Lehrbuch der Stereometrie

Hauck, Guido

Tübingen, 1893

30 - 37: Pyramide und Kegel, Pyramiden- und Kegelrumpf

urn:nbn:de:hbz:466:1-77777

vier Teilpunkte der Höhenabschnitte bestimmte Vierflach ist mit dem Haupt-Vierflach ähnlich und ähnlich liegend.)

28. In jedem Vierflach ist der reziproke Wert des Halbmessers der einbeschriebenen Kugel gleich der Summe der reziproken Werte der vier Höhen und gleich der halben Summe der reziproken Werte der vier Halbmesser der anbeschriebenen Kugeln. (Sind a_1, a_2, a_3, a_4 die vier Seitenflächen, h_1, h_2, h_3, h_4 die zugehörigen Höhen, r_1, r_2, r_3, r_4 die Halbmesser der anbeschriebenen Kugeln, r der Halbm. der einbeschriebenen Kugel, so ist:
$$\frac{a_1}{\frac{1}{h_1}} = \frac{a_2}{\frac{1}{h_2}} = \frac{a_3}{\frac{1}{h_3}} = \frac{a_4}{\frac{1}{h_4}} = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4}{\frac{1}{r}} = \frac{a_1 + a_2 + a_3 - a_4}{\frac{1}{r_4}} \text{ u. s. w.)}$$

29. a. Zieht man in einem Vierflach von den Ecken A, B, C, D nach den gegenüberliegenden Flächen vier Strecken AA′, BB′, CC′, DD′, die sich in einem Punkte O schneiden, so ist:
$$\frac{OA'}{AA'} + \frac{OB'}{BB'} + \frac{OC'}{CC'} + \frac{OD'}{DD'} = 1, \text{ und: } \frac{AO}{AA'} + \frac{BO}{BB'} + \frac{CO}{CC'} + \frac{DO}{DD'} = 3.$$
(Mittels der Verh. der vier Teilpyramiden zum ganzen Vierflach.)

b. Fällt man von einem beliebigen Punkt im Innern eines Vierflachs die Senkrechten auf die Flächen, so ist die Summe der vier Verhältnisse aus je einer Senkrechten und der ihr parallelen Höhe = 1.

c. Die Summe der Entfernungen eines beliebigen Punktes im Innern eines regul. Tetraeders von den vier Flächen ist konstant, und zwar gleich der Höhe des Tetraeders.

30—37: Pyramide und Kegel, Pyramiden- und Kegelrumpf.

30. a. In einer dreiseitigen Pyramide, deren Dreikant an der Spitze ein Oktant ist, sind die Winkel der Grundfläche alle spitz; die Projektionen der Seitenkanten auf die Grundfläche fallen in die Höhen der Grundfläche, die Projektion der Spitze fällt in den Schnittpunkt der Höhen.

b. Das Quadrat der Grundfläche ist gleich der Summe der Quadrate der Seitenflächen.

31. a. Um jede reguläre Pyramide und in jede reguläre Pyramide läßt sich eine Kugel beschreiben.

b. Um jeden regul. Pyramidenrumpf läßt sich eine Kugel beschreiben.

c. In einen Kegelrumpf läßt sich eine Kugel beschreiben, wenn die Mantellinie gleich der Summe der Grundkreis-Halbmesser ist.

32. a. Stellt man das Netz einer Pyramide dadurch her, daß man längs den Seitenkanten aufschneidet und die Seitenflächen durch Drehung um die Grundkanten in die Ebene der Grundfläche umlegt, so schneiden sich in dieser Netzfigur die Senkrechten, die von den freien Ecken der Seitenflächen auf die zugehörigen Grundkanten gefällt werden, in einem Punkt, welcher den Fußpunkt der Höhe der Pyramide vorstellt.

b. In jeder Pyramide ist die Summe der Seitenflächen größer als die Grundfläche.

c. Legt man in einem Prisma oder Pyramidenrumpf zwei Seitenflächen, die eine Seitenkante BB' gemein haben, durch Drehung um die Grundkanten AB und BC in die Ebene der unteren Grundfläche um, so schneiden sich die Senkrechten, die von den zwei Umlegungen des Punktes B' auf die entsprechenden Grundkanten gefällt werden, in einem Punkt, der die Projektion der Ecke B' auf die untere Grundfläche vorstellt.

33. Die Abwicklungsfigur des Mantels eines Kegels, dessen Achsenschnitt ein gleichseitiges Dreieck ist, ist ein Halbkreis.

34. Wird eine reguläre quadratische Pyramide von einer durch eine Grundkante gelegten Schnittebene halbiert, so werden zwei Seitenkanten von ihr golden geschnitten. (III. 16. Zus. 2.)

35. Der Rauminhalt eines Polyeders, in das sich eine Kugel einbeschreiben läßt, ist gleich $\frac{1}{3}$ mal Oberfläche mal Halbmesser der einbeschriebenen Kugel.

36. Haben zwei dreiseitige Pyramiden an den Spitzen entsprechend-gleiche Dreikante, so verhalten sich ihre Inhalte wie die Produkte ihrer Seitenkanten.

37. a. Verhalten sich in einem Pyramidenrumpf zwei entsprechende Seiten der Grundflächen G und G' wie m zu m', und teilt ein Parallelschnitt die Höhe im Verhältnis $\sqrt{m}$ zu $\sqrt{m'}$, so daß der größere Abschnitt an die größere Grundfläche stößt, so ist die Schnittfigur: $S = \sqrt{GG'}$. Der Inhalt des Pyramidenrumpfes ist also gleich der Summe der drei Pyramiden, welche die drei Flächen G, G', S zu Grundflächen und die Höhe des Pyramidenrumpfes zur Höhe haben.

b. Der Rauminhalt eines Kegelrumpfes ist gleich einem Cylinder von der gleichen Höhe und einem Halbmesser gleich der halben Summe der Grundkreis-Halbmesser des Rumpfes, plus einem Kegel von der gleichen Höhe und einem Grundkreis-Halbmesser gleich der halben Differenz der Grundkreis-Halbmesser des Rumpfes.

38—39: Prismatoid.

38. a. Der Inhalt eines Prismas, dessen Grundflächen Trapeze sind, ist gleich dem arithm. Mittel zwischen den zwei parallelen Seitenflächen — mal ihrer Entfernung.

b. Der Inhalt eines schiefabgeschnittenen Parallelflachs ist gleich dem arithm. Mittel zwischen den vier Parallelkanten oder zwischen zwei gegenüberliegenden Parallelkanten — mal dem zu ihnen senkrechten Querschnitt. (III. 16. Zus. 2.)

39. a. Ein Prismatoid werde auf die Ebene seiner unteren Grundfläche G projiziert; die obere Grundfläche (Deckfläche) sei D. Die algebr. Summe der Projektionen derjenigen Seitenflächen, die mit D eine Kante gemein haben, (Oberdreiecke) werde durch O, diejenige der übrigen Seitenflächen (Unterdreiecke) durch U bezeichnet; so zwar, daß in den zwei algebr. Summen jede Fläche mit positivem oder negativem Vorzeichen versehen wird, je nachdem sie sich mit obenliegender Außenseite oder Innenseite projiziert. Man hat dann stets: $D + O + U = G$. Ist die Höhe des Prismatoids $= h$, so ist sein Inhalt: $K = \frac{h}{3}(3D + 2O + U)$ oder $= \frac{h}{3}(2D + G + O)$. (Satz von C. Gusserow.) (Man berücksichtige auch den Fall, daß zwei Seitenflächen, die einen einspringenden Keil einschließen, in der Projektion auf die nämliche Seite der Keilkante zu liegen kommen, so daß in der Nähe der Kante die Polyederoberfläche von einer zur Grundfläche senkrechten Linie in vier Punkten geschnitten wird.)

b. Ist die Höhe eines Prismatoides $= h$, eine Grundfläche $= G$, und derjenige Parallelschnitt, der von G eine Entfernung $= \frac{h}{3}$ hat, $= S$, so ist der Inhalt: $K = \frac{h}{4}(G + 3S)$.