Lehrbuch der Stereometrie

Hauck, Guido

Tübingen, 1893

14 - 29: Vierflach. Schwerpunkt

urn:nbn:de:hbz:466:1-77777

mit dem Prismatoid die Grundflächen gemein haben, zerlegt werden. Die Seitenflächen des Prismatoids und der Pyramiden sind kongruent, die Höhen sind gleich und fallen in die Hauptdiagonale des Rhomboeders. Das Prismatoid ist $= \frac{2}{3}$, jede Pyramide $= \frac{1}{6}$ des Rhomboeders.

b. Die Mitten von sechs Kanten eines Würfels, die nicht durch die nämlichen zwei gegenüberliegenden Ecken gehen, liegen in einer Ebene und bilden die Ecken eines regulären Sechsecks.

12. a. Schneidet man ein Prisma durch eine beliebige Ebene, so liegt der Flächen-Schwerpunkt der Schnittfigur auf der Verbindungslinie der Schwerpunkte der zwei Grundflächen. (Man bew. den Satz zuerst für ein dreiseitiges Prisma, zerlege ein mehrseitiges Prisma in lauter dreiseitige, und konstr. die Schwerpunkte der Flächen wie im Bew. von III. 20. a. — Die Teildreiecke der Schnittfigur sind nach I. Anh. 31 denen der Grundflächen proportioniert.)

b. Der Schwerpunkt einer ebenen Figur projiziert sich als Schwerpunkt der Projektionsfigur.

c. Der Inhalt eines schiefabgeschnittenen mehrseitigen Prismas ist gleich dem Inhalt eines senkrechten Prismas, das den gleichen Querschnitt, und die Strecke zwischen den Schwerpunkten der Endpolygone zur Höhe hat. (Man berechne den Inhalt mittels III. 16. Zus. 2, und die Strecke zwischen den zwei Schwerpunkten mittels des S. 164 erwähnten Trapez-Satzes.)

13. Ein Prisma wird von zwei Ebenen, deren Medianebene senkrecht zu den Seitenkanten ist, nach kongruenten Vielecken geschnitten (Wechselschnitte).

14—29: Vierflach. Schwerpunkt.

14. Die Summe der sechs Keile eines Vierflachs liegt zwischen 4 R und 6 R. (Die Summe der sphär. Exzesse der Dreikante an den vier Ecken muß > 0 und < 4 R sein. Zum Bew. bringe man die Spitzen der vier Dreikante durch Parallelverschiebung in den Mittelpunkt einer Kugel.)

15. Die Mittellotebenen der 6 Kanten eines Vierflachs schneiden sich zu je dreien nach 4 Geraden (den Mittelloten der Flächen) und gehen alle 6 durch einen Punkt, welcher

der Mittelpunkt der dem Vierflach umbeschriebenen Kugel ist.

16. a. Die inneren Medianebenen der sechs Kanten eines Vierflachs schneiden sich zu je dreien nach vier Geraden (den 4 inneren Medianen) und gehen alle sechs durch einen Punkt, welcher der Mittelpunkt der dem Vierflach einbeschriebenen Kugel ist. (II. Anh. 36.)

b. Die äußeren Medianebenen dreier in einer Fläche liegenden Kanten und die inneren Medianebenen der drei übrigen Kanten schneiden sich zu je dreien nach vier Geraden und gehen alle sechs durch einen Punkt, welcher der Mittelpunkt der dem Vierflach an jene Fläche anbeschriebenen Kugel ist. Von den vier Geraden ist eine eine innere Mediane, die drei andern sind äußere Medianen. Es giebt 12 äußere Medianen und 4 anbeschriebene Kugeln.

c. Die inneren Medianebenen zweier gegenüberliegenden Kanten und die äußeren Medianebenen der vier übrigen Kanten schneiden sich zu je dreien nach vier Geraden (äußeren Medianen) und gehen alle sechs durch einen Punkt. Dieser ist der Mittelpunkt einer Berührungskugel, die dem zweieckigen Scheitelkeilraum des Vierflachs an einer der zwei gegenüberliegenden Kanten einbeschrieben ist. Es giebt im allgem. 3 solcher Kugeln.

d. Von den 4 inneren und 12 äußeren Medianen eines Vierflachs schneiden sich also a) die 4 inneren —, b) 4mal 3 äußere und 1e innere —, c) 3mal 4 äußere in je einem Punkt.

(Eine analoge Lage wie die 8 Kugelmittelpunkte haben die 8 Punkte in I. Anh. Aufg. 10. b.)

17. a. Jede (innere oder äußere) Medianebene einer Kante eines Vierflachs teilt die gegenüberliegende Kante in zwei Teile, die sich verhalten wie die der ersten Kante anliegenden Flächen. (III. 12. Zus. 1 und I. Anh. 20.)

b. Jede (innere oder äußere) Mediane eines Vierflachs schneidet die gegenüberliegende Fläche in einem Punkte, dessen Verbindungslinien mit den drei Ecken der Fläche diese in drei Teile teilen, die sich verhalten wie die drei anliegenden Flächen.

18. a. Läßt sich in einem Vierflach eine Kugel beschreiben, die sämtliche sechs Kanten innerhalb der Kanten berührt, so sind die drei Summen je zweier Gegenkanten gleich.

b. Sind die drei Summen je zweier Gegenkanten eines Vierflachs gleich, so schneiden sich die Senkrechten, die auf den vier Flächen in den Mittelpunkten ihrer einbeschriebenen Kreise errichtet werden, in einem Punkt, welcher der Mittelpunkt der in diesem Falle vorhandenen kantenberührenden Innenkugel ist. Außerdem gibt es sechs Kugeln, von denen jede eine Kante und die Verlängerungen der vier anliegenden Kanten berührt.

19. a. Ein Vierflach wird von einer zu zwei Gegenkanten parallelen Ebene nach einem Parallelogramm geschnitten, das die von den zwei Kanten gebildeten Winkel enthält. Insbesondere bilden die Mittelpunkte der vier geschnittenen Kanten die Ecken eines Parallelogramms, dessen Seiten die Hälften der zwei Gegenkanten sind. Jedes Vierflach hat 3 solche Mittelparallelogramme. (Vgl. I. Anh. 14 und 13. a.)

b. Die drei Mitteltransversalen (d. i. die Verbindungsstrecken der Mitten zweier Gegenkanten) eines Vierflachs schneiden sich in einem Punkt und halbieren sich in demselben gegenseitig. (Sie bilden die Diagonalen der drei Mittelparallelogramme.) — Die Mittelpunkte aller zu zwei Gegenkanten parallelen Schnittparallelogramme liegen auf der zugehörigen Mitteltransversale.

c. Zieht man in jeder der vier Flächen eines Vierflachs die drei Verbindungsstrecken der Kantenmitten, so bilden diese 12 Strecken die Kanten eines dem Vierflach einbeschriebenen Achtflachs (Oktaeders im weiteren Sinn), das die drei Mittelparallelogramme zu Diagonalflächen und die drei Mitteltransversalen zu Diagonalen hat. Es kann als 6-seitiges Prismatoid, und zwar mit jeder seiner acht Flächen als Grundfläche, betrachtet werden. — Das Vierflach bildet den Halbflächner des Achtflachs; es kann nämlich aus dem Achtflach entstanden gedacht werden dadurch, daß von dessen 8 Flächen 4 nicht in einer Kante zusammenstoßende unterdrückt, und die 4 übrigen (die den vier ersten einzeln parallel sind) erweitert werden, bis sie sich schneiden.

d. Jedem Vierflach kann ein Parallelflach umbeschrieben werden, indem durch jede Kante eine Ebene parallel zu ihrer Gegenkante gelegt wird. Die Kanten des Parallelflachs sind gleich und parallel den Mitteltransversalen des Vierflachs. —

Umgekehrt können jedem Parallelflach zwei Vierflache einbeschrieben werden, deren Kanten die Diagonalen der Flächen des Parallelflachs sind. Sie haben die Mitteltransversalen und die Mittelparallelogramme gemein und stellen die 2 Halbflächner des ihren gemeinschaftlichen Kern bildenden einbeschriebenen Achtflachs vor, dessen Ecken die Mittelpunkte der Flächen des Parallelflachs bilden, und das dem Parallelflach zugeordnet heißt. Die zwei Vierflache, von denen jedes das Gegenvierflach des andern heißt, sind entsprechend-gleich, und zwar symmetrisch; sie liegen ähnlich und haben den Schnittpunkt der Mitteltransversalen zum Ähnlichkeitspunkt (III. Anh. 4. b). Jedes ist gleich dem dritten Teil des Parallelflachs.

e. Legt man durch die Mitte jeder Kante eines Vierflachs eine Ebene senkrecht zu ihrer Gegenkante, so schneiden sich diese sechs Ebenen in einem Punkt, welcher symmetrisch liegt mit dem Mittelpunkt der umbeschriebenen Kugel in Beziehung auf den Schnittpunkt der Mitteltransversalen. (Satz von Monge. — Bew. mit Hilfe des Gegenvierflachs.)

20. Die Schwerpunkte aller Parallelschnitte einer Pyramide liegen in einer Geraden, welche die Spitze mit dem Schwerpunkt der Grundfläche verbindet und die Schwerlinie der Pyramide heißt.

21. a. Die sechs Schwerebenen eines Vierflachs (d. h. die durch je eine Kante und die Mitte der Gegenkante gelegten Ebenen) schneiden sich zu je dreien nach den vier Schwerlinien des Vierflachs und gehen alle sechs durch einen Punkt, welcher der Schwerpunkt des Vierflachs heißt. Die vier Schwerlinien teilen sich im Schwerpunkt gegenseitig im Verhältnis 3 zu 1, so daß die größeren Abschnitte an die Ecken stoßen. — Die vier Pyramiden, in die das Vierflach vom Schwerpunkt aus zerlegt werden kann, haben gleichen Inhalt.

b. Der Schwerpunkt ist identisch mit dem Schnittpunkt der drei Mitteltransversalen, und also identisch mit dem Mittelpunkt des einbeschriebenen Achtflachs und des umbeschriebenen Parallelflachs.

Anm. Besteht ein Körper aus zwei Teilen, deren Rauminhalte $= k_1$ und k_2, und deren Schwerpunkte s_1 und s_2 sind, so erhält man den Schwerpunkt S des ganzen Körpers, wenn man $s_1 s_2$ im Verh. $s_1 S : S s_2 = k_2 : k_1$ teilt.

† 22. Teilt man die Schwerlinie (III. Anh. 20) einer mehrseitigen Pyramide im Verhältnis 3 zu 1 so, daß der größere Abschnitt an die Spitze stößt, so ist der Teilpunkt der Schwerpunkt der Pyramide. (Satz von Lionardo da Vinci. — Man zerlege die Pyramide durch Diagonalschnitte in Vierflache.)

Mittels dieses Satzes kann man gemäß der vorstehenden Anm. von jedem Polyeder den Schwerpunkt konstruieren, indem man es in Pyramiden zerlegt (III. Einl. 9).

23. a. Die Summe der Quadrate zweier Gegenkanten eines Vierflachs vermehrt um das 4-fache Quadrat der zugehörigen Mitteltransversale ist gleich der Summe der Quadrate der vier andern Kanten.

b. Die Summe der Quadrate der drei Mitteltransversalen ist gleich $\frac{1}{4}$ der Quadratsumme der sechs Kanten.

24. a. Das Quadrat einer Schwerlinie eines Vierflachs ist gleich $\frac{1}{3}$ der Quadratsumme der von der nämlichen Ecke ausgehenden drei Kanten weniger $\frac{1}{9}$ der Quadratsumme der drei übrigen Kanten. (Ist in einem $\triangle ABC$ die S. BC in M im Verh. $BM : MC = 1:2$ geteilt, so ist: $2\,AB^2 + AC^2 = 3\,AM^2 + 6\,BM^2$.)

b. Die 9-fache Quadratsumme der vier Schwerlinien ist gleich der 4-fachen Quadratsumme der sechs Kanten.

c. Die Quadratsumme der Entfernungen des Schwerpunktes von den vier Ecken ist gleich der Quadratsumme der drei Mitteltransversalen. (III. Anh. 23. b.)

25. a. Der Inhalt eines Vierflachs ist doppelt so groß als der Inhalt einer Pyramide, die ein Mittelparallelogramm zur Grundfläche und die kürzeste Entfernung der zwei ihm parallelen Gegenkanten zur Höhe hat. (III. 16.)

b. Jede durch eine Mitteltransversale eines Vierflachs gelegte Schnittebene teilt das Vierflach in zwei gleiche Teile. (Satz von Bobillier. — Die zwei Pyramiden, die zwischen der Schnittebene und einem durch die Mitteltransversale gehenden Mittelparallelogramm liegen, sind gleich.)

26. a. Das rhombische Vierflach oder Sphenoid. Haben in einem Vierflach je zwei gegenüberliegende Kanten gleiche Länge, so sind alle vier Flächen kongruent, und die Dreikante an allen vier Ecken kongruent; das Vierflach ist also gleicheckig-

gleichflächig und heißt Sphenoid. Das Netz eines solchen erhält man, wenn man durch die Ecken eines beliebigen, als Seitenfläche gewählten Dreiecks die Parallelen zu den Gegenseiten zieht. Im Sphenoid sind die drei Mittelparallelogramme Rhomben, (daher auch die Bezeichnung: rhombisches Vierflach). Die drei Mitteltransversalen stehen auf einander senkrecht. Das einbeschriebene Achtflach (III. Anh. 19. c) hat lauter kongruente Flächen. Das umbeschriebene Parallelflach (III. Anh. 19. d) ist ein Quader.

b. Das symmetrische Sphenoid hat kongr. gleichschenklige Dreiecke zu Flächen. Es hat also 4 gleiche Kanten (Gegenkanten-Paare); die zwei andern Kanten sind zu einander rechtwinklig. Die Dreikante sind gleichschenklig. Ein Mittelparallelogramm ist quadratisch, die zwei andern sind kongruent. Zwei Mitteltransversalen sind gleich.

27. a. Das Oblong-Vierflach. Bilden in einem Vierflach zwei Kanten mit ihren Gegenkanten rechte Winkel, so ist dies auch für das dritte Kantenpaar der Fall. Die drei Mittelparallelogramme sind Rechtecke, (daher die Bez.: Oblong-Vierflach). Die drei Mitteltransversalen sind gleich. Die Summe der Quadrate je zweier Gegenkanten ist konstant. Das einbeschriebene Achtflach besitzt eine umbeschriebene Kugel. Das umbeschriebene Parallelflach ist ein Rhomboeder (im weiteren Sinn).

b. Im Oblong-Vierflach schneiden sich die vier Höhen in einem Punkt (was beim allgemeinen Vierflach nicht der Fall ist). Durch diesen Punkt gehen auch die kürzesten Entfernungen der drei Paare von Gegenkanten.

c. Im Oblong-Vierflach liegen die Fußpunkte der vier Höhen, die Schwerpunkte der vier Seitenflächen, sowie die Punkte, welche die oberen Abschnitte der vier Höhen vom Höhenschnittpunkt aus im Verhältnis 1 : 2 teilen, auf einer Kugelfläche (Feuerbach'sche Kugel), deren Halbmesser gleich $\frac{1}{3}$ des Halbmessers der umbeschriebenen Kugel ist, und deren Mittelpunkt die Verbindungsstrecke von Höhenschnittpunkt und Mittelpunkt der umbeschriebenen Kugel im Verhältnis 1:2 teilt. (Satz von H. Vogt. — Die Teilpunkte zweier Höhenabschnitte und die Schwerpunkte der zugehörigen zwei Seitenflächen bilden die Ecken eines Rechtecks, dessen Mittelpunkt der Mittelpunkt der Kugel ist. Das durch die vier Teilpunkte der Höhenabschnitte bestimmte Vierflach ist mit dem Haupt-Vierflach ähnlich und ähnlich liegend.)

28. In jedem Vierflach ist der reziproke Wert des Halbmessers der einbeschriebenen Kugel gleich der Summe der reziproken Werte der vier Höhen und gleich der halben Summe der reziproken Werte der vier Halbmesser der anbeschriebenen Kugeln. (Sind a_1, a_2, a_3, a_4 die vier Seitenflächen, h_1, h_2, h_3, h_4 die zugehörigen Höhen, r_1, r_2, r_3, r_4 die Halbmesser der anbeschriebenen Kugeln, r der Halbm. der einbeschriebenen Kugel, so ist:
$$\frac{a_1}{\frac{1}{h_1}}=\frac{a_2}{\frac{1}{h_2}}=\frac{a_3}{\frac{1}{h_3}}=\frac{a_4}{\frac{1}{h_4}}=\frac{a_1+a_2+a_3+a_4}{\frac{1}{r}}=\frac{a_1+a_2+a_3-a_4}{\frac{1}{r_4}} \text{ u.s.w.)}$$

29. a. Zieht man in einem Vierflach von den Ecken A, B, C, D nach den gegenüberliegenden Flächen vier Strecken AA', BB', CC', DD', die sich in einem Punkte O schneiden, so ist:
$$\frac{OA'}{AA'}+\frac{OB'}{BB'}+\frac{OC'}{CC'}+\frac{OD'}{DD'}=1, \text{ und: } \frac{AO}{AA'}+\frac{BO}{BB'}+\frac{CO}{CC'}+\frac{DO}{DD'}=3.$$
(Mittels der Verh. der vier Teilpyramiden zum ganzen Vierflach.)

b. Fällt man von einem beliebigen Punkt im Innern eines Vierflachs die Senkrechten auf die Flächen, so ist die Summe der vier Verhältnisse aus je einer Senkrechten und der ihr parallelen Höhe = 1.

c. Die Summe der Entfernungen eines beliebigen Punktes im Innern eines regul. Tetraeders von den vier Flächen ist konstant, und zwar gleich der Höhe des Tetraeders.

30—37: Pyramide und Kegel, Pyramiden- und Kegelrumpf.

30. a. In einer dreiseitigen Pyramide, deren Dreikant an der Spitze ein Oktant ist, sind die Winkel der Grundfläche alle spitz; die Projektionen der Seitenkanten auf die Grundfläche fallen in die Höhen der Grundfläche, die Projektion der Spitze fällt in den Schnittpunkt der Höhen.

b. Das Quadrat der Grundfläche ist gleich der Summe der Quadrate der Seitenflächen.

31. a. Um jede reguläre Pyramide und in jede reguläre Pyramide läßt sich eine Kugel beschreiben.

b. Um jeden regul. Pyramidenrumpf läßt sich eine Kugel beschreiben.