# Lehrbuch der Stereometrie

**Hauck, Guido**

**Tübingen, 1893**

1 - 21: Konstruktionen von Polyedern und Polyedernetzen

nämlich zu Pyramidenoktaeder und Pyramidenwürfel auch für die übrigen regul. Polyeder Analoga konstruieren. Ferner kann man die in 58, 59 und 60. b für das Oktaeder besprochenen Konstruktionen auch auf das Ikosaeder (Ecken A, Mittelpunkt O) anwenden, indem man mit Bez. auf die 20 von den Strahlen OA gebildeten Dreikante genau ebenso verfährt, wie beim Oktaeder mit Bez. auf die 8 Oktanten verfahren wurde. Die 13 gleichflächig-halbregul. Polyeder sind hiernach folgende: Pyramiden-Tetraeder, -Würfel, -Oktaeder, -Dodekaeder, -Ikosaeder; oktaedrisches Granatoeder, -Leuzitoeder, -Diamantoeder, -Gyroeder; ikosaedrisches Granatoeder, -Leuzitoeder, -Diamantoeder, -Gyroeder.

b. Hiemit sind (nach 62. b) zugleich auch die 13 möglichen gleicheckig-halbregul. Formen gefunden. Sie lassen sich übrigens auch direkt aus den regul. Polyedern durch regelmäßiges Abstumpfen ihrer Ecken und Kanten erzeugen, wozu in III. Anh. Aufg. 18. b die Anleitung gegeben wird. (Von ihnen auszugehen und aus ihnen die gleichflächig-halbregul. Formen nach 62. b abzuleiten, ist eigentlich der leichtere Weg. Doch bieten die letzteren das größere Interesse.)

## II. Konstruktions-Aufgaben.

### 1—21: Konstruktionen von Polyedern und Polyedernetzen.

1. Von einer Pyramide sind die Grundfläche und zwei Seitenflächen gegeben. Es sollen die übrigen Seitenflächen, ferner die Höhe und sämtliche Keilwinkel durch Konstruktion in einer Ebene gefunden werden. (Die Seitenflächen findet man mit Hilfe von III. Anh. 32. a, die Höhe und die Keilwinkel an den Grundkanten mittels rechtw. Dreiecke, die Keilwinkel an den Seitenkanten wie W. $\alpha$ in II. Aufg. 6.)

2. a. Von einem Prisma sind geg: die Grundfläche und $\alpha$) zwei an einander stoßende — $\beta$) zwei nicht an einander stoßende Seitenflächen. Es sollen die übrigen Seitenflächen, ferner die Höhe und sämtliche Keilwinkel durch Konstruktion in einer

Ebene gefunden werden. (III. Anh. 32. c. Im übrigen wie bei der vor. Aufg. — β führe man auf α zurück, indem man die den zwei geg. Seitenflächen angehörigen Grundkanten bis zu ihrem Schnitt verlängert. Letztere dürfen nicht parallel sein, wenn die Aufg. bestimmt sein soll.)

b. Die gleiche Aufgabe für einen Pyramidenrumpf.

3. Einen dreiseitigen Pyramidenrumpf zu konstr., wenn geg. sind: eine Grundfläche, eine Seite der andern Grundfläche, und die drei Seitenkanten.

4. Ueber einem geg. (spitzwinkligen) Dreieck als Grundfläche eine Pyramide zu errichten, deren Dreikant an der Spitze ein Oktant sei. (II. Anh. 10 u. II. Aufg. 2. c führen auf die nämliche Lösung wie III. Anh. 30. a.)

5. Ein Vierflach zu konstr., von dessen Flächen die eine einem geg. Dreieck kongruent, eine zweite einem geg. Dreieck ähnlich, eine dritte mit einem geg. Dreieck inhaltsgleich sei.

6. Ein Vierflach zu konstr., von dem zwei Flächen geg. sind, und dessen Inhalt gleich einem geg. Würfel sei.

7. Ein Vierflach zu konstr., von dem eine Fläche und drei Höhen geg. sind. (Zwei Fälle zu berücksichtigen.)

8. Ein Vierflach zu konstr., von dem geg. sind: eine Fläche, die zugehörige Schwerlinie, und die Verhältnisse der von derselben Ecke ausgehenden Kanten. (II. Anh. 11. b.)

9. Eine Pyramide zu konstr., wenn geg. sind: die rechteckige Grundfläche, die Höhe, und die von je zwei gegenüberliegenden Seitenflächen gebildeten Keile. (II. Anh. 9.)

10. Eine Pyramide zu konstr., wenn geg. sind: die Grundfläche, der Rauminhalt, die Länge einer Seitenkante, und der Grundneigungswinkel einer zweiten Seitenkante.

11. Eine Pyramide zu konstr., wenn geg. sind: die Grundfläche und die Grundneigungswinkel einer Seitenfläche und der in dieser liegenden zwei Seitenkanten.

12. Von einem Parallelflach sind die Längen der von einer Ecke ausgehenden drei Kanten und die an ihnen befindlichen Keilwinkel gegeben. Es sollen die vier Diagonalen durch Konstruktion in einer Ebene gefunden werden.

13. Ein Rhomboeder zu konstr., von dem die Hauptdiagonale und ein Rhombenwinkel geg. sind. (2 Lösungen.)

14. In einem durch seine drei Seiten geg. Dreikant werden von den Kanten drei geg. Strecken abgeschnitten und durch die Endpunkte Ebenen senkrecht zu den Kanten gelegt. Von dem durch diese drei Ebenen aus dem Dreikant ausgeschnittenen Körper soll das Netz konstr. werden. (Vgl. II. 5, zweiter Bew.)

---

15. Die Netze der fünf regul. Polyeder zu konstr.

16. a. Die Schnittfigur eines durch seine Kantenlänge geg. Dodekaeders oder Ikosaeders mit einer Ebene zu konstr., die durch zwei parallele Kanten geht. (Vgl. III. Anh. 47. b.)

b. Von jedem der fünf regul. Polyeder die Halbmesser der umbeschriebenen, der einbeschriebenen und der kantenberührenden Kugel, sowie den Keilwinkel an den Kanten durch Konstruktion in einer Ebene zu finden, wenn die Kantenlänge geg. ist. (Für Dodek. und Ikos. enthält die Schnittfigur der Aufg. a sämtliche gesuchten Stücke.)

17. Die Gestalt der Flächen der in III. Anh. 58, 59 und 60 aufgeführten Polyeder zu konstr., wenn die Achsenabschnitte OA, OB, OC geg. sind.

18. a. Die 13 gleich*eckig*-halbregulären Polyeder, die zu den in III. Anh. 63. a aufgezählten gleich*flächig*-halbregulären reziprok sind, zu diskutieren. (III. Anh. 62. b.)

b. Diese Polyeder zu konstr. durch Abstumpfung der Ecken und Kanten der regul. Polyeder. (Stumpft man die Ecken von Tetraeder, Oktaeder, Würfel, Ikosaeder, Dodekaeder so ab, daß aus jeder ursprünglichen Fläche ein regul. Vieleck von doppelter Seitenzahl wird, so erhält man die bezw. mit Pyramiden-Tetraeder, -Würfel, -Oktaeder, -Dodekaeder, -Ikosaeder reziproken. — Mit den beiden Granatoedern sind reziprok die Körper in III. Anh. 54. b u. c, vgl. 56. — Das mit dem oktaedr., bezw. ikosaedr. Leuzitoeder reziproke erhält man, wenn man Ecken und Kanten eines Würfels oder Oktaeders, bezw. Dodekaeders oder Ikosaeders, so abstumpft, daß in jeder Fläche ein mit ihr ähnliches und konzentrisch-ähnlich liegendes Vieleck entsteht, von dem immer zwei Ecken mit zwei Ecken eines benachbarten Vielecks die Ecken eines Quadrates bilden. — Stumpft man so ab, daß in jeder Fläche ein mit ihr konzentrisches Vieleck von doppelter Seitenzahl entsteht, und beobachtet im übrigen das nämliche wie vorhin, so erhält man die mit den beiden Diamantoedern reziproken*). — Zeichnet man in jeder Fläche eines Würfels oder Oktaeders, bezw. Dodekaeders oder Ikosaeders, ein mit ihr ähnliches und konzentrisch-verdreht liegendes Vieleck von solcher Größe und Lage, daß immer zwei Ecken eines Vielecks mit zwei Ecken des in einer Nachbarfläche liegenden Vielecks ein aus zwei regul. Dreiecken bestehendes windschiefes Viereck bilden: so erhält man das mit dem oktaedr., bezw. ikosaedr. Gyroeder reziproke.)

c. Die Netze der in b aufgeführten 13 Polyeder zu konstr., wenn die Kantenlänge geg. ist.

d. Die Kantenlängen der in b aufgeführten 13 Polyeder zu konstr., wenn der Halbmesser der umbeschriebenen Kugel geg. ist.

e. Die Flächengestalt der 13 gleich f l ä ch i g-halbregul. Polyeder zu konstr., wenn der Halbmesser der einbeschriebenen Kugel geg. ist.

f. Für sämtliche halbregul. Polyeder die Keilwinkel an den Kanten durch ebene Konstr. zu finden.

19. a. Zwei kongr. Würfel von geg. Kantenlänge durchdringen sich so, daß sie eine Diagonale gemeinsam haben und um 180° gegen einander verdreht sind. Aus jeder Fläche des einen ragt eine Ecke des andern als dreiseitige Pyramide hervor. Schneidet man diese zwölf kongr. Pyramiden weg, so bleibt als Kern eine aus zwei regul. sechsseit. Pyram. bestehende Doppelpyramide übrig. Von diesem Kern, sowie von den zwölf Pyramiden sollen die Netze konstr. werden. (Salmiak-Zwilling.)

b. Zwei kongr. Oktaeder durchdringen sich so, daß, wenn sie als Prismatoide betrachtet werden, ihre Grundflächen in der nämlichen Ebene konzentrisch und um 180° gegen einander verdreht liegen. Es soll der beiden Körpern gemeinschaftliche Kern diskutiert und sein Netz konstruiert werden.

20. Zwei kongr. regul. sechsseitige Prismen, durch deren Achsen je eine Ebene senkrecht zu zwei parallelen Seitenflächen

---

*) Die mit den beiden Leuzitoedern und Diamantoedern reziproken kann man auch durch Abstumpfen der beiden Granatoeder erhalten, indem man in jeden Rhombus ein Quadrat einzeichnet, dessen Seiten den Rhombendiagonalen parallel sind, und dessen Ecken 1) auf den Rhombenseiten, 2) innerhalb der Rhomben liegen.

geht, werden so gelegt, daß diese zwei Ebenen zusammenfallen und die Achsen sich rechtwinklig schneiden. Es soll eine der zwei (ebenen) Schnittfiguren der Prismenmäntel in wahrer Größe gezeichnet und das Netz des den Prismen gemeinschaftlichen Kerns konstruiert werden.

21. Ein geg. stumpfes Rhomboeder wird durchdrungen von einem spitzen Rhomboeder, das mit dem stumpfen den Mittelpunkt, die Richtung der Hauptdiagonale und die einbeschriebene Kugel gemein hat, und dessen von einer Hauptecke ausgehende Kanten parallel sind mit den von der entsprechenden Hauptecke ausgehenden Rhombendiagonalen des stumpfen. Es soll der beiden Körpern gemeinschaftl. Kern ermittelt und dessen Netz gezeichnet werden. (Die Hauptecken des stumpfen Rhomboeders gehören auch dem Kernkörper an. In den 2 mal 6 Flächen der zwei Rhomboeder entstehen als Flächen des Kernkörpers 2 mal 6 symmetrisch gestaltete Fünfecke von zweierlei Art. Im stumpfen Rhomboeder sind zwei Fünfecksseiten parallel mit einer Rhombendiagonale; im spitzen fallen zwei Fünfecksseiten in Kanten, zwei andere sind diesen parallel. Mittels einer in einem gemeinschaftl. Diagonalschnitt beider Rhomboeder gezeichneten Hilfsfigur lassen sich in die beiderlei Rhomboederflächen die bezügl. Fünfecke leicht einzeichnen.)

### 22—35: Konstruktionen an Polyedern. Ebene Schnitte.

22. Im Innern eines geg. Vierflachs einen Punkt zu finden von der Eigenschaft, daß seine Verbindungsebenen mit den 6 Kanten das Vierflach in vier dreiseitige Pyramiden teilen, deren Rauminhalte sich verhalten wie $m:n:p:q$.

23. a. Den Schwerpunkt eines Pyramidenrumpfes —

b. eines Körpers zu bestimmen, der aus zwei verschiedenen Kegelrümpfen mit gemeinschaftlicher Grundfläche zusammengesetzt ist. (III. Anh. 21. Anm.)

24. Den Mantel a) eines Kegels — b) eines Kegelrumpfes durch Parallelkreise in n gleiche Teile zu teilen.

25. a. Den Halbmesser einer Kugel zu finden, deren Oberfläche gleich der Summe der Oberflächen zweier geg. Kugeln sei.

b. Die Halbmesser zweier Kugeln zu finden, wenn die