Lehrbuch der Stereometrie

Hauck, Guido

Tübingen, 1893

6 - 13: Prisma

urn:nbn:de:hbz:466:1-77777

deren Endpunkte die Ecken eines zweiten Polyeders, das mit dem ersten kongruent ist.

b. Zieht man von den Ecken eines Polyeders nach einem Punkte Strecken und verlängert jede über den Punkt um sich selbst, so bestimmen die Endpunkte der Verlängerungen die Ecken eines zweiten Polyeders, das mit dem ersten symmetrisch ist.

c. Fällt man von den Ecken eines Polyeders die Senkrechten auf eine gerade Linie und verlängert jede über ihren Fußpunkt um sich selbst, so bestimmen die Endpunkte der Verlängerungen die Ecken eines zweiten Polyeders, das mit dem ersten kongruent ist.

† 5. a. Zieht man von einem Punkt S nach den Ecken eines Polyeders Strecken und teilt diese sämtlich in dem nämlichen Verhältnis, so bestimmen die Teilpunkte die Ecken eines zweiten Polyeders, das mit dem ersten ähnlich ist, und zwar gleichstimmig ähnlich oder ungleichstimmig ähnlich, je nachdem die Teilpunkte auf derselben Seite vom Punkt S angenommen werden, auf der das ursprüngl. Polyeder liegt, oder auf der entgegengesetzten Seite. Zwei entsprechende Kanten der zwei Polyeder verhalten sich wie die Entfernungen zweier entsprechenden Ecken vom Punkt S. (Vgl. II. Anh. 18.)

† b. Der Satz: III. 10. Zus. 2 gilt auch für ähnliche und ähnlich liegende Polyeder. Je nachdem die zwei Polyeder gleichstimmig ähnlich oder ungleichstimmig ähnlich sind, sind bei der ähnlichen Lage je zwei entsprechende Kanten gleich-gerichtet oder entgegengesetzt-gerichtet, und ist der Ähnlichkeitspunkt ein äußerer oder ein innerer.

c. Drei ähnliche und ähnlich liegende Vielecke oder Polyeder haben zusammen drei Ähnlichkeitspunkte (und zwar entweder drei äußere oder einen äußeren und zwei innere), welche in gerader Linie liegen (äußere oder innere Ähnlichkeitsachse). (Vgl. II. Anh. 19. — Man beweise, daß die drei Ähnlichkeitspunkte in zwei Ebenen, und folglich in deren Schnittlinie liegen müssen.)

6—13: Prisma.

6. a. Der Rauminhalt eines Würfels, dessen Kante die Summe zweier Strecken a und b ist, ist gleich dem Würfel aus

der Kante a, plus dem dreifachen Quader aus a, a und b, plus dem dreifachen Quader aus a, b und b, plus dem Würfel aus b.

b. Analoger Satz für einen Würfel, dessen Kante die Differenz zweier Strecken ist.

7. a. In jedem Quader ist das Quadrat einer Diagonale gleich der Summe der Quadrate dreier von einer Ecke ausgehenden Kanten.

b. Projiziert man eine Strecke auf die drei Kanten eines Oktanten (indem man von den Endpunkten der Strecke die Senkrechten auf die Kanten fällt), so ist das Quadrat der Strecke gleich der Summe der Quadrate ihrer drei Projektionen.

8. a. Die Summe der Quadrate der vier Diagonalen eines Parallelflachs ist gleich der Summe der Quadrate der zwölf Kanten.

b. Die Summe der Quadrate der sechs Diagonalflächen eines Parallelflachs ist gleich der doppelten Summe der Quadrate der sechs Seitenflächen. (Man stelle zuerst eine Beziehung auf zwischen 2 Diagonalflächen und 4 Seitenflächen, die zwischen den nämlichen vier Parallelkanten liegen.)

9. a. Jede durch den Mittelpunkt eines Parallelflachs oder den Mittelpunkt der Achse eines regul. Prismas von gerader Seitenzahl (Cylinders) gezogene und von der Oberfläche begrenzte Strecke wird in jenem Mittelpunkt halbiert.

b. Jede durch den Mittelpunkt gelegte Schnittebene teilt den Körper in zwei symmetrische Teile.

c. Schneidet man einen Cylinder durch zwei beliebige Ebenen (die sich selbst nicht innerhalb des Cylinders schneiden), so hat das zwischen ihnen enthaltene Cylinderstück gleichen Inhalt und gleiche Mantelfläche mit einer Zone des Cylinders, die das Stück der Achse zwischen den zwei Schnittebenen zur Höhe hat. (Vgl. auch III. Anh. 12. c.)

10. a. Jedem Quader läßt sich eine Kugel um beschreiben.

b. Jedem Rhomboeder*) läßt sich eine Kugel ein beschreiben.

11. a. Jedes Rhomboeder kann in ein reguläres sechsseitiges Prismatoid und zwei kongruente dreiseitige Pyramiden, die

*) Unter „Rhomboeder" ist hier und im folgenden stets ein Rhomboeder im engeren Sinne (vgl. III. Einl. 5. b) verstanden.

mit dem Prismatoid die Grundflächen gemein haben, zerlegt werden. Die Seitenflächen des Prismatoids und der Pyramiden sind kongruent, die Höhen sind gleich und fallen in die Hauptdiagonale des Rhomboeders. Das Prismatoid ist $= \frac{2}{3}$, jede Pyramide $= \frac{1}{6}$ des Rhomboeders.

b. Die Mitten von sechs Kanten eines Würfels, die nicht durch die nämlichen zwei gegenüberliegenden Ecken gehen, liegen in einer Ebene und bilden die Ecken eines regulären Sechsecks.

12. a. Schneidet man ein Prisma durch eine beliebige Ebene, so liegt der Flächen-Schwerpunkt der Schnittfigur auf der Verbindungslinie der Schwerpunkte der zwei Grundflächen. (Man bew. den Satz zuerst für ein dreiseitiges Prisma, zerlege ein mehrseitiges Prisma in lauter dreiseitige, und konstr. die Schwerpunkte der Flächen wie im Bew. von III. 20. a. — Die Teildreiecke der Schnittfigur sind nach I. Anh. 31 denen der Grundflächen proportioniert.)

b. Der Schwerpunkt einer ebenen Figur projiziert sich als Schwerpunkt der Projektionsfigur.

c. Der Inhalt eines schiefabgeschnittenen mehrseitigen Prismas ist gleich dem Inhalt eines senkrechten Prismas, das den gleichen Querschnitt, und die Strecke zwischen den Schwerpunkten der Endpolygone zur Höhe hat. (Man berechne den Inhalt mittels III. 16. Zus. 2, und die Strecke zwischen den zwei Schwerpunkten mittels des S. 164 erwähnten Trapez-Satzes.)

13. Ein Prisma wird von zwei Ebenen, deren Medianebene senkrecht zu den Seitenkanten ist, nach kongruenten Vielecken geschnitten (Wechselschnitte).

14—29: Vierflach. Schwerpunkt.

14. Die Summe der sechs Keile eines Vierflachs liegt zwischen 4 R und 6 R. (Die Summe der sphär. Exzesse der Dreikante an den vier Ecken muß > 0 und < 4 R sein. Zum Bew. bringe man die Spitzen der vier Dreikante durch Parallelverschiebung in den Mittelpunkt einer Kugel.)

15. Die Mittellotebenen der 6 Kanten eines Vierflachs schneiden sich zu je dreien nach 4 Geraden (den Mittelloten der Flächen) und gehen alle 6 durch einen Punkt, welcher