Lehrbuch der Stereometrie

Hauck, Guido

Tübingen, 1893

1 - 5: Allgemeine Polyedersätze

urn:nbn:de:hbz:466:1-77777

D. Anhang
von Lehrsätzen und Aufgaben.

I. Lehrsätze.

1—5: Allgemeine Polyedersätze.

1. a. Die 3=fache Flächenzahl oder Eckenzahl eines Polyeders liegt zwischen der 2=fachen Kantenzahl und der um 6 vermehrten einfachen Kantenzahl:

$$2K \geqq 3F \geqq K + 6.$$
$$2K \geqq 3E \geqq K + 6.$$

(Da jede Fläche mindestens 3=seitig und jede Ecke mindestens 3=kantig ist, so ist W oder $2K \geqq 3F$ und $\geqq 3E$. Das übrige durch Kombinierung dieser Ungleichungen mit III. 1.)

b. Die 2=fache Flächenzahl eines Polyeders liegt zwischen der um 8 verminderten 4=fachen Eckenzahl und der um 4 vermehrten einfachen Eckenzahl. — Die 2=fache Eckenzahl eines Polyeders liegt zwischen der um 8 verminderten 4=fachen Flächenzahl und der um 4 vermehrten einfachen Flächenzahl:

$$4E - 8 \geqq 2F \geqq E + 4.$$
$$4F - 8 \geqq 2E \geqq F + 4.$$

2. a. Es giebt kein Polyeder, in dem alle Flächen mehr als 5=seitig sind, oder in dem alle Ecken mehr als 5=kantig sind. (III. Anh. 1. a.)

b. Es giebt kein Polyeder mit 7 Kanten. (III. Anh. 1. a.)

† 3. Bildet man von einem Polyeder ein ebenes Netz und fügt dieses wieder zu einer geschlossenen Polyederoberfläche so zusammen, daß je zwei Randlinien des Netzes, die vorher zu einer Kante vereinigt waren, wieder zu einer Kante vereinigt werden, daß aber die vorherige Außenseite der Polyederoberfläche nunmehr zur Innenseite wird: so ist das neu entstandene Polyeder zu dem ursprünglichen symmetrisch. Aus jedem ebenen Netz lassen sich also zwei symmetrische Polyederformen herstellen.

4. a. Zieht man von sämtlichen Ecken eines Polyeders in derselben Richtung parallele und gleiche Strecken, so bestimmen

deren Endpunkte die Ecken eines zweiten Polyeders, das mit dem ersten kongruent ist.

b. Zieht man von den Ecken eines Polyeders nach einem Punkte Strecken und verlängert jede über den Punkt um sich selbst, so bestimmen die Endpunkte der Verlängerungen die Ecken eines zweiten Polyeders, das mit dem ersten symmetrisch ist.

c. Fällt man von den Ecken eines Polyeders die Senkrechten auf eine gerade Linie und verlängert jede über ihren Fußpunkt um sich selbst, so bestimmen die Endpunkte der Verlängerungen die Ecken eines zweiten Polyeders, das mit dem ersten kongruent ist.

† 5. a. Zieht man von einem Punkt S nach den Ecken eines Polyeders Strecken und teilt diese sämtlich in dem nämlichen Verhältnis, so bestimmen die Teilpunkte die Ecken eines zweiten Polyeders, das mit dem ersten ähnlich ist, und zwar gleichstimmig ähnlich oder ungleichstimmig ähnlich, je nachdem die Teilpunkte auf derselben Seite vom Punkt S angenommen werden, auf der das ursprüngl. Polyeder liegt, oder auf der entgegengesetzten Seite. Zwei entsprechende Kanten der zwei Polyeder verhalten sich wie die Entfernungen zweier entsprechenden Ecken vom Punkt S. (Vgl. II. Anh. 18.)

† b. Der Satz: III. 10. Zus. 2 gilt auch für ähnliche und ähnlich liegende Polyeder. Je nachdem die zwei Polyeder gleichstimmig ähnlich oder ungleichstimmig ähnlich sind, sind bei der ähnlichen Lage je zwei entsprechende Kanten gleich-gerichtet oder entgegengesetzt-gerichtet, und ist der Ähnlichkeitspunkt ein äußerer oder ein innerer.

c. Drei ähnliche und ähnlich liegende Vielecke oder Polyeder haben zusammen drei Ähnlichkeitspunkte (und zwar entweder drei äußere oder einen äußeren und zwei innere), welche in gerader Linie liegen (äußere oder innere Ähnlichkeitsachse). (Vgl. II. Anh. 19. — Man beweise, daß die drei Ähnlichkeitspunkte in zwei Ebenen, und folglich in deren Schnittlinie liegen müssen.)

6—13: Prisma.

6. a. Der Rauminhalt eines Würfels, dessen Kante die Summe zweier Strecken a und b ist, ist gleich dem Würfel aus