umgekehrt: so entsteht (als Halbflächner des Pyramidenwürfels) ein von 12 Fünfecken begrenzter Körper, welcher Pyritoeder heißt (Krystallform des Schwefelkies mit OB = 2 OA). Ist im ursprüngl. Pyramidenwürfel $OB = \frac{1}{2} OA (1+\sqrt{5})$, so ist der Körper identisch mit dem regul. Dodekaeder. Andernfalls sind die 12 Fünfecke nicht regulär, aber symmetrisch gestaltet. Der allgem. Körper kann (wie das regul. Dodekaeder, vgl. III. Anh. 52. b) aufgefaßt werden als Würfel, auf dessen 6 Flächen kongr. Walmdächer aufsitzen; doch haben deren Firstkanten eine andere Länge als die übrigen unter sich gleichen Kanten. — Läßt man die seither unterdrückten Flächen des Pyramidenwürfels bis zu ihrem gegenseitigen Schnitt sich ausdehnen, so entsteht ein zweites, dem ersten kongr. Pyritoeder, welches das erste so durchdringt, daß je zwei

Firstkanten sich rechtwinklig durchschneiden und gegenseitig halbieren. („Zwilling des eisernen Kreuzes.")

b. Verfährt man beim Diamantoeder ebenso wie in a), so erhält man als Halbflächner einen von 24 (unsymmetr.) Fünfecken begrenzten Körper, welcher *Gyroeder* heißt. Geht man zunächst vom Pyramidengranatoeder aus, so verhält sich dessen Halbflächner zum Granatoeder ähnlich wie das Pyritoeder zum Würfel: er kann aufgefaßt werden als Granatoeder, auf dessen 12 Flächen rhombische (schief-symmetrisch gestaltete) Walmdächer aufsitzen. Beim allgemeinen Gyroeder erscheint die Grundfläche jedes Walmdaches längs einer Diagonale gebrochen. Der Körper hat 38 Ecken; die 6 Ecken A und 8 Ecken F des Diamantoeders sind geblieben, dazu kommen als neue Ecken (anstatt der 12 Ecken K) die 24 Endpunkte E der Firstkanten. An den Ecken A befinden sich regul. 4-kante, an F: regul. 3-kante, an E: nicht regul. 3-kante. Die 60 Kanten haben 3erlei Längen*).

61. a. Setzt man zwei kongruente regul. Pyramiden so aneinander, daß die Grundflächen sich decken, so heißt der entstehende Körper eine *Doppelpyramide*. Sind die Keile an den Grundkanten der Pyramiden halb so groß als die Keile an den Seitenkanten, so ist der Körper gleichflächig-halbregulär.

b. Sind die zwei Pyramiden 2n-seitig, und wendet man auf die Doppelpyramide dasselbe Verfahren an wie in 60, so erhält man als Halbflächner ein von 2n kongr. Deltoiden umschlossenes Polyeder, welches *Trapezoeder* heißt. Dasselbe entsteht auch, wenn man in einem regul. 2n-seitigen Prismatoid die Grundflächen unterdrückt und die Seitenflächen sich pyramidal erweitern läßt. — Ist in den zwei ursprüngl. Pyramiden die Grundkante = a, der Halbmesser des der Grundfläche umbeschriebenen Kreises = R, der Halbmesser der den zwei Pyramiden-Mänteln aus dem Mittelpunkt der Grundfläche einbeschriebenen Berührungskugel

---

*) Es giebt auch eine gleichflächig-halbreguläre Form des Gyroeders. Sie entsteht, wenn in dem ursprüngl. Diamantoeder zwischen $OA = a$, $OB = b$, $OC = c$ die zwei Beziehungen gelten:

$$b^3 - ab^2 - a^2b - a^3 = 0, \qquad c^3 - 3ac^2 - a^2c - a^3 = 0.$$

Doch bietet die Ableitung dieser Beziehungen auf *elementarem* Wege Schwierigkeiten.

$= r$, und besteht die Beziehung: $r = \frac{R^2}{\sqrt{R^2 + a^2}}$, so ist das Trapezoeder gleichflächig-halbregulär. (Man drücke aus, daß die Berührungspunkte der Kugel mit drei an eine Fläche anstoßenden Flächen der Doppelpyramide die Ecken eines gleichseitigen Dreiecks bilden müssen. — Das 10-seitige halbregul. Trapezoeder ergiebt sich leicht aus dem regul. Dodekaeder.)

62. a. Um jedes gleich e c k i g - halbregul. Polyeder und in jedes gleich f l ä c h i g - halbregul. Polyeder läßt sich eine Kugel beschreiben. (Man betrachte, wie in III. 5, die je aus einer Fläche und deren Nachbarflächen — bezw. die je aus einer Ecke und deren Nachbarecken — bestehenden Gebilde.)

b. Ist einem gleich e c k i g - halbregul. Polyeder eine Kugel umbeschrieben, und legt man an sie in sämtlichen Ecken die Berührungsebenen, so umschließen diese ein gleich f l ä c h i g - halbregul. Polyeder, das dem ursprünglichen z u g e o r d n e t oder r e z i p r o k heißt. Hat das ursprüngl. Polyeder ν regul. n-ecke, ν' n'-ecke, ν'' n''-ecke und π entspr.-gleiche p-kante, so hat das reziproke Polyeder ν regul. n-kante, ν' n'-kante, ν'' n''-kante und π kongr. p-ecke. — Umgekehrt: Ist einem gleich f l ä c h i g - halbregul. Polyeder eine Kugel einbeschrieben, so bilden die Berührungspunkte die Ecken des ihm reziproken gleich e c k i g - halbregul. Polyeders. — Zu jedem halbregul. Polyeder der einen Gattung ist daher ein bestimmtes ihm reziprokes der andern Gattung vorhanden; jede Gattung kann aus der andern abgeleitet werden.

c. Die entsprechend - gleichen Vielkante eines gleich e c k i g - halbregul. Polyeders sind solche, um welche sich Kegelflächen beschreiben lassen. — Die kongr. Vielecke eines gleich f l ä c h i g - halbregul. Polyeders sind solche, in welche sich Kreise beschreiben lassen.

63. a. Reziprok zu den in 61 genannten gleichflächig-halbregul. Doppelpyramiden und Trapezoedern sind die regul. Prismen mit quadratischen Seitenflächen und die regul. Prismatoide mit regul. Dreiecken als Seitenflächen. Außer diesen Körpern, deren Anzahl unbegrenzt ist, giebt es (und k a n n nur geben) von jeder Gattung der halbregul. Polyeder noch 13 Individuen. Ein Teil von ihnen ist im vorangehenden aufgeführt, die übrigen können auf ähnliche Weise erzeugt werden wie jene. Man kann

nämlich zu Pyramidenoktaeder und Pyramidenwürfel auch für die übrigen regul. Polyeder Analoga konstruieren. Ferner kann man die in 58, 59 und 60. b für das Oktaeder besprochenen Konstruktionen auch auf das Ikosaeder (Ecken A, Mittelpunkt O) anwenden, indem man mit Bez. auf die 20 von den Strahlen OA gebildeten Dreikante genau ebenso verfährt, wie beim Oktaeder mit Bez. auf die 8 Oktanten verfahren wurde. Die 13 gleichflächig-halbregul. Polyeder sind hiernach folgende: Pyramiden-Tetraeder, -Würfel, -Oktaeder, -Dodekaeder, -Ikosaeder; oktaedrisches Granatoeder, -Leuzitoeder, -Diamantoeder, -Gyroeder; ikosaedrisches Granatoeder, -Leuzitoeder, -Diamantoeder, -Gyroeder.

b. Hiemit sind (nach 62. b) zugleich auch die 13 möglichen gleicheckig-halbregul. Formen gefunden. Sie lassen sich übrigens auch direkt aus den regul. Polyedern durch regelmäßiges Abstumpfen ihrer Ecken und Kanten erzeugen, wozu in III. Anh. Aufg. 18. b die Anleitung gegeben wird. (Von ihnen auszugehen und aus ihnen die gleichflächig-halbregul. Formen nach 62. b abzuleiten, ist eigentlich der leichtere Weg. Doch bieten die letzteren das größere Interesse.)

II. Konstruktions-Aufgaben.

1—21: Konstruktionen von Polyedern und Polyedernetzen.

1. Von einer Pyramide sind die Grundfläche und zwei Seitenflächen gegeben. Es sollen die übrigen Seitenflächen, ferner die Höhe und sämtliche Keilwinkel durch Konstruktion in einer Ebene gefunden werden. (Die Seitenflächen findet man mit Hilfe von III. Anh. 32. a, die Höhe und die Keilwinkel an den Grundkanten mittels rechtw. Dreiecke, die Keilwinkel an den Seitenkanten wie W. α in II. Aufg. 6.)

2. a. Von einem Prisma sind geg: die Grundfläche und α) zwei an einander stoßende — β) zwei nicht an einander stoßende Seitenflächen. Es sollen die übrigen Seitenflächen, ferner die Höhe und sämtliche Keilwinkel durch Konstruktion in einer