UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

# Lehrbuch der Stereometrie

## Hauck, Guido

## Tübingen, 1893

III: Berechnungs-Aufgaben.

urn:nbn:de:hbz:466:1-77777

Visual Library

berühren. Sämtliche Berührungsmantellinien fallen in Rhombendiagonalen.)

56. Aus einem geg. Pyramidentetraeder ein Leuzitoeder auszuschneiden, so daß in jeder Fläche des Pyramidentetraeders eine Fläche des Leuzitoeders liege. (Die Mittelpunkte der Tetraederkanten bilden die Oktaederecken des Leuzitoeders.)

57. Einem geg. Wulst ein regul. 10-seitiges Prismatoid berührend umzubeschreiben, dessen Höhe gleich dem Durchmesser des Meridiankreises sei. Grundfläche und Seitenfläche sollen durch ebene Konstruktion gefunden werden, wenn die Halbmesser des Meridiankreises und des Mittelkreises geg. sind.

58. Ein Kegel hat mit einem Cylinder den Grundkreis gemein, und seine Spitze liegt im Mittelpunkt des andern Grundkreises des Cylinders. In den Raum zwischen Kegelmantel, Cylindermantel und Cylindergrundkreis sind a) sechs — b) fünf gleiche Berührungskugeln so einbeschrieben, daß jede ihre zwei Nachbarkugeln berührt. Es soll der Achsenschnitt des Cylinders konstr. werden, wenn der Halbmesser der Kugeln geg. ist.

59. a. Einer geg. Kugel einen Kegelrumpf einzubeschreiben, der gleiche Höhe und gleiche Mantelfläche mit einem geg. Cylinder habe.

b. Einer geg. Kugel einen Kegelrumpf umzubeschreiben, dessen Mantel gleich einem geg. Kreis sei.

60. Einer geg. Kugel einen Kegelrumpf einzubeschreiben, wenn die Verhältnisse der Mantelfläche zu den zwei Grundkreisen geg. sind.

## III. Berechnungs-Aufgaben.

### Vorbemerkung.

Bei der Anwendung der Körperberechnung auf praktische Beispiele kommt auch das Gewicht in Betracht. Zu seiner Bestimmung ist die Kenntnis des spezifischen Gewichtes des Stoffes, woraus der betreffende Körper besteht, erforderlich.

Unter dem spezifischen Gewichte eines Stoffes versteht man diejenige Zahl, die angiebt, wie vielmal ein aus dem Stoff bestehender

Körper von beliebigem Volumen schwerer ist als ein gleich großes Volumen Wasser. Man erhält also das spez. Gewicht, wenn man das Gewicht des Körpers dividiert durch das Gewicht des gleichen Volumens Wasser. Tab. 1 (S. 224) giebt ein Verzeichnis der spezifischen Gewichte der am häufigsten vorkommenden Stoffe.

Ist V das Volumen eines Körpers, S sein spezifisches Gewicht, W das Gewicht der Kubikeinheit Wasser, so bestimmt sich hieraus das Gewicht P des Körpers auf folgende Weise:

Bezeichnet man mit p das Gewicht der Kubikeinheit des Stoffes, so ist nach obiger Erklärung: $S = \frac{p}{W}$, also $p = SW$. Dies ist das Gewicht der Volumeinheit, folglich ist das Gewicht des Volumens V: $P = V.p$, oder:

$$P = VSW.$$

Man erhält also das Gewicht durch Multiplikation des Volumens mit dem spezifischen Gewicht und dem Gewicht der Kubikeinheit Wasser.

Im metrischen Maßsystem besteht zwischen Gewichtsmaß und Längenmaß die Beziehung, daß das Gramm das Gewicht eines Kubik-Centimeters —, also das Kilogramm das Gewicht eines Kubik-Dezimeters (oder Liters) Wasser ist. Wird daher als Längeneinheit das Centimeter und gleichzeitig als Gewichtseinheit das Gramm, oder als Längeneinheit das Dezimeter und gleichzeitig als Gewichtseinheit das Kilogramm gewählt, so ist beidemal: $W = 1$. Das spezifische Gewicht ist also dann gleich dem Gewicht der Kubikeinheit des betr. Stoffes, und das Gewicht des Volumens V ist:

$$P = VS.$$

Tab. 2 (S. 225) giebt die Maße und Gewichte der Länder, in denen das metrische Maßsystem noch nicht eingeführt ist, verglichen mit dem letzteren.

## 1—8: Würfel.

1. Ein Würfel hält K (423,03) englische Kubikfuß. a) Wie viel hält er in Kubikmetern? b) Wie groß ist seine Oberfläche in Quadratmetern? — Antw.: a) 11,978 cbm, b) 31,411 qm.

2. Wie groß ist das Gewicht W der Kubikeinheit Wasser in den verschiedenen Maßsystemen? (Vgl. Tab. 2, S. 225.) — Antw.:

Im metr. Maßsystem (1 cbm) . . W. = 1000 kg.

In England } (1 Kub.-Fuß) . . W = 62,424 Pfund.
„ Nordamerika }
„ Rußland „ . . W = 69,144 „

3. Die Diagonale eines Würfels ist d (= 4,58 dm); wie groß ist sein Volumen? — Antw.: 18,489 cdm.

4. Der Diagonalschnitt eines Würfels ist S (= 17,235 qcm); wie groß ist seine Oberfläche? — Antw.: 73,122 qcm.

5. Die Oberflächen zweier Würfel verhalten sich wie m zu n (9 zu 20); wie verhalten sich ihre Inhalte? — Antw.: Wie 0,30187 zu 1.

6. Ein Würfel von Sandstein wiegt P (180) kg; wie groß ist seine Kante? — Antw.: 4,16 dm.

7. Ein messingner Würfel vom Gewicht P (= 1,5 kg) soll vergoldet werden; wieviel kostet die Vergoldung, wenn die Vergoldung des Quadratmeters m (60) Mark kostet? — Antw.: 1,14 Mark.

8. Die Kante eines gußeisernen Würfels ist a (= 20,8 cm); wie lang ist die Kante eines gleich schweren Würfels von Tannenholz? — Antw.: 50,7 cm.

### 9—13: Quader.

9. Die Kanten eines Quaders verhalten sich wie die Zahlen l, m, n (7, 9, 13), seine Diagonale ist d (= 25,7 m); wie groß ist sein Volumen? — Antw.: 2688,9 cbm.

10. Zwei Balken von quadratischem Querschnitt haben gleiches Volumen; ihre Längen verhalten sich wie m zu n (8 zu 11); wie verhalten sich die Seiten der Querschnittsquadrate? — Antw.: Wie 1,1726 zu 1.

11. Wieviel qm Blech braucht man zu einer Wanne ohne Deckel, die K (1440) Liter halten soll, wenn der Boden l (1,2) m lang und b (0,8) m breit werden soll? — Antw.: 6,96.

12. Wie schwer ist eine Kiste von Tannenholz samt Deckel, deren Kanten im lichten die Längen l, m, n (= 60, 80, 100 cm), und deren Wände die Dicke d (= 2,5 cm) haben? Wieviel Kilogramm dürfen in sie gelegt werden, wenn sie im Wasser bis zur Mitte der mit l parallelen äußeren Kante einsinken soll?*)

*) Bei Aufgaben über schwimmende Körper kommt der Satz („Ar-

— Antw.: Gew. der Kiste = 50,06 kg; Belastung = 240 kg.

13. Wieviel kosten die Backsteine zu einem quadratischen Turm, der eine Breite b (= 4,2 m), eine Höhe h (= 10,8 m), und eine Mauerdicke d (= 0,6 m) hat, wenn ein Backstein die Dimensionen l, m, n (= 24, 12, 6 cm) hat, wenn das Hundert Backsteine k (3) Mark kostet, und wenn wegen des Abfalls p (8) Prozent mehr genommen werden müssen? — Antw.: 1749,60 Mark.

### 14—18: Prisma.

14. Wie groß ist der Inhalt eines regulären dreiseitigen Prismas, in dem jede Kante die Länge a (= 6,2 cm) hat? — Antw.: 103,2 ccm.

15. Ein reguläres fünfseitiges Prisma, dessen Höhe das Dreifache einer Grundkante ist, hat den Inhalt K (= 248 cdm). Wie lang ist seine Grundkante? — Antw.: 3,635 dm.

16. Wie groß ist der Inhalt K eines spitzen bezw. stumpfen Rhomboeders, wenn die von den Hauptecken ausgehenden Rhombendiagonalen die Länge d (= 3 cm, bezw. 2 cm), die übrigen Rhombendiagonalen die Länge d' (= 2 cm, bezw. 3 cm) haben? (III. Anh. 11. a). — Antw.: $K = \frac{1}{4} d'^2 \sqrt{3 d^2 - d'^2} = 4{,}796$ ccm, bezw. 3,897 ccm.

17. Wie groß ist das Gewicht eines Dachsparrens von Tannenholz, der als Querschnitt ein Quadrat von der Seitenlänge a (= 16 cm) hat und an beiden Enden durch rechteckige Flächen so abgeschrägt ist, daß zwei parallele Seitenflächen des Sparrens gleichschenklige Trapeze sind, in denen der spitze Winkel $\frac{1}{2}$ R beträgt und die größere Parallelseite die Länge l (= 5 m) hat? — Antw.: 61,95 kg.

18. Eine gußeiserne hohle Säule von der Form eines regul. sechsseitigen Prismas hat die Höhe h (= 10 Fuß), die äußere Grundkante a (= 6 Zoll) und die Dicke d (= 10 Lin.). Wie groß ist ihr Gewicht? — Antw.: In Nordamerika 867 Pfund.

---

chimedisches Prinzip") zur Anwendung, daß das Gewicht des schwimmenden Körpers gleich ist dem Gewichte der von ihm verdrängten Flüssigkeitsmasse.

### 19—28: Cylinder.

19. Der Inhalt eines Cylinders ist K (= 33 cdm), der Halbmesser seines Grundkreises r (= 2,6 dm); wie groß ist seine Höhe und sein Mantel? — Antw.: Höhe = 1,554 dm, Mantel = 25,385 qdm.

20. Die Wandfläche eines cylindrischen Innenraumes ist M (= 160 qm), seine Höhe ist gleich dem Durchmesser der Grundfläche; wie groß ist sein Rauminhalt? — Antw.: 285,46 cbm.

21. In eine cylindrische Glasröhre werden P (1,5) Gramm Quecksilber gebracht und nehmen darin einen Raum von der Länge l (= 168 mm) ein. Wie groß ist der innere Durchmesser der Röhre? — Antw.: 0,91 mm.

22. Der Mantel eines cylindrischen Blechgefässes ist M (= 27 qdm), sein Inhalt K (= 30 l); wie groß ist seine Höhe und sein Halbmesser? — Antw.: Höhe = 1,934 dm, Halbm. = 2,222 dm.

23. Aus einem Blechstreifen gehämmerten Silbers werden runde Stücke zu Münzen geschlagen; der Streifen hat die Länge l (= 60 cm), die Breite b (= 4,5 cm), die Dicke d (= 0,25 cm), der Durchmesser einer Münze ist 2 r (= 4,25 cm). Wieviel wiegt der Abfall des Streifens, wenn die Löcher von den Längenkanten und von einander gleich weit entfernt sind? — Antw.: 227,21 g.

24. Ein Gewichtsystem von Messing besteht aus lauter Cylindern, in denen die Höhe das anderthalbfache des Durchmessers der Grundfläche ist; wie groß sind die Höhen der einzelnen Gewichtstücke, wenn diese 1, 2, 3 u. s. w. Kilogramm halten sollen? — Antw.: 1) 6,99 cm, 2) $6{,}99 \sqrt[3]{2} = 8{,}80$ cm, 3) $6{,}99 \sqrt[3]{3} = 10{,}08$ cm, u. s. f.

25. Wie schwer ist ein cylindrischer Mühlstein aus Sandstein, von dem die Höhe h (= 63 cm), der äußere Durchmesser 2 R (= 176 cm), und der Lochdurchmesser 2 r (= 20 cm) geg. ist? — Antw.: 3782 kg.

26. Zu dem Guß von 10 gleichen eisernen Röhren von der Länge l (= 12 Fuß) und dem lichten Durchmesser 2 r (= 6 Zoll) werden P (5700) Pfund Eisen verwendet; es bleibt ein Rückstand

von P' (154) Pfund übrig. Wie dick werden die Röhren? — Antw.: In England: 8,4 Lin.

27. Ein Silberdraht von 1 (2) Meter Länge und P (10,8) Gramm Gewicht soll mit P' (3) Gramm Gold vergoldet werden. a) Wie dick ist der Silberdraht? b) Wie dick wird die Vergoldung? — Antw.: a) 0,8 mm, b) 0,03 mm.

28. Ein Cylinder vom Halbmesser r (= 2 cm) wird durch eine zu seiner Achse schiefe Ebene so geschnitten, daß das eine Teilstück den Inhalt K (= 160 ccm) und die Gesamtoberfläche (Mantel + Grundkreis + Schnittellipse) O (= 200 qcm) hat. Wie groß sind die zwei parallelen Seiten des Trapezes, das den zur Schnittebene senkrechten Achsenschnitt des Teilstückes bildet? (Vgl. III. Anh. 9. c und II. Anh. 22. c.) — Antw.: 16,614 cm und 8,851 cm.

## 29—34: Pyramide.

29. Eine Pyramide hat den Inhalt K (= 365 cbm) und die Grundfläche G (= 22,5 qm). Wie groß ist ihre Höhe? — Antw.: 48,67 m.

30. Eine reguläre achteckige Pyramide hat die Grundkante a (= 7 cm), ihre Höhe ist gleich dem Durchmesser des der Grundfläche umbeschriebenen Kreises; wie groß ist ihr Inhalt? — Antw.: 1442,6 ccm.

31. Ein Parallelschnitt einer Pyramide ist die Hälfte der Grundfläche; wie verhält sich seine Entfernung von der Spitze zur Höhe der Pyramide? — Antw.: Wie 1 zu $\sqrt{2}$.

32. Eine reguläre vierseitige Pyramide, deren Seitenkanten gleich den Grundkanten sind, hat den Inhalt K (= 126,59 cbm); wie lang sind die Kanten? — Antw.: 8,128 m.

33. Wie groß ist der Inhalt eines Sphenoids (vgl. III. Anh. 26. a), dessen drei Kanten die Längen a, b, c (= 4, 5, 6 cm) haben? (III. Anh. 19. d). — Antw.:

$$K = \tfrac{1}{6}\sqrt{\tfrac{1}{2}(a^2+b^2-c^2)(b^2+c^2-a^2)(c^2+a^2-b^2)} = 9{,}1855 \text{ ccm}.$$

34. Aus K (1) cdm Thon wird das gleicheckig-halbregul. Polyeder modelliert, dessen Ecken die Mitten der Oktaederkanten bilden (vgl. III. Anh. 54. b). Wie groß wird die Kantenlänge des Polyeders? — Antw.: 7,5 cm.

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

## 35—41: Kegel.

35. Ein kegelförmiges Turmdach hat das Volumen V (= 11,9 cbm) und die Höhe h (= 6,7 m); wie groß ist der Halbmesser der Grundfläche? — Antw.: 1,3 m.

36. Der Achsenschnitt eines Kegels ist ein gleichseitiges Dreieck von der Seitenlänge s (= 15 cm); wie groß ist der Mantel und der Inhalt des Kegels? — Antw.: M = 353,43 qcm, K = 765,20 ccm.

37. Das Zelttuch eines kegelförmigen Zeltdaches mißt M (100) qm; sein Achsenschnitt ist ein gleichschenklig-rechtwinkliges Dreieck; wie groß ist sein Rauminhalt? — Antw.: 111,82 cbm.

38. Ein bleierner Kegel hat den Grundkreis-Halbmesser r (= 3 cm); wie groß ist der Halbmesser eines gleich hohen und gleich schweren Kegels von Gußeisen? — Antw.: 3,76 cm.

39. In einen Kegel ist ein Cylinder einbeschrieben, dessen Höhe gleich der halben Höhe des Kegels ist; wie verhalten sich die Inhalte beider Körper? — Antw.: Wie 8 zu 3.

40. Die Oberfläche eines Kegels ist O (= 5 qm), der Halbmesser seines Grundkreises r (= 1 dm); wieviel Grade mißt der Kreisausschnitt, der die Abwicklung des Mantels vorstellt? — Antw.: $2^\circ\ 16'\ 34''$.

41. Ein kreisförmiges Stück Filtrierpapier wird nach zwei zu einander senkrechten Durchmessern gebrochen, zu einem Quadranten zusammengefaltet und derart zu einem kegelförmigen Filter geöffnet, daß die eine Hälfte des Mantels aus einer, die andere Hälfte aus drei Lagen Papier besteht. a) Wie groß muß die Öffnung eines kegelförmigen Glastrichters sein, damit sich das Papierfilter an seine Innenwand längs deren ganzen Ausdehnung glatt anlegen kann? b) Wie groß muß der Durchmesser des ursprünglichen Papierblattes mindestens sein, damit das Filter 1 Liter Flüssigkeit fassen kann? — Antw.: a) 60°, b) 32,8 cm.

## 42—50: Pyramiden- und Kegelrumpf.

42. Ein Pyramidenrumpf hat den Inhalt K (= 230 cbm), seine Grundflächen sind Quadrate von den Seitenlängen a und a'

(= 6,94 und 3,55 m); wie groß ist seine Höhe, und wie groß die Höhe seiner Ergänzungspyramide? — Antw.: 8,08 m, und 8,46 m.

43. Ein Monument aus Sandstein hat die Form eines regulären dreiseitigen Pyramidenrumpfes; die untere Grundkante ist a (= 90 cm), die obere a' (= 50 cm), die Seitenkante k (= 180 cm). Wie groß ist das Gewicht des Monumentes? — Antw.: 972,7 kg.

44. In einem Pyramidenrumpf mit den Grundflächen G und G' (= 27 und 16 qdm) halbiert ein Parallelschnitt die Höhe; wie groß ist dieser Parallelschnitt? — Antw.: 21,142 qdm.

45. Wie viele Fuhren Erde, jede zu F (1,5) cbm, müssen fortgeschafft werden, wenn in den Boden eine kreisförmige Grube gegraben wird, die eine Tiefe h (= 2 m), einen oberen Durchmesser 2 R (= 40 m), und einen Böschungswinkel von 45° erhalten soll? — Antw.: 1513,6.

46. Ein papierner Lampenschirm soll die Höhe h (= 9 cm) und die Grundkreis-Durchmesser 2 R u. 2 r (= 15 u. 7,5 cm) bekommen. Wie groß werden die zwei Halbmesser der Abwicklungsfigur, und wieviel Grade messen ihre Bögen? — Antw.: Halbm. = 19,5 und 9,75 cm, Bogen = 138° 27' 41''.

47. Eine irdene Schüssel soll ein Liter Flüssigkeit halten, der innere Bodendurchmesser soll 2 r (= 7 cm), die lichte Höhe — h (= 4 cm) sein. Wie groß muß der lichte Randdurchmesser werden? — Antw.: 26,8 cm.

48. Ein Cylinder vom Halbmesser r (= 50 cm) wird konisch ausgebohrt, so daß die mit den Grundkreisen des Cylinders konzentrischen, kreisförmigen Öffnungen sich verhalten wie m zu n (1 zu 2), und daß das Gewicht des durchbohrten Körpers die Hälfte von dem Gewichte des Vollcylinders ist; wie groß werden die Durchmesser der Öffnungen? — Antw.: 58,29 cm und 82,44 cm.

49. Ein runder Turm von der Höhe h (= 18 m) hat oben den Durchmesser 2 r (= 4,2 m), unten den Durchmesser 2 R (= 5,7 m). Wieviel kostet das Übertünchen des Turmes, wenn pro Quadratmeter m (4) Mark gerechnet werden? — Antw.: 1120,63 Mark.

50. Ein Cylinder und ein Kegelrumpf haben gleiche Höhe

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

h (= 5 cm) und konzentrische Grundflächen, ihre Mäntel durchschneiden sich in der Mitte der Höhe, die Grundkreishalbmesser des Kegelrumpfes sind R und r (= 15 cm und 9 cm). a) Wie verhalten sich die Inhalte, b) wie die Mäntel beider Körper? c) in welcher Höhe müßten sich die Mäntel schneiden, wenn die Inhalte — d) in welcher Höhe, wenn die Mäntel gleich sein sollten? — Antw.: a) Wie 48 zu 49, b) wie 0,64 zu 1, c) 2,40 cm, d) — 3,12 cm.

### 51—56: Prismatoid.

51. Von einem regulären dreiseitigen Prisma, dessen Grundkanten und Seitenkanten die Längen g und s (= 3,7 und 20 dm) haben, werden an beiden Enden Stücke weggeschnitten. Die eine Schnittebene schneidet von den drei Seitenkanten unten die Strecken l, m, n (= 1, 2, 3 dm) ab, die andere Schnittebene geht durch den oberen Endpunkt der ersten Seitenkante und schneidet von den zwei anderen die Strecken m′ und n′ (= 3 und 5 dm) ab. Wie groß ist der Inhalt des schiefabgeschnittenen Prismas? — Antw.: 90,895 cdm.

52. Ein reguläres 12-seitiges Prismatoid hat die Grundkante a und die Höhe h. α) Wie groß ist sein Inhalt? β) Wie groß ist der Inhalt des 12-seitigen Trapezoeders, das durch Erweitern der Seitenflächen des Prismatoides entsteht (vgl. III. Anh. 61. b)? γ) Wie verhält sich das Trapezoeder zu der Doppelpyramide, deren Halbflächner es vorstellt? — Antw.: α) $a^2h(1+\sqrt{3})$. β) $a^2h(7+4\sqrt{3})$. γ) Wie $4(2-\sqrt{3}):1$.

53. Wie groß ist der Inhalt eines Walmdaches, dessen Grundfläche ein Rechteck mit den Seiten l und b (= 50 und 20 m) ist, dessen Firstkante gleich der Differenz von l und b ist, und dessen Dreiecksflächen gleichseitig sind? — Antw.: 6128,3 cbm.

54. Ein Grabstein aus Granit kann in einen Obelisken mit rechteckigen Grundflächen und trapezförmigen Seitenflächen — und in ein Walmdach zerlegt werden. Das untere Grundrechteck des Obelisken hat die Seiten a und b (= 125 und 75 cm), das obere hat die Seiten a′ und b′ (= 75 und 50 cm), die Höhe ist h (= 200 cm). Das Walmdach hat das obere Rechteck zur Grundfläche; seine Trapezflächen stoßen an die kürzeren Rechtecksseiten, seine

Dreiecksflächen liegen in denselben Ebenen mit den breiteren Trapezflächen des Obelisken und bilden mit diesen zusammen zwei symmetrische Fünfecke; die Höhe des Walmdaches ist h' (= 25 cm). Wie groß ist das Gewicht des Grabsteines? — Antw.: 3884,4 kg.

55. Das Ufer eines Wasserbeckens hat die Gestalt eines rechtwinkligen Trapezes; die zwei parallelen Uferkanten sind a und b (= 20 und 14 m), die zu ihnen senkrechte Uferkante ist c (= 8 m); die Tiefe des Beckens ist h (= 2 m); die Böschungen haben eine Neigung von 45°. Wieviel Wasser enthält das Becken, wenn der Wasserstand um $\frac{1}{n}$ h (n = 4) niedriger ist als das Ufer? — Antw.: 1183 hl.

56. Ein Faß hat eine (innere) Höhe h (= 100 cm), einen Bodendurchmesser d (= 70 cm), einen Spunddurchmesser D (= 85 cm). Wieviel Liter hält es? (III. Anh. 44. d.) — Antw.: 506,6 Liter.

### 57—63: Reguläre Polyeder.

57. Bei jedem der fünf regul. Polyeder bezeichne: a die Kantenlänge, R den Halbmesser der umbeschr. Kugel, r — der einbeschr. Kugel, ρ — der kantenberührenden Kugel, O die Oberfläche, K den Inhalt. Wie groß sind R, r, ρ, O, K, ausgedrückt in a? — Antw.: in der nachstehenden Tabelle:

| | Tetraeder. | Hexaeder. | Oktaeder. | Dodekaeder. | Ikosaeder. |
|---|---|---|---|---|---|
| R = | $\frac{a}{4}\sqrt{6}$ | $\frac{a}{2}\sqrt{3}$ | $\frac{a}{\sqrt{2}}$ | $\frac{a}{4}\left(\sqrt{15}+\sqrt{3}\right)$ | $\frac{a}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$ |
| r = | $\frac{a}{2\sqrt{6}}$ | $\frac{a}{2}$ | $\frac{a}{\sqrt{6}}$ | $\frac{a}{2}\sqrt{\frac{25+11\sqrt{5}}{10}}$ | $\frac{a}{4}\,\frac{3+\sqrt{5}}{\sqrt{3}}$ |
| ρ = | $\frac{a}{2\sqrt{2}}$ | $\frac{a}{\sqrt{2}}$ | $\frac{a}{2}$ | $\frac{a}{4}\left(3+\sqrt{5}\right)$ | $\frac{a}{4}\left(1+\sqrt{5}\right)$ |
| O = | $a^2\sqrt{3}$ | $6\,a^2$ | $2a^2\sqrt{3}$ | $3\,a^2\sqrt{5(5+2\sqrt{5})}$ | $5\,a^2\sqrt{3}$ |
| K = | $\frac{a^3}{12}\sqrt{2}$ | $a^3$ | $\frac{a^3}{3}\sqrt{2}$ | $\frac{a^3}{4}\left(15+7\sqrt{5}\right)$ | $\frac{5\,a^3}{12}\left(3+\sqrt{5}\right)$ |

(Bei Dodek. und Ikos. berechne man zuerst $2\rho$ als Diagonale einer Grundfläche der in III. Einl. 15. b und c erwähnten Prismatoide, hierauf $2R$ als Diagon. eines Rechtecks aus $a$ und $2\rho$. Zerlegt man sodann das Polyeder vom Mittelpunkt aus in Pyramiden, so sind diese regul. und kongr., eine Seitenkante $= R$, die Höhe $= r$, die Summe aller Pyr. $= K$.) — Durch Elimination von $a$ aus je zweien der obigen Formeln, die dem nämlichen Polyeder angehören, kann von den Größen $R$, $r$, $\rho$, $O$, $K$ jede in jeder andern ausgedrückt werden.

58. Wie verhält sich der Würfel a) zu dem ihm einbeschriebenen Oktaeder, b) zu dem ihm umbeschriebenen Oktaeder (dessen Flächen durch die Würfelecken gehen), c) zu dem Oktaeder, dessen Kanten die Würfelkanten in deren Mitten schneiden (vgl. III. Anh. 54. Schlußbem.)? — Antw.: a) Wie 6 zu 1, b) wie 2 zu 9, c) wie 3 zu 4.

59. Wie verhält sich das Tetraeder a) zu dem ihm einbeschriebenen Oktaeder (vgl. III. Anh. 54. a), b) zu dem ihm umbeschriebenen Oktaeder (vgl. III. Anh. 52. a und 49. a)? — Antw.: a) Wie 2 zu 1, b) wie 2 zu 27.

60. Ein hohles Ikosaeder von Zinkblech, dessen Wände die Dicke $d$ ($= 0{,}5$ mm) haben, wiegt $P$ ($198{,}1$) g. Wie groß ist seine äußere Kante? — Antw.: 8 cm.

61. Wie groß sind die zwei regul. Pyramidenrümpfe und das Prismatoid, in die ein Dodekaeder von der Kantenlänge $a$ zerlegt werden kann? — Antw.: Die drei Teile haben gleiche Größe: $K = \frac{a^3}{12}(15 + 7\sqrt{5})$.

62. Wie groß ist der Inhalt des oktaedrischen und des ikosaedrischen Granatoeders, ausgedrückt $\alpha$) in der Granatoederkante $g$, $\beta$) im Halbmesser der einbeschr. Kugel $r$, $\gamma$) in den Kanten $o$ und $w$, bezw. $i$ und $d$ des zugehörigen Oktaeders und Würfels, bezw. Ikosaeders und Dodekaeders? (III. Anh. 55. b und c). — Antw.:

$$K_o = \frac{16}{9} g^3\sqrt{3} = 4r^3\sqrt{2} = \tfrac{1}{2} o^3\sqrt{2} = 2\,w^3.$$

$$K_i = 4\,g^3\sqrt{5+2\sqrt{5}} = 20\,r^3(\sqrt{5}-2) = \tfrac{5}{2} i^3 = \tfrac{5}{2} d^3(\sqrt{5} + 2).$$

63. Ein Tetraeder von Holz schwimmt im Wasser so, daß die außerhalb des Wassers befindliche Kante horizontal ist. Die Länge der Kante ist $a$ ($= 6$ cm), die Entfernung der horizontalen

Kante vom Wasserspiegel e (= 1,5 cm). Wie groß ist das spezifische Gewicht des Holzes? — Antw.: 0,713.

### 64—82: Kugel und Kugelteile.

64. Wie groß ist der Halbmesser einer Kugel vom Inhalt K (= 324 ccm)? — Antw.: 4,26 cm.

65. Die Inhalte zweier Kugeln verhalten sich wie m zu n (3 zu 10); wie verhalten sich ihre Oberflächen? — Antw.: Wie 0,44814 zu 1.

66. Aus drei Kugeln von den Halbmessern $r_1$, $r_2$, $r_3$ (= 7, 9, 15 cm) wird eine einzige gegossen; wie groß wird ihr Halbmesser? — Antw.: 16,4 cm.

67. Eine halbkugelförmige Schale von Gußeisen hat den äußeren Durchmesser 2 R (= 20 cm) und die Dicke d (= 1,5 cm). a) Wie groß ist ihr Gewicht? b) Wie groß dürfte die Dicke höchstens sein, damit die Schale in Wasser schwimmen könnte? — Antw.: a) 5,860 kg; b) 0,48 cm.

68. Aus einem kugelförmigen Tropfen Seifenwasser vom Durchmesser d (= 4 mm) wird eine Seifenblase vom Durchmesser D (= 6 cm) geblasen. Wie dick ist die Blase? — Antw.: 0,003 mm.

69. Wie viele Kugeln lassen sich aus P (82) russ. Pfund Blei gießen, wenn der Durchmesser einer jeden 2 r (4) russ. Lin. mißt? — Antw.: 9269.

70. Ein Gefäß, dessen Innenraum die Form eines regulären sechsseitigen Prismas von der Grundkante a (= 5 cm) hat, enthält Wasser. Darin wird eine Kugel untergetaucht, welche die Wände berührt. Um wieviel steigt dadurch der Wasserspiegel? — Antw.: Um 5,24 cm.

71. a) Um wieviel Kilogramm ist ein mit Wasserstoff gefüllter kugelförmiger Luftballon leichter als die Luft, die er verdrängt, wenn der Durchmesser des Ballons 2 r (25) Meter mißt, und wenn das Quadratmeter der Hülle P (0,03) Kilogramm wiegt? b) Wie groß ist das spezifische Gewicht der Luft in derjenigen Höhe, wo der Ballon dasselbe Gewicht hat wie die verdrängte Luftkugel? — Antw.: a) 9842,8; b) 0,000097.

72. Wie verhält sich der Inhalt einer Kugel zu dem In-

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

halt des einbeschriebenen und des umbeschriebenen Tetraeders, Würfels, Oktaeders, Dodekaeders, Ikosaeders?

Antw.: Ist K der Inhalt der Kugel, $T_i$ der des einbeschr. —, $T_u$ der des umbeschr. Tetraeders u. s. w., so ist:

$$\frac{K}{T_i} = \frac{3\pi\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{0{,}12252}. \qquad \frac{K}{T_u} = \frac{\pi}{6\sqrt{3}} = \frac{1}{3{,}30797}.$$

$$\frac{K}{H_i} = \frac{\pi\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{0{,}36755}. \qquad \frac{K}{H_u} = \frac{\pi}{6} = \frac{1}{1{,}90986}.$$

$$\frac{K}{O_i} = \pi = \frac{1}{0{,}31831}. \qquad \frac{K}{O_u} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}} = \frac{1}{1{,}65399}.$$

$$\frac{K}{D_i} = \frac{\pi\sqrt{3}(5-\sqrt{5})}{10} = \frac{1}{0{,}66491}. \qquad \frac{K}{D_u} = \frac{\pi\sqrt{65+29\sqrt{5}}}{15\sqrt{10}} = \frac{1}{1{,}32503}.$$

$$\frac{K}{J_i} = \pi\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}} = \frac{1}{0{,}60546}. \qquad \frac{K}{J_u} = \frac{\pi(3+\sqrt{5})^2}{60\sqrt{3}} = \frac{1}{1{,}20657}.$$

73. Eine Kugel vom Durchmesser 2 R (= 15 cm) wird durch zwei parallele Kugelkreise in eine Zone und zwei Kugelabschnitte geteilt. Wie groß sind die Inhalte dieser drei Teile, wenn ihre Höhen sich verhalten wie l : m : n (3 : 4 : 5)? — Antw.: 276,12 ccm, 826,30 ccm und 664,73 ccm.

74. Eine hölzerne Kegelkugel schwimmt im Wasser, so daß die benetzte Kugelhaube größer als die Halbkugel ist. Durch Anwendung von II. Aufg. 10. a und b wird der ebene Halbmesser des nassen Randkreises r (= 5,2 cm) und der Kugelhalbmesser R (= 6 cm) gefunden. Wie groß ist das spez. Gewicht der Kugel? — Antw.: 0,843.

75. In welchem Verhältnis wird die Achse eines Kugelausschnittes durch den zugehörigen Kugelkreis geteilt, a) wenn der Kugelkreis den Inhalt — b) wenn er die Oberfläche halbiert? — Antw.: a) Im Verh. des goldenen Schnittes $\frac{1}{2}(1+\sqrt{5}) : 1 = 1{,}618 : 1$; b) Im Verh. 3 : 2.

76. Auf der Oberfläche einer Kugel vom Halbmesser R (= 10 cm) befindet sich ein sphär. Dreieck mit den Winkeln $\alpha, \beta, \gamma$ (= 93° 40′, 67° 32′ 16″, 105° 36′ 44″). Wie groß ist der Inhalt des Körpers, der von dem zugehör. Dreikant aus der Kugel ausgeschnitten wird? — Antw.: 505,08 ccm.

77. a) Wie groß ist der Flächenraum, der von einer Höhe

h (= 1 geogr. Meile) über der Erdoberfläche überschaut werden kann? b) Wie hoch muß man sich über die Erdoberfläche erheben, um eine Fläche von 1000 Quadratmeilen überschauen zu können? (Erddurchmesser = 1719 geogr. Meilen.) — Antw.: a) 5394 Quadratmeilen; b) 0,1852 Meilen = 1,374 km.

78. Die krumme Oberfläche einer Kugelzone, deren Grundkreise gleich sind, soll mit einem einzigen Papierstreifen ohne Falten überklebt werden, so daß längs den Grundkreisen keine —, längs dem zugehörigen Aequator die größte Dehnung des Papiers stattfindet. Wie groß darf die Höhe der Zone höchstens sein, wenn die Längenausdehnungsfähigkeit des feuchten Papiers $\frac{1}{n}\left(=\frac{1}{24}\right)$ ist? — Antw.: $\frac{\sqrt{2n+1}}{n+1} = 0{,}28$ des Kugeldurchm.

79. Eine Kugel vom Halbmesser R (= 20 cm) wird cylindrisch ausgebohrt, so daß die Cylinderachse durch den Mittelpunkt geht und der Halbmesser des Loches r (= 8 cm) ist. Wie groß ist der Inhalt des ausgehöhlten Körpers? (III. Anh. 41. a.) — Antw.: 25799 ccm.

80. Die Grundflächen eines Kegelrumpfes haben die Halbmesser r und r′ (= 4 und 3 cm), seine Höhe ist h (= 2 cm); a) wie groß ist der Halbmesser der dem Kegelrumpf umbeschriebenen Kugel? b) wie verhält sich der Inhalt des Kegelrumpfes zum Inhalt der umbeschriebenen Kugelzone? c) wie verhält sich der Mantel des Kegelrumpfes zur krummen Oberfläche der Zone? — Antw.: a) 4,0697 cm; b) wie 74 zu 79; c) wie 0,96155 zu 1.

81. In eine Kugel vom Halbmesser R (= 6 cm), sind vier gleiche Berührungskugeln so einbeschrieben, daß alle einander berühren; wie groß ist ihr Halbmesser? — Antw.: 2,697 cm.

82. Wie schwer ist eine gläserne Bikonvexlinse, deren Oberfläche aus zwei Kugelhauben mit gemeinsamem Grundkreis besteht, wenn die zugehör. Kugeln die Halbm. R u. R′ (= 50 u. 30 cm) haben, und wenn die Linse die (längs der Achse gemessene) Dicke a (= 0,5 cm) hat? — Antw.: 44,06 g.

### 83—90: Umdrehungskörper.

83. Eine Kette von Schmiedeisen besteht aus n (100) gleichen wulstförmigen Ringen. Wird sie geradlinig ausgespannt,

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

so daß sich die Ringe paarweise berühren, und daß ihre Berührungspunkte und Mittelpunkte alle in gerader Linie liegen, so befindet sich zwischen jedem ersten und dritten Ring ein Spielraum gleich der Dicke eines Ringes, und beträgt die Gesamtlänge der Kette (zwischen den zwei äußersten Punkten gemessen) 1 (3,02) Meter. Wie groß ist das Gewicht der Kette? — Antwort: 7,686 kg.

84. Ein Dreieck ABC wird um eine zu AB parallele Gerade MN gedreht. In welchen Abständen von AB muß MN angenommen werden, wenn der Inhalt des erzeugten Umdrehungskörpers 2, 3, ... n-mal so groß sein soll als der Inhalt des durch Drehung des Dreiecks um AB erzeugten Umdrehungskörpers? — Antw.: In den Abständen: $\frac{1}{3}h$, $\frac{2}{3}h$, ... $\frac{n-1}{3}h$, wenn h die zu AB gehörige Höhe des Dreiecks ist.

85. Die Ecken eines Dreiecks ABC haben von einer in seiner Ebene liegenden Geraden MN die Entfernungen a, b, c (= 13, 9, 2). Von der Ecke A soll eine Transversale AT so gezogen werden, daß, wenn das Dreieck um MN als Achse gedreht wird, die von den beiden Teildreiecken ATB und ATC beschriebenen Umdrehungskörper einander gleich sind. In welchem Verhältnis ist BC im Punkt T zu teilen? (Vgl. Bew. von III. 20. a.) — Antw.: Im Verh. $\frac{\sqrt{(a+b+c)^2+(b-c)^2}-(b-c)}{a+b+c} = \frac{3}{4}$.

86. Der Bogen eines Kreisabschnittes mißt 120°, sein Halbmesser ist R (= 6 cm). Wie groß ist a) die Entfernung des Flächenschwerpunktes des Kreisabschnittes von seiner Sehne, b) der Inhalt des durch Drehung des Kreisabschnittes um seine Sehne erzeugten Umdrehungskörpers? (Mittels III. Anh. 41. a.) — Antw.: a) 1,23 cm. b) 170,895 ccm.

87. In einem Wulst vom Mittelkreishalbmesser R (= 4 cm) und Meridianhalbmesser r (= 2 cm) wird durch die zwei Parallelkreise, die gleich dem Mittelkreis sind, eine Kugelfläche gelegt. Wie groß sind die zwei ringförmigen Teile, in die der Wulst durch sie geteilt wird? — Antw.: Jeder ist gleich der Hälfte des Wulstes $= R r^2 \pi^2 = 157{,}914$ ccm.

88. Auf einer Geraden sind folgende Strecken abgetragen: ab = 6, bc = 5, cd = 1, de = $1\frac{1}{2}$, ef = $10\frac{1}{2}$; in den

Punkten a, b, c . . . sind auf der Geraden nach der nämlichen Seite hin die Senkrechten errichtet: $aA = bB = 16\frac{1}{2}$, $bB' = cC' = 14$, $cC = dD = eE' = 13\frac{1}{2}$, $eE = fF = 12$; endlich ist AB gezogen, über B'C' nach außen ein Halbkreis errichtet, CD gezogen, E mit D durch einen Viertelskreis verbunden, dessen Mittelpunkt E' ist, und EF gezogen. Die hiedurch entstandene Figur bildet den halben Achsenschnitt eines Toskanischen Säulenfußes, dessen unterster Teil eine quadratische Platte (mit aA als halber Grundkante und ab als Höhe) ist, und dessen übrige Teile durch Drehung der übrigen Figur um bf als Achse entstehen. Wie groß ist das Gewicht des in Sandstein ausgeführten Säulenfußes, wenn die obigen Maße als Dezimeter verstanden werden? — Antw.: 41451 kg.

89. Wie groß ist der Inhalt eines gestreckten Umdrehungsellipsoides, das durch Drehung einer Ellipse von den Halbachsen a u. b (= 4 u. 3 cm) um die große Achse 2a entsteht? (Vgl. II. Anh. 22. c u. III. Anh. 40.) — Antw.: $\frac{4}{3}ab^2\pi = 150{,}8$ ccm.

90. Wie groß ist der Inhalt eines abgeplatteten Umdrehungsellipsoides, das durch Drehung einer Ellipse von den Halbachsen a u. b um die kleine Achse 2b entsteht? (Vgl. II. Anh. 22. c, III. Anh. 12. b, III. 20. Zus.) — Was ist der Rauminhalt des als abgeplattetes Rotationsellipsoid aufgefaßten Erdkörpers, wenn die Abplattung $\frac{a-b}{a} = \frac{1}{299}$, und ein Grad des Aequators gleich 15 geogr. Meilen ist? — Antw. $\frac{4}{3}a^2b\pi = 1\,082\,840$ Millionen Kubikkilometer.

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN