Lehrbuch der Stereometrie

Hauck, Guido

Tübingen, 1893

40 - 46: Kugel und Umdrehungskörper

urn:nbn:de:hbz:466:1-77777

40—46: Kugel und Umdrehungskörper.

† 40. Werden zwei Körper von verschiedenen Höhen durch jedes Paar Ebenen, die zu den Höhen senkrecht sind und sie im nämlichen Verhältnis teilen, nach flächengleichen Figuren geschnitten, so verhalten sich die Rauminhalte der zwei Körper wie ihre Höhen. (Bew. ähnlich wie III. 11, mittels III. 8. Zus. 1.)

41. a. Wird ein Kreisabschnitt um den mit seiner Sehne parallelen Kreisdurchmesser gedreht, so entsteht ein Umdrehungskörper, der den gleichen Inhalt hat wie die über der Sehne als Durchmesser beschriebene Kugel. (III. 11. Zus.)

b. Wird ein Kreisabschnitt um einen beliebigen, ihn nicht schneidenden Durchmesser seines Kreises gedreht, so entsteht ein Umdrehungskörper, der sich zu der über der Sehne als Durchmesser beschriebenen Kugel verhält wie die Projektion der Sehne auf die Drehachse zur Sehne. (III. Anh. 40.)

42. Beschreibt man einer Kugel einen Kegelrumpf um, so daß sie von den beiden Grundkreisen und dem Mantel berührt wird, so ist der Raum zwischen den Oberflächen der Kugel und des Kegelrumpfes gleich der Summe der zwei Kegel, welche die Grundkreise des Kegelrumpfes zu Grundkreisen und den Mittelpunkt des Berührungskreises zur gemeinschaftlichen Spitze haben. (Verallgemeinerung von III. 17. a, Beweis.)

43. Zieht man in den zwei Grundkreisen einer Kugelzone zwei parallele Durchmesser und bezeichnet die Verbindungsstrecken der zwei Endpunkte des einen Durchmessers mit einem Endpunkt des andern durch s und s', so ist die krumme Oberfläche der Zone $= s s' \pi$. (Verallgem. von III. 18. Zus. 2.)

44. a. Berühren zwei zu einander senkrechte windschiefe Gerade eine Kugel in den Endpunkten eines Durchmessers, und schneidet man auf einer derselben eine Strecke gleich dem Durchmesser, auf der andern eine Strecke gleich der Großkreis-Peripherie der Kugel beliebig ab, so werden das durch die vier Endpunkte der Strecken bestimmte Vierflach und die Kugel von jeder zum Berührungsdurchmesser senkrechten Ebene nach flächengleichen Figuren geschnitten (Satz von A. Schmidt. — Hiernach Berechnung von Kugel, Kugelzone und Kugelabschnitt.)

b. Ein Kreuzsatteldach entsteht dadurch, daß zwei kongruente Satteldächer mit gleichschenkl. Dreiecken als Stirnflächen auf gemeinschaftl. quadratischer Basis ruhen und sich so durchdringen, daß die Firstkanten sich rechtwinklig schneiden und gegenseitig halbieren. Ist die Grundfläche des Kreuzsatteldaches gleich dem Grundkreis, und seine Höhe gleich dem Halbmesser einer Halbkugel, so haben irgend zwei Parallelschnitte beider Körper in gleichen Abständen von den Grundflächen — gleichen Flächeninhalt. (Man betrachte das Kreuzsatteldach als Differenz eines Quaders und vier quadratischer Pyramiden.)

c. Die Prismatoidformel (III. 16) gilt auch für Kugel, Kugelzone und Kugelabschnitt.

d. Hat ein Faß- oder Kessel-förmiger Körper zu einer Kugelzone, bezw. einem Kugelabschnitt eine solche Beziehung, daß die zwei Körper von jedem Paar Ebenen, die zu den beiderseitigen Höhen senkrecht sind und sie im nämlichen Verhältnis teilen, nach flächengleichen Figuren geschnitten werden, so gilt für den Körper die Prismatoidformel. (III. Anh. 40.) Daher giebt die Prismatoidformel brauchbare Näherungswerte für die Berechnung von Fässern und Kesseln, deren krumme Oberfläche geometrisch nicht genau definiert ist. Ist also die (innere) Höhe eines Fasses $= h$, der Bodendurchmesser $= d$, der Spunddurchmesser $= D$, so kann man setzen: $K = \frac{\pi h}{12} (d^2 + 2D^2)$.

45. Dreht man ein Dreieck um eine seiner Schwerlinien als Achse, so beschreiben seine beiden Teile gleich große Rotationskörper. — Die Inhalte der drei durch Drehung um die drei Schwerlinien erzeugten Rotationskörper verhalten sich wie die reziproken Werte der Schwerlinien.

46. Dreht man eine ebene Figur, die aus zwei symmetrischen Hälften besteht, um eine sie nicht schneidende Achse, die parallel zur Symmetralachse ist, so ist die halbe Differenz der Inhalte oder Oberflächen der von den zwei Hälften beschriebenen Umdrehungskörper gleich dem Inhalt oder der Oberfläche des Umdrehungskörpers, der durch Drehung der Figur um ihre Symmetralachse entsteht.