Die Festigkeitslehre

Lauenstein, Rudolf

Stuttgart, 1902

HANDBUCH DER ARCHITEKTUR.

I. Teil. Allgemeine Hochbaukunde.

1. Band, Heft 1: **Einleitung. — Die Technik der wichtigeren Baustoffe.** Zweite Aufl.; 10 M. — Heft 2: **Die Statik der Hochbaukonstruktionen.** Dritte Aufl.; 15 M.

2. Band: **Die Bauformenlehre.** Zweite Aufl.; 16 M.

3. Band: **Die Formenlehre des Ornaments.** In Vorbereitung.

4. Band: **Die Keramik in der Baukunst.** 8 M.

5. Band: **Die Bauführung.** 12 M.

II. Teil. Die Baustile.

1. Band: **Die Baukunst der Griechen.** Zweite Aufl.; 20 M.

2. Band: **Die Baukunst der Etrusker und der Römer.** (Vergriffen.) Zweite Aufl. in Vorbereitung.

3. Band, Erste Hälfte: **Die altchristliche und byzantinische Baukunst.** Zweite Aufl.; 12 M. — Zweite Hälfte: **Die Baukunst des Islam.** Zweite Aufl.; 12 M.

4. Band: **Die romanische und die gotische Baukunst.** — Heft 1: **Die Kriegsbaukunst.** (Vergriffen.) Zweite Aufl. in Vorbereitung. — Heft 2: **Der Wohnbau.** (Vergriffen.) Zweite Aufl. in Vorbereitung. — Heft 3: **Der Kirchenbau.** 16 M. — Heft 4: **Die Ausstattung der Kirchen.** In Vorbereitung.

5. Band: **Die Baukunst der Renaissance in Italien.** In Vorbereitung.

6. Band: **Die Baukunst der Renaissance in Frankreich.** — Heft 1: **Historische Darstellung der Entwickelung des Baustils.** 16 M. — Heft 2: **Struktive und ästhetische Stilrichtungen. — Kirchliche Baukunst.** 16 M.

7. Band: **Die Baukunst der Renaissance in Deutschland, Holland, Belgien und Dänemark.** 16 M.

III. Teil. Die Hochbaukonstruktionen.

1. Band: **Konstruktionselemente. — Fundamente.** Dritte Aufl.; 15 M.

2. Band: **Raumbegrenzende Konstruktionen.** — Heft 1: **Wände und Wand-Öffnungen.** Zweite Aufl.; 24 M. — Heft 2: **Einfriedigungen, Brüstungen und Geländer; Balkone, Altane und Erker; Gesimse.** Zweite Aufl.; 20 M. — Heft 3, a: **Balkendecken.** Zweite Aufl.; 15 M. — Heft 3, b: **Gewölbte Decken; verglaste Decken und Deckenlichter.** Zweite Aufl.; 24 M. — Heft 4: **Dächer; Dachformen; Dachstuhlkonstruktionen.** Zweite Aufl.; 18 M. — Heft 5: **Dachdeckungen.** Zweite Aufl.; 26 M.

3. Band, Heft 1: **Fenster, Thüren und andere bewegliche Wandverschlüsse.** Zweite Aufl.; 21 M. — Heft 2: **Anlagen zur Vermittelung des Verkehrs in den Gebäuden.** Zweite Aufl.; 14 M. — Heft 3: **Ausbildung der Wand-, Decken und Fussbodenflächen.** In Vorbereitung.

4. Band: **Versorgung der Gebäude mit Licht und Luft, Wärme und Wasser.** Zweite Aufl.; 22 M.

5. Band: **Koch-, Spül-, Wasch- und Bade-Einrichtungen; Entwässerung und Reinigung der Gebäude.** Zweite Aufl.; 18 M.

6. *Band*: **Sicherungen gegen Einbruch; Anlagen zur Erzielung einer guten Akustik; Glockenstühle; Sicherungen gegen Feuer, Blitzschlag, Bodensenkungen und Erderschütterungen; Stützmauern; Terrassen und Perrons, Freitreppen und Rampen-Anlagen; Vordächer; Eisbehälter und sonstige Kühlanlagen.** Zweite Aufl.; 12 M.

IV. Teil. Entwerfen, Anlage und Einrichtung der Gebäude.

1. *Halbband*: **Die architektonische Komposition.** Zweite Aufl.; 16 M.
2. *Halbband*: **Gebäude für die Zwecke des Wohnens, des Handels und Verkehrs.** — Heft 1: **Wohnhäuser.** 21 M. — Heft 2: **Gebäude für Geschäfts- und Handelszwecke.** Unter der Presse. — Heft 3: **Gebäude für den Post-, Telegraphen- und Fernsprechdienst.** 10 M.
3. *Halbband*: **Gebäude für die Zwecke der Landwirtschaft und der Lebensmittel-Versorgung.** — Heft 1: **Landwirtschaftliche Gebäude und verwandte Anlagen.** Zweite Aufl.; 12 M. — Heft 2: **Gebäude für Lebensmittel-Versorgung.** Zweite Aufl.; 16 M.
4. *Halbband*: **Gebäude für Erholungs-, Beherbergungs- und Vereinszwecke.** — Heft 1: **Schankstätten und Speisewirtschaften, Kaffeehäuser und Restaurants; Volksküchen und Speiseanstalten für Arbeiter; Volks-Kaffeehäuser; öffentliche Vergnügungsstätten; Festhallen; Gasthöfe, Schlaf- und Herbergshäuser.** Zweite Aufl.; 13 M. — Heft 2: **Baulichkeiten für Kur- und Badeorte; Gebäude für Gesellschaften und Vereine; Baulichkeiten für den Sport. Sonstige Baulichkeiten für Vergnügen und Erholung.** Zweite Aufl.; 11 M.
5. *Halbband*: **Gebäude für Heil- und sonstige Wohlfahrts-Anstalten.** — Heft 1: **Krankenhäuser.** 42 M. — Heft 2: **Verschiedene Heil- und Pflege-Anstalten; Versorgungs-, Pflege- und Zufluchtshäuser.** (Vergriffen.) Zweite Aufl. in Vorbereitung. — Heft 3: **Bade- und Schwimm-Anstalten.** 15 M. — Heft 4: **Wasch- und Desinfektions-Anstalten.** 9 M.
6. *Halbband*: **Gebäude für Erziehung, Wissenschaft und Kunst.** — Heft 1: **Niedere und höhere Schulen.** 16 M. — Heft 2: **Hochschulen.** (Vergriffen.) Zweite Aufl. in Vorbereitung. — Heft 3: **Künstler-Ateliers, Kunstakademien und Kunstgewerbeschulen; Konzerthäuser und Saalbauten.** 15 M. — Heft 4: **Gebäude für Sammlungen und Ausstellungen.** (Vergriffen.) Zweite Aufl. in Vorbereitung. — Heft 5: **Theater und Cirkusgebäude.** In Vorbereitung.
7. *Halbband*: **Gebäude für Verwaltung, Rechtspflege und Gesetzgebung; Militärbauten.** — Heft 1: **Gebäude für Verwaltung und Rechtspflege.** Zweite Aufl.; 27 M. — Heft 2: **Parlaments- und Ständehäuser; Gebäude für militärische Zwecke.** Zweite Aufl.; 12 M.
8. *Halbband*: **Kirchen, Denkmäler und Bestattungsanlagen.** — Heft 1: **Kirchen.** In Vorbereitung. — Heft 2 und 3: **Denkmäler.** Unter der Presse. — Heft 4: **Brunnendenkmäler.** In Vorbereitung. — Heft 5: **Bestattungsanlagen.** In Vorbereitung.
9. *Halbband*: **Der Städtebau.** 32 M.
10. *Halbband*: **Die Garten-Architekur.** 8 M.

In eleganten Halbfranzbänden je 3 Mark mehr.

Jeder Band bildet ein für sich abgeschlossenes Ganzes und ist einzeln käuflich.

Die
Festigkeitslehre.

Elementares Lehrbuch

für den Schul- und Selbstunterricht sowie zum Gebrauch in der Praxis

nebst einem Anhang enthaltend

Tabellen der Potenzen, Wurzeln, Kreisumfänge und Kreisinhalte

bearbeitet von

R. Lauenstein,
Ingenieur und Professor an der Baugewerkeschule zu Karlsruhe.

Siebente Auflage.

Mit 116 Abbildungen im Text.

Stuttgart 1902.
Arnold Bergsträßer Verlagsbuchhandlung
A. Kröner.

Druck der Union Deutsche Verlagsgesellschaft in Stuttgart.

Vorwort.

Das vorliegende Lehrbuch ist zunächst für den Unterricht an technischen Mittelschulen bestimmt; daneben soll es zum Selbststudium sowie zum Gebrauche in der Praxis dienen.

Bei dem Zwecke, den das Lehrbuch verfolgt, mußte ich mich darauf beschränken, die bekannten Lehren der Festigkeitslehre in möglichst übersichtlicher und leicht faßlicher Form zu geben.

Die mathematischen Kenntnisse, welche vorausgesetzt werden, sind nicht sehr bedeutend und gehen nicht über das Maß dessen, was auf guten Baugewerkeschulen gelehrt wird, hinaus. Es ließ sich dabei nicht vermeiden, daß an einzelnen Stellen auf eine streng wissenschaftliche Durchführung verzichtet werden mußte (wie z. B. bei der Theorie des Zerknickens, wo als Biegungskurve statt der Sinuslinie die Parabel angenommen wurde); außerdem sind einige Formeln, die sich nur mit Hilfe der höheren Mathematik ableiten lassen, lediglich als Resultate gegeben, so z. B. die Gleichung 107) S. 140 und die Gleichungen 112) und 113) S. 143. (Die Ableitung dieser Gleichungen kann übrigens in den dort angeführten Quellen nachgesehen werden.)

Die beigefügten Aufgaben nebst ihren Lösungen, deren Zahl durch den Lehrer noch beliebig vermehrt werden kann, sollen dazu dienen, die Anwendung der entwickelten Gleichungen gehörig zu üben, und ich halte eine derartige Uebung bei den Schülern für durchaus wichtig.

Die Inanspruchnahme des Schmiedeeisens für ruhig und stetig belastete Hochbaukonstruktionen, die bislang auf Grund alter Bestimmungen ziemlich allgemein noch zu 750 kg/qcm angenommen wurde, ist unter Berücksichtigung der bedeutenden Fortschritte, welche das Eisenhüttenwesen in den letzten Jahren gemacht hat, nicht mehr aufrecht zu erhalten. Ich habe deshalb den Vorschlägen von Heinzerling und Intze und auch dem Vorgehen von Scharowsky und anderer namhafter Ingenieure folgend die Inanspruchnahme des Schmiedeeisens zu 1000 kg/qcm angenommen.

Die freundliche Aufnahme, welche das Buch bisher gefunden, läßt mich hoffen, daß dasselbe sich auch fernerhin Freunde erwerben wird. Die Vorschläge der Herren Fachgenossen zur Verbesserung und Vervollkommnung des Buches werde ich, wie immer, dankbar entgegennehmen und etwaige Wünsche bezüglich der Behandlung und der Auswahl des Stoffes nach Möglichkeit berücksichtigen.

Karlsruhe, Januar 1902.

R. Lauenstein.

Inhalt.

Anhang.

§ 1.

Vorbemerkungen.

Wirken auf einen festen Körper irgend welche äußeren Kräfte, so tritt unter allen Umständen eine Formänderung des Körpers ein.

Wird z. B. ein am oberen Endpunkte befestigter gerader Stab durch ein unten angehängtes Gewicht belastet, so tritt stets eine Verlängerung und zugleich eine Einschnürung (Verkleinerung des Querschnittes) des Stabes ein, wie groß auch immer die Festigkeit des Materials und wie klein auch immer das angehängte Gewicht sein möge.

Solange die Formänderungen eine gewisse Grenze, die sog. Elastizitätsgrenze, nicht überschreiten, verschwinden dieselben wieder, sobald die äußeren Kräfte zu wirken aufhören, und der Körper nimmt seine ursprüngliche Form wieder an. Diese Eigenschaft der Körper nennt man Elastizität.

Vergrößert man die äußeren Kräfte so weit, daß die Elastizitätsgrenze überschritten wird, so verschwinden nach Aufhören der Kräfte die Formänderungen nicht mehr vollständig; es treten vielmehr bleibende Formänderungen ein, bis schließlich durch weitere Steigerung der äußeren Kräfte eine Zerstörung des Körpers erfolgt.

Den durch die äußeren Kräfte hervorgebrachten Formänderungen wirken nun innere Kräfte als Widerstände entgegen, welche abhängig sind von der Art und Weise, in welcher die äußeren Kräfte auf den Körper einwirken. Es lassen sich folgende Fälle unterscheiden:

1) Die Kraft P wirkt in der Längsrichtung des Körpers und sucht denselben entweder auszudehnen (Fig. 1a) oder zusammenzudrücken (Fig. 1b). Bei dieser Kraftäußerung tritt der Widerstand gegen Zug bezw. Druck auf.

2) Die Kraft P wirkt unter einem Winkel (meist 90^0) gegen die Längsrichtung des Körpers und sucht denselben durchzubiegen (Fig. 2). Hierbei entsteht der Widerstand gegen Biegung.

3) Die Kraft P sucht eine Trennung des Körpers in einer Fläche zu bewirken und erzeugt dabei den Widerstand gegen Abscherung (Fig. 3 u. 3a).

4) Die Kraft P wirkt in der Längsrichtung des Körpers, dessen Länge im Vergleich zu seinem Querschnitt so groß ist, daß ein seitliches Ausbiegen

eher als ein Zerdrücken eintritt (Fig. 4). Der hierbei auftretende Widerstand heißt der *Widerstand gegen Zerknicken.*

5) Die Kraft P strebt den Körper um seine Längsachse zu verdrehen und erzeugt dabei den *Widerstand gegen Verdrehung* (Fig. 5).

Fig. 1a.

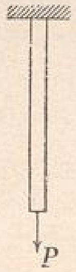


Fig. 1b.

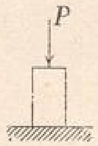
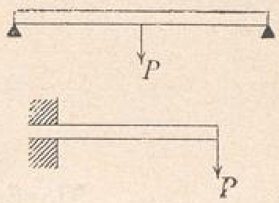


Fig. 2.



Die Widerstände können entweder einzeln oder auch gleichzeitig in einem Körper auftreten. So z. B. wird der Balken eines versteiften Trägers gleich-

Fig. 3.

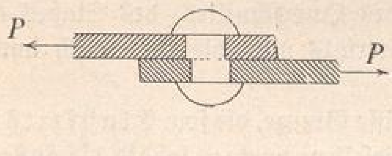


Fig. 3a.

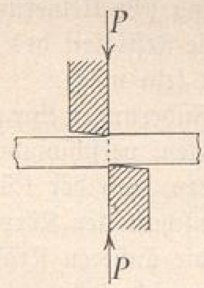


Fig. 4.

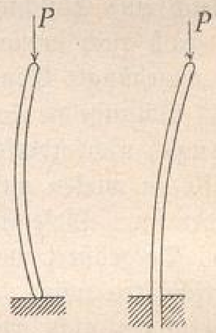
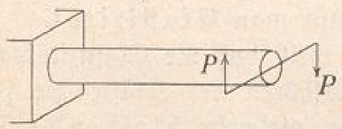


Fig. 5.



zeitig auf Biegung und auf Druck beansprucht, eine Welle gleichzeitig auf Biegung und auf Verdrehung.

Um nun die bei Einwirkung äußerer Kräfte auftretenden inneren Widerstände näher untersuchen zu können, bezieht man diese auf die Flächeneinheit und nennt den auf die Flächeneinheit wirkenden Widerstand: *Spannung.*

Es soll hier in der Folge

als *Flächeneinheit* das *Quadratcentimeter,*
als *Krafteinheit* das *Kilogramm*

zu Grunde gelegt werden.

Je nach der Größe der Spannung nennt man:

Tragfestigkeit diejenige Spannung, welche der Elastizitätsgrenze entspricht, bei welcher also ein Stab bis zur Elastizitätsgrenze ausgedehnt oder zusammengedrückt ist.

Bruchfestigkeit diejenige Spannung, bei welcher eine Zerstörung des Materials eintritt.

Ist bei einem Materiale die Bruchfestigkeit erheblich größer als die Tragfestigkeit, so nennt man das Material zäh; ist dagegen die Bruchfestigkeit nur wenig größer als die Tragfestigkeit, so ist das Material spröde.

Elastizitätsmodul kann man erklären als diejenige Spannung, bei welcher ein Stab um seine eigene Länge ausgedehnt oder zusammengedrückt würde, vorausgesetzt, daß die Elastizitätsgrenze dabei nicht überschritten würde und daß das Material eine solche Formänderung überhaupt zuließe.

Da bei Eintritt bleibender Formänderungen ein Körper seine ursprüngliche Beschaffenheit nicht mehr besitzt, vielmehr schon als teilweise zerstört angesehen werden kann, so darf bei statischen Konstruktionen die Elastizitätsgrenze niemals überschritten werden. Diejenige Spannung, welche bei Bauausführungen auf die Dauer und mit Sicherheit dem Materiale zugemutet werden kann, die zulässige Spannung oder zulässige Inanspruchnahme, muß daher immer kleiner als die Tragfestigkeit sein.

Das Verhältnis der zulässigen Inanspruchnahme zu der Bruchfestigkeit heißt der Sicherheitsgrad.

Gewöhnlich wird bei Eisenkonstruktionen für die zulässige Inanspruchnahme ein gewisser Teil der Tragfestigkeit, bei Steinkonstruktionen meistens ein gewisser Teil der Bruchfestigkeit angenommen.

Es sollen für die Folge nachstehende, ziemlich allgemein verbreitete Bezeichnungen benutzt werden.

k = zulässige Inanspruchnahme,
K = Bruchfestigkeit,
E = Elastizitätsmodul.

Für diese Größen lassen sich bestimmte, unter allen Umständen gültige Zahlenwerte für die verschiedenen Materialien nicht angeben; namentlich gilt dies für die zulässige Inanspruchnahme, welche sowohl abhängig ist von der Form und Größe des Querschnittes als auch von der Güte des Materials, sowie von der Art der Beanspruchung desselben. Häufig sind lediglich die baupolizeilichen Vorschriften maßgebend, die aber auch wieder für verschiedene Orte verschieden sein können. Bei größeren statischen Konstruktionen (z. B. bei großen Brücken) pflegt man wohl besondere Versuche mit dem zu verwendenden Baustoffe anzustellen, um die genaueren Zahlenwerte der Tragfestigkeit, Bruchfestigkeit und des Elastizitätsmoduls zu ermitteln.

Die folgende für Baukonstruktionen gültige Tabelle gibt für die wichtigsten Materialien die aus zahlreichen Versuchen gewonnenen Mittelwerte der Größen E und K, sowie die für ruhende Belastungen üblichen bezw. vorgeschriebenen Werte von k in Kilogramm für ein Quadratcentimeter.

Tabelle für Baukonstruktionen.

Material	Elastizitätsmodul E	Bruchfestigkeit K		Zulässige Inanspruchnahme k	
		Zug	Druck	Zug	Druck
Gußeisen	1 000 000	1200	6000	250	500
Schmiedeeisen . . .	2 000 000	4000	3000	1000 (750)	1000 (750)
Stahl	2 200 000	6000	6000	1200	1200
Tannenholz	100 000	800	400	60	50
Kiefernholz	100 000	900	450	100	60
Eichen- u. Buchenholz	120 000	1000	500	100	80
Glas	750 000	250	1500	—	75
Kalkstein	120 000	—	300—500	—	30—50
Sandstein	100 000	—	200—300	—	20—30
Ziegel	—	—	60—120	—	6—12
Kalkmörtel	—	—	40	—	4
Zementmörtel . . .	—	—	100—150	—	10—15
Baugrund (guter) . .	—	—	—	—	2,5—4

Die eingeklammerten Werte für Schmiedeeisen gelten für solche Bauteile, welche bedeutenden Erschütterungen oder starken Belastungswechseln ausgesetzt sind.

Für gerades Eisenwellblech ist k = 750 (Zug oder Druck)
„ gewölbtes „ „ k = 500 „ „ „

Ueber die zulässige Materialbeanspruchung bei Maschinenkonstruktionen sind eingehende Festigkeitsversuche angestellt von Wöhler, Spangenberg, C. v. Bach u. a.

Die Wöhler'schen Versuche ergaben folgende Thatsachen:

Der Bruch des Eisens läßt sich bei wiederholter Beanspruchung durch eine weit geringere Kraftwirkung erreichen, als bei einmaliger Beanspruchung möglich ist. Die Tragfähigkeit nimmt also ab, wenn die Belastung keine ruhende, sondern eine oft wechselnde ist.

Die Abnahme der Tragfähigkeit ist um so größer, je größer der Unterschied der oberen und unteren Spannungsgrenze ist.

Selbst bei sehr oft wiederholter Belastung wird das Eisen nicht zerstört, wenn die Beanspruchung auf ein gewisses Maß beschränkt bleibt.

Für die Größe der zulässigen Inanspruchnahme sind danach folgende Belastungsfälle als maßgebend zu Grunde zu legen:

1) Die Belastung ist eine ruhende, unveränderliche.

2) Die Belastung wechselt beliebig oft zwischen den Grenzen Null und einem größten Werte (z. B. bei wiederholter Ausdehnung bezw. Zusammendrückung, wiederholter Biegung, wiederholter Drehung nach einer Richtung hin). Für die zulässige Inanspruchnahme ist hier nur $^2/_3$ der für ruhende Belastung gültigen Werte zu setzen.

3) Die Belastung wechselt beliebig oft zwischen einem größten positiven und einem in absoluter Beziehung gleich großen negativen Werte (z. B. bei

wiederholter Biegung und wiederholter Drehung nach entgegengesetzten Richtungen, sowie bei wiederholter Ausdehnung und darauf folgender Zusammendrückung). Bei diesem Belastungsfall darf für die zulässige Inanspruchnahme nur $^1/_3$ der für ruhende Belastung gültigen Werte eingesetzt werden.

Danach ergeben sich je nach der Art der Beanspruchung bezw. Belastung für die zulässige Inanspruchnahme der verschiedenen Eisensorten folgende Tabellen (nach C. v. Bach):

I. Die Belastung ist ruhend.

Material	k =				
	Zug	Druck	Biegung	Schub	Drehung
Gußeisen	300	900	450	300	300
Schweißeisen	900	900	900	720	360
Flußeisen	900—1200	900—1200	900—1200	720—960	600—840
Stahlguß (Form-Flußeisen)	600—900	900—1200	750—1050	480—840	480—840
Martinstahl	1200	1200	1200	960	900
Tiegelgußstahl	1500	1500	1500	1200	1200

II. Die Belastung wechselt zwischen Null und einem Maximum.

Material	k =				
	Zug	Druck	Biegung	Schub	Drehung
Gußeisen	200	600	300	200	200
Schweißeisen	600	600	600	480	240
Flußeisen	600—800	600—800	600—800	480—640	400—560
Stahlguß (Form-Flußeisen)	400—600	600—900	500—700	320—560	320—560
Martinstahl	800	800	800	640	600
Tiegelgußstahl	1000	1000	1000	800	800

III. Die Belastung wechselt zwischen einem Maximum und einem Minimum.

Material	k =				
	Zug	Druck	Biegung	Schub	Drehung
Gußeisen	100	300	150	100	100
Schweißeisen	300	300	300	240	120
Flußeisen	300—400	300—400	300—400	240—320	200—280
Stahlguß (Form-Flußeisen)	200—300	300—450	250—350	160—280	160—280
Martinstahl	400	400	400	320	300
Tiegelgußstahl	500	500	500	400	400

Für ungehärteten Federstahl (Belastungsfall II, Biegung) ist: $k = 3600$.
„ gehärteten „ („ II, „) „: $k = 4300$.

Für die gehärteten Federn der Lokomotiven und Eisenbahnwagen kann man etwa annehmen: $k = 6000$.

§ 2.

Widerstand gegen Zug und Druck.

Eine am oberen Endpunkte aufgehängte und durch ein Gewicht P belastete prismatische Stange von F qcm Querschnitt kann angesehen werden als bestehend aus F einzelnen Stangen von je 1 qcm Querschnitt.

Ist k die zulässige Inanspruchnahme, so kann jede dieser Einzelstangen belastet werden mit k kg, folglich die ganze Stange, deren Querschnitt F qcm beträgt, mit k . F kg, daher:

$$\mathbf{P = F k} \qquad \text{. . . . . 1)}$$

Belastung = Querschnitt × Inanspruchnahme.

Die Belastung erzeugt nach § 1 in der Stange, deren Länge = l sein möge, eine Verlängerung λ, welche sich, wie die Erfahrung lehrt, gleichmäßig über die ganze Länge der Stange verteilt. Durch Versuche ist ferner festgestellt, daß innerhalb der Elastizitätsgrenze die Verlängerung in demselben Verhältnis zu- oder abnimmt, als die Belastung P selbst, so daß z. B. bei einer und derselben Stange 2 P die doppelte Verlängerung, $^1/_4$ P nur den vierten Teil der Verlängerung erzeugen würde als P.

Die Verlängerungen verhalten sich also wie die Belastungen.

In einer Einzelstange von 1 qcm Querschnitt und l cm Länge entsteht nun die Verlängerung λ durch die Belastung k. Nach § 1 erzeugt der Elastizitätsmodul E in derselben Stange die Verlängerung l, folglich ist:

$$\frac{\lambda}{l} = \frac{\mathbf{k}}{\mathbf{E}} \qquad \text{. . . . . 2)}$$

Setzt man hierin für k den sich aus Gl. 1) ergebenden Wert:

$$k = \frac{P}{F}$$

ein, so erhält man für die Verlängerung λ, welche in einer Stange von F qcm Querschnitt und l cm Länge durch eine Belastung von P kg erzeugt wird, den Ausdruck:

$$\lambda = \frac{\mathbf{P\,l}}{\mathbf{F\,E}} \qquad \text{. . . . . 3)}$$

Die Verlängerung λ steht in geradem Verhältnis zu der Belastung und der Länge der Stange, in umgekehrtem Verhältnis zu dem Querschnitt und dem Elastizitätsmodul.

Das Verhältnis:

$$\frac{\text{Verlängerung}}{\text{Ursprüngliche Länge}} = \frac{\lambda}{l} = \varepsilon$$

heißt die Dehnung.

Die Dehnung wird hervorgebracht durch die Spannung k und man nennt das Verhältnis:

$$\frac{\text{Dehnung}}{\text{Spannung}} = \frac{\varepsilon}{k} = \frac{\lambda}{l\,k}$$

den Dehnungskoeffizient, den umgekehrten (reziproken) Wert aber den Elastizitätsmodul E. Danach ist:

$$E = \frac{k\,l}{\lambda} = \frac{P\,l}{F\,\lambda}$$

woraus sich für die Verlängerung λ wieder der obige Ausdruck (Gl. 3) ergibt.

Die Gleichungen 1, 2 und 3 gelten ebenfalls für einen am unteren Endpunkte befestigten oder durch eine Unterlage unterstützten kurzen Stab, auf welchen am oberen Endpunkte die Belastung P wirkt. Die Druckkraft P erzeugt in dem Stabe die Druckspannung k und die Verkürzung λ.

Aufgabe 1. Wenn eine Hängesäule von Eichenholz eine Belastung von 14000 kg mit Sicherheit tragen soll, wie groß muß die Seite a des quadratischen Querschnittes genommen werden? (k = 100)

Auflösung. Nach Gl. 1) ist:

$$F = \frac{P}{k} = \frac{14000}{100} = 140 \text{ qcm}$$

Nun ist:

$$F = a^2$$

folglich:

$$a^2 = 140$$

$$a = \sqrt{140} = \backsim 12 \text{ cm}$$

Aufgabe 2. Wie groß muß der Durchmesser d einer schmiedeeisernen Stange sein, welche in der Achsenrichtung mit 25000 kg belastet werden soll? (k = 1000)

Auflösung. Nach Gl. 1) ist:

$$F = \frac{P}{k} = \frac{25000}{1000} = 25 \text{ qcm}$$

Nun ist:

$$F = \frac{d^2 \pi}{4}$$

folglich:

$$\frac{d^2 \pi}{4} = 25$$

$$d = \sqrt{\frac{25 \cdot 4}{3{,}14}} = \backsim 5{,}6 \text{ cm}$$

Aufgabe 3. Welche Belastung kann ein $1\frac{1}{2}$ Stein starker quadratischer Pfeiler aus Ziegelstein tragen bei einer Inanspruchnahme k = 7 kg?

Auflösung. Bei Normalziegeln (25 × 12 × 6,5 cm) ist die Seitenlänge des Pfeilers bei 1 cm Fuge:

$$a = 25 + 1 + 12 = 38 \text{ cm}$$

folglich der Querschnitt:

$$F = 38 \,.\, 38 = 1444 \text{ qcm}$$

und nach Gl. 1):

$$P = F \,.\, k = 1444 \,.\, 7 = 10108 \text{ kg}$$

Aufgabe 4. Wie groß muß der Durchmesser d einer vollen gußeisernen kurzen Säule sein, welche eine Last von 20000 kg zu tragen hat? ($k = 500$)

Auflösung. Nach Gl. 1) ist:

$$F = \frac{P}{k} = \frac{20000}{500} = 40 \text{ qcm}$$

$$\frac{d^2 \pi}{4} = 40$$

$$d = 7{,}14 \text{ cm}$$

Aufgabe 5. Wie groß muß die Seite a des quadratischen Fußes der vorigen Säule sein, wenn der Unterstützungsquader mit $k = 25$ kg beansprucht werden darf, und wie groß ist die Beanspruchung k_1 des Baugrundes, wenn der Unterstützungsquader der Säule 75 cm lang und 70 cm breit ist:

Auflösung.

$$a^2 = \frac{20000}{25} = 800 \text{ qcm}$$

$$a = 28{,}3 \text{ cm}$$

$$k_1 = \frac{20000}{75 \,.\, 70} = 3{,}8 \text{ kg}$$

Aufgabe 6. Der Kolben einer hydraulischen Presse hat $D = 40$ cm Durchmesser. Wie stark ist jede der vier cylindrischen schmiedeeisernen Säulen bei der Beanspruchung $k = 1000$ zu nehmen, wenn der Wasserdruck $p = 160$ kg für 1 qcm (160 Atmosphären) beträgt?

Auflösung. Der Kolbenquerschnitt ist:

$$\frac{D^2 \pi}{4} = \frac{40^2 \,.\, 3{,}14}{4} = 1256 \text{ qcm}$$

folglich kommt auf jede der vier Säulen die Kraft:

$$P = \frac{1256 \,.\, 160}{4} = 50240 \text{ kg}$$

Nach Gl. 1) wird dann der erforderliche Säulenquerschnitt:

$$F = \frac{P}{k}$$

also:

$$F = \frac{d^2 \pi}{4} = \frac{50240}{1000} = 50{,}24 \text{ qcm}$$

woraus folgt:

$$d = 8 \text{ cm}$$

Aufgabe 7. Eine Kette ist belastet mit $P = 4000$ kg. Es soll der erforderliche Durchmesser d des Ketteneisens berechnet werden unter Annahme von $k = 637$ kg/qcm.

Auflösung. Die Last verteilt sich auf 2 Querschnitte des Ketteneisens. Danach:

$$2 \frac{d^2 \pi}{4} 637 = 4000$$

$$\frac{d^2 \pi}{4} = \frac{4000}{2 . 637} = 3{,}14 \text{ qcm}$$

$$d = 2 \text{ cm}$$

Aufgabe 8. Für einen Dampfcylinder von D = 60 cm Durchmesser, in welchen der Dampf mit 8 Atmosphären Ueberdruck (p = 8 kg/qcm) eintritt, soll die Anzahl und der Durchmesser der Deckelschrauben berechnet werden.

Auflösung. Der Durchmesser des Kreises, in dem die Deckelschrauben angeordnet sind, beträgt etwa $D_1 = 70$ cm; der Umfang desselben ist also:

$$D_1 \pi = 70 . 3{,}14 = 220 \text{ cm}$$

Nimmt man die Entfernung der Schrauben voneinander zu 14 cm an, so sind erforderlich:

$$i = \frac{220}{14} = \backsim 16 \text{ Schrauben.}$$

Der Dampfdruck ist:

$$\frac{D^2 \pi}{4} . p = \frac{60^2 . 3{,}14}{4} . 8 = \backsim 22620 \text{ kg}$$

Eine Schraube ist daher belastet mit:

$$P = \frac{22620}{16} = 1414 \text{ kg}$$

Für k = 350 kg/qcm ergibt sich der erforderliche Kernquerschnitt zu:

$$\frac{d_1{}^2 \pi}{4} = \frac{1414}{350} = 4{,}04 \text{ qcm}$$

und danach:

$$d_1 = 2{,}27 \text{ cm}$$

Der nächstliegende Wert der Whitworth'schen Schraubentabelle ist:

$$d_1 = 2{,}39 \text{ cm}$$

welche dem äußeren Schraubendurchmesser

$$d = 2{,}86 \text{ cm} = 1^1/_8{}''$$

entspricht.

Aufgabe 9. Wenn der äußere Durchmesser D einer hohlen gußeisernen Säule, welche eine Last von 30000 kg zu tragen hat, = 12 cm ist, wie groß muß dann der innere Durchmesser d angenommen werden? (k = 500)

Auflösung.

$$F = \frac{P}{k} = \frac{30000}{500} = 60 \text{ qcm}$$

$$\frac{(D^2 - d^2) \pi}{4} = 60$$

$$D^2 - d^2 = \frac{4 . 60}{3{,}14}$$

$$d^2 = D^2 - \frac{4 . 60}{3{,}14} = 144 - 76{,}4 = 67{,}6$$

$$d = 8{,}2 \text{ cm}$$

Die Wandstärke der Säule wird dann:

$$\delta = \frac{D - d}{2} = \frac{12 - 8{,}2}{2} = 1{,}9 \text{ cm}$$

Aufgabe 10. Wie viel beträgt die Zusammendrückung der obigen Säule, wenn die Länge derselben 140 cm ist?

Auflösung. Nach Gl. 3) S. 6 ist:

$$\lambda = \frac{30000 \,.\, 140}{60 \,.\, 1000000} = 0{,}07 \text{ cm}$$

Aufgabe 11. Eine schmiedeeiserne Stange von 500 cm Länge, deren Querschnitt ein Rechteck von 5 cm Länge und 3 cm Breite bildet, wird belastet mit 12000 kg. Wie groß ist die Verlängerung?

Auflösung.

$$F = 5 \,.\, 3 = 15 \text{ qcm}$$

folglich:

$$\lambda = \frac{12000 \,.\, 500}{15 \,.\, 2000000} = 0{,}2 \text{ cm}$$

Aufgabe 12. Eine Stahlstange von 200 cm Länge und 4 qcm Querschnitt soll durch ein Gewicht um 0,12 cm ausgedehnt werden. Wie groß muß dieses Gewicht sein?

Auflösung. Nach Gl. 3) S. 6 ist:

$$P = \frac{\lambda \,.\, F \,.\, E}{l}$$

$$P = \frac{0{,}12 \,.\, 4 \,.\, 2200000}{200} = 5280 \text{ kg}$$

Aufgabe 13. Eine runde schmiedeeiserne Stange von 350 cm Länge wurde durch ein Gewicht von 8000 kg um 0,14 cm ausgedehnt. Wie groß war der Durchmesser d dieser Stange?

Auflösung. Da hier:

$$F = \frac{d^2 \pi}{4}$$

so ist nach Gl. 3) S. 6:

$$\frac{d^2 \pi}{4} = \frac{P\,l}{\lambda E} = \frac{8000 \,.\, 350}{0{,}14 \,.\, 2000000} = 10 \text{ qcm}$$

$$d = \backsim 3{,}6 \text{ cm}$$

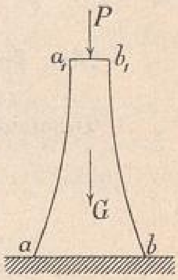
Bisher wurde das Eigengewicht der gezogenen oder gedrückten Körper nicht weiter berücksichtigt und kann sehr häufig auch ohne wesentlichen Fehler vernachlässigt werden. In manchen Fällen dagegen kann die Natur der Aufgabe es verlangen, das Eigengewicht, welches z. B. bei Mauerwerk eine bedeutende Rolle spielt, auch bei langen Schachtgestängen ziemlich erheblich ist, mit in Rechnung zu ziehen.

Ist G das Eigengewicht eines Mauerpfeilers, welcher oben durch das Gewicht P belastet ist, so wirkt auf den unteren Querschnitt die Last P + G. Die Grundfläche des Pfeilers muß daher die Größe erhalten:

$$F = \frac{P + G}{k}$$

Auf irgend einen anderen Querschnitt des Pfeilers kommt ein um so geringerer Teil des Eigengewichtes, je höher dieser Querschnitt über dem unteren liegt. Die Querschnitte könnten deshalb nach oben hin allmählich kleiner werden bis zum oberen, welcher nur durch P belastet wird.

Fig. 6.

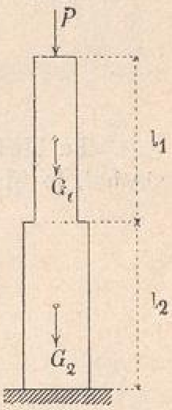


Bei genauer Berechnung ergeben sich als Begrenzungslinien des Pfeilers Kurven und man würde danach dem Pfeiler etwa die nebenstehende Form (Fig. 6) zu geben haben. Aus praktischen Gründen thut man dies indes selten, sondern stellt hohe Pfeiler gewöhnlich mit geradlinigen Böschungen her, indem man die Punkte a a_1 und b b_1 durch gerade Linien verbindet.

Bei höheren Gebäudemauern führt man einen Querschnitt unverändert durch ein oder zwei Stockwerke durch und geht dann nach oben hin sprungweise auf den nächsten kleineren Querschnitt über.

Die nebenstehende Fig. 7 möge eine solche abgetreppte Mauer darstellen. Ist F_1 der Querschnitt und G_1 das Gewicht des oberen, F_2 der Querschnitt und G_2 das Gewicht des unteren Teiles, so wird:

Fig. 7.



$$F_1 = \frac{P + G_1}{k}$$

$$F_2 = \frac{P + G_1 + G_2}{k}$$

Bezeichnet man mit γ das Gewicht der Kubikeinheit des Materiales, so ist:

$$G_1 = \gamma F_1 l_1$$
$$G_2 = \gamma F_2 l_2$$

Aufgabe 14. Ein 150 m langes schmiedeeisernes Schachtgestänge von quadratförmigem Querschnitt hat außer seinem Eigengewicht noch eine Last $P = 20000$ kg zu tragen. Dasselbe besteht aus 5 in der Längsrichtung miteinander verbundenen prismatischen Stäben von je $l = 30$ m Länge. Welchen Querschnitt muß jeder einzelne Stab (bei $k = 500$)*) erhalten, wenn das Gewicht von 1 ccm Schmiedeeisen: $\gamma = 0{,}0078$ kg beträgt?

Auflösung. Für den untersten Stab ist, wenn a_1 die Seite des quadratischen Querschnitts bedeutet:

$$a_1^2 = \frac{P + \gamma a_1^2 l}{k}$$

$$a_1^2 (k - \gamma l) = P$$

$$a_1^2 = \frac{P}{k - \gamma l} = \frac{20000}{500 - 0{,}0078 \,.\, 3000} = 42$$

$$a_1^2 = \sqrt{42} = 6{,}5 \text{ cm}$$

*) Bei Schachtgestängen nimmt man wegen der beständigen Bewegung die zulässige Beanspruchung nur gering an.

Das Gewicht des Stabes beträgt danach:

$$G_1 = \gamma\, l\, a_1^2 = 0{,}0078 \,.\, 3000 \,.\, 42 = 983 \text{ kg}$$

Für den zweiten Stab (von unten ab gerechnet) ist:

$$a_2^2 = \frac{P + G_1 + \gamma\, a_2^2\, l}{k}$$

Man findet:

$$a_2 = 6{,}6 \text{ cm} \quad ; \quad G_2 = 1030 \text{ kg}$$

Desgleichen für die weiteren Stäbe:

$$a_3 = 6{,}8 \text{ cm} \quad ; \quad G_3 = 1080 \text{ kg}$$
$$a_4 = 7{,}0 \text{ cm} \quad ; \quad G_4 = 1134 \text{ kg}$$
$$a_5 = 7{,}1 \text{ cm} \quad ; \quad G_5 = 1190 \text{ kg}$$

Das Gewicht des ganzen Gestänges beträgt:

$$G = 5417 \text{ kg}$$

Wäre das Gestänge mit überall gleichem Querschnitt ausgeführt, so würde sein:

$$a^2 = \frac{P + \gamma\, a^2 L}{k}$$

$$a^2 = \frac{P}{k - \gamma L} = \frac{20000}{500 - 0{,}0078 \,.\, 15000} = 52{,}2 \text{ qcm}$$

$$a = \sqrt{52{,}2} = \sim 7{,}2 \text{ cm}$$

$$G = \gamma\, L\, a^2 = 0{,}0078 \,.\, 15000 \,.\, 52{,}2 = 6107 \text{ kg}$$

Da die Beanspruchung k für das ganze Gestänge nahezu den gleichen Wert 500 hat, so ist nach Gl. 2) S. 6 die Verlängerung sehr angenähert:

$$\lambda = \frac{500 \,.\, 15000}{2000000} = 3{,}75 \text{ cm}$$

§ 3.

Flächenmomente und Säulenmomente*).

Unter dem statischen Moment einer Kraft, bezogen auf eine senkrecht zur Kraftebene stehende Achse, versteht man bekanntlich das Produkt aus der Kraft und dem rechtwinkligen Abstande derselben von der Achse (dem Hebelarm).

Wirken in derselben Ebene gleichzeitig mehrere Kräfte, so ist das statische Moment der Mittelkraft gleich der Summe der statischen Momente der einzelnen Kräfte**).

Dieser Satz der statischen Momente gilt auch für in verschiedenen Ebenen liegende Parallelkräfte und lautet dann:

Das statische Moment der Mittelkraft paralleler Kräfte in Bezug auf eine der Kraftrichtung parallele beliebige Ebene ist gleich der Summe der statischen Momente aller Einzelkräfte in Bezug auf dieselbe Ebene.

Bestehen die Parallelkräfte aus den Gewichten der einzelnen Massen-

---

*) Nach R. Land. Vergl. Zeitschr. d. V. d. J. 1897, S. 1246.

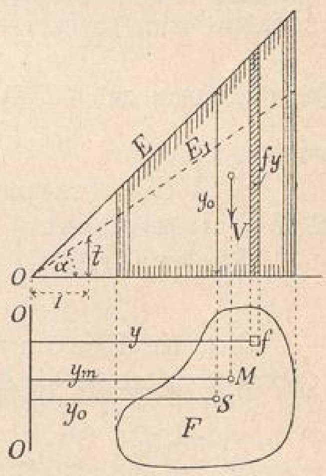
**) Siehe Lauenstein, Mechanik, 5. Aufl., § 6.

teilchen eines Körpers, ist also deren Mittelkraft gleich dem Gewichte der ganzen Körpermasse, so kann, da sich die Gewichtsteilchen wie die Massenteilchen verhalten, der obige Satz auch in der Fassung ausgesprochen werden:

Das statische Moment der ganzen Masse eines Körpers ist gleich der Summe der statischen Momente der einzelnen Massenteilchen, bezogen auf ein und dieselbe Ebene.

Hat der Körper die Gestalt einer sehr dünnen ebenen Platte, die man als gleichmäßig mit Masse bedeckte Fläche ansehen kann, so läßt sich, indem man die einzelnen Flächenteile als Gewichte auffaßt, auch der Begriff des statischen Momentes auf eine Fläche ausdehnen. In diesem Sinne erhält man den Satz:

Fig. 8.



Das statische Moment der ganzen Fläche (Fläche mal Schwerpunktsabstand), bezogen auf eine beliebige Ebene, ist gleich der Summe der statischen Momente der einzelnen Flächenteilchen, bezogen auf dieselbe Ebene.

Es sei nun eine beliebige Fläche F gegeben (Fig. 8) und eine Ebene senkrecht dazu, welche die Flächenebene in der Geraden O O schneidet. Die Gerade O O wird kurz als Achse bezeichnet. Ist dann y_0 der Abstand des Schwerpunktes S der Fläche F von der Achse, sind ferner $f_1\, f_2 \ldots$ die einzelnen Flächenteilchen und $y_1\, y_2 \ldots$ deren senkrechte Abstände von der Achse O O, so ist:

$$\mathbf{F\, y_0 = f_1\, y_1 + f_2\, y_2 + \ldots = \Sigma (f\, y)} \quad \ldots\ldots \quad 4)$$

Trägt man nun die Abstände y auf den zugehörigen f als Höhen auf und betrachtet das dadurch entstehende jedesmalige f y als den Inhalt eines Säulchens, so erhält man in der Gesamtheit als körperliche Darstellung von Σ (f y) eine über der Fläche F errichtete Säule, welche oben schräg begrenzt ist durch eine unter 45° gegen F geneigte Ebene E. Diese schneidet die Ebene der Fläche F in der Geraden O O.

Die über F errichtete oben abgeschrägte Säule, deren Inhalt mit V bezeichnet werden möge, ist also gleich dem statischen Moment (dem *Flächenmoment*) von F bezogen auf die Achse O O.

$$\mathbf{V = \Sigma (f\, y) = F\, y_0} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 5)$$

Wird die Säule, anstatt durch die unter 45° geneigte Ebene E, oben begrenzt durch eine Ebene E_1 mit dem Neigungswinkel α, welcher bestimmt ist durch die Höhe t im Abstande 1 von der O O ($\mathrm{tg}\, \alpha = t : 1$), und wird deren Inhalt mit V_α bezeichnet, so ist:

$$\frac{V_\alpha}{V} = \frac{t}{1}$$

oder

$$\mathbf{V_\alpha = t\, .\, V} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 6)$$

Das statische Moment eines Säulchens f y (kurz genannt **Säulenmoment**) bezogen auf die Achse O O ist nun $= f y \cdot y = f y^2$, folglich das Säulenmoment für die ganze Säule V, wenn y_m deren Schwerpunktsabstand von der O O bedeutet:

$$\mathbf{V} \cdot \mathbf{y}_m = \Sigma(\mathbf{f}\,\mathbf{y}^2) \quad \ldots\ldots\ldots \quad 7)$$

Für die Säule V_α mit den um t : 1 geänderten Höhen ergibt sich entsprechend:

$$\mathbf{V}_\alpha \cdot \mathbf{y}_m = \mathbf{t} \cdot \Sigma(\mathbf{f}\,\mathbf{y}^2) \quad \ldots\ldots\ldots \quad 8)$$

Der Ausdruck $\Sigma(f y^2)$ bedeutet die Summe aller Flächenteilchen, multipliziert mit dem Quadrate ihrer Abstände von der Achse O und wird das **Trägheitsmoment** der Fläche F in Bezug auf die Achse O genannt. Bezeichnet man dasselbe durch J_0, setzt also:

$$\mathbf{J}_0 = \Sigma(\mathbf{f}\,\mathbf{y}^2) \quad \ldots\ldots\ldots \quad 9)$$

so erhält man aus Gl. 7):

$$\mathbf{V} \cdot \mathbf{y}_m = \mathbf{J}_0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad 10)$$

oder in Worten:

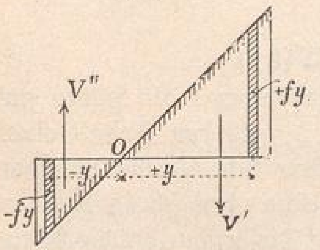
Das Säulenmoment der Säule $V = F y_0$ ist gleich dem Trägheitsmoment J_0 der Fläche F für die Achse O.

Für die Säule V_α ergibt sich ebenso:

$$\mathbf{V}_\alpha \cdot \mathbf{y}_m = \mathbf{t} \cdot \mathbf{J}_0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad 11)$$

Liegt die Achse O nicht, wie bisher angenommen, außerhalb der Fläche F, sondern schneidet sie dieselbe (wie in Fig. 9), so haben die auf verschiedenen Seiten der Achse liegenden Abstände y der Flächenteilchen f verschiedenes Vorzeichen, und folglich werden dann die zugehörigen Flächenmomente bei der Säulendarstellung nach verschiedenen Seiten der F-Ebene aufgetragen. Die beiden Säulenteile V′ und V″ gehen in diesem Falle in Keilstücke über, von denen eins positiv, das andere negativ zu nehmen ist, deren Momente also in Bezug auf die Achse O die gleiche Drehrichtung haben, so daß die von ihnen gelieferten Beiträge für das Trägheitsmoment J_0 gleiches Vorzeichen und zwar das positive haben, weil $J_0 = \Sigma(f y^2)$ als Ausdruck vierten Grades stets positiv sein muß.

Fig. 9.



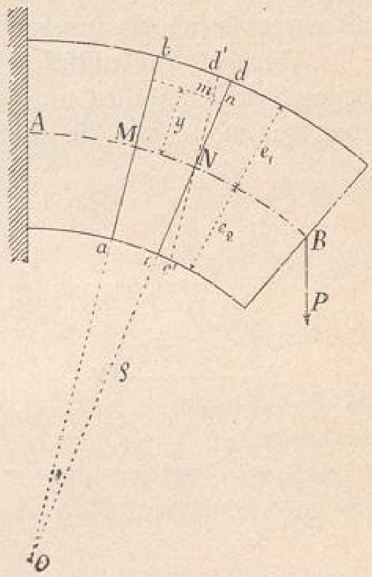
§ 4.

Widerstand gegen Biegung.

Ist ein gerader, in Bezug auf die Bildebene symmetrisch vorausgesetzter Balken mit seinem einen Ende eingespannt, und wird das andere freie Ende desselben durch ein in der Symmetrieebene angreifendes Gewicht P belastet, so erfährt derselbe dadurch eine Biegung (Fig. 10).

Denkt man sich den Balken aus einzelnen Fasern bestehend, welche der Längsachse parallel sind, so werden durch die Biegung die oberen Fasern verlängert, die unteren Fasern verkürzt. Zwischen der obersten und untersten Faserschicht muß sich eine mittlere senkrecht zur Bildebene stehende Faserschicht A B befinden, die weder verlängert noch verkürzt, sondern nur gebogen wird. Diese heißt die neutrale Faserschicht. Diese Schicht schneidet jeden durch den Körper gelegten Querschnitt in einer geraden Linie, welche die neutrale Achse des Querschnittes genannt wird.

Fig. 10.



Die beiden, sehr nahe aneinander liegenden Querschnitte ab und cd des Balkens (Fig. 10), welche vor der Biegung einander parallel waren, haben nach der Biegung eine gegeneinander geneigte Lage. Zieht man durch N zu ab die Parallele c′d′, so stellen die Abschnitte zwischen cd und c′d′ die Verlängerungen bezw. Verkürzungen der einzelnen Faserabschnitte dar, welche vor der Biegung sämtlich die Länge MN hatten. So z. B. ist mn die Verlängerung einer Faser, welche den Abstand y von der neutralen Faserschicht hat; d′d die Verlängerung der im Abstande e_1 von der neutralen liegenden äußersten Faser, cc′ die Verkürzung der untersten Faser im Abstande e_2 von der neutralen.

Nach Fig. 10 ist:

$$\frac{mn}{d'd} = \frac{y}{e_1}$$

Nach § 2 verhalten sich nun die Verlängerungen wie die Spannungen. Wird also mit s die Spannung der im Abstande y von der neutralen befindlichen Faser, mit k_1 die Spannung der auf der erhabenen Seite liegenden äußersten Faser bezeichnet, so ist:

$$\frac{mn}{d'd} = \frac{s}{k_1}$$

Aus den letzten beiden Gleichungen folgt:

$$\frac{\mathbf{s}}{\mathbf{k}_1} = \frac{\mathbf{y}}{\mathbf{e}_1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 12)$$

Ebenso wird:

$$\frac{\mathbf{s}}{\mathbf{k}_2} = \frac{\mathbf{y}}{\mathbf{e}_2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 13)$$

Die Spannungen der einzelnen Fasern eines gebogenen Balkens verhalten sich wie ihre Abstände von der neutralen Faser.

Die inneren Spannungen müssen den äußeren Kräften das Gleichgewicht halten. Denkt man sich den Balken durch eine im Abstande x vom Ende hindurchgelegte Querschnittsebene in zwei Teile zerschnitten (Fig. 11), so sind an der Schnittstelle solche in der Symmetrieebene angreifende äußere Kräfte anzubringen, daß dadurch genau dieselbe Wirkung hervorgebracht wird, als vorher durch die inneren Spannungen.

Für das Balkenstück B N (Fig. 11), welches, da die Biegung in den weitaus meisten Fällen nur sehr gering ist, wagerecht angenommen werden kann, hat man dann die allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen anzuwenden.

Fig. 11.

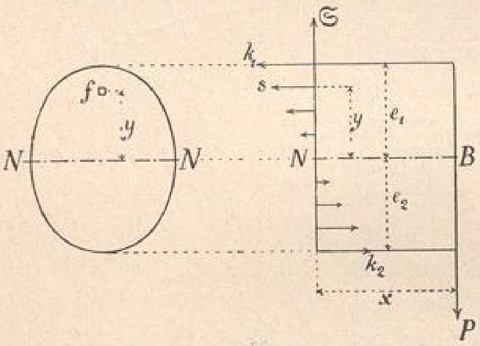
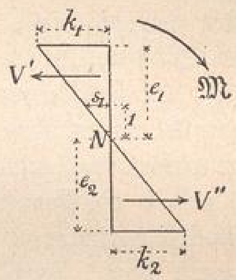


Fig. 11a.



Diese lauten bekanntlich, da nach der obigen Voraussetzung die Kräfte hier alle in einer Ebene wirken:

1) Die algebraische Summe der lotrechten Kräfte muß = Null sein.
2) Die algebraische Summe der wagerechten Kräfte muß = Null sein.
3) Die algebraische Summe der statischen Momente sämtlicher Kräfte in Bezug auf einen beliebigen Drehpunkt muß = Null sein.

Nach der ersten dieser Bedingungen ist an der Schnittstelle eine lotrecht nach oben gerichtete Kraft:

$$\mathfrak{S} = P$$

anzubringen, welche als Abscherungswiderstand wirkt und eine Verschiebung des Balkenstückes in der Schnittebene verhindert.

Die einzigen wagerechten Kräfte, welche auf das Balkenstück B N wirken, sind die Spannungswiderstände, welche in der oberen Hälfte der Schnittfläche als Zugspannungen (von rechts nach links gerichtet), in der unteren Hälfte als Druckspannungen (von links nach rechts gerichtet) wirken.

Trägt man diese Spannungswiderstände, welche sich (wie oben bereits gesagt war) verhalten, wie ihre Abstände von der neutralen Faser, auf den zugehörigen Flächenteilchen f als Strecken auf (Fig. 11a), so bilden sie in ihrer Gesamtheit einen Spannungsdoppelkeil vom Inhalt $V = V' + V''$, begrenzt einerseits von der Querschnittsfläche F, andererseits von einer durch die N N verlaufenden Ebene, deren Neigung bestimmt ist durch die Spannung s_1 im Abstande 1 von der NN. Nach der zweiten Gleichgewichtsbedingung muß dann sein:

$$V = V' + V'' = 0$$

also auch nach Gl. 5) S. 13:

$$\Sigma(fy) = 0$$

d. h. die Summe der statischen Momente (Flächenmomente) sämtlicher Flächenteilchen der Querschnittsfläche in Bezug auf die Achse N N muß = Null sein, woraus nach der Lehre vom Schwerpunkt*) folgt, daß die Achse N N eine Schwerachse der Querschnittsfläche ist.

Da dies für alle Querschnittsflächen gilt, die durch den Balken hindurchgelegt werden können, so erhält man den Satz:

Die neutrale Faserschicht geht durch die Schwerpunkte sämtlicher Querschnittsflächen hindurch.

Nach der dritten Gleichgewichtsbedingung muß in Bezug auf jede beliebige, also auch z. B. in Bezug auf die Achse N das rechts herumdrehende Moment $\mathfrak{M}$ der äußeren Kraft P gleich der Summe der Momente der in der Schnittfläche wirkenden Spannungswiderstände sein, welche für sich eine Drehung nach links hervorbringen würden.

Letztere werden in Fig. 11a dargestellt durch das Säulenmoment des Spannungsdoppelkeiles, und man erhält daher unter Benutzung der Gl. 8) bezw. 11) S. 14:

$$\mathfrak{M} = s_1 \Sigma(fy^2) = s_1 J$$

worin $\Sigma(fy^2) = J$ das Trägheitsmoment der Querschnittsfläche F in Bezug auf die Schwerachse N N bedeutet:

Nun ist nach Fig. 11a:

$$s_1 : 1 = k_1 : e_1 = k_2 : e_2$$

oder

$$s_1 = \frac{k_1}{e_1} = \frac{k_2}{e_2}$$

folglich wird:

$$\mathbf{\mathfrak{M} = k_1 \frac{J}{e_1} = k_2 \frac{J}{e_2}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 14)$$

Den Ausdruck $\frac{J}{e_1}$ bezw. $\frac{J}{e_2}$ nennt man das Widerstandsmoment des Querschnittes und bezeichnet dasselbe mit W_1 bezw. W_2

$$\mathbf{W_1 = \frac{J}{e_1}} \text{ desgl. } \mathbf{W_2 = \frac{J}{e_2}} \quad \ldots\ldots \quad 15)$$

*) Vergl. Lauenstein, Mechanik, 5. Aufl., § 9, Gl. 35.

Danach ist:

$$\mathfrak{M} = \mathbf{k_1\, W_1} = \mathbf{k_2\, W_2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 16)$$

Meistens liegt der Schwerpunkt des Querschnittes, also auch die neutrale Achse in der Mitte der Höhe; es ist dann $e_1 = e_2 = e$ folglich auch $W_1 = W_2 = W$, und man erhält:

$$\mathfrak{M} = \mathbf{k\, W} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 17)$$

Biegungsmoment $=$ k $\times$ Widerstandsmoment.

Da f als Flächenteilchen ein quadratischer Ausdruck ist (Breite $\times$ Höhe), so erscheint das Trägheitsmoment stets als Größe vierten Grades, das Widerstandsmoment als Größe dritten Grades.

Trägheitsmoment und Widerstandsmoment in Bezug auf die Schwerachse sind nur abhängig von der Form und Größe des Querschnittes.

§ 5.

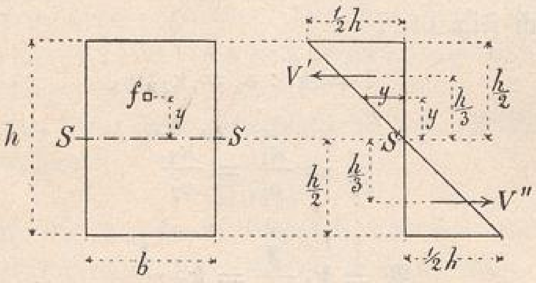
Trägheitsmomente und Widerstandsmomente.

Aus dem allgemeinen Ausdruck für das Trägheitsmoment:

$$J = \Sigma (f y^2)$$

ergeben sich für die verschiedenen Querschnittsformen bestimmte Werte, welche sich für das Rechteck und die aus Rechtecken zusammengesetzten regelmäßigen

Fig. 12.



Figuren, für das Dreieck und für den Kreis mit elementaren Mitteln berechnen lassen, in allen anderen Fällen aber durch Integration zu bestimmen sind.

Bei dem Rechteck von der Breite b und der Höhe h (Fig. 12) entsteht durch Auftragen der Abstände y von der Schwerachse S auf die zugehörigen Flächenteilchen f ein Doppelkeil mit der Keilkante SS.

Der Inhalt eines Keilstückes ist:

$$V' = V'' = \frac{1}{2}\left(\frac{bh}{2} \cdot \frac{h}{2}\right) = \frac{bh^2}{8}$$

und der Abstand des Schwerpunktes desselben von der Achse S:

$$y_m = \frac{2}{3} \cdot \frac{h}{2} = \frac{h}{3}$$

folglich:

$$V \cdot y_m = (V' + V'')\, y_m = 2\,\frac{b\,h^2}{8} \cdot \frac{h}{3} = \frac{b\,h^3}{12}$$

Fig. 13.

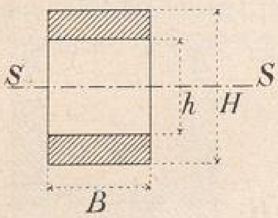


Fig. 14.

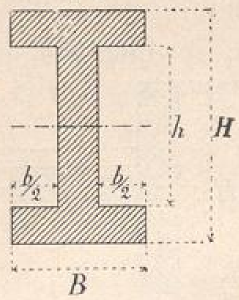
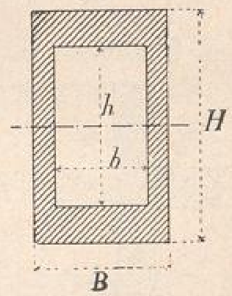


Fig. 15.



Danach ist unter Berücksichtigung der Gl. 10) S. 14 das Trägheitsmoment des Rechteckes in Bezug auf die Schwerachse:

$$\mathbf{J} = \frac{\mathbf{b\,h^3}}{\mathbf{12}} \quad \dots\dots\dots\dots \quad 18)$$

Für den besonderen Fall, daß das Rechteck ein Quadrat von der Seite a ist, erhält man:

$$\mathbf{J} = \frac{\mathbf{a^4}}{\mathbf{12}} \quad \dots\dots\dots\dots \quad 19)$$

Fig. 16.

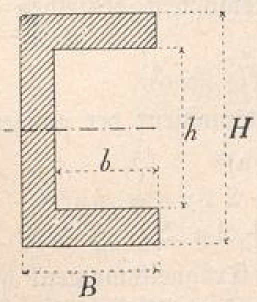


Fig. 17.

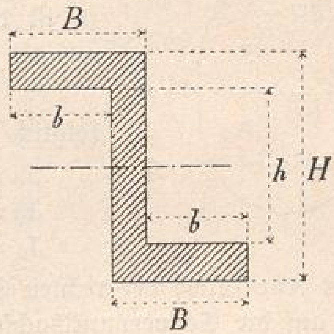


Fig. 13 kann angesehen werden als Differenz der beiden Rechtecke BH und Bh, folglich ist das Trägheitsmoment dieses Querschnittes gleich der Differenz der Trägheitsmomente der beiden Rechtecke.

$$J = \frac{B\,H^3}{12} - \frac{B\,h^3}{12} = \frac{B\,(H^3 - h^3)}{12}$$

Ebenso lassen sich die Querschnitte Fig. 14 bis 17 ansehen als Differenz der Rechtecke B H und b h, danach ist:

$$J = \frac{B H^3}{12} - \frac{b h^3}{12}$$

Die Querschnitte Fig. 18 bis 20 können aufgefaßt werden als Summe der Rechtecke B H und b h, folglich:

$$J = \frac{B H^3}{12} + \frac{b h^3}{12}$$

Fig. 18.

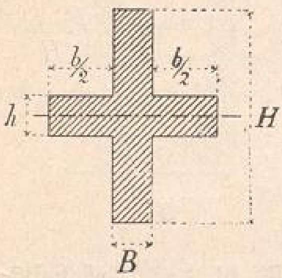


Fig. 19.

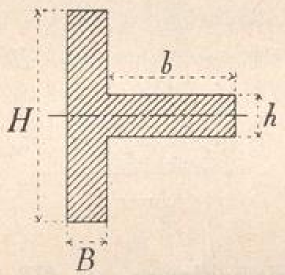
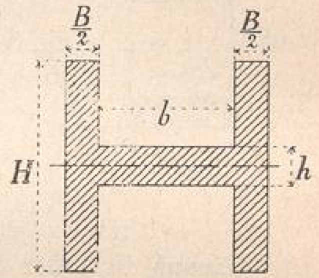
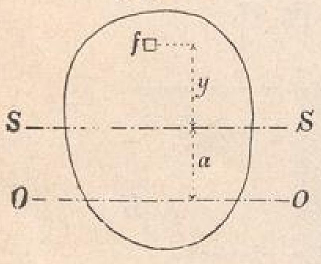


Fig. 20.



Die Größe des Trägheitsmomentes eines bestimmten Querschnittes ist abhängig von der Lage der Achse. Bei den bisher aufgeführten Trägheitsmomenten ist die Achse stets Schwerpunktsachse und zugleich Symmetrieachse, d. h. sie geht durch den Schwerpunkt des Querschnitts und teilt denselben in zwei symmetrische Hälften. Das Trägheitsmoment in Bezug auf irgend eine andere Achse O O, welche der Schwerpunktsachse S S parallel ist und den Abstand a von derselben hat (Fig. 21), kann folgendermaßen bestimmt werden:

Fig. 21.



Ist f irgend ein sehr kleines Flächenteilchen, so ist das Trägheitsmoment desselben in Bezug auf die Achse O

$$f\,(y + a)^2$$

folglich das Trägheitsmoment der ganzen Fläche:

$$J_0 = \Sigma\, f\,(y + a)^2$$
$$J_0 = \Sigma\,(f\,y^2 + 2\,f\,y\,a + f\,a^2)$$
$$J_0 = \Sigma\,(f\,y^2) + 2\,a\,\Sigma\,(f\,y) + a^2\,\Sigma\,(f)$$

Das erste Glied der rechten Seite ist das Trägheitsmoment der Fläche in Bezug auf die Schwerpunktsachse; in dem zweiten Gliede bedeutet $\Sigma\,(f\,y)$ das statische Moment aller Flächenteilchen in Bezug auf die Schwerachse, welches nach der Lehre vom Schwerpunkt gleich Null ist, folglich muß das ganze zweite Glied = Null sein. Das dritte Glied ist, wenn F die ganze Querschnittsfläche bedeutet, $= F\,a^2$.

Danach ist:

$$\mathbf{J_0 = J_s + F\,a^2} \quad \text{. . . . .} \quad 20)$$

Man erhält das Trägheitsmoment in Bezug auf eine der Schwerachse parallele Achse, wenn man zu dem Trägheitsmomente in Bezug auf die Schwerachse das Produkt aus der ganzen Querschnittsfläche und dem Quadrat des Abstandes der beiden Achsen hinzufügt.

Für ein Rechteck $b \times h$ ist z. B. das Trägheitsmoment in Bezug auf die Schwerachse

$$J_s = \frac{b\,h^3}{12}$$

folglich ist das Trägheitsmoment in Bezug auf eine durch die untere Kante des Rechtecks gelegte Achse, da hier $F = b\,h$ und $a = {}^1/_2\ h$ einzusetzen ist:

$$J_0 = \frac{b\,h^3}{12} + b\,h\left(\frac{h}{2}\right)^2$$

$$\mathbf{J_0} = \frac{\mathbf{b\,h^3}}{\mathbf{3}} \quad \text{. . . . . 21)}$$

Nach Gl. 20) ist das Trägheitsmoment in Bezug auf die Schwerachse von allen Trägheitsmomenten das kleinste.

Bei den Querschnittsformen Fig. 22 bis 24 ist das Trägheitsmoment in Bezug auf die Achse O

$$J_0 = \frac{B\,H^3}{3} + \frac{b\,h^3}{3}$$

Wird mit F die ganze Querschnittsfläche und mit x_0 der Abstand des Schwerpunktes derselben von der Achse O bezeichnet, so ist das Trägheitsmoment in Bezug auf die Schwerachse:

$$J_s = J_0 - F\,x_0^2$$

Zur Bestimmung des Schwerpunktsabstandes x_0 ist der S. 13 angeführte Satz anzuwenden: Das statische Moment der ganzen Fläche ist gleich

Fig. 22.

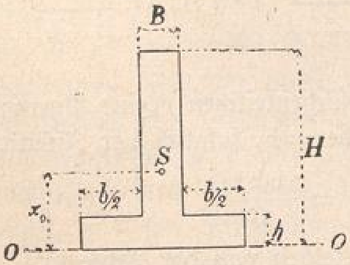
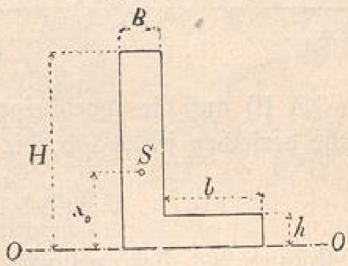


Fig. 23.



der Summe der statischen Momente der einzelnen Flächenteile in Bezug auf eine beliebige Achse. Danach ist in Bezug auf die Achse O:

$$F\,x_0 = B\,H\,.\,\frac{H}{2} + b\,h\,.\,\frac{h}{2}$$

$$x_0 = \frac{B\,H^2 + b\,h^2}{2\,F}$$

Z. B. ist für ein Winkeleisen $10 \times 10 \times 1{,}2$ cm (Fig. 25) ohne Berücksichtigung der Abrundungen:

$$F = 1{,}2 \,.\, 10 + 8{,}8 \,.\, 1{,}2 = 22{,}6 \text{ qcm}$$

$$x_0 = \frac{1{,}2 \,.\, 10^2 + 8{,}8 \,.\, 1{,}2^2}{2 \,.\, 22{,}6} = 2{,}94$$

$$J_0 = \frac{1{,}2 \,.\, 10^3}{3} + \frac{8{,}8 \,.\, 1{,}2^3}{3} = 405$$

$$J_s = 405 - 22{,}6 \,.\, 2{,}94^2 = 209$$

Fig. 24.

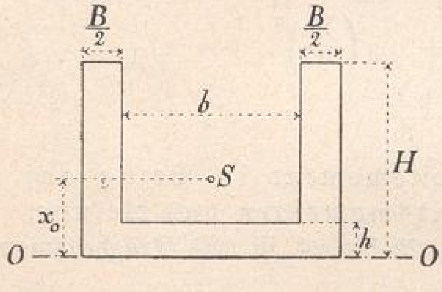
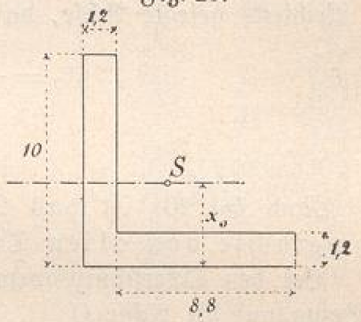


Fig. 25.



Für ein Dreieck A B C von der Grundlinie b und der Höhe h (Fig. 26) ergibt sich durch Auftragen der Abstände y von der durch die Spitze gelegten

Fig. 26.

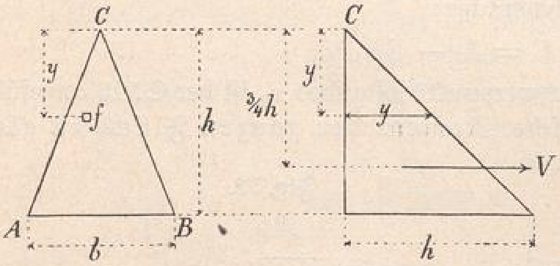
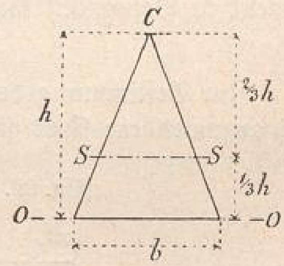


Fig. 27.



Achse C ($\parallel$ A B) auf die zugehörigen Flächenteilchen f eine Pyramide. Die Grundfläche derselben ist $= b\,h$, die Höhe $= h$, folglich der Inhalt:

$$V = b\,h \,.\, \frac{h}{3} = \frac{b\,h^3}{3}$$

und der Abstand des Schwerpunktes derselben von der Achse C:

$$y_m = {}^3/_4\, h$$

Nach Gl. 10) S. 14 ist dann das Trägheitsmoment des Dreiecks in Bezug auf eine durch die Spitze C gelegte der Grundlinie parallele Achse bezw. Ebene:

$$J_c = V \,.\, y_m = \frac{b\,h^2}{3} \,.\, \frac{3}{4}\, h = \frac{b\,h^3}{4}$$

In Bezug auf die Schwerachse S S (Fig. 27) ist ferner nach Gl. 20) S. 20:

$$J_s = J_c - F\,(^2/_3\,h)^2$$

$$J_s = \frac{b\,h^3}{4} - \frac{b\,h}{2}\,(^2/_3\,h)^2 = \frac{b\,h^3}{36}$$

und in Bezug auf die Achse O O:

$$J_o = J_s + F\,(^1/_3\,h)^2$$

$$J_o = \frac{b\,h^3}{36} + \frac{b\,h}{2}\,(^1/_3\,h)^2 = \frac{b\,h^3}{12}$$

Ein Kreis kann angesehen werden als bestehend aus sehr vielen Dreiecken, deren Spitzen mit dem Mittelpunkte des Kreises zusammenfallen und deren sehr kleine Grundlinien b auf dem Kreisumfange liegen. Ist r der Halbmesser des Kreises, so ist das Trägheitsmoment eines solchen Dreiecks in Bezug auf den Mittelpunkt C

$$\frac{b\,r^3}{4}$$

und die Summe der Trägheitsmomente aller dieser Dreiecke, d. i. das Trägheitsmoment des ganzen Kreises:

$$J_c = \frac{r^3}{4}\,\Sigma\,(b)$$

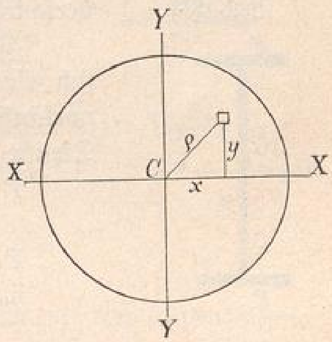
Da aber Σ (b) gleich dem Umfang des Kreises, $= 2\,r\,\pi$ ist, so wird:

$$J_c = \frac{r^3}{4}\,.\,2\,r\,\pi = \frac{r^4\,\pi}{2}$$

Führt man den Durchmesser d ein, setzt also $r = \frac{d}{2}$, so erhält man für das Trägheitsmoment des Kreises in Bezug auf die durch den Mittelpunkt gelegte rechtwinklig zur Bildfläche stehende Achse, d. i. für das polare oder zentrale Trägheitsmoment des Kreises den Ausdruck:

$$\mathbf{J_c = \frac{d^4\,\pi}{32}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 22)$$

Fig. 28.



Zieht man (Fig. 28) durch den Mittelpunkt des Kreises zwei rechtwinklig aufeinander stehende Durchmesser X X und Y Y, und ist ϱ der Abstand eines Flächenteilchens f vom Mittelpunkt, so ist das Trägheitsmoment dieses Flächenteilchens in Bezug auf die winkelrecht zur Bildfläche stehende Achse C

$$f\,\varrho^2 = f\,x^2 + f\,y^2$$

Für die Summe aller Flächenteilchen wird dann:

$$\Sigma\,(f\,\varrho^2) = \Sigma\,(f\,x^2) + \Sigma\,(f\,y^2)$$

oder:

$$J_c = J_y + J_x$$

Da der Kreis eine nach allen Seiten hin symmetrische Figur ist, so ist:

$$J_y = J_x = J$$

folglich:

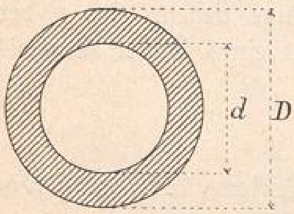
$$J_c = 2\,J$$

Das Trägheitsmoment des Kreises in Bezug auf einen Durchmesser ist danach:

$$\mathbf{J} = \frac{\mathbf{J_c}}{\mathbf{2}} = \frac{\mathbf{d^4\,\pi}}{\mathbf{64}} \quad \text{. . . . . 23)}$$

Die Ringfläche Fig. 29 kann angesehen werden als Differenz zweier Kreise von den Durchmessern D und d, folglich ist das Trägheitsmoment derselben:

Fig. 29.



$$\mathbf{J} = \frac{\mathbf{(D^4 - d^4)\,\pi}}{\mathbf{64}} \quad \text{. . . 24)}$$

Die Widerstandsmomente der verschiedenen Querschnitte ergeben sich nach Gl. 15) S. 17, wenn man die auf die Schwerachse bezogenen Trägheitsmomente durch den Abstand e der äußersten Faser von der neutralen Faser dividiert.

Für das Rechteck $b \times h$ ist $e = \frac{h}{2}$, folglich ist das Widerstandsmoment:

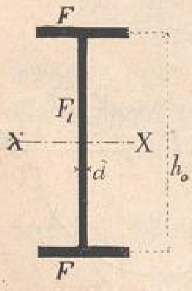
$$\mathbf{W} = \frac{\mathbf{b\,h^2}}{\mathbf{6}} \quad \text{. . . . . 25)}$$

Für den Kreis vom Durchmesser d ist $e = \frac{d}{2}$, daher:

$$\mathbf{W} = \frac{\mathbf{d^3\,\pi}}{\mathbf{32}} \quad \text{. . . . . 26)}$$

Bei den Querschnitten Fig. 22 bis 27 haben, da hier e_1 nicht $= e_2$ ist, die Widerstandsmomente für die untere und obere Kante verschiedene Werte.

Fig. 30.



Für das Widerstandsmoment der I-Querschnitte läßt sich ein Annäherungsausdruck aufstellen, welcher zu der vorläufigen Berechnung genieteter Träger vielfach gute Dienste leistet. Bedeutet (Fig. 30):

F die Querschnittsfläche eines Flantsches bezw. einer Gurtung,

F_1 die Querschnittsfläche des Steges oder Stehbleches,

h_0 den Abstand der Schwerpunkte der Flantschen oder Gurtungen,

so ist in Bezug auf die wagerechte Schwerachse X X das Trägheitsmoment der beiden Flantschen (oder Gurtungen) angenähert:

$$J_1 = 2\,F\left(\frac{h_0}{2}\right)^2 = \frac{F\,h_0^{\,2}}{2}$$

und das Trägheitsmoment des Steges:

$$J_2 = \frac{d\,h_o^3}{12} = \frac{F_1\,h_o^2}{12}$$

folglich das Gesamtträgheitsmoment:

$$J = J_1 + J_2 = \frac{h_o^2}{2}\left(F + {}^1\!/_6\,F_1\right)$$

woraus sich durch Division mit $\frac{h_o}{2}$ das Widerstandsmoment ergibt:

$$\mathbf{W = h_o\,(F + {}^1\!/_6\,F_1)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 27)$$

Die Gleichung ist bei gegebenem W, h_o und d für F aufzulösen, und es sind danach die erforderlichen Walzeisen zu bestimmen.

Aufgabe 15. Das Widerstandsmoment eines aus Stehblech und Winkeleisen zusammengesetzten Trägerquerschnittes soll $W = 2900$ betragen, die ganze Trägerhöhe sei $h = 72$ cm und danach schätzungsweise $h_o = 66$ cm. Die Stärke des Stehbleches ist $d = 1$ cm. Es sollen die erforderlichen Winkeleisen berechnet werden.

Fig. 31.

Auflösung. Die Querschnittsfläche des Stehbleches ist angenähert:

$$F_1 = d\,h_o = 1\,.\,66 = 66 \text{ qcm}$$

daher nach Gl. 27)

$$2900 = 66\,(F + {}^1\!/_6\,.\,66)$$

woraus folgt:

$$F = \frac{2900}{66} - 11 = 33 \text{ qcm}$$

Jeder der beiden Winkel einer Gurtung erfordert danach den Nutzquerschnitt $^1\!/_2\,F = 16{,}5$ qcm und bei Nieten von 2 cm Durchmesser den Gesamtquerschnitt:

$$f = 16{,}5 + 2\,.\,1 = 18{,}5 \text{ qcm}$$

Dafür genügt der Winkel $10 \times 10 \times 1$ cm mit $f = 19$ qcm.

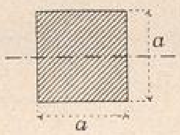
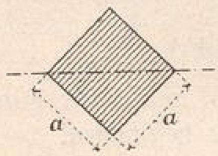
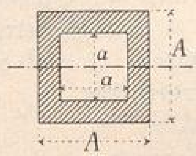
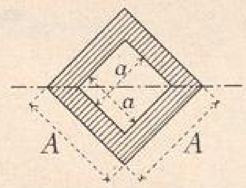
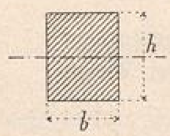
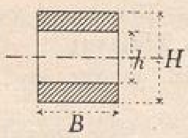
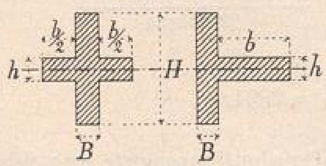
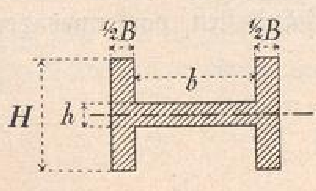
Für diesen Querschnitt (Fig. 31), welcher als Differenz von Rechtecken betrachtet werden kann, ergibt sich genau:

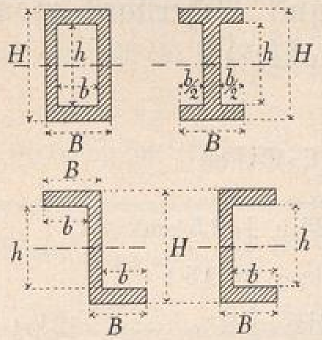
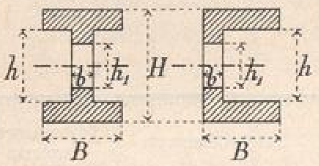
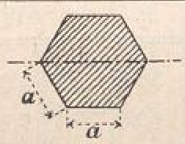
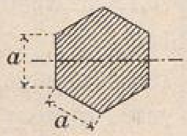
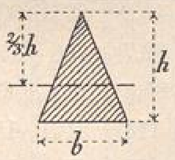
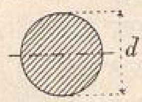
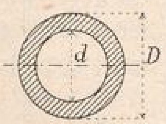
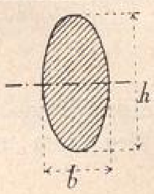
$$J = \frac{21\,.\,72^3 - 18\,.\,70^3 - 2\,.\,52^3}{12} - 2\underbrace{\left(\frac{3\,.\,2^3}{12} + 6\,.\,30{,}5^2\right)}_{\text{Nietabzug}} = 104082$$

folglich:

$$W = \frac{104082}{36} = 2891$$

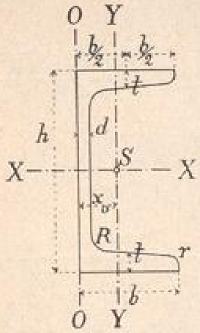
In der folgenden Tabelle sind die Trägheitsmomente und Widerstandsmomente für die wichtigsten und am häufigsten vorkommenden einfachen Querschnitte zusammengestellt.

Nr.	Querschnittsform	Trägheitsmoment J	Widerstandsmoment W
1		$\frac{a^4}{12}$	$\frac{a^3}{6}$
2		$\frac{a^4}{12}$	$\frac{a^3}{6\sqrt{2}}$
3		$\frac{A^4 - a^4}{12}$	$\frac{A^4 - a^4}{6\,A}$
4		$\frac{A^4 - a^4}{12}$	$\frac{A^4 - a^4}{6\sqrt{2}\,.\,A}$
5		$\frac{b\,h^3}{12}$	$\frac{b\,h^2}{6}$
6		$\frac{B(H^3 - h^3)}{12}$	$\frac{B(H^3 - h^3)}{6\,H}$
7	 	$\frac{B\,H^3 + b\,h^3}{12}$	$\frac{B\,H^3 + b\,h^3}{6\,H}$

Nr.	Querschnittsform	Trägheitsmoment J	Widerstandsmoment W
8		$\frac{BH^3 - bh^3}{12}$	$\frac{BH^3 - bh^3}{6H}$
9		$\frac{B(H^3-h^3)+b(h^3-h_1^3)}{12}$	$\frac{B(H^3-h^3)+b(h^3-h_1^3)}{6H}$
10		$\frac{5\sqrt{3}}{16}a^4$ $= 0{,}5413\ a^4$	$\frac{5}{8}a^3$
11		$\frac{5\sqrt{3}}{16}a^4$ $= 0{,}5413\ a^4$	$0{,}5413\ a^3$
12		$\frac{bh^3}{36}$	$\frac{bh^2}{24}$ für die oberste Faser $\frac{bh^2}{12}$ für die Grundlinie
13		$\frac{d^4\pi}{64}$	$\frac{d^3\pi}{32}$
14		$\frac{(D^4-d^4)\pi}{64}$	$\frac{(D^4-d^4)\pi}{32D}$
15		$\frac{bh^3\pi}{64}$	$\frac{bh^2\pi}{32}$

§ 6.

Tabellen der Trägheitsmomente und Widerstandsmomente verschiedener Profile*).



1. [-Eisen

$b = 0{,}25\ h + 2{,}5$ cm

$R = t;\ r = 0{,}5\ t$

Neigung in Flantsch = 8 % (= 1 : 12½)

Höhe h	Breite b	Dicke Steg d	Dicke Flantsch t	Fläche F qcm	Gewicht f. d. lfd. Meter in kg	Abstand des Schwerpunktes x_0	Trägheitsmoment J_x	Trägheitsmoment J_y	Trägheitsmoment J_o	Widerstandsmoment W_x	Widerstandsmoment W_y	Nr.
3	3,3	0,5	0,7	5,44	4,24	1,31	6,39	5,33	14,7	4,26	2,68	3
4	3,5	0,5	0,7	6,21	4,85	1,33	14,1	6,68	17,7	7,10	3,08	4
5	3,8	0,5	0,7	7,12	5,55	1,37	26,4	9,12	22,6	10,6	3,75	5
6,5	4,2	0,55	0,75	9,03	7,05	1,42	57,5	14,1	32,3	17,7	5,06	6½
8	4,5	0,6	0,8	11,0	8,60	1,45	106	19,4	43,2	26,5	6,37	8
10	5,0	0,6	0,85	13,5	10,5	1,55	206	29,3	61,5	41,1	8,50	10
12	5,5	0,7	0,9	17,0	13,3	1,60	364	43,2	87,5	60,7	11,1	12
14	6,0	0,7	1,0	20,4	15,9	1,75	605	62,7	126	86,4	14,8	14
16	6,7	0,75	1,05	24,0	18,7	1,84	925	85,3	167	116	18,3	16
18	7,0	0,8	1,1	28,0	21,8	1,92	1354	114	217	150	22,4	18
20	7,5	0,85	1,15	32,2	25,1	2,01	1911	148	278	191	27,0	20
22	8,0	0,9	1,25	37,4	29,2	2,14	2690	197	369	245	33,6	22
24	8,5	0,95	1,3	42,3	33,0	2,23	3598	248	459	300	39,6	24
26	9,0	1,0	1,4	48,3	37,7	2,36	4823	317	586	371	47,8	26
28	9,5	1,0	1,5	53,3	41,6	2,53	6276	399	741	450	57,2	28
30	10	1,0	1,6	58,8	45,8	2,70	8026	495	924	535	67,8	30

*) Z. T. Auszug aus dem „Deutschen Normalprofilbuch für Walzeisen, 5. Aufl." mit Genehmigung der Herausgeber (Geh. Reg.-Räte und Professoren Dr. F. Heinzerling und O. Intze) und des Verlegers.

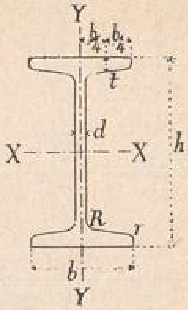
2. I-Eisen

Für h $\leq$ 25 cm ist: $\begin{cases} b = 0{,}4\,h + 1 \text{ cm} \\ d = 0{,}3\,h + 0{,}15 \text{ cm} \end{cases}$

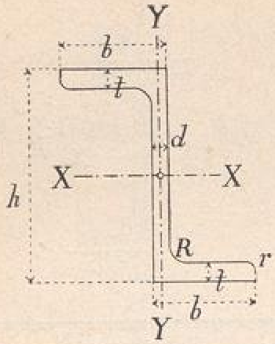
für h $>$ 25 cm ist: $\begin{cases} b = 0.3\,h + 3{,}5 \text{ cm} \\ d = 0{,}036\,h \end{cases}$

$t = 1{,}5\,d;\ R = d;\ r = 0{,}6\,d$

Neigung im Flantsch = 14 % (= 1 : 7).



Höhe h	Breite b	Dicke Steg d	Dicke Flantsch t	Fläche F qcm	Gewicht f. d. lfd. Meter in kg	Trägheitsmoment J_x	Trägheitsmoment J_y	Widerstandsmoment W_x	Widerstandsmoment W_y	Nr.
8	4,2	0,39	0,59	7,57	5,91	77,7	6,28	19,4	2,99	8
9	4,6	0,42	0,63	8,99	7,02	117	8,76	25,9	3,81	9
10	5,0	0,45	0,68	10,6	8,28	170	12,2	34,1	4,86	10
11	5,4	0,48	0,72	12,3	9,59	238	16,2	43,3	5,99	11
12	5,8	0,51	0,77	14,2	11,1	327	21,4	54,5	7,38	12
13	6,2	0,54	0,81	16,1	12,6	435	27,4	67,0	8,85	13
14	6,6	0,57	0,86	18,2	14,2	572	35,2	81,7	10,7	14
15	7,0	0,60	0,90	20,4	15,9	734	43,7	97,9	12,5	15
16	7,4	0,63	0,95	22,8	17,8	933	54,5	117	14,7	16
17	7,8	0,66	0,99	25,2	19,7	1165	66,5	137	17,1	17
18	8,2	0,69	1,04	27,9	21,7	1444	81,3	161	19,8	18
19	8,6	0,72	1,08	30,5	23,8	1759	97,2	185	22,6	19
20	9,0	0,75	1,13	33,4	26,1	2139	117	214	25,9	20
21	9,4	0,78	1,17	36,3	28,3	2558	137	244	29,3	21
22	9,8	0,81	1,22	39,5	30,8	3055	163	278	33,3	22
23	10,2	0,84	1,26	42,6	33,3	3605	188	314	36,9	23
24	10,6	0,87	1,31	46,1	35,9	4239	220	353	41,6	24
25	11,0	0,90	1,36	49,7	38,7	4954	255	396	46,4	25
26	11,3	0,94	1,41	53,3	41,6	5735	287	441	50,6	26
27	11,6	0,97	1,47	57,1	44,5	6623	325	491	56,0	27
28	11,9	1,01	1,52	61,0	47,6	7575	363	541	60,8	28
29	12,2	1,04	1,57	64,8	50,6	8619	403	594	66,1	29
30	12,5	1,08	1,62	69,0	53,8	9785	449	652	71,9	30
32	13,1	1,15	1,73	77,7	60,6	12493	554	781	84,6	32
34	13,7	1,22	1,83	86,7	67,6	15670	672	922	98,1	34
36	14,3	1,30	1,95	97,0	75,7	19576	817	1088	114	36
38	14,9	1,37	2,05	107	83,4	23978	972	1262	131	38
40	15,5	1,44	2,16	118	91,8	29173	1160	1459	150	40
42,5	16,3	1,53	2,30	132	103	36956	1433	1739	176	42½
45	17,0	1,62	2,43	147	115	45888	1722	2040	203	45
47,5	17,8	1,71	2,56	163	127	56410	2084	2375	234	47½
50	18,5	1,80	2,70	179	140	68736	2470	2750	267	50
55	20,0	1,90	3,00	212	166	99054	3486	3602	349	55



3. Z-Eisen

$b = 0{,}25\ h + 3\ \text{cm}$

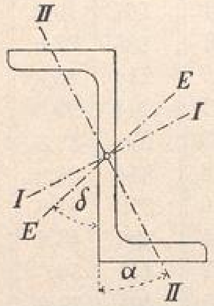
$d = 0{,}035\ h + 0{,}3\ \text{cm}$

$t = 0{,}05\ h + 0{,}3\ \text{cm}$

Die Dicke d ist auf halbe Millimeter abgerundet.

$R = t;\ r = 0{,}5\ t$

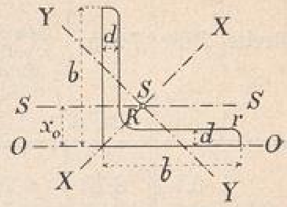
Höhe h	Breite b	Dicke Steg d	Dicke Flantsch t	Fläche F qcm	Gewicht f. d. lfd. Meter in kg	Trägheitsmoment J_x	Trägheitsmoment J_y	Widerstandsmoment W_x	Widerstandsmoment W_y	Nr.
3	3,8	0,4	0,45	4,32	3,37	6,0	13,7	4,00	3,80	3
4	4,0	0,45	0,5	5,43	4,23	13,5	17,6	6,75	4,66	4
5	4,3	0,5	0,55	6,77	5,28	26,3	23,8	10,5	5,88	5
6	4,5	0,5	0,6	7,91	6,17	44,7	30,1	14,9	7,08	6
8	5,0	0,6	0,7	11,1	8,67	109	47,4	27,3	10,1	8
10	5,5	0,65	0,8	14,5	11,3	222	72,4	44,4	14,0	10
12	6,5	0,7	0,9	18,2	14,2	402	106	67,0	18,8	12
14	6,5	0,8	1,0	22,9	17,9	676	148	96,6	24,3	14
16	7,0	0,85	1,1	27,5	21,5	1059	204	132	31,0	16
18	7,5	0,95	1,2	33,3	26,0	1598	271	178	38,6	18
20	8,0	1,0	1,3	38,7	30,2	2298	358	230	47,7	20



Trägheits- und Widerstandsmomente der Z-Eisen bezogen auf die Hauptachsen.

Nr.	tg α	Trägheitsmoment J_I	Trägheitsmoment J_{II}	Widerstandsmoment W_I	Widerstandsmoment W_{II}	Ungünstigste Belastung in der Ebene EE W_{min}	Ungünstigste Belastung in der Ebene EE tg δ	Nr.
3	1,655	18,1	1,54	4,69	1,11	1,11	0,554	3
4	1,181	28,0	3,05	6,72	1,83	1,82	0,729	4
5	0,939	44,9	5,23	9,76	2,76	2,75	0,869	5
6	0,779	67,2	7,60	13,5	3,73	3,70	1,03	6
8	0,588	142	14,7	24,4	6,44	6,37	3,35	8
10	0,492	270	24,6	39,8	9,26	9,05	3,97	10
12	0,433	470	37,7	60,6	12,5	12,3	4,46	12
14	0,385	768	56,4	88,0	16,6	16,4	5,09	14
16	0,357	1184	79,5	121	21,4	21,1	5,48	16
18	0,329	1759	110	164	27,0	26,7	5,98	18
20	0,313	2509	147	213	33,4	33,1	6,26	20

4. Gleichschenklige Winkeleisen



Für b von 4 bis 10 cm ist: $\begin{cases} d_{min} = 0{,}1\,b \\ d \quad\; = 0{,}1\,b + 0{,}2\text{ cm} \\ d_{max} = 0{,}1\,b + 0{,}4\text{ cm} \end{cases}$

für b > 10 cm ist: $\begin{cases} d_{min} = 0{,}1\,b - 0{,}1\text{ cm} \\ d \quad\; = 0{,}1\,b + 0{,}1\text{ cm} \\ d_{max} = 0{,}1\,b + 0{,}3\text{ cm} \end{cases}$

Die Schenkelbreite b ist dabei nach vollen Centimetern abgerundet.

$$R = \frac{d_{min} + d_{max}}{2}; \; r = \frac{R}{2}$$

Breite b	Dicke d	Fläche F qcm	Gewicht f. d. lfd. Meter in kg	Abstand des Schwerpunktes x_o	Trägheitsmoment J_o	J_s	J_x = max	J_y = min	Widerstandsmoment W_s	W_x = max	Nr.
1,5	0,3	0,82	0,64	0,48	0,33	0,15	0,24	0,06	0,15	0,23	1 1/2
	0,4	1,05	0,82	0,51	0,46	0,19	0,29	0,08	0,19	0,28	
2,0	0,3	1,12	0,87	0,60	0,79	0,39	0,62	0,15	0,28	0,44	2
	0,4	1,45	1,13	0,64	1,07	0,48	0,77	0,19	0,36	0,55	
2,5	0,3	1,42	1,11	0,73	1,54	0,79	1,27	0,31	0,45	0,72	2 1/2
	0,4	1,85	1,44	0,76	2,08	1,01	1,61	0,40	0,58	0,91	
3,0	0,4	2,27	1,77	0,89	3,55	1,81	2,85	0,76	0,86	1,35	3
	0,6	3,27	2,55	0,96	5,48	2,48	3,91	1,06	1,22	1,84	
3,5	0,4	2,67	2,08	1,00	5,63	2,96	4,68	1,24	1,19	1,90	3 1/2
	0,6	3,87	3,02	1,08	8,65	4,13	6,50	1,77	1,71	2,63	
4,0	0,4	3,08	2,40	1,12	8,33	4,47	7,09	1,86	1,56	2,50	4
	0,6	4,48	3,49	1,20	12,8	6,35	9,98	2,67	2,26	3,52	
	0,8	5,80	4,52	1,28	17,4	7,90	12,4	3,38	2,90	4,38	
4,5	0,5	4,30	3,36	1,28	14,9	7,85	12,4	3,25	2,44	3,91	4 1/2
	0,7	5,86	4,57	1,36	21,3	10,4	16,4	4,39	3,32	5,16	
	0,9	7,34	5,73	1,44	27,8	12,6	19,8	5,40	4,13	6,24	
5,0	0,5	4,80	3,75	1,40	20,4	11,0	17,4	4,59	3,05	4,91	5
	0,7	6,56	5,12	1,49	29,0	14,6	23,1	6,02	4,15	6,53	
	0,9	8,24	6,43	1,56	38,0	17,9	28,1	7,67	5,20	7,94	
5,5	0,6	6,31	4,92	1,56	32,8	17,3	27,4	7,24	4,40	7,04	5 1/2
	0,8	8,23	6,42	1,64	44,3	22,1	34,8	9,35	5,75	8,96	
	1,0	10,07	7,85	1,72	56,0	26,4	41,4	11,3	6,95	10,6	
6,0	0,6	6,91	5,39	1,69	42,5	22,8	36,1	9,43	5,30	8,51	6
	0,8	9,03	7,04	1,77	57,5	29,2	46,1	12,1	6,90	10,9	
	1,0	11,07	8,63	1,85	72,8	34,9	55,1	14,6	8,40	13,0	

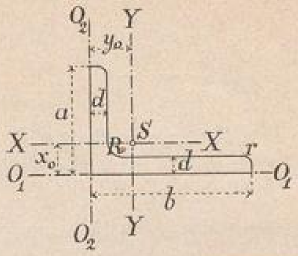
Breite b	Dicke d	Fläche F qcm	Gewicht f. d. lfd. Meter in kg	Abstand des Schwerpunktes x_o	Trägheitsmoment J_o	Trägheitsmoment J_s	Trägheitsmoment J_x = max	Trägheitsmoment J_y = min	Widerstandsmoment W_s	Widerstandsmoment W_x = max	Nr.
	0,7	8,70	6,79	1,85	63,0	33,4	53,0	13,8	7,20	11,5	
6,5	0,9	10,98	8,56	1,93	82,3	41,3	65,4	17,2	9,05	14,2	$6^1/_2$
	1,1	13,17	10,30	2,00	102,0	48,8	76,8	20,7	10,85	16,7	
	0,7	9,4	7,33	1,97	78,8	42,3	67,1	17,6	8,40	13,6	
7,0	0,9	11,9	9,26	2,05	103	52,5	83,1	22,0	10,6	16,8	7
	1,1	14,3	11,13	2,13	127	62,0	97,6	26,0	12,7	19,7	
	0,8	11,5	8,94	2,13	111	59,0	93,3	24,4	11,0	17,6	
7,5	1,0	14,1	11,00	2,21	140	71,0	113	29,8	13,5	21,3	$7^1/_2$
	1,2	16,7	13,00	2,29	170	82,5	130	34,7	15,9	24,6	
	0,8	12,3	9,57	2,26	135	72,0	115	29,6	12,6	20,3	
8,0	1,0	15,1	11,78	2,34	170	87,5	139	35,9	15,5	24,5	8
	1,2	17,9	13,94	2,41	206	102	161	43,0	18,2	28,4	
	0,9	15,5	12,1	2,54	216	116	184	47,8	18,0	28,9	
9,0	1,1	18,7	14,6	2,62	266	138	218	57,1	21,6	34,3	9
	1,3	21,8	17,0	2,70	317	158	250	65,9	25,1	39,3	
	1,0	19,2	14,9	2,82	329	177	280	73,3	24,7	39,7	
10	1,2	22,7	17,7	2,90	398	207	328	86,2	29,2	46,3	10
	1,4	26,2	20,4	2,98	468	235	372	98,3	33,5	52,6	
	1,0	21,2	16,5	3,07	438	239	379	98,6	30,1	48,7	
11	1,2	25,1	19,6	3,15	530	280	444	116	35,7	57,1	11
	1,4	29,0	22,6	3,21	622	319	505	133	41,0	64,8	
	1,1	25,4	19,8	3,36	626	340	541	140	39,4	63,8	
12	1,3	29,7	23,2	3,44	745	394	625	162	46,1	73,7	12
	1,5	33,9	26,5	3,51	864	446	705	186	52,5	83,2	
	1,2	30,0	23,4	3,64	869	472	750	194	50,5	81,6	
13	1,4	34,7	27,0	3,72	1020	540	857	223	58,0	93,3	13
	1,6	39,3	30,6	3,80	1171	605	959	251	65,5	104	
	1,3	35,0	27,3	3,92	1176	638	1014	262	63,5	102	
14	1,5	40,0	31,2	4,00	1364	723	1148	298	72,5	116	14
	1,7	45,0	35,1	4,08	1554	805	1276	334	81,0	129	
	1,4	40,3	31,4	4,2	1559	845	1343	347	78,5	127	
15	1,6	45,7	35,7	4,3	1790	949	1507	391	88,5	142	15
	1,8	51,0	39,9	4,4	2023	1052	1665	438	99,0	157	
	1,5	46,1	35,9	4,5	2028	1099	1745	453	95,5	154	
16	1,7	51,8	40,4	4,6	2308	1226	1945	506	107	172	16
	1,9	57,5	44,9	4,7	2591	1348	2137	558	119	189	

5. Ungleichschenklige Winkeleisen

$$d_{\min} = 0{,}1 \, \frac{a + b}{2} \text{ (annähernd)}$$

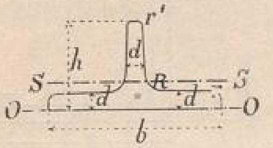
$$R = \frac{d_{\min} + d_{\max}}{2} \, ; \; r = \frac{R}{2}$$

(r ist auf halbe mm abgerundet)



Verhältnis	Breite a	Breite b	Dicke d	Fläche F qcm	Gewicht f. d. lfd. Meter in kg	Abstand des Schwerpunktes x_0	Abstand des Schwerpunktes y_0	Trägheitsmoment J_{O_1}	Trägheitsmoment J_{O_2}	Trägheitsmoment J_x	Trägheitsmoment J_y	Trägheitsmoment $J_{\min}$	Widerstandsmoment W_x	Widerstandsmoment W_y
a : b = 2 : 3	2	3	0,3	1,42	1,11	0,49	0,99	0,79	2,64	0,45	1,25	0,28	0,30	0,62
			0,4	1,85	1,44	0,54	1,03	1,08	3,56	0,54	1,60	0,33	0,37	0,81
	3	4,5	0,4	2,87	2,24	0,74	1,48	3,63	12,1	2,05	5,77	1,19	0,91	1,91
			0,5	3,53	2,75	0,78	1,52	4,61	15,1	2,46	6,99	1,44	1,11	2,35
	4	6	0,5	4,79	3,74	0,97	1,95	10,7	35,5	6,20	17,3	3,66	2,05	4,27
			0,7	6,55	5,11	1,05	2,04	15,3	50,2	8,00	22,9	4,63	2,71	5,78
	5	7,5	0,7	8,33	6,50	1,24	2,47	29,2	97,1	16,4	46,3	9,58	4,36	9,20
			0,9	10,5	8,20	1,32	2,56	38,4	126	20,4	57,1	11,9	5,54	11,6
	6,5	10	0,9	14,2	11,0	1,59	3,31	82,5	297	46,0	141	26,8	9,37	21,1
			1,1	17,1	13,3	1,67	3,40	103	365	55,0	167	32,9	11,4	25,3
	8	12	1,0	19,1	14,9	1,95	3,92	171	569	98,0	276	56,8	16,2	34,2
			1,2	22,7	17,7	2,02	4,00	208	686	115	323	67,5	19,2	40,4
	10	15	1,2	28,7	22,4	2,42	4,89	400	1335	232	649	134	30,6	64,2
			1,4	33,2	25,9	2,50	4,97	471	1563	264	743	153	35,2	74,1
a : b = 1 : 2	2	4	0,3	1,72	1,34	0,44	1,43	0,81	6,32	0,47	2,80	0,31	0,30	1,09
			0,4	2,25	1,76	0,48	1,47	1,12	8,44	0,60	3,58	0,40	0,40	1,42
	3	6	0,5	4,29	3,35	0,68	2,15	4,59	35,4	2,61	15,6	1,71	1,13	4,05
			0,7	5,85	4,56	0,76	2,24	6,80	50,1	3,41	20,7	2,28	1,52	5,51
	4	8	0,6	6,89	5,37	0,88	2,85	13,0	101	7,63	45,0	4,99	2,45	8,74
			0,8	9,01	7,03	0,96	2,94	18,0	136	9,65	57,6	6,41	3,17	11,4
	5	10	0,8	11,5	8,93	1,12	3,59	34,0	264	19,6	116	12,8	5,05	18,1
			1,0	14,1	11,0	1,20	3,67	43,9	332	22,9	142	14,6	6,03	22,4
	6,5	13	1,0	18,6	14,5	1,45	4,65	93,5	722	54,2	320	35,4	10,7	38,3
			1,2	22,1	17,2	1,53	4,75	115	872	62,9	373	41,3	12,7	45,2
	8	16	1,2	27,5	21,5	1,77	5,72	209	1619	122	719	79,4	19,6	69,9
			1,4	31,8	24,8	1,85	5,81	248	1899	135	826	86,0	22,0	81,1
	10	20	1,4	40,3	31,4	2,18	7,12	474	3905	282	1654	182	36,1	128
			1,6	45,7	35,6	2,26	7,20	549	4231	316	1862	205	40,8	145

6. Breitfüßige ⊥-Eisen



$$d = 0{,}15\ h + 0{,}1\ \text{cm}$$

$$b : h = 2 : 1$$

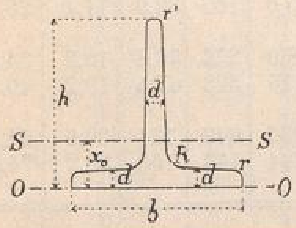
$$R = d;\ r = \frac{d}{2};\ r' = \frac{d}{4}$$

Neigung im Fuß = 2% (= 1 : 50)

Neigung im Steg = 4% (= 1 : 25)

Breite b	Höhe h	Dicke d	Fläche F qcm	Gewicht f. d. lfd. Meter in kg	Abstand des Schwerpunktes x_o	Trägheitsmoment J_o	J_s	Widerstandsmoment W_s	Nr.
6	3	0,55	4,64	3,62	0,67	4,70	2,58	1,11	6/3
7	3,5	0,6	5,94	4,63	0,77	8,00	4,49	1,65	7/3½
8	4	0,7	7,91	6,17	0,88	14,0	7,81	2,50	8/4
9	4,5	0,8	10,2	7,93	1,00	23,0	12,7	3,64	9/4½
10	5	0,85	12,0	9,38	1,09	33,1	18,7	4,78	10/5
12	6	1,0	17,0	13,2	1,30	66,5	38,0	8,09	12/6
14	7	1,15	22,8	17,8	1,51	121	68,9	12,6	14/7
16	8	1,3	29,5	23,0	1,72	204	117	18,6	16/8
18	9	1,45	37,0	28,8	1,93	323	185	26,1	18/9
20	10	1,6	45,4	35,4	2,14	486	277	35,3	20/10

7. Hochstegige ⊥-Eisen



$$d = 0{,}1\ h + 0{,}1\ \text{cm}$$

$$b : h = 1 : 1$$

$$R = d;\ r = \frac{d}{2};\ r' = \frac{d}{4}$$

Neigung im Fuß und Steg = 2% (= 1 : 50)

Breite b	Höhe h	Dicke d	Fläche F qcm	Gewicht f. d. lfd. Meter in kg	Abstand des Schwerpunktes x_o	Trägheitsmoment J_o	J_s	Widerstandsmoment W_s	Nr.
2	2	0,3	1,12	0,87	0,58	0,76	0,38	0,27	2/2
2,5	2,5	0,35	1,64	1,28	0,73	1,63	0,87	0,49	2½/2½
3	3	0,4	2,26	1,76	0,85	3,35	1,72	0,80	3/3
3,5	3,5	0,45	2,97	2,32	0,99	6,01	3,10	1,23	3½/3½
4	4	0,5	3,77	2,94	1,12	10,0	5,28	1,84	4/4
4,5	4,5	0,55	4,67	3,64	1,26	15,5	8,13	2,51	4½/4½
5	5	0,6	5,66	4,42	1,39	23,0	12,1	3,36	5/5
6	6	0,7	7,94	6,19	1,66	45,7	23,8	5,48	6/6
7	7	0,8	10,6	8,27	1,94	84,4	44,5	8,79	7/7
8	8	0,9	13,6	10,6	2,22	141	73,7	12,8	8/8
9	9	1,0	17,1	13,3	2,48	224	119	18,2	9/9
10	10	1,1	20,9	16,3	2,74	336	179	24,6	10/10
12	12	1,3	29,6	23,1	3,28	684	366	42,0	12/12
14	14	1,5	39,9	31,1	3,80	1236	660	64,7	14/14

8. Zores-Eisen (Belag-Eisen)

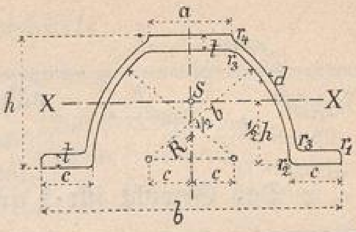
$a = 0{,}5\,h + 0{,}8\,cm$ $\quad r_1 = d$

$b = 2\,h + 2\,cm$ $\quad r_2 = d - 0{,}05\,cm$

$c = 0{,}3\,h + 0{,}6\,cm$ $\quad r_3 = t$

$d = {}^1\!/_{30}\,h + 0{,}14\,cm$ $\quad r_4 = 0{,}6\,d + 0{,}13\,cm$

$t = {}^1\!/_{15}\,h + 0{,}19\,cm$



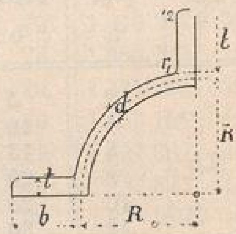
Höhe h	Breite oben a	Breite unten b	Breite Fuß c	Dicke Steg d	Dicke Kopf u. Fuß t	Fläche F qcm	Gewicht f. d. lfd. Meter in kg	Trägheitsmoment J_x	Widerstandsmoment W_x	Nr.
5	3,3	12	2,1	0,3	0,5	6,71	5,24	23,2	9,27	5
6	3,8	14	2,4	0,35	0,6	9,34	7,28	47,2	15,8	6
7,5	4,55	17	2,85	0,4	0,7	13,2	10,3	105	27,9	7½
9	5,3	20	3,3	0,45	0,8	17,9	14,0	206	45,8	9
11	6,3	24	3,9	0,5	0,9	24,1	18,8	421	76,5	11

9. ┘-Eisen (Quadrant-Eisen)

R = mittlerer Radius

$b = 0{,}2\,R + 2{,}5\,cm$

$r_1 = 0{,}12\,R$; $r_2 = 0{,}06\,R$



R	b	r_1	d	t	Fläche F qcm der vollen Röhre	Gewicht f. d. lfd. Meter in kg der vollen Röhre	Trägheitsmoment J der vollen Röhre	Nr.
5	3,5	0,6	0,4	0,6	29,8	23,3	576	5
			0,8	0,8	48,0	37,4	906	
7,5	4,0	0,9	0,6	0,8	54,9	42,8	2068	7½
			1,0	1,0	80,2	62,5	2982	
10	4,5	1,2	0,8	1,0	88,1	68,7	5511	10
			1,2	1,2	120	94,0	7478	
12,5	5,0	1,5	1,0	1,2	129	101	12 161	12½
			1,4	1,4	169	132	15 788	
15	5,5	1,8	1,2	1,4	179	140	23 637	15
			1,8	1,7	249	194	32 738	

10. Handleisten-Eisen

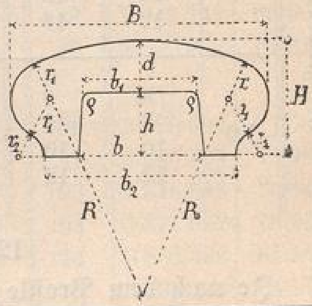
$R = B$ $\quad r_1 = 0{,}15\,B$

$H = 0{,}45\,B$ $\quad r_2 = 0{,}1\,B$

$d = 0{,}2\,B$ $\quad \rho = 0{,}05\,B$

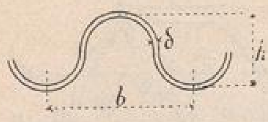
$b = 0{,}5\,B$ $\quad b_1 = 0{,}45\,B$

$h = 0{,}25\,B$ $\quad b_2 = 0{,}75\,B$



B	H	b	h	d	r_1	r_2	ρ	b_1	b_2	Fläche F qcm	Gewicht f. d. lfd. Meter in kg	Nr.
4	1,8	2	1,0	0,8	0,6	0,4	0,2	1,8	3,0	4,20	3,28	4
6	2,7	3	1,5	1,2	0,9	0,6	0,3	2,7	4,5	9,46	7,38	6
8	3,6	4	2,0	1,6	1,2	0,8	0,4	3,6	6,0	16,8	13,1	8
10	4,5	5	2,5	2,0	1,5	1,0	0,5	4,5	7,5	26,3	20,5	10
12	5,4	6	3,0	2,4	1,8	1,2	0,6	5,4	9,0	37,8	29,5	12

11. Wellbleche.



Das Widerstandsmoment für 1 m Breite ist annähernd:

$$W = \left(17 + 40\,\frac{h}{b}\right) h\,\delta$$

Das Gewicht für 1 qm bei 1 mm Dicke ist annähernd:

$$G = 7{,}8\left(2\,\frac{h}{b} + 0{,}57\right) \text{kg}$$

Der Querschnitt für 1 m Breite und 1 mm Dicke ist annähernd:

$$F = 10\left(2\,\frac{h}{b} + 0{,}57\right) \text{qcm}$$

	$\frac{b}{h}$	Wellenhöhe h	Wellenbreite b	Widerstandsmoment W für 1 m Breite und für δ = 0,075	0,1	0,125	0,15	0,2	0,25	0,3
Flaches Wellblech	2,5	2	5	5,0	6,6	8,3	9,9	13,2	—	—
		4	10	10,4	13,8	17,3	20,7	27,6	34,5	41,4
		6	15	15,5	20,6	25,8	30,9	41,2	51,5	61,8
		8	20	20,6	27,5	34,4	41,3	55,0	68,8	82,5
		10	25	25,8	34,4	43,0	51,6	68,8	86,0	103,2
		12	30	31,0	41,3	51,6	62,0	82,6	103,3	123,9
	2,0	4	8	11,5	15,3	19,1	23,2	30,6	38,3	45,9
		6	12	17,2	22,9	28,6	34,4	45,8	57,3	68,7
		8	16	22,9	30,5	38,1	45,8	61,0	76,3	91,5
		10	20	28,7	38,2	47,8	57,3	76,4	95,5	114,6
		12	24	34,4	45,8	57,3	68,7	91,6	114,5	137,4
Trägerwellblech	1,5	4	6	13,4	17,8	22,3	26,7	35,6	44,5	53,4
		6	9	20,0	26,6	33,3	39,9	53,2	66,5	79,8
		8	12	26,6	35,5	44,4	53,3	71,0	88,8	106,5
		10	15	33,3	44,4	55,5	66,6	88,8	111,0	133,2
		12	18	40,0	53,3	66,6	79,7	106,6	133,3	159,9
	1,0	6	6	25,6	34,1	42,6	51,2	68,2	85,3	102,3
		8	8	34,1	45,4	56,8	68,1	90,8	113,5	136,2
		10	10	42,7	56,9	71,1	85,4	113,8	142,3	170,7
		12	12	51,2	68,3	85,4	102,5	136,6	170,8	204,9

12. Eisenbahnschienen.

Je nach dem Profile der Schienen schwankt die Größe des Trägheitsmomentes und Widerstandsmomentes. Für 13 cm hohe Schienen kann man im Mittel annehmen:

$$J = 1000$$
$$W = 140$$

Für zwei aufeinander genietete Schienen ist etwa:

$$W = 420$$

13. Kreisförmiger Querschnitt.

Durchmesser d	Trägheitsmoment J	Widerstandsmoment W	Durchmesser d	Trägheitsmoment J	Widerstandsmoment W	Durchmesser d	Trägheitsmoment J	Widerstandsmoment W
1	0,0491	0,0982	34	65 597	3859	67	989 166	29 527
2	0,7854	0,7854	35	73 662	4209	68	1 049 556	30 869
3	3,976	2,651	36	82 448	4580	69	1 112 660	32 251
4	12,57	6,283	37	91 998	4973	**70**	1 178 588	33 674
5	30,68	12,27	38	102 354	5387	71	1 247 393	35 138
6	63,62	21,21	39	113 561	5824	72	1 319 167	36 644
7	117,9	33,67	**40**	125 664	6283	73	1 393 995	38 192
8	201,1	50,27	41	138 709	6766	74	1 471 963	39 783
9	322,1	71,57	42	152 745	7274	75	1 553 156	41 417
10	490,9	98,17	43	167 820	7806	76	1 637 662	43 096
11	718,7	130,7	44	183 984	8363	77	1 725 571	44 820
12	1018	169,6	45	201 289	8946	78	1 816 972	46 589
13	1402	215,7	46	219 787	9556	79	1 911 967	48 404
14	1886	269,4	47	239 531	10 193	**80**	2 010 619	50 265
15	2485	331,3	48	260 576	10 857	81	2 113 051	52 174
16	3217	402,1	49	282 979	11 550	82	2 219 347	54 130
17	4100	482,3	**50**	306 796	12 270	83	2 329 605	56 135
18	5153	572,6	51	332 086	13 023	84	2 443 920	58 189
19	6397	673,4	52	358 908	13 804	85	2 562 392	60 292
20	7854	785,4	53	387 323	14 616	86	2 685 120	62 445
21	9547	909,2	54	417 393	15 459	87	2 812 205	64 648
22	11 499	1045	55	449 180	16 334	88	2 943 748	66 903
23	13 737	1194	56	482 750	17 241	89	3 079 853	69 210
24	16 286	1357	57	518 166	18 181	**90**	3 220 623	71 569
25	19 175	1534	58	555 497	19 155	91	3 366 165	73 982
26	22 432	1726	59	594 810	20 163	92	3 516 586	76 448
27	26 087	1932	**60**	636 172	21 206	93	3 671 992	78 968
28	30 172	2155	61	679 651	22 284	94	3 832 492	81 542
29	34 719	2394	62	725 332	23 398	95	3 998 198	84 173
30	39 761	2651	63	773 272	24 548	96	4 169 220	86 859
31	45 333	2925	64	823 550	25 736	97	4 345 671	89 601
32	51 472	3217	65	876 240	26 961	98	4 527 664	92 401
33	58 214	3528	66	931 420	28 225	99	4 715 315	95 259

14. Ringförmiger Querschnitt

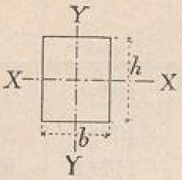
F = Querschnitt
J = Trägheitsmoment
W = Widerstandsmoment

D cm	δ cm	F qcm	J cm^4	W cm^3
10	1,0	28,27	289,8	57,96
	1,2	33,18	327,1	65,42
	1,4	37,83	359,0	71,79
	1,6	42,22	385,9	77,18
	1,8	46,37	408,5	81,70
	2,0	50,27	427,3	85,45
11	1,2	36,95	450,2	81,85
	1,4	42,22	496,7	90,31
	1,6	47,25	537,0	97,64
	1,8	52,02	571,5	103,9
	2,0	56,55	600,8	109,2
	2,2	60,82	625,6	113,8
12	1,2	40,71	601,0	100,2
	1,4	46,62	660,4	110,1
	1,6	52,28	723,5	120,6
	1,8	57,68	773,5	128,9
	2,0	62,83	816,8	136,1
	2,2	67,73	854,1	142,4
	2,4	72,38	886,0	147,7
13	1,4	51,02	870,6	133,9
	1,6	57,30	949,2	146,0
	1,8	63,33	1019	156,8
	2,0	69,11	1080	166,1
	2,2	74,64	1134	174,4
	2,4	79,92	1180	181,5

D cm	δ cm	F qcm	J cm^4	W cm^3
14	1,4	55,42	1113	159,0
	1,6	62,33	1218	174,0
	1,8	68,99	1311	187,4
	2,0	75,40	1395	199,3
	2,2	81,56	1469	209,9
	2,4	87,46	1534	219,1
	2,6	93,11	1591	227,3
15	1,4	59,82	1398	186,4
	1,6	67,36	1533	204,4
	1,8	74,65	1656	220,8
	2,0	81,68	1766	235,5
	2,2	88,47	1866	248,8
	2,4	95,00	1954	260,5
	2,6	101,3	2032	270,9
16	1,4	64,21	1687	210,9
	1,6	72,38	1899	237,4
	1,8	80,30	2056	257,1
	2,0	87,97	2199	274,9
	2,2	95,38	2329	318,6
	2,4	102,5	2445	330,3
	2,6	109,5	2549	291,1
	2,8	116,1	2643	305,6
17	1,4	68,61	2104	247,5
	1,6	77,41	2320	272,9
	1,8	85,95	2517	296,1
	2,0	94,25	2698	317,4
	2,2	102,3	2863	336,8
	2,4	110,1	3012	354,4
	2,6	117,6	3148	370,4
	2,8	124,9	3271	384,8

D cm	δ cm	F qcm	J cm^4	W cm^3
	1,6	82,44	2798	310,9
	1,8	91,61	3042	338,0
	2,0	100,5	3267	363,0
18	2,2	109,2	3475	386,1
	2,4	117,6	3663	407,0
	2,6	125,8	3835	426,1
	2,8	133,7	3992	443,6
	1,6	87,46	3338	351,4
	1,8	97,26	3636	382,8
	2,0	106,8	3912	411,8
19	2,2	116,1	4168	438,7
	2,4	125,2	4401	463,3
	2,6	134,0	4617	486,0
	2,8	142,5	4814	506,8
	1,6	92,49	3944	394,4
	1,8	102,9	4303	430,3
	2,0	113,1	4637	463,7
	2,2	123,0	4948	494,8
20	2,4	132,7	5234	523,4
	2,6	142,1	5499	549,9
	2,8	151,3	5743	574,3
	3,0	160,2	5968	596,8
	1,6	102,5	5367	487,9
	1,8	114,2	5873	533,9
	2,0	125,7	6346	576,9
	2,2	136,8	6789	617,2
22	2,4	147,8	7203	654,8
	2,6	158,5	7589	689,9
	2,8	168,9	7948	722,5
	3,0	179,1	8264	751,3
	1,8	125,5	7785	648,8
	2,0	138,2	8432	706,9
	2,2	150,7	9042	753,5
24	2,4	162,9	9615	801,3
	2,6	174,8	10154	846,2
	2,8	186,5	10659	888,3
	3,0	197,9	11133	927,8

D cm	δ cm	F qcm	J cm^4	W cm^3
	1,8	136,8	10073	774,8
	2,0	150,8	10933	841,0
	2,2	164,5	11747	903,6
	2,4	177,9	12516	962,8
26	2,6	191,1	13244	1019
	2,8	204,1	13930	1072
	3,0	216,8	14578	1121
	3,2	229,2	15188	1168
	2,0	163,4	13886	991,9
	2,2	178,3	14945	1068
	2,4	193,0	15951	1139
28	2,6	207,5	16907	1208
	2,8	221,7	17813	1272
	3,0	235,6	18673	1334
	3,2	249,3	19487	1392
	2,0	175,9	17327	1155
	2,2	192,1	18676	1246
	2,4	208,1	19965	1331
30	2,6	223,8	21192	1413
	2,8	239,3	22359	1491
	3,0	254,5	23472	1565
	3,2	269,4	24197	1636
	2,2	206,0	22988	1437
	2,4	223,2	24603	1538
	2,6	240,1	26148	1634
32	2,8	256,9	27628	1727
	3,0	273,3	29040	1815
	3,2	289,5	30389	1899
	3,4	305,5	31676	1980
	2,4	238,3	29911	1759
	2,6	256,5	31827	1872
	2,8	264,4	33664	1980
	3,0	292,2	35426	2084
34	3,2	309,6	37113	2183
	3,4	326,9	38729	2279



15. Rechteckiger Querschnitt

$$J_y = J_{min} = \frac{h\,b^3}{12}$$

$$W_x = W_{max} = \frac{b\,h^2}{6}$$

Breite b	Höhe h	Trägheitsmoment J_y	Widerstandsmoment W_x
8	8	341	85
	9	384	108
	10	427	133
	11	469	161
	12	512	192
9	9	547	122
	10	608	150
	11	668	182
	12	729	216
	13	790	254
	14	851	294
10	10	833	167
	11	917	202
	12	1000	240
	13	1083	282
	14	1167	327
	15	1250	375
11	11	1220	222
	12	1331	264
	13	1442	315
	14	1553	359
	15	1664	413
	16	1775	469
	17	1886	530
12	12	1728	288
	13	1872	338
	14	2016	392
	15	2160	450
	16	2304	512
	17	2448	578
	18	2592	648
13	13	2380	366
	14	2563	425
	15	2746	488
13	16	2929	555
	17	3112	626
	18	3296	702
	19	3479	782
	20	3662	867
14	14	3201	457
	15	3430	525
	16	3659	597
	17	3887	674
	18	4116	756
	19	4345	842
	20	4573	933
	21	4802	1029
15	15	4219	563
	16	4500	640
	17	4781	723
	18	5063	810
	19	5344	901
	20	5625	1000
	21	5906	1103
	22	6188	1210
	23	6469	1323
16	16	5461	683
	17	5803	771
	18	6144	864
	19	6485	963
	20	6827	1067
	21	7168	1176
	22	7509	1291
	23	7851	1411
	24	8192	1536
17	17	6960	819
	18	7370	918
	19	7779	1023
	20	8188	1133

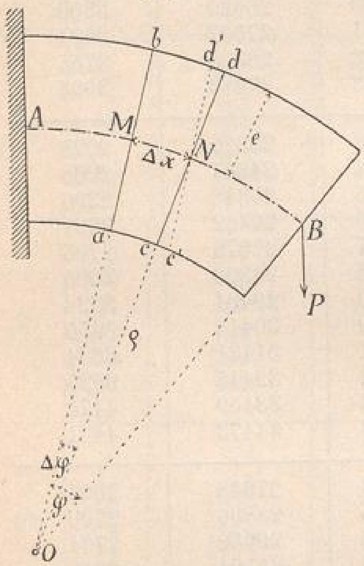
Breite b	Höhe h	Trägheits-moment J_y	Widerstands-moment W_x
17	21	8598	1250
	22	9007	1371
	23	9417	1499
	24	9826	1632
	25	10235	1771
18	18	8748	972
	19	9234	1083
	20	9720	1200
	21	10206	1323
	22	10692	1452
	23	11178	1587
	24	11664	1728
	25	12150	1875
	26	12636	2028
	27	13122	2187
19	19	10860	1143
	20	11432	1267
	21	12003	1397
	22	12575	1533
	23	13146	1675
	24	13718	1824
	25	14290	1979
	26	14861	2141
	27	15433	2309
	28	16004	2483
20	20	13333	1333
	21	14000	1470
	22	14667	1613
	23	15333	1763
	24	16000	1920
	25	16667	2083
	26	17333	2253
	27	18000	2430
	28	18667	2613
	29	19333	2803
	30	20000	3000
21	21	16207	1544
	22	16979	1694
	23	17750	1852
	24	18522	2016
	25	19294	2188
	26	20066	2366
	27	20837	2552
	28	21609	2744
	29	22381	2944
	30	23153	3150
	31	23924	3364
22	22	19521	1775
	23	20409	1940
	24	21296	2112
	25	22183	2292
	26	23071	2479
	27	23958	2673
	28	24845	2875
	29	25733	3084
	30	26620	3300
	31	27507	3524
	32	28395	3755
	33	29282	3993
23	23	23320	2028
	24	24334	2208
	25	25348	2396
	26	26362	2591
	27	27376	2795
	28	28390	3005
	29	29404	3224
	30	30418	3450
	31	31431	3684
	32	32445	3925
	33	33459	4175
	34	34473	4431
24	24	27648	2304
	25	28800	2500
	26	29952	2704
	27	31104	2916
	28	32256	3136
	29	33408	3364
	30	34560	3600
	31	35712	3844
	32	36864	4096
	33	38016	4356
	34	39168	4624
	35	40320	4900
	36	41472	5184
25	25	32552	2604
	26	33854	2817
	27	35156	3038
	28	36458	3267
	29	37760	3504
	30	39063	3750
	31	40365	4004
	32	41667	4267
	33	42969	4538
	34	44271	4817
	35	45573	5104
	36	46875	5400
	37	48177	5704

§ 7.

Die Krümmung und Durchbiegung der belasteten Balken.

In § 4 S. 15 wurde die neutrale Faserschicht eines Balkens als diejenige Faserschicht erklärt, welche, wenn der Balken durch eine Belastung eine Durchbiegung erfährt, weder verlängert noch verkürzt, sondern nur gebogen wird.

Fig. 32.



Denkt man sich durch die Längsachse des Balkens eine lotrechte Ebene gelegt, so schneidet diese die gebogene neutrale Faserschicht in einer krummen Linie, welche die elastische Linie genannt wird. Diese kann angesehen werden als zusammengesetzt aus einzelnen Kreisbögen, deren Halbmesser an verschiedenen Stellen des Balkens im allgemeinen verschieden groß sind.

Ist O der Mittelpunkt des Kreisbogens für das sehr kleine Bogenstück MN (Fig. 32) und bezeichnet man den Krümmungshalbmesser NO mit ϱ, so ist wegen der Aehnlichkeit der Dreiecke d'dN und MNO:

$$\frac{d'd}{MN} = \frac{e}{\varrho}$$

d'd ist die Verlängerung der Faser, deren ursprüngliche Länge = MN war, folglich ist nach Gl. 2) S. 6 zu setzen:

$$\frac{d'd}{MN} = \frac{k}{E}$$

Aus den letzten beiden Gleichungen folgt:

$$\frac{\mathbf{e}}{\boldsymbol{\varrho}} = \frac{\mathbf{k}}{\mathbf{E}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 28)$$

Setzt man für k den Wert aus Gl. 17) S. 18

$$k = \frac{\mathfrak{M}}{W} = \frac{\mathfrak{M}e}{J}$$

ein, so erhält man:

$$\frac{e}{\varrho} = \frac{\mathfrak{M}e}{EJ}$$

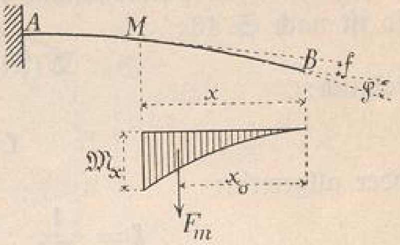
Für den Krümmungshalbmesser ϱ ergibt sich danach die Größe:

$$\varrho = \frac{\mathbf{EJ}}{\mathfrak{M}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 29)$$

Man erkennt aus dieser Gleichung, daß bei einem prismatischen Balken, bei welchem J stets denselben Wert behält, der Krümmungshalbmesser um so kleiner wird, je größer das Kraftmoment $\mathfrak{M}$ wird, und daß für diejenige Stelle des Balkens, wo das Moment am größten ist, der Krümmungshalbmesser seinen kleinsten Wert annimmt, der Balken dort also am schärfsten gekrümmt ist.

Infolge der Krümmung erleiden die einzelnen Punkte des Balkens eine Durchbiegung, welche sich folgendermaßen berechnen läßt.

Fig. 33.



Aus dem Dreieck MNO (Fig. 32) mit der sehr kleinen Seite $MN = \Delta x$ und dem sehr kleinen Winkel $MON = \Delta \varphi$ folgt:

$$\Delta x = \varrho \cdot \Delta \varphi \quad \text{oder} \quad \Delta \varphi = \frac{\Delta x}{\varrho}$$

und wenn für ϱ der Wert aus Gl. 29) eingesetzt wird:

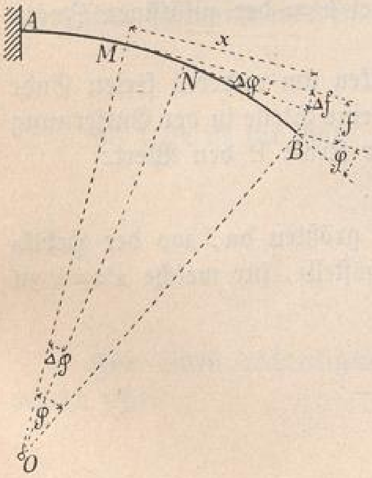
$$\Delta \varphi = \frac{\mathfrak{M} \cdot \Delta x}{EJ} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 30)$$

Denkt man die Länge $MB = x$ in sehr viele kleine Abschnitte Δx und dem entsprechend den Winkel $MOB = \varphi$ in sehr viele kleine Winkelteile $\Delta \varphi$ zerlegt, so erhält man nach der letzten Gleichung für das Trägerstück MB:

$$\varphi = \Sigma(\Delta \varphi) = \frac{1}{EJ} \Sigma(\mathfrak{M} \cdot \Delta x)$$

Trägt man nun (Fig. 33) die Momente $\mathfrak{M}$ auf den Endpunkten der zugehörigen x als Strecken auf, so erhält man als Darstellung von $\Sigma(\mathfrak{M} \cdot \Delta x)$ eine Fläche, die sogen. **Momentenfläche** oder kurz **$\mathfrak{M}$-Fläche**. Der Inhalt derselben werde durch F_m bezeichnet. Es ist dann nach der letzten Gleichung, da man wegen Kleinheit des Winkels genügend genau $\operatorname{tg} \varphi$ statt φ setzen kann:

Fig. 34.



$$\mathbf{tg}\, \varphi = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{EJ}} \cdot \mathbf{F_m} \quad . \; . \; . \quad 31)$$

oder allgemein:

$$\mathbf{tg}\, \varphi = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{EJ}} \cdot (\mathfrak{M}\text{-}\mathbf{Fläche}) \quad . \quad 32)$$

Nach Fig. 34 ist:

$$\Delta f = x \cdot \Delta \varphi$$

oder wenn für $\Delta \varphi$ der Wert aus Gl. 30) eingesetzt wird:

$$\Delta f = x \frac{\mathfrak{M} \cdot \Delta x}{EJ}$$

Die Durchbiegung f des Trägerendpunktes B gegen den Punkt M hat demnach die Größe:

$$f = \Sigma(\Delta f) = \frac{1}{EJ}\,\Sigma(\mathfrak{M}\,.\,\Delta x)\,x$$

Der Ausdruck $\Sigma(\mathfrak{M}\,.\,\Delta x)\,x$ bedeutet die Summe der statischen Momente sämtlicher Flächenstreifen der M-Fläche in Bezug auf den Punkt B. Wird daher der Schwerpunktsabstand dieser Fläche ($= F_m$) mit x_0 bezeichnet (Fig. 33), so ist nach S. 13:

$$\Sigma(\mathfrak{M}\,.\,\Delta x)\,x = F_m\,.\,x_0$$

folglich:

$$\mathbf{f} = \frac{1}{\mathbf{EJ}}\,\mathbf{F_m x_0} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 33)$$

oder allgemein:

$$\mathbf{f} = \frac{1}{\mathbf{EJ}}\,.\,(\textbf{Moment der M-Fläche}) \quad \ldots\ldots \quad 34)$$

§ 8.

Der an einem Ende eingespannte Träger.

1. Belastung durch Einzelkräfte.

Nach Gl. 17) S. 18 ist für einen prismatischen Balken, bei welchem das Widerstandsmoment W für alle Querschnitte denselben Wert hat, die Spannung k um so größer, je größer das Moment $\mathfrak{M}$ ist. Da k an der stärkst gespannten Stelle des Balkens nicht größer als die zuläßige Inanspruchnahme werden darf, so ist ein prismatischer Balken immer nach dem größten Momente zu berechnen, wobei k = der zuläßigen Inanspruchnahme gesetzt wird.

Ist ein an einem Ende eingespannter Balken am anderen freien Ende durch die Kraft P belastet (Fig. 35), so hat für eine Stelle in der Entfernung x vom Endpunkte des Balkens das Moment der Kraft P den Wert:

$$\mathfrak{M}_x = P\,x$$

Das Moment wächst mit x und wird am größten da, wo der Hebelarm x am größten ist, also an der Einspannungsstelle, für welche $x = l$ zu setzen ist. Danach ist:

$$\mathfrak{M}_{max} = P\,l$$

Aus diesen beiden Gleichungen folgt:

$$\frac{\mathfrak{M}_x}{\mathfrak{M}_{max}} = \frac{x}{l}$$

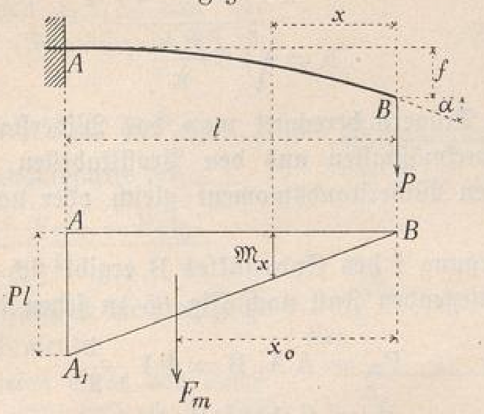
Die Momente verhalten sich wie die Entfernungen von der Belastungsstelle. Da für $x = 0$ auch $\mathfrak{M} = 0$ wird, so lassen sich die Momente darstellen durch die Ordinaten des Dreiecks AA_1B (Fig. 35), dessen Endordinate $AA_1 = P\,l$ ist.

Setzt man in Gl. 17) S. 18 für $\mathfrak{M}$ den größten Wert Pl ein, so folgt:

$$\mathbf{Pl = kW} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 35)$$

wo k die Spannung an der Einspannungsstelle, also die größte überhaupt im Balken auftretende Spannung ist, folglich gleich der zulässigen Inanspruch-

Fig. 35.



nahme zu setzen ist. Alle anderen Stellen eines prismatischen Balkens erleiden eine geringere Spannung, es ist deshalb die Einspannungsstelle der gefährliche Querschnitt.

Die letzte Gleichung kann in der Form:

$$\mathrm{P} = \frac{\mathrm{kW}}{\mathrm{l}}$$

benutzt werden, die Tragfähigkeit eines gegebenen Balkens zu berechnen.

Soll dagegen für eine gegebene Belastung der erforderliche Balkenquerschnitt bestimmt werden, so ist zu setzen:

$$\mathrm{W} = \frac{\mathrm{Pl}}{\mathrm{k}}$$

So z. B. ist für einen Kreisquerschnitt mit dem Durchmesser d

$$\frac{d^3 \pi}{32} = \frac{\mathrm{Pl}}{\mathrm{k}}$$

also:

$$d = \sqrt[3]{\frac{32}{\pi} \frac{\mathrm{Pl}}{\mathrm{k}}}$$

Für einen rechteckigen Querschnitt von der Breite b und der Höhe h würde sein:

$$\frac{b h^2}{6} = \frac{\mathrm{Pl}}{\mathrm{k}}$$

Man kann hier nun entweder b annehmen und h danach berechnen, oder umgekehrt h annehmen und b danach berechnen, oder endlich für b : h ein bestimmtes Verhältnis wählen, woraus sich dann die Größen b und h ebenfalls ermitteln lassen. (Letzteres Verfahren ist wohl das zweckmäßigste.)

Setzt man z. B.

$$\frac{b}{h} = \frac{3}{4}, \text{ also } b = \frac{3}{4} h$$

so wird:

$$\frac{{}^3/_4\, h \,.\, h^2}{6} = \frac{P\, l}{k}$$

$$h = \sqrt[3]{8 \frac{P\, l}{k}}$$

Bei eisernen Trägern berechnet man das Widerstandsmoment W und sucht dann am zweckmäßigsten aus den Profiltabellen der Walzwerke ein Profil heraus, dessen Widerstandsmoment gleich oder nahezu gleich dem berechneten ist.

Die Durchbiegung f des Endpunktes B ergibt sich aus Gl. 33) S. 44, worin für den vorliegenden Fall nach Fig. 35 zu setzen ist:

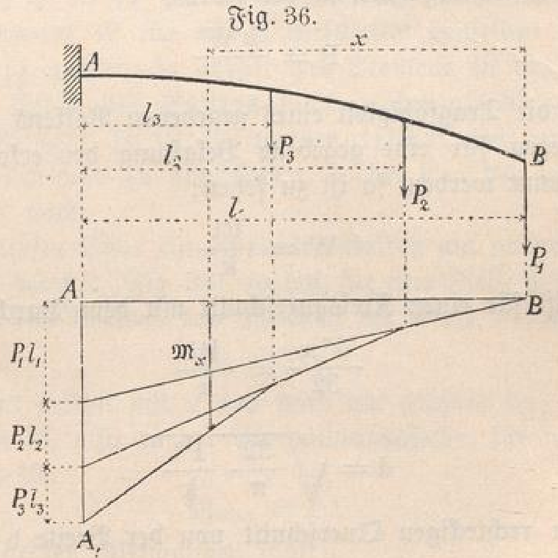
$$F_m = A\, A_1\, B = P\, l \,.\, \frac{l}{2}$$

$$x_0 = {}^2/_3\, l$$

Man erhält:

$$\mathbf{f} = \frac{\mathbf{P\, l^3}}{\mathbf{3\, EJ}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 36)$$

Fig. 36.



Setzt man hierin nach Gl. 17) S. 18:

$$P\, l = k\, W = k \frac{J}{e}$$

so wird:

$$\mathbf{f} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}} \frac{\mathbf{k}}{\mathbf{E}} \frac{\mathbf{l^2}}{\mathbf{e}} \quad \ldots\ldots \quad 37)$$

Der Winkel α, den die elastische Linie an dem Endpunkt B mit der Wagerechten einschließt, folgt nach Gl. 31) S. 43 aus:

$$\mathbf{tg}\,\alpha = \frac{\mathbf{P l^2}}{\mathbf{2 E J}} \quad \ldots \ldots \quad 38)$$

Wirken auf einen eingespannten Träger verschiedene Einzelkräfte $P_1\, P_2\, P_3$ in den Entfernungen $l_1\, l_2\, l_3$ von der Einspannungsstelle (Fig. 36), so ist zu setzen:

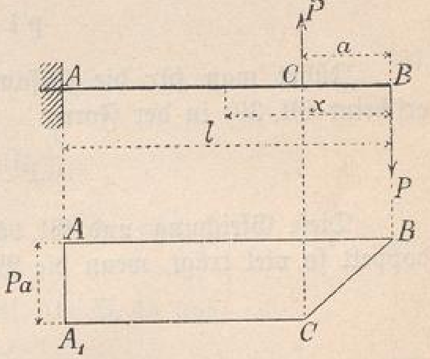
$$\mathfrak{M}_{max} = P_1 l_1 + P_2 l_2 + P_3 l_3$$

und das Widerstandsmoment wird:

$$W = \frac{P_1 l_1 + P_2 l_2 + P_3 l_3}{k}$$

Fig. 36 zeigt zugleich die graphische Darstellung der Momente.

Fig. 37.



Wirkt am freien Ende des eingespannten Trägers (Fig. 37) ein Kräftepaar, dessen Moment = P a ist, so ist für eine beliebige Stelle in der Entfernung x vom Endpunkte:

$$\mathfrak{M}_x = P x - P (x - a) = P a$$

Das Moment zwischen den Punkten A und C ist also unveränderlich und hat die Größe P a, daher:

$$W = \frac{P a}{k}$$

2. Streckenbelastung.

Ist die Belastung p für die Längeneinheit gleichmäßig über die ganze Länge l des Balkens verteilt (Fig. 38), so liegt der Angriffspunkt der Gesamtbelastung p l im Schwerpunkte der Belastungsfläche, hat also den Abstand $\frac{l}{2}$ von der Einspannungsstelle.

Das Moment an der Stelle x ist:

$$\mathfrak{M}_x = p x \cdot \frac{x}{2}$$

Das größte Moment an der Einspannungsstelle ist:

$$\mathfrak{M}_{max} = p l \cdot \frac{l}{2}$$

folglich:

$$\frac{\mathfrak{M}_x}{\mathfrak{M}_{max}} = \frac{x^2}{l^2}$$

Die Momente verhalten sich wie die Quadrate der Abstände vom freien Ende des Balkens, die Momentenfläche wird daher begrenzt durch eine

Parabel AA_1B, deren Scheitel in B liegt und deren Höhe $AA_1 = \frac{p\,l^2}{2}$ ist. Eine einfache Konstruktion der Parabel ist in Fig. 38 angedeutet.

Der gefährliche Querschnitt des Balkens, welcher mit der Einspannungsstelle zusammenfällt, ist nach dem größten Moment zu berechnen. Setzt man:

$$\mathfrak{M}_{max} = k\,W$$

so folgt:

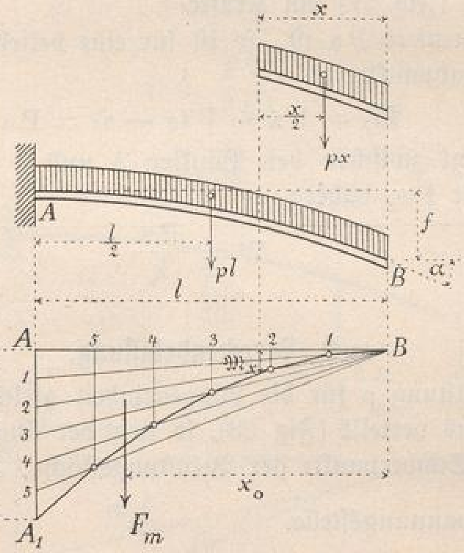
$$p\,l\,.\,\frac{l}{2} = k\,W \quad \ldots\ldots\ldots \quad 39)$$

Führt man für die Gesamtbelastung $p\,l$ den Buchstaben P ein, so erscheint Gl. 39) in der Form:

$$P\,.\,\frac{l}{2} = k\,W$$

Diese Gleichung und Gl. 35) S. 45 lassen erkennen, daß ein Balken doppelt so viel trägt, wenn die Belastung gleichmäßig über die Länge desselben verteilt ist, als wenn dieselbe Belastung als Einzelkraft am freien Ende des Balkens angreift.

Fig. 38.



Besteht die gleichmäßige Belastung aus dem Eigengewichte des Balkens und wird dieses mit G bezeichnet, so ist:

$$G\,.\,\frac{l}{2} = k\,W$$

Daraus ergibt sich die Länge l, welche ein an einem Ende eingespannter Balken haben darf, um sich selbst noch mit Sicherheit tragen zu können, zu:

$$l = \frac{2\,k\,W}{G}$$

Die M-Fläche für den gleichmäßig belasteten Freiträger wird (wie schon oben gesagt) begrenzt durch eine Parabel und hat den Flächeninhalt:

$$F_m = \frac{l}{3} \cdot \frac{p\,l^2}{2} = \frac{p\,l^3}{6}$$

Der Abstand x_0 des Schwerpunktes dieser Fläche vom Trägerende B ist*):

$$x_0 = {}^3/_4\, l$$

Nach Einsetzung dieser Werte ergibt sich die Durchbiegung f aus Gl. 33) S. 44 zu:

$$\mathbf{f = \frac{p\,l^4}{8\,EJ}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 40)$$

oder nach Einsetzung von:

$$\frac{p\,l^2}{2} = k\,W = k\,\frac{J}{e}$$

zu:

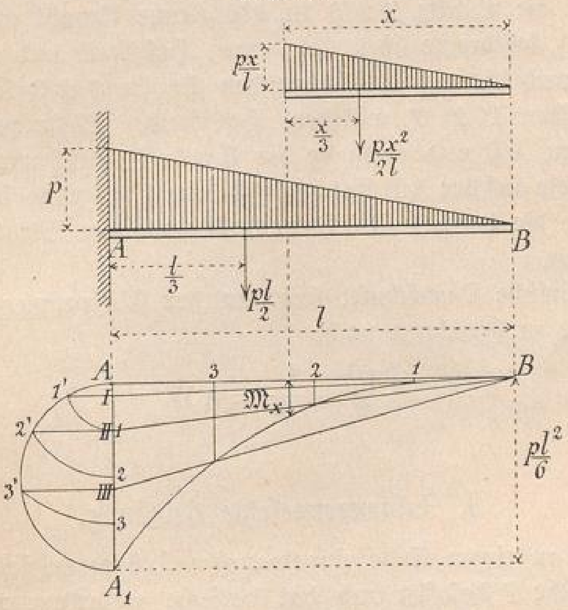
$$\mathbf{f = \frac{1}{4}\,\frac{k}{E}\,\frac{l^2}{e}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 41)$$

Der Winkel α (Fig. 38) folgt nach Gl. 31) S. 43 aus:

$$\mathbf{tg\,\alpha = \frac{p\,l^3}{6\,EJ}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 42)$$

Die Streckenbelastung sei nun nicht mehr gleichmäßig über die ganze Länge des Balkens verteilt, sondern sei $= p$ an der Einspannungsstelle A

Fig. 39.



und nehme von dort aus stetig und gleichförmig ab bis auf Null am freien Ende B (Fig. 39). Die Belastungsfläche ist alsdann ein Dreieck.

*) Vergl. Lauenstein, Mechanik, 5. Aufl. Gl. 47.

Die ganze Belastung ist $= \frac{p\,l}{2}$; der Angriffspunkt derselben (Schwerpunkt des Belastungsdreiecks) hat die Entfernung $\frac{1}{3}\,l$ von der Einspannungsstelle, folglich ist:

$$\mathfrak{M}_{max} = \frac{p\,l}{2} \cdot \frac{l}{3} = \frac{p\,l^2}{6}$$

Für eine Stelle in der Entfernung x vom freien Balkenende ist die Belastungshöhe $= \frac{p\,x}{l}$. Die Belastung des Balkenstückes von der Länge x ist also:

$$P = \frac{p\,x}{l} \cdot \frac{x}{2} = \frac{p\,x^2}{2\,l}$$

und das Moment an der Stelle x:

$$\mathfrak{M}_x = \frac{p\,x^2}{2\,l} \cdot \frac{x}{3} = \frac{p\,x^3}{6\,l}$$

Aus den beiden Momentengleichungen folgt:

$$\frac{\mathfrak{M}_x}{\mathfrak{M}_{max}} = \frac{x^3}{l^3}$$

Die Momente verhalten sich wie die dritten Potenzen der Abstände vom freien Ende des Balkens, die Momentenfläche wird daher begrenzt durch eine kubische Parabel, deren Scheitel in B liegt und deren Höhe $A\,A_1 = \frac{p\,l^2}{6}$ ist.

Zur Konstruktion der kubischen Parabel teile die Geraden $A\,A_1$ und $A\,B$ (Fig. 39) durch die Punkte 1 2 3 in die gleiche Anzahl unter sich gleicher Teile (hier vier), beschreibe über $A\,A_1$ einen Halbkreis und von dem Mittelpunkt A aus durch die auf $A\,A_1$ liegenden Punkte 1 2 3 Kreisbögen bis zu den Schnittpunkten 1′ 2′ 3′ mit dem Halbkreis. Ziehe ferner 1′ I, 2′ II, 3′ III parallel zu AB und verbinde die Punkte I II III mit B durch gerade Linien. Durch die auf der AB liegenden Punkte 1 2 3 ziehe sodann Parallelen zu $A\,A_1$, welche die durch I II III nach B gezogenen Strahlen in Parabelpunkten schneiden.

Der gefährliche Querschnitt liegt an der Einspannungsstelle und der Balken ist daher zu berechnen nach:

$$\frac{\mathbf{p\,l}}{\mathbf{2}} \cdot \frac{\mathbf{l}}{\mathbf{3}} = \mathbf{k\,W} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 43)$$

3. Zusammengesetzte Belastung.

Wird ein an einem Ende eingespannter Träger an seinem freien Ende durch das Gewicht P belastet und hat derselbe außerdem noch eine gleichmäßig über seine Länge verteilte Belastung p für die Längeneinheit zu tragen (Fig. 40), so ist:

$$\mathfrak{M}_{max} = P\,l + p\,l \cdot \frac{l}{2}$$

Setzt man:

$$\mathfrak{M}_{max} = k\,W$$

so ergibt sich das Widerstandsmoment:

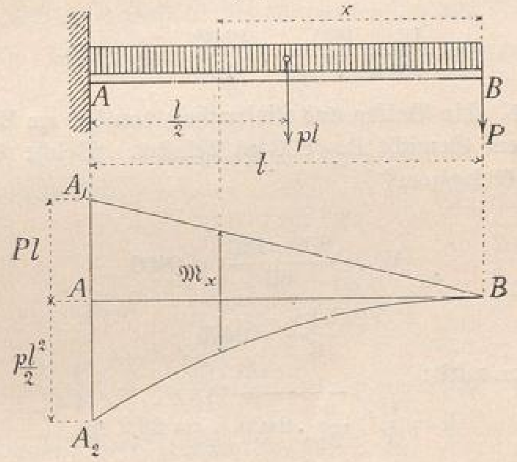
$$W = \frac{P\,l + p\,l \cdot \frac{l}{2}}{k}$$

Besteht die gleichmäßige Belastung aus dem Eigengewichte G des Trägers, so wird:

$$W = \frac{P\,l + G \cdot \frac{l}{2}}{k}$$

Die graphische Darstellung der Momente (Fig. 40) setzt sich zusammen aus dem Dreieck $A A_1 B$, herrührend von der Einzelkraft P und der von der

Fig. 40.



Parabel $A_2 B$ begrenzten Fläche $A A_2 B$ als Beitrag von der gleichmäßig verteilten Belastung.

Wird die durch die Einzelkraft P hervorgebrachte Beanspruchung mit k_1 und die durch die gleichmäßig verteilte Belastung hervorgebrachte Beanspruchung mit k_2 bezeichnet, so ergibt sich die Durchbiegung des Endpunktes B durch Addition der Gleichungen 37) und 41) zu:

$$\mathbf{f} = \left(\frac{\mathbf{k}_1}{3} + \frac{\mathbf{k}_2}{4}\right)\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{E}}\,\frac{\mathbf{l}^2}{\mathbf{e}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 44)$$

A u f g a b e 16. Ein an einem Ende wagerecht eingespannter Balken von Eichenholz, dessen Länge = 150 cm und dessen Querschnitt 20 × 24 cm ist, soll an seinem freien Ende durch ein Gewicht P belastet werden. Wie groß darf P sein?

A u f l ö s u n g. Nach der Tabelle S. 4 ist hier zu setzen: k = 80 (für Druck); ferner ist nach der Tabelle 15 § 6 S. 40 für b = 20 cm, h = 24 cm:

$$W = 1920$$

folglich erhält man nach Gl. 35) S. 45:

$$P = \frac{80 \cdot 1920}{150} = 1024 \text{ kg}$$

Aufgabe 17. Ein an einem Ende eingemauerter schmiedeeiserner I-Träger von 250 cm Länge wird am freien Ende durch ein Gewicht von 3000 kg belastet. Welches Profil muß der Träger erhalten und wie groß wird die Durchbiegung des Endpunktes sein? ($k = 1000$)

Auflösung. Aus Gl. 35) S. 45 folgt:

$$W = \frac{3000 \cdot 250}{1000} = 750$$

Nach Tabelle 2 § 6 ist das Profil Nr. 32 mit $W = 781$ zu wählen.

Die Beanspruchung wird dann genau:

$$k = \frac{\mathfrak{M}}{W} = \frac{3000 \cdot 250}{781} = 960 \text{ kg/qcm}$$

Die Durchbiegung beträgt nach Gl. 37) S. 46, worin $e = \frac{h}{2} = 16$ cm zu setzen ist:

$$f = \frac{1}{3} \frac{960}{2000000} \cdot \frac{250^2}{16} = 0{,}625 \text{ cm}$$

Aufgabe 18. Ein Balken aus Kiefernholz von 180 cm Länge ist an seinem freien Ende durch ein Gewicht $P = 800$ kg belastet. Welche Abmessungen erhält der Balken bei $k = 60$ kg/qcm?

Auflösung.

$$W = \frac{800 \cdot 180}{60} = 2400$$

$$\frac{b h^2}{6} = 2400$$

Für $b = 21$ cm wird:

$$h = \sqrt{\frac{6}{21} \cdot 2400} = \infty\, 26{,}2 \text{ cm}$$

Wählt man $h = 26$ cm, so wird:

$$b = \frac{6 \cdot 2400}{26^2} = 21{,}3 \text{ cm}$$

Wird $b = {}^3/_4\, h$ angenommen, so ergibt sich:

$$\frac{{}^3/_4\, h \cdot h^2}{6} = 2400$$

$$h = \sqrt[3]{8 \cdot 2400} = 26{,}8 \text{ cm}$$

$$b = \frac{3}{4} \cdot 26{,}8 = 20{,}1 \text{ cm}$$

Aufgabe 19. Ein 220 cm ausladender I-Träger soll nach Fig. 36 S. 46 belastet sein, und zwar sei:

$$P_1 = 200 \text{ kg}; \quad l_1 = 220 \text{ cm}$$
$$P_2 = 500 \text{ kg}; \quad l_2 = 180 \text{ cm}$$
$$P_3 = 300 \text{ kg}; \quad l_3 = 120 \text{ cm}$$

Welches Profil muß der Träger erhalten bei $k = 1000$?

Auflösung.

$$\mathfrak{M}_{max} = 200 \,.\, 220 + 500 \,.\, 180 + 300 \,.\, 120 = 170000 \text{ kg cm}$$

$$W = \frac{170000}{1000} = 170$$

Nach Tabelle 2 § 6 genügt Profil Nr. 19 mit $W = 185$.

Aufgabe 20. Welche gleichmäßig verteilte Belastung kann ein 200 cm langer Freiträger aus Eichenholz, dessen Breite $b = 18$ cm und dessen Höhe $h = 24$ cm ist, mit Sicherheit tragen? $(k = 60)$

Auflösung. Nach Tabelle 15 § 6 S. 40 ist:

$$W = 1728$$

folglich nach Gl. 39) S. 48:

$$p\,l = \frac{2 \,.\, 60 \,.\, 1728}{200} = 1036{,}8 \text{ kg}$$

Aufgabe 21. Wie lang kann ein an einem Ende wagerecht eingespannter I-Träger Profil Nr. 18 sein, um sich selbst (bei $k = 1000$) noch mit Sicherheit tragen zu können, und wie groß ist die Durchbiegung des freien Endes?

Auflösung. Das Widerstandsmoment dieses Trägers ist nach Tabelle 2 § 6:

$$W = 161$$

Das Gewicht für 1 cm Länge:

$$g = 0{,}217 \text{ kg}$$

folglich das Gesamtgewicht:

$$G = 0{,}217 \,.\, l$$

Danach ist:

$$l = \frac{2\,k\,W}{G} = \frac{2 \,.\, 1000 \,.\, 161}{0{,}217 \,.\, l}$$

$$l = \sqrt{\frac{2 \,.\, 1000 \,.\, 161}{0{,}217}} = 1218 \text{ cm} = 12{,}18 \text{ m}$$

Die Durchbiegung beträgt nach Gl. 41) S. 49:

$$f = \frac{1}{4} \,.\, \frac{1000}{2000000} \,.\, \frac{1218^2}{9} = 20{,}6 \text{ cm}$$

Aufgabe 22. Ein 200 cm langer Freiträger aus I-Eisen soll am Ende durch $P = 500$ kg belastet sein; außerdem hat derselbe noch eine gleichmäßige Belastung $p = 8$ kg auf 1 cm zu tragen. Es soll das Profil des Trägers und die Durchbiegung des Endpunktes bestimmt werden. $(k = 1000)$

Auflösung.

$$\mathfrak{M}_{max} = 500 \,.\, 200 + 8 \,.\, 200 \,.\, \frac{200}{2} = 260000$$

$$W = \frac{260000}{1000} = 260$$

Gewählt: Profil Nr. 22 mit $W = 278$.

Die durch $P = 500$ hervorgebrachte Beanspruchung ist:

$$k_1 = \frac{500 \,.\, 200}{278} = 360 \text{ kg/qcm}$$

Durch die gleichmäßig verteilte Belastung entsteht:

$$k_2 = \frac{8 \,.\, 200 \,.\, 200}{2 \,.\, 278} = 575 \text{ kg/qcm}$$

Im ganzen:

$$k = k_1 + k_2 = 935 \text{ kg/qcm}$$

Die Durchbiegung beträgt nach Gl. 44) S. 51:

$$F = \left(\frac{360}{3} + \frac{575}{4}\right)\frac{200^2}{2000000 \,.\, 11} = 0{,}48 \text{ cm}$$

Aufgabe 23. Ein Balkon von 3,2 m Länge und 1,2 m Ausladung wird durch 5 Konsolträger (I-Eisen) unterstützt, die 0,8 m auseinander liegen. Wie stark müssen diese genommen werden, wenn als Belastung einschließlich Eigengewicht 750 kg auf 1 qm gerechnet wird und das Gewicht der Brüstung 200 kg für das laufende Meter beträgt?

Auflösung. Auf jeden der drei mittleren Träger kommt die gleichmäßig verteilte Belastung:

$$p\,l = 0{,}8 \,.\, 1{,}2 \,.\, 750 = 720 \text{ kg}$$

und die am Ende wirkende Einzellast:

$$P = 0{,}8 \,.\, 200 = 160 \text{ kg}$$

folglich ist:

$$\mathfrak{M}_{max} = \frac{720 \,.\, 120}{2} + 160 \,.\, 120 = 62400$$

$$W = \frac{62400}{1000} = 62{,}4$$

Nach der Tabelle 2 § 6 genügen I-Eisen Nr. 13 mit W = 67,0.

Für die beiden Endträger sind die Belastungen:

$$p\,l = 0{,}4 \,.\, 1{,}2 \,.\, 750 + 1{,}2 \,.\, 200 = 600 \text{ kg}$$

$$P = 0{,}4 \,.\, 200 = 80 \text{ kg}$$

folglich ist:

$$\mathfrak{M}_{max} = \frac{600 \,.\, 120}{2} + 80 \,.\, 120 = 45600$$

$$W = \frac{45600}{1000} = 45{,}6$$

Erforderlich: I-Eisen Nr. 12 mit W = 54,5.

Aufgabe 24. Es soll der eiserne I-Träger Fig. 41 unter Berücksichtigung des Eigengewichtes berechnet werden.

Auflösung. Wird das Eigengewicht des Trägers auf 1 cm Länge mit g bezeichnet, so ist:

$$\mathfrak{M}_{max} = 500 \,.\, 600 + 600 \,.\, 400 + 600\,g \,.\, 300$$

$$\mathfrak{M}_{max} = 540000 + 180000 \,.\, g$$

$$W = \frac{540000}{1000} + \frac{180000}{1000} \,.\, g$$

$$W = 540 + 180 \,.\, g$$

Nach der Tabelle 2 § 6 würde ohne Berücksichtigung des Eigengewichtes Profil Nr. 28 mit W = 541 genügen. Das Gewicht dieses Eisens beträgt 0,476 kg für 1 cm Länge, folglich ist:

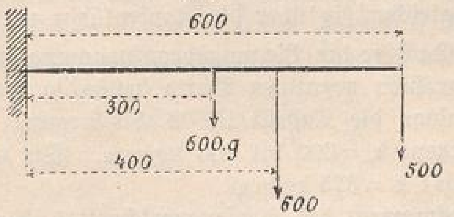
$$180\ g = 180 \,.\, 0{,}476 = 85{,}7$$

und das erforderliche Widerstandsmoment würde betragen:

$$W = 540 + 85{,}7 = 625{,}7$$

Danach ist Profil Nr. 28 zu schwach und es ist dafür das Profil Nr. 30 mit W = 652 zu wählen.

Fig. 41.



Da das Gewicht dieses Eisens 0,538 kg für 1 cm Länge beträgt, so ist

$$180\ g = 180 \,.\, 0{,}538 = \backsim 97$$

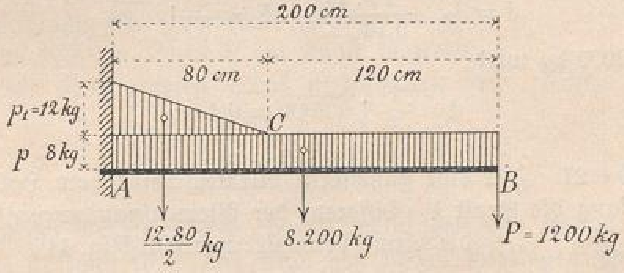
das erforderliche Widerstandsmoment also:

$$W = 540 + 97 = 637$$

Das Profil Nr. 30 ist daher genügend.

Aufgabe 25. Ein Freiträger von 200 cm Länge ist nach Fig. 42 belastet. Es soll das erforderliche Profil berechnet werden.

Fig. 42.



Auflösung. Das Moment bei A ist:

$$\mathfrak{M}_{max} = \frac{12 \,.\, 80}{2} \,.\, \frac{80}{3} + 8 \,.\, 200 \,.\, 100 + 1200 \,.\, 200 = 412800$$

Das Moment bei C ist:

$$\mathfrak{M}_c = 8 \,.\, 120 \,.\, 60 + 1200 \,.\, 120 = 201600$$

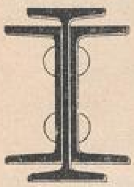
Für den Querschnitt bei C ist daher erforderlich:

$$W_c = \frac{201600}{1000} = 202$$

und für den Querschnitt bei A:

$$W = \frac{412800}{1000} = 413$$

Fig. 43.



Für den Träger kann danach gewählt werden:

ein I-Eisen Nr. 26 mit $W = 441$

oder: zwei I-Eisen Nr. 20 mit je $W = 214$, davon eins durchlaufend von A bis B, das andere nur von A bis C reichend

oder: ein I-Eisen Nr. 20 durchlaufend von A bis B und zwei ⊏-Eisen Nr. 16 mit je $W = 116$ von A bis C (nach Fig. 43).

Aufgabe 26. Wie groß muß der Durchmesser d eines cylindrischen Tragzapfens aus Flußeisen sein, dessen Länge $l = 1{,}5\,d$ betragen soll, unter der Annahme, daß sich der Druck P gleichmäßig über die Zapfenlänge verteilt?

Auflösung. Da hier die Biegungsbeanspruchung zwischen einem größten positiven und einem größten negativen Werte beständig wechselt, so ist für die zulässige Inanspruchnahme die Tabelle III S. 5 (Biegung) maßgebend. Danach ist für Flußeisen zu setzen: $k = 300$ bis 400 kg/qcm. Wir wählen unter Voraussetzung guten Materials: $k = 375$ kg/qcm.

Das Widerstandsmoment des Zapfenquerschnittes ist nach der Tabelle S. 27 Nr. 13:

$$W = \frac{d^3 \pi}{32}$$

folglich lautet die allgemeine Biegungsgleichung:

$$\frac{d^3 \pi}{32} k = P \frac{l}{2}$$

Setzt man hierin $l : d = 1{,}5$ und $k = 375$, so entsteht:

$$\frac{d^2 \pi}{32} = \frac{1{,}5\,P}{2\,.\,375}$$

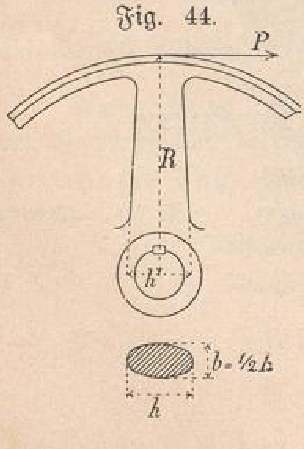
$$d = \sqrt{\frac{16\,.\,1{,}5}{3{,}14\,.\,375}\,.\,P} = \frac{1}{7}\sqrt{P}$$

z. B. für $P = 2000$ kg wird:

$$d = \frac{1}{7}\sqrt{2000} = 6{,}4 \text{ cm}$$

Aufgabe 27. Für eine gußeiserne Riemenscheibe vom Halbmesser R, auf welche am Umfang die Kraft P (Differenz der Riemenspannungen)*) wirkt, sollen die Arme berechnet werden (Fig. 44).

Fig. 44.



Auflösung. Die Arme können annähernd als fest in der Nabe eingespannte Träger von der Länge R betrachtet werden, die am anderen Ende durch die Kraft P belastet sind. Man kann (nach v. Bach) annehmen, daß $^1/_3$ der Arme gleichzeitig und gleichmäßig zur Kraftübertragung beiträgt, so daß, wenn die Armzahl mit z bezeichnet wird, zu setzen ist:

$$P R = k W \frac{z}{3}$$

---

*) Vergl. Lauenstein, Mechanik. 5. Aufl. S. 116, Gl. 152.

Der Armquerschnitt ist elliptisch und hat, verlängert gedacht und in der Mitte der Welle gemessen, die Höhe h und die Breite $b = \frac{1}{2}h$.

Für diesen Querschnitt ist nach der Tabelle S. 27 Nr. 15:

$$W = \frac{b h^2 \pi}{32} = \frac{h^3 \pi}{2 . 32}$$

dafür genügend genau:

$$W = 0{,}1 . \frac{h^3}{2}$$

Setzt man diesen Wert, und außerdem (da hier die Belastung zwischen Null und einem Maximum wechseln kann) nach der Tabelle II S. 5 die Biegungsbeanspruchung für Gußeisen: $k = 300$ kg/qcm in die obige Gleichung ein, so erhält man:

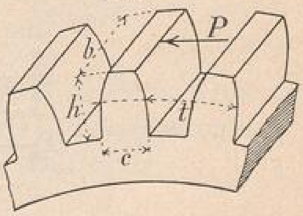
$$PR = 300 . 0{,}1 \frac{h^3}{2} . \frac{z}{3}$$

und daraus:

$$h = \sqrt[3]{\frac{PR}{5 z}}$$

Aufgabe 28. Es soll die erforderliche Teilung eines gußeisernen Zahnrades berechnet werden, welches den Zahndruck P auszuhalten hat (Fig. 45).

Fig. 45.



Auflösung. Der Druck P beginnt (bei dem treibenden Rade) an der Wurzel des in Eingriff kommenden Zahnes und steigt dann während des Ganges der Räder allmählich auf bis zum Kopf, in welchem Augenblick (oder auch schon früher) ein folgendes Zähnepaar in Eingriff kommt. Der ungünstigste Fall für einen Zahn (und dieser Fall wird immer der Berechnung der Zahnstärke zu Grunde gelegt) ist also der, daß der Druck P am Kopfe angreift und daß nur ein Zahn diesen Druck auszuhalten hat. Unter dieser Voraussetzung ist:

$$P h = k W = k \frac{b c^2}{6}$$

Es ist in der Praxis üblich, die Abmessungen der Zähne (Breite, Höhe, Stärke) auf die Teilung (d. i. das Maß von einem beliebigen Punkte des einen Zahnes bis zu dem gleichliegenden Punkte des folgenden Zahnes, im Teilkreise gemessen) zu beziehen. Wird die Teilung mit t bezeichnet, so ist zu setzen:

$$h = 0{,}7\, t$$

und angenähert:

$$c = 0{,}5\, t$$

Man erhält dann für $k = 300$ kg/qcm (Tabelle II S. 5):

$$P . 0{,}7\, t = 300 \frac{b\, (0{,}5\, t)^2}{6}$$

oder:

$$P = \frac{300 . 0{,}25\, b\, t^2}{6 . 0{,}7\, t} = \infty\ 18\, b\, t$$

Für Windenräder mit $b = 2t$ wird:

$$P = 18 \,.\, 2t \,.\, t = 36 t^2$$

woraus die Teilung folgt:

$$t = \frac{1}{6} \sqrt{P}$$

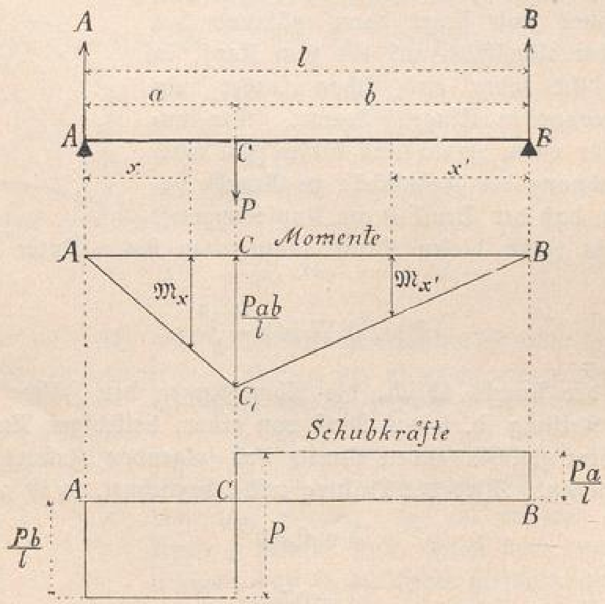
§ 9.

Der Träger auf zwei Stützen.

1. Belastung durch Einzelkräfte.

Ein an beiden Enden unterstützter, durch lotrechte Kräfte belasteter Träger übt auf die Unterstützungspunkte lotrecht abwärts gerichtete Drücke, die sogen. Stützendrücke oder Auflagerdrücke, aus, und nach dem Gesetze der Wechselwirkung erfährt umgekehrt der Träger durch die Unterstützungspunkte die gleichen, aber entgegengesetzt, also lotrecht aufwärts gerichteten Drücke. Diese werden Stützenwiderstände genannt.

Fig. 46.



Ist der Träger AB (Fig. 46) durch eine lotrechte Kraft P belastet, welche die ganze Trägerlänge l in die Abschnitte a und b teilt, und werden die Stützenwiderstände mit A und B bezeichnet, so müssen sich die drei Kräfte ABP im Gleichgewichte halten, daher:

$$A + B = P$$

Die Stützenwiderstände A und B ergeben sich aus der Gleichung der statischen Momente. In Bezug auf den Drehpunkt B ist $A l = P b$, folglich:

$$\mathbf{A} = \frac{\mathbf{P\,b}}{l} \qquad 45)$$

In Bezug auf den Drehpunkt A ist $B l = P a$, daher:

$$\mathbf{B} = \frac{\mathbf{P\,a}}{l} \qquad 46)$$

Ist der eine Stützenwiderstand, z. B. A, mit Hilfe der Gleichung der statischen Momente ermittelt, so ergibt sich der andere Stützenwiderstand B auch aus der Bedingung:

$$B = P - A = P - \frac{P\,b}{l} = \frac{P\,a}{l}$$

Der Widerstand der einen Stütze ist gleich der Last, multipliziert mit dem Abstande derselben von der anderen Stütze und dividiert durch die ganze Trägerlänge.

Das Moment $\mathfrak{M}_x$ im Abstande x von A ist:

$$\mathfrak{M}_x = A\,x = \frac{P\,b}{l}\,x$$

Das Moment $\mathfrak{M}_x'$ im Abstande x' von B ist:

$$\mathfrak{M}_x' = B\,x' = \frac{P\,a}{l}\,x'$$

Die Momente haben in den Auflagerpunkten den Wert Null, nehmen dann mit x bezw. x' zu und erreichen den größten Wert im Angriffspunkte C der Last. Für diesen Punkt wird $x = a$ und $x' = b$, folglich ist:

$$\mathfrak{M}_{max} = P\,\frac{a\,b}{l}$$

Da die Momente sich verhalten wie die Abstände von den Unterstützungspunkten, so müssen die Begrenzungslinien der Figur, welche die Momente graphisch darstellt, gerade Linien sein. Konstruiert man also das Dreieck $A B C_1$ (Fig. 46) so, daß $C C_1 = P\,\frac{a\,b}{l}$ ist, so können die Momente durch die Ordinaten dieses Dreiecks gemessen werden.

Ist der Träger prismatisch, so ist zur Berechnung des Querschnittes das größte Moment maßgebend, welches $= k W$ zu setzen ist.

$$\mathbf{P}\,\frac{\mathbf{a\,b}}{l} = \mathbf{k\,W} \qquad 47)$$

Denkt man sich den Träger in der Entfernung $x < a$ vom Auflager A zerschnitten und betrachtet das linke Stück desselben (Fig. 47), so ist der Stützenwiderstand A die einzige äußere auf das Trägerstück wirkende Kraft. Da sich aber der ganze Träger und folglich auch jedes einzelne Stück desselben im Gleichgewichte befinden soll, so muß an der Schnittstelle noch eine Kraft S angebracht werden, welche gleiche Größe, aber entgegengesetzte Richtung wie A hat. Diese Kraft wird Schubkraft oder Querkraft genannt; sie sucht das linke Trägerstück gegen das rechte in lotrechter Richtung zu verschieben, was durch die in dem betreffenden Querschnitt auftretenden inneren Schubspannungen verhindert wird.

Die Schubkraft ändert sich nicht von A bis C.

Wird $x > a$, so kommt im Punkte C die äußere Kraft P hinzu und das Trägerstück (Fig. 48) befindet sich unter Einwirkung der drei Kräfte A, P

Fig. 47.

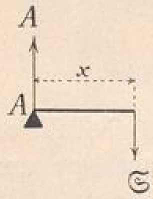
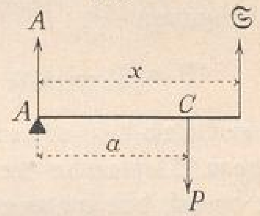


Fig. 48.



und $\mathfrak{S}$ im Gleichgewichte. Es hat deshalb von C bis B die für das linke Trägerstück nach oben gerichtete Schubkraft die Größe:

$$\mathfrak{S} = P - A = B$$

Im Punkte C, also an der Stelle, wo das Moment seinen größten Wert erreicht, ändert die Schubkraft die Richtung, hat also die Größe Null.

Die Schubkräfte lassen sich, ähnlich wie die Momente, durch eine geometrische Figur graphisch darstellen, wie in Fig. 46 angedeutet ist.

Wird $a = b = \frac{l}{2}$, d. h. hängt die Last P in der Mitte des Trägers, so sind die Stützenwiderstände:

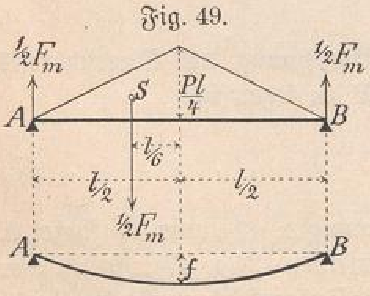
$$A = B = {}^1\!/_2\, P$$

und man erhält statt Gl. 47):

$$\frac{\mathbf{P\,l}}{\mathbf{4}} = \mathbf{k\,W} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 48)$$

Die Berechnung der Durchbiegung f kann auch hier wieder geschehen mit Hilfe der M-Fläche, durch welche man den Träger als belastet auffaßt.

Fig. 49.



Unter der Annahme von $a = b = {}^1\!/_2\, l$ ist der Inhalt der M-Fläche (Fig. 49):

$$F_m = \frac{P\,l}{4} \cdot \frac{l}{2} = \frac{P\,l^2}{8}$$

und das dadurch hervorgerufene Moment in Bezug auf die Trägermitte:

$$ {}^1\!/_2\, F_m \cdot \frac{l}{2} - {}^1\!/_2\, F_m \cdot \frac{l}{6} = \frac{P\,l^3}{32} - \frac{P\,l^3}{96} = \frac{P\,l^3}{48}$$

folglich nach Gl. 34) S. 44:

$$f = \frac{1}{EJ} \frac{P l^3}{48}$$

Setzt man hierin:

$$\frac{P l}{4} = k \frac{J}{e}$$

so folgt:

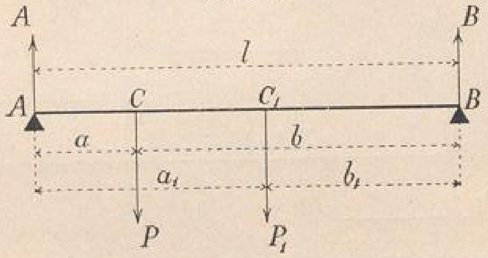
$$\mathbf{f = \frac{1}{12} \frac{k}{E} \frac{l^2}{e}} \quad \ldots \ldots \ldots \quad 49)$$

Genau in derselben Weise ergibt sich, wenn der Angriffspunkt C der Last P die Trägerlänge l in die unter sich ungleichen Abschnitte a und b teilt (Fig. 46), die Durchbiegung im Punkte C zu:

$$\mathbf{f = \frac{1}{3} \frac{k}{E} \frac{a b}{e}} \quad \ldots \ldots \ldots \quad 50)$$

Für $a = b = \frac{1}{2} l$ entsteht hieraus natürlich wieder die Gl. 49).

Fig. 50.



Wirken zwei Einzellasten P und P_1 auf den Träger und teilen diese die ganze Trägerlänge l in die Abschnitte a und b, bezw. a_1 und b_1 (Fig. 50), so sind die Stützenwiderstände:

$$A = \frac{P b + P_1 b_1}{l} \qquad B = \frac{P a + P_1 a_1}{l}$$

und die Momente an den Laststellen C und C_1:

$$\mathfrak{M} = A a \qquad \mathfrak{M}_1 = B b_1$$

Es ist in jedem einzelnen Falle zu untersuchen, welches dieser Momente das größere ist; das größte Moment ist $= k W$ zu setzen und danach der Träger zu berechnen.

Sind die beiden Lasten einander gleich ($= P$) und greifen dieselben in der gleichen Entfernung a von den Auflagern an, so entsteht der in Fig. 51 dargestellte einfachere Fall.

Die Stützenwiderstände sind hier:

$$A = B = P$$

Das Moment ist in den Auflagerpunkten = Null und wächst von dort ab gleichmäßig bis zu den Laststellen, wo es die Größe annimmt:

$$\mathfrak{M} = P a$$

Zwischen den Laststellen bleibt das Moment unveränderlich, denn für eine Stelle in der Entfernung x vom Auflager ist:

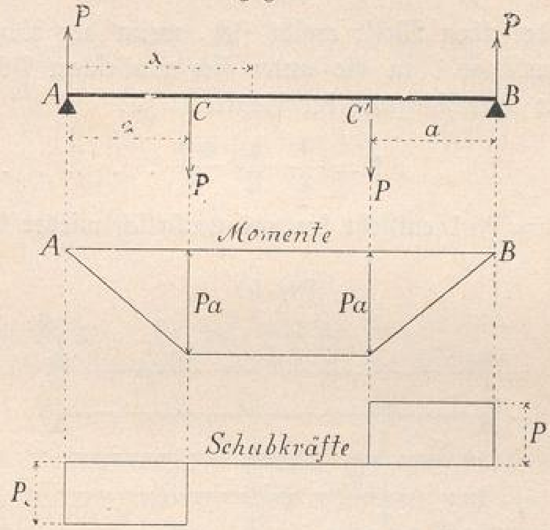
$$\mathfrak{M}_x = P\,x - P\,(x - a) = P\,a$$

P a ist also zugleich das größte Moment, daher:

$$P\,a = k\,W$$

Die Schubkraft $\mathfrak{S}$ hat zwischen den Laststellen C und C' die Größe Null.

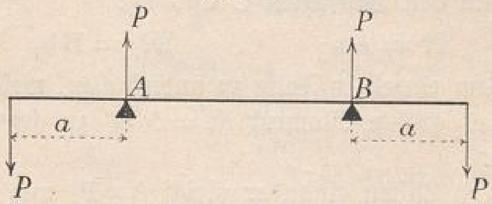
Fig. 51.



Vertauscht man in Fig. 51 die Lasten mit den Stützenwiderständen und denkt sich die ganze Figur herumgedreht, so erhält man den in Fig. 52 dargestellten Belastungsfall.

Die Berechnung dieses Trägers, bei welchem das Moment zwischen den Stützpunkten die unveränderliche Größe P a hat, geschieht in derselben Weise

Fig. 52.



wie bei dem Träger Fig. 51. Die Trägerlänge zwischen den Stützpunkten ist in diesem, sowie auch in dem vorigen Falle (Fig. 51) unter der Voraussetzung, daß der Träger selbst als gewichtlos betrachtet werden kann, ganz ohne Einfluß auf die Tragfähigkeit, da in dem größten Momente P a die Trägerlänge nicht erscheint.

Wirkt außer den Kräften P, welche an den Enden des über die Stützpunkte um das Stück a hinausragenden Trägers angreifen, innerhalb der Auflager noch eine Kraft P_1 und teilt diese die Stützlänge l in die Abschnitte a_1 und b_1 (Fig. 53), so sind die Stützenwiderstände:

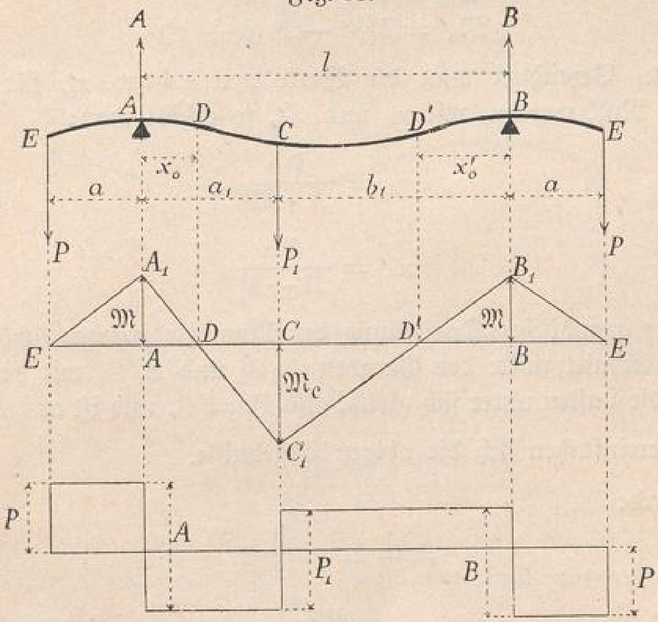
$$A = P + \frac{P_1 b_1}{l}$$

$$B = P + \frac{P_1 a_1}{l}$$

Das Moment bei C hat die Größe:

$$\mathfrak{M}_c = A a_1 - P (a + a_1)$$

Fig. 53.



und wenn für A der obige Wert eingesetzt wird:

$$\mathfrak{M}_c = P_1 \frac{a_1 b_1}{l} - P a$$

Das Moment über den Stützen hat die absolute Größe:

$$\mathfrak{M} = P a$$

Die Tragfähigkeit des Trägers wird voll ausgenutzt, wenn die Momente einander gleich sind.

Setzt man $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_c$, so folgt:

$$2 P a = P_1 \frac{a_1 b_1}{l}$$

oder:

$$a = \frac{P_1}{P} \frac{a_1 b_1}{2 l}$$

Danach:

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_c = \frac{P_1}{2} \frac{a_1 b_1}{l}$$

Das Moment im Lastpunkte C erteilt dem Balken eine Biegung, welche gerade entgegengesetzt der durch die Stützenmomente hervorgebrachten Biegung ist. Während über den Stützen die oberen Fasern des Balkens gezogen werden, sind bei C die oberen Fasern gedrückt. Zwischen den Stützpunkten A und B müssen daher zwei Punkte D und D′ liegen, in denen die eine Biegung in die andere übergeht, wo also überhaupt keine Biegung stattfindet, das Biegungsmoment in diesen Punkten daher = Null ist.

Man findet die Lage dieser Punkte, wenn man die Momente in den Abständen x und x′ von den Stützpunkten A bezw. B, nämlich:

$$\mathfrak{M}_x = A\,x - P\,(a + x)$$
$$\mathfrak{M}_{x'} = B\,x' - P\,(a + x')$$

= Null setzt. Bezeichnet man die Werte von x bezw. x′, für welche diese Momente = Null werden, mit x_0 und x_0', so erhält man:

$$x_0 = \frac{P\,a}{A - P}$$

$$x_0' = \frac{P\,a}{B - P}$$

In der graphischen Darstellung der Momente ergeben sich die Punkte D und D′ als Schnittpunkte der Geraden $A_1\,C_1$ und $B_1\,C_1$ mit der E E.

Sind die Lasten unter sich gleich, also $P_1 = P$, und ist außerdem $a_1 = b_1 = \frac{l}{2}$, so vereinfachen sich die obigen Ergebnisse.

Es wird:

$$A = B = \frac{3}{2}\,P$$

$$\mathfrak{M}_c = \frac{P\,l}{4} - P\,a$$

$$\mathfrak{M} = P\,a$$

Sollen die Stützenmomente gleich dem Momente in der Mitte des Trägers sein, so folgt aus:

$$P\,a = \frac{P\,l}{4} - P\,a$$

$$a = \frac{l}{8}$$

Danach wird:

$$\mathfrak{M} = \frac{P\,l}{8}$$

und

$$x_0 = x_0' = \frac{\frac{P\,l}{8}}{\frac{3}{2}\,P - P} = \frac{l}{4}$$

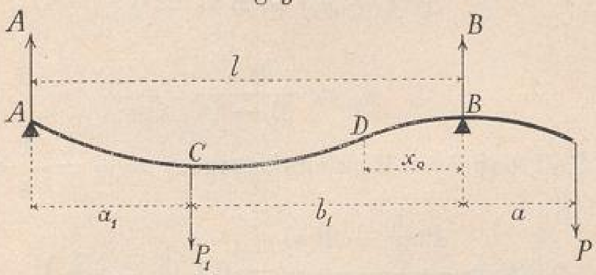
Ist ein auf den Stützen A und B aufgelagerter Träger, welcher über die eine Stütze B um das Stück a hinausragt, am freien Ende durch die Kraft P belastet und hat derselbe außerdem noch eine Last P_1 zu tragen, welche innerhalb der Stützen angreift und die Stützlänge l in die Abschnitte a_1 und b_1 teilt, so ist nach Fig. 54 in Bezug auf den Drehpunkt B:

$$A\,l - P_1\,b_1 + P\,a = 0$$

in Bezug auf den Drehpunkt A:

$$-B\,l + P_1\,a_1 + P\,(a + l) = 0$$

Fig. 54.



Aus diesen Gleichungen ergeben sich die Stützenwiderstände:

$$A = \frac{P_1\,b_1 - P\,a}{l}$$

$$B = \frac{P_1\,a_1 + P\,(a + l)}{l}$$

Aus der ersten dieser Gleichungen folgt, daß für $P\,a > P_1\,b_1$ der Stützenwiderstand A negativ wird, d. h. von oben nach unten wirkt.

Für $P\,a = P_1\,b_1$ wird A = Null.

In beiden Fällen entsteht bei B das Maximalmoment:

$$\mathfrak{M}_b = P\,a$$

Ist $P\,a < P_1\,b_1$, so wird A positiv. Es entsteht dann im Lastpunkte C ein zweites Maximalmoment von der Größe:

$$\mathfrak{M}_c = A\,a_1 = \frac{P_1\,b_1 - P\,a}{l} \cdot a_1$$

Welches von diesen beiden Momenten das absolut größte ist, muß für jeden einzelnen Fall untersucht werden. Das größte Moment ist dann = k W zu setzen und der Balken danach zu berechnen.

Die Tragfähigkeit des Balkens wird voll ausgenutzt, wenn die Momente einander gleich sind. Setzt man $\mathfrak{M}_b = \mathfrak{M}_c$, so folgt:

$$P\,a = \frac{P_1\,b_1 - P\,a}{l} \cdot a_1$$

oder:

$$a = \frac{P_1}{P}\,\frac{a_1\,b_1}{l + a_1}$$

Nach Einsetzung dieses Wertes wird dann:

$$\mathfrak{M}_b = \mathfrak{M}_c = P_1 \frac{a_1\, b_1}{l + a_1} \text{ .}$$

Das Moment $\mathfrak{M}_b$ erteilt dem Balken eine Biegung, welche gerade entgegengesetzt der durch das Moment $\mathfrak{M}_c$ hervorgebrachten Biegung ist. Zwischen den Punkten C und B muß sich daher ein Punkt D befinden, in welchem die eine Biegung in die andere übergeht, das Moment also = Null ist.

Die Entfernung x_0 dieses Punktes von der Stütze B ergibt sich dann aus der Bedingung:

$$P\,(a + x_0) - B\, x_0 = 0$$

zu:

$$x_0 = \frac{P\,a}{B - P}$$

Für den Fall, daß $P_1 = P$ und außerdem $a_1 = b_1 = \frac{l}{2}$ ist, erhält man:

$$A = \frac{P\,\frac{l}{2} - P\,a}{l} = P\left(\frac{1}{2} - \frac{a}{l}\right)$$

$$B = \frac{P\,\frac{l}{2} + P\,(a + l)}{l} = P\left(\frac{3}{2} + \frac{a}{l}\right)$$

$$\mathfrak{M}_b = P\,a$$

$$\mathfrak{M}_c = \frac{P\,l}{4} - \frac{P\,a}{2}$$

Sollen die Momente einander gleich werden, so folgt aus:

$$P\,a = \frac{P\,l}{4} - \frac{P\,a}{2}$$

$$a = \frac{l}{6}$$

Danach wird:

$$\mathfrak{M} = \frac{P\,l}{6}$$

und:

$$x_0 = \frac{P\,a}{P\left(\frac{3}{2} + \frac{a}{l}\right) - P} = \frac{a}{\frac{1}{2} + \frac{a}{l}} = \frac{3}{2}\,a = \frac{l}{4}$$

2. Streckenbelastung.

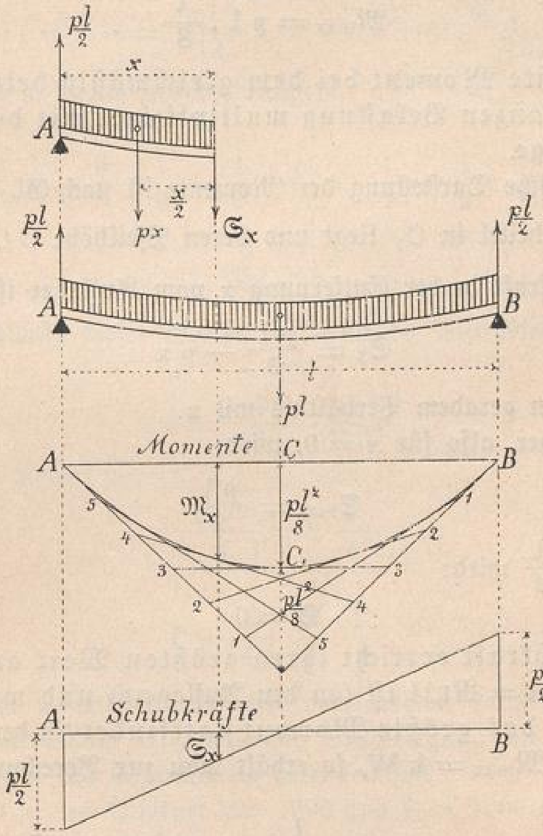
Ist ein an den Endpunkten unterstützter Träger A B von der Länge l (Fig. 55) gleichmäßig belastet und bezeichnet man die Belastung für die Längeneinheit mit p, so ist die Gesamtbelastung $= p\,l$. Der Angriffspunkt derselben liegt im Schwerpunkte der Belastungsfläche, also in der Mitte des Trägers.

Die Belastung wird zur Hälfte auf jedes Auflager übertragen, folglich sind die Stützenwiderstände:

$$\mathbf{A} = \mathbf{B} = \frac{\mathbf{p\,l}}{\mathbf{2}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 51)$$

Denkt man sich den Träger in der Entfernung x vom Auflager A zerschnitten und betrachtet das linke Stück desselben, so sind der Stützenwiderstand $\frac{p\,l}{2}$ und die Belastung $p\,x$ die auf das Trägerstück wirkenden äußeren Kräfte.

Fig. 55.



Die Belastung $p\,x$ greift im Schwerpunkte der Belastungsfläche, also in der Entfernung $\frac{x}{2}$ von der Schnittstelle an. Stellt man in Bezug auf die Schnittstelle die Momentengleichung auf, so ergibt sich:

$$\mathfrak{M}_x = \frac{p\,l}{2}\,x - p\,x \cdot \frac{x}{2}$$

$$\mathfrak{M}_x = \frac{\mathbf{p}}{\mathbf{2}}\,\mathbf{x}\,(\mathbf{l} - \mathbf{x}) \quad \ldots\ldots\ldots \quad 52)$$

Für $x = 0$ und $x = l$ wird $\mathfrak{M}_x = 0$, d. h. das Moment an den Stützpunkten ist = Null.

Das größte Moment findet in der Mitte des Trägers statt. Es ist nämlich für $x = {}^1/_2\,l$:

$$x\,(l - x) = \frac{l}{2} \cdot \frac{l}{2} = \frac{l^2}{4}$$

Dagegen ergibt sich für $x = {}^1/_2\,l + \lambda$ oder $x = {}^1/_2\,l - \lambda$ der kleinere Wert:

$$x\,(l - x) = \left(\frac{l}{2} + \lambda\right)\left(\frac{l}{2} - \lambda\right) = \frac{l^2}{4} - \lambda^2$$

Aus Gl. 52) folgt danach für $x = {}^1/_2\,l$:

$$\mathfrak{M}_{max} = \mathbf{p\,l} \cdot \frac{\mathbf{l}}{\mathbf{8}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 53)$$

Das größte Moment bei dem gleichmäßig belasteten Träger ist gleich der ganzen Belastung multipliziert mit dem achten Teil der Trägerlänge.

Die graphische Darstellung der Momente ist nach Gl. 52) eine Parabel $A\,C_1\,B$, deren Scheitel in C_1 liegt und deren Pfeilhöhe $C\,C_1 = p\,l \cdot \frac{l}{8}$ ist.

Die Schubkraft in der Entfernung x vom Auflager ist:

$$\mathfrak{S}_x = \frac{p\,l}{2} - p\,x$$

ändert sich also in geradem Verhältnis mit x.

Im Auflager, also für $x = 0$, wird:

$$\mathfrak{S}_{max} = \frac{p\,l}{2}$$

Für $x = \frac{l}{2}$ wird:

$$\mathfrak{S} = 0$$

Die Schubkraft erreicht ihren größten Wert an den Stellen, wo das Moment = Null ist (an den Auflagern) und wird = Null an der Stelle, wo das größte Moment stattfindet (in der Trägermitte)*).

Setzt man $\mathfrak{M}_{max} = k\,W$, so erhält man zur Berechnung des Trägers die Gleichung:

$$\mathbf{p\,l} \cdot \frac{\mathbf{l}}{\mathbf{8}} = \mathbf{k\,W} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 54)$$

Aus Gl. 48) S. 60 und aus Gl. 54) erkennt man, daß ein gleichmäßig belasteter Balken doppelt so viel trägt, als wenn dieselbe Belastung $p\,l = P$ als Einzelkraft in der Mitte des Balkens wirkt.

Besteht die gleichmäßige Belastung aus dem Eigengewichte G des Trägers, so erhält man die Gleichung:

$$G \cdot \frac{l}{8} = k\,W$$

---

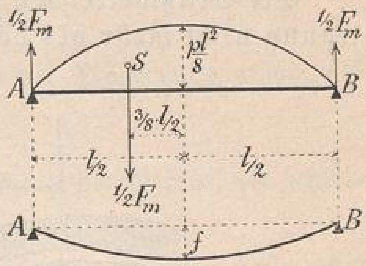
*) Der allgemeine Beweis dieses Satzes für einen beliebig belasteten Träger ist S. 75 gegeben.

welche in der Form:

$$l = \frac{8\,k\,W}{G}$$

zur Bestimmung der Länge l dienen kann, welche ein prismatischer Balken höchstens haben darf, um sein eigenes Gewicht noch mit Sicherheit tragen zu können.

Fig. 56.



Zur Berechnung der Durchbiegung f denke man sich den Träger durch die M-Fläche belastet (Fig. 56). Der Inhalt derselben ist:

$$F_m = {}^2/_3\,l\,.\,\frac{p\,l^2}{8} = \frac{p\,l^3}{12}$$

und das Moment in Bezug auf die Trägermitte:

$$^1/_2\,F_m\,.\,\frac{l}{2} - {}^1/_2\,F_m\,.\,\frac{3}{8}\,.\,\frac{l}{2} = \frac{1}{2}\,.\,\frac{p\,l^3}{12}\,.\,\frac{l}{2} - \frac{1}{2}\,.\,\frac{p\,l^3}{12}\,.\,\frac{3}{8}\,.\,\frac{l}{2} =$$

$$\frac{5}{384}\,p\,l^4$$

Nach Einsetzung dieses Wertes ergibt sich die Durchbiegung nach Gl. 34) S. 44 zu:

$$f = \frac{5}{384}\,\frac{p\,l^4}{E\,J}$$

Setzt man hierin:

$$\frac{p\,l^2}{8} = k\,\frac{J}{e}$$

so folgt:

$$\mathbf{f = \frac{5}{48}\,\frac{k}{E}\,\frac{l^2}{e}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 55)$$

Bei den zu Deckenkonstruktionen verwendeten Trägern hält man gewöhnlich die Bestimmung ein, daß die Durchbiegung bei voller Belastung nicht mehr als $^1/_{600}$ der Spannweite betragen soll.

Setzt man $f = {}^1/_{600}\,l$, ferner $k = 1000$ und $E = 2\,000\,000$ (für Schmiedeeisen) in Gl. 55) ein, so erhält man:

$$\frac{l}{600} = \frac{5}{48}\,\frac{1000}{2\,000\,000}\,\frac{l^2}{0{,}5\,h}$$

woraus folgt:

$$\mathbf{h = \frac{1}{16}\,l} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 56)$$

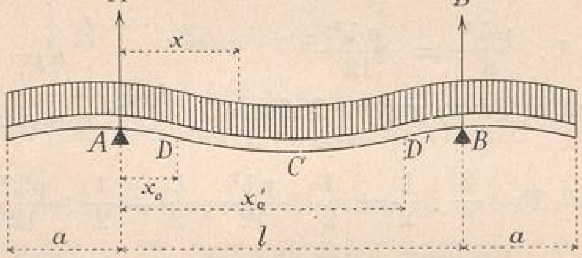
Diese theoretisch erforderliche Trägerhöhe hält man praktisch häufig nicht ein. Da nämlich in Wirklichkeit die Deckenträger an den Enden immer eingemauert sind und infolgedessen wenigstens als teilweise eingespannte Träger (vergl. 4, § 10) betrachtet werden können, bei denen die Durchbiegung unter denselben Umständen wesentlich geringer ist, als bei den frei auf zwei Endstützen ruhenden Trägern, so genügt es zu setzen:

$$h = \frac{1}{25} l \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 57)$$

Man stellt danach praktisch die Forderung:

Die Stützweite der Träger soll mit Rücksicht auf die Durchbiegung nicht mehr als das 25fache der Trägerhöhe betragen.

Fig. 57.



Ragt ein auf zwei Stützen ruhender, gleichmäßig mit p für die Längeneinheit belasteter Träger um ein Stück a über die Stützpunkte hinaus (Fig. 57) und bezeichnet man die Stützweite wieder mit l, so sind die Stützenwiderstände:

$$A = B = p\left(\frac{l}{2} + a\right)$$

Das Moment in der Entfernung x vom Auflager ist:

$$\mathfrak{M}_x = A\,x - \frac{p\,(a + x)^2}{2}$$

$$\mathfrak{M}_x = \frac{p}{2}\,x\,(l - x) - \frac{p\,a^2}{2}$$

Die größten Momente finden über den Stützen und in der Mitte des Trägers statt.

Für $x = 0$ und $x = l$ werden die Stützenmomente

$$\mathfrak{M} = -\frac{p\,a^2}{2}$$

Für $x = \frac{l}{2}$ wird das Moment in der Trägermitte:

$$\mathfrak{M}_c = \frac{p\,l^2}{8} - \frac{p\,a^2}{2}$$

Um diejenige Größe von a zu ermitteln, bei welcher alle drei Momente einander gleich werden, der Balken also die größte Tragfähigkeit besitzt, hat man den absoluten Wert von $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_c$ zu setzen:

$$\frac{p\,a^2}{2} = \frac{p\,l^2}{8} - \frac{p\,a^2}{2}$$

Daraus folgt:

$$a = \frac{l}{\sqrt{8}}$$

Nach Einsetzung dieses Wertes ergibt sich dann für die Momente die Größe:

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_c = p\,l \cdot \frac{l}{16}$$

Ist $a < \frac{l}{\sqrt{8}}$, so wird das Moment in der Trägermitte größer als die Stützenmomente.

Ist $a > \frac{l}{\sqrt{8}}$, so werden die Stützenmomente am größten, die gefährlichen Querschnitte des Trägers liegen dann über den Stützen.

Der Balken erhält durch die Stützenmomente eine Biegung, bei welcher die erhabene Seite nach oben gerichtet ist, durch das Moment in der Mitte aber eine entgegengesetzte Biegung. Man erhält die Lage der zwischen den Stützen liegenden Punkte D und D′, in denen eine Krümmung in die andere übergeht, indem man $\mathfrak{M}_x$ = Null setzt.

$$\frac{p}{2}\,x\,(l - x) - \frac{p\,a^2}{2} = 0$$

$$x^2 - l\,x = -\,a^2$$

Bezeichnet man die Wurzeln dieser Gleichung mit x_0 und x_0', so ergibt sich:

$$x_0 = \frac{l}{2} - \sqrt{\frac{l^2}{4} - a^2}$$

$$x_0' = \frac{l}{2} + \sqrt{\frac{l^2}{4} - a^2}$$

Für den besonderen Fall, daß $a = \frac{l}{\sqrt{8}}$ angenommen wird, erhält man:

$$x_0 = \frac{l}{2} - \frac{l}{\sqrt{8}} = \frac{l}{2} - a$$

$$x_0' = \frac{l}{2} + \frac{l}{\sqrt{8}} = \frac{l}{2} + a$$

Wird nicht die Stützweite, sondern die ganze Trägerlänge mit l bezeichnet (Fig. 58), so sind die Stützenwiderstände:

$$A = B = \frac{p\,l}{2}$$

Das Moment für die Trägermitte C ist:

$$\mathfrak{M}_c = \frac{p\,l}{2}\left(\frac{l}{2} - a\right) - \frac{p\,l}{2} \cdot \frac{l}{4} = \frac{p\,l}{2}\left(\frac{l}{4} - a\right)$$

Die Stützenmomente haben den absoluten Wert:

$$\mathfrak{M} = \frac{p\,a^2}{2}$$

Der Balken besitzt die größte Tragfähigkeit, wenn $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_c$ wird.

Aus:

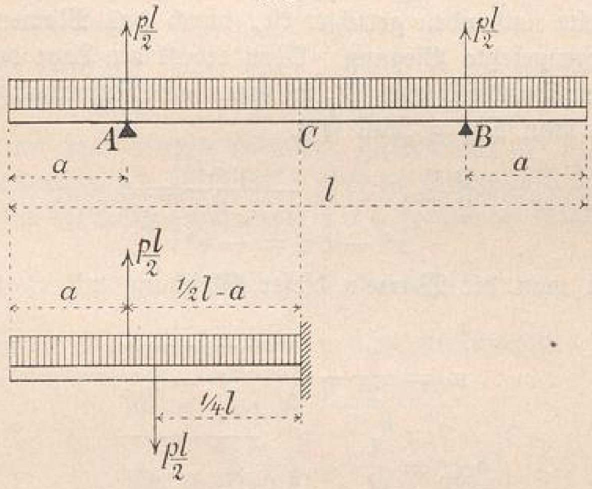
$$\frac{p\,a^2}{2} = \frac{p\,l}{2}\left(\frac{l}{4} - a\right)$$

folgt dann:

$$a^2 + l\,a = \frac{l^2}{4}$$

$$a = \frac{l}{2}\,(\sqrt{2} - 1) = 0{,}2071\,.\,l$$

Fig. 58.



Nach Einsetzung dieses Wertes ergibt sich dann für die Momente die Größe:

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_c = \frac{p\,l^2}{8}\,(3 - 2\sqrt{2}) = 0{,}02145\;p\,l^2$$

Für eine Stelle in der Entfernung x vom Balkenende ist:

$$\mathfrak{M}_x = \frac{p\,l}{2}\,(x - a) - \frac{p\,x^2}{2}$$

Setzt man $\mathfrak{M}_x = 0$, so folgt:

$$x^2 - l\,x = -\,l\,a$$

Die Wurzeln dieser Gleichung sind:

$$x_0 = \frac{l}{2} - \sqrt{\frac{l^2}{4} - l\,a}$$

$$x_0' = \frac{l}{2} + \sqrt{\frac{l^2}{4} - l\,a}$$

und für den speziellen Fall, daß $a = \frac{l}{2}(\sqrt{2} - 1)$ ist:

$$x_0 = \frac{l}{2} - \sqrt{\frac{l^2}{4} - \frac{l^2}{2}(\sqrt{2} - 1)} = \frac{l}{2} - \frac{l}{2}\sqrt{3 - 2\sqrt{2}}$$

$$x_0' = \frac{l}{2} + \sqrt{\frac{l^2}{4} - \frac{l^2}{2}(\sqrt{2} - 1)} = \frac{l}{2} + \frac{l}{2}\sqrt{3 - 2\sqrt{2}}$$

Der Ausdruck $a = \frac{l}{2}(\sqrt{2} - 1)$ läßt sich noch auf eine andere Form bringen. Es ist nämlich:

$$a^2 = \frac{l^2}{4}(2 - 2\sqrt{2} + 1) = \frac{l^2}{4}(3 - 2\sqrt{2})$$

folglich:

$$a = \frac{l}{2}\sqrt{3 - 2\sqrt{2}}$$

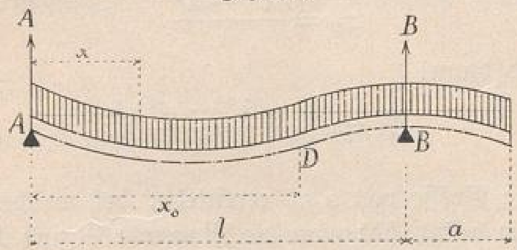
Danach ergeben sich die Abstände der Stellen, wo das Moment = Null ist, von den Balkenenden zu:

$$x_0 = \frac{l}{2} - a$$

$$x_0' = \frac{l}{2} + a$$

Ragt ein auf zwei Stützen ruhender, gleichmäßig mit p für die Längeneinheit belasteter Träger von der Stützweite l um ein Stück a über den einen

Fig. 59.



Stützpunkt hinaus (Fig. 59), und stellt man die Gleichungen der statischen Momente auf, so ist in Bezug auf den Drehpunkt B:

$$A\,l - \frac{p\,l^2}{2} + \frac{p\,a^2}{2} = 0$$

und in Bezug auf den Drehpunkt A:

$$-B\,l + \frac{p\,l^2}{2} + p\,a\left(l + \frac{a}{2}\right) = 0$$

Daraus ergeben sich die Stützenwiderstände:

$$A = \frac{p}{2\,l}\,(l^2 - a^2)$$

$$B = \frac{p}{2\,l}\,(l + a)^2$$

Aus der ersten dieser Gleichungen folgt, daß für $a > l$ der Stützenwiderstand A negativ wird. Für $a = l$ wird $A =$ Null.

In beiden Fällen entsteht bei B das Maximalmoment:

$$\mathfrak{M}_B = \frac{p\,a^2}{2}$$

Ist $a < l$, so wird A positiv. Es entsteht dann zwischen den Stützpunkten A und B ein zweites Maximalmoment von der Größe:

$$\mathfrak{M} = \frac{p\,x_0{}^2}{8}$$

wobei x_0 die Entfernung des Punktes D (d. i. desjenigen Punktes, in welchem das Moment = Null wird) von dem Stützpunkt A bedeutet.

Das Moment in der Entfernung x vom Auflager A ist:

$$\mathfrak{M}_x = A\,x - \frac{p\,x^2}{2}$$

$$\mathfrak{M}_x = \frac{p}{2\,l}\,(l^2 - a^2)\,x - \frac{p\,x^2}{2}$$

Dieses Moment wird = Null am Auflager A, d. h. für $x = 0$ und außerdem für:

$$x_0 = \frac{l^2 - a^2}{l}$$

Danach wird dann:

$$\mathfrak{M} = \frac{p}{8}\left(\frac{l^2 - a^2}{l}\right)^2$$

Um diejenige Größe von a zu ermitteln, bei welcher der Balken die größte Tragfähigkeit besitzt, hat man die Momente $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{M}_B$ einander gleich zu setzen.

$$\frac{p}{8}\left(\frac{l^2 - a^2}{l}\right)^2 = \frac{p\,a^2}{2}$$

Daraus folgt:

$$a = l\,(\sqrt{2} - 1) = 0{,}4142\,.\,l$$

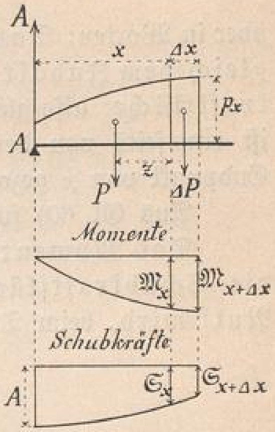
Nach Einsetzung dieses Wertes ergibt sich:

$$x_0 = 0{,}8284\,.\,l = 2\,a$$

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_B = 0{,}0858\;p\,l^2$$

Ist die Belastung eines Trägers unsymmetrisch, so läßt sich die Lage des gefährlichen Querschnittes am einfachsten dadurch bestimmen, daß man die Stelle aufsucht, wo die Schubkraft = Null ist. An derselben Stelle erreicht das Moment seinen größten Wert.

Fig. 60.



Ein einfacher Beweis dieses Satzes, welcher für den besonderen Fall des gleichmäßig auf seine ganze Länge belasteten Trägers schon S. 68 angeführt war, ist folgendermaßen:

Bei dem beliebig belasteten Träger (Fig. 60) hat für eine Stelle in der Entfernung x vom Auflager A die Schubkraft die Größe:

$$\mathfrak{S}_x = A - P$$

Wächst x um das sehr kleine Stück Δ x an, so entsteht:

$$\mathfrak{S}_{x+\Delta x} = A - (P + \Delta P)$$

Danach beträgt die Aenderung der Schubkraft, während x um Δ x anwächst:

$$\Delta \mathfrak{S}_x = \mathfrak{S}_{x+\Delta x} - \mathfrak{S}_x = -\Delta P = -p_x \cdot \Delta x \quad . \quad . \quad . \quad 58)$$

Für die Momente an den Stellen in den Entfernungen x und x + Δ x von A erhält man die Ausdrücke:

$$\mathfrak{M}_x = A\,x - P\,z$$

$$\mathfrak{M}_{x+\Delta x} = A\,(x + \Delta x) - P\,(z + \Delta x) - \Delta P \cdot \frac{\Delta x}{2}$$

oder da das letzte Glied $\Delta P \cdot \frac{\Delta x}{2}$ wegen Kleinheit vernachlässigt werden kann:

$$\mathfrak{M}_{x+\Delta x} = A\,(x + \Delta x) - P\,(z + \Delta x)$$

Die Zunahme des Moments beträgt danach:

$$\Delta \mathfrak{M}_x = \mathfrak{M}_{x+\Delta x} - \mathfrak{M}_x = A\,\Delta x - P\,\Delta x = (A - P)\,\Delta x$$

und wenn für (A — P) der obige Wert $\mathfrak{S}_x$ eingesetzt wird:

$$\Delta \mathfrak{M}_x = \mathfrak{S}_x \cdot \Delta x \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 59)$$

d. h. die Zunahme des Moments von einer Stelle in der Entfernung x bis zu der nächstfolgenden Stelle in der Entfernung x + Δ x vom Auflagerpunkte A ist gleich dem Flächeninhalt des lotrecht darunter liegenden Streifens der Schubkraftfläche.

Aus Gl. 59) folgt bei der zeichnerischen Darstellung der Momente:

Wird $\mathfrak{S}_x$ = Null, so wird auch $\Delta \mathfrak{M}_x$ = Null, d. h. **das Moment $\mathfrak{M}$ erreicht seinen größten Wert an der Stelle, wo die Schubkraft $\mathfrak{S}$ = Null ist** (oder bei einer Einzellast von + in — übergeht).

Durch Summierung vom Auflagerpunkte A ab, also von $x =$ Null ab gerechnet, entsteht aus Gl. 59)

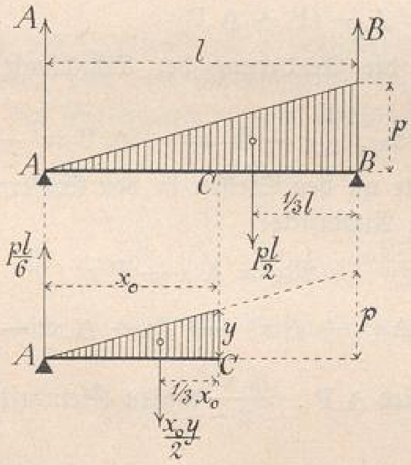
$$\mathfrak{M}_x = \Sigma(\mathfrak{S}_x \cdot \Delta x) = [\mathfrak{S}\text{-Fläche}]_0^x \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 60)$$

oder in Worten: Das Moment in der Entfernung x vom Auflager ist gleich dem Inhalt der lotrecht unter der Strecke x liegenden Schubkraftfläche: also gleich demjenigen Teil der Schubkraftfläche, welcher begrenzt ist einerseits von der Auflager-Lotrechten, andererseits von der durch den Endpunkt von x gezogenen Lotrechten.

Aus Gl. 60) folgt:

Das Moment $\mathfrak{M}$ wird = Null bei dem Querschnitt, für welchen die Schubkraftfläche (bestehend aus positiven und negativen Teilen) = Null wird, beim Träger auf zwei Endstützen also an den Auflagern.

Fig. 61.



Die Belastungsfläche des Trägers A B (Fig. 61) bilde ein Dreieck mit der Höhe p bei dem Auflager B. Es ist dann:

$$A = \left(\frac{p\,l}{2} \cdot \frac{l}{3}\right) : l = \frac{p\,l}{6}$$

Wird die Entfernung der Stelle, wo die Schubkraft = Null ist, vom Auflager A mit x_0 und die Belastungshöhe an dieser Stelle mit y bezeichnet, so erhält man zunächst:

$$y = \frac{p\,x_0}{l}$$

und danach die Belastung des Stückes A C:

$$\frac{x_0\,y}{2} = \frac{p\,x_0^{\,2}}{2\,l}$$

Aus der Bedingung: $\frac{x_0\, y}{2} = A$ oder:

$$\frac{p\, x_0^2}{2\, l} = \frac{p\, l}{6}$$

folgt dann:

$$x_0 = \frac{l}{\sqrt{3}}$$

Das an dieser Stelle entstehende größte Moment ergibt sich zu:

$$\mathfrak{M}_{max} = \frac{p\, l}{6}\, x_0 - \frac{p\, x_0^2}{2\, l} \cdot \frac{x_0}{3}$$

und wenn für x_0 der obige Wert eingesetzt wird:

$$\mathbf{\mathfrak{M}_{max}} = \frac{\mathbf{p\, l^2}}{\mathbf{9\sqrt{3}}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 61)$$

Fig. 62.

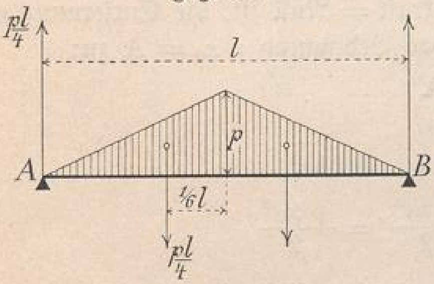
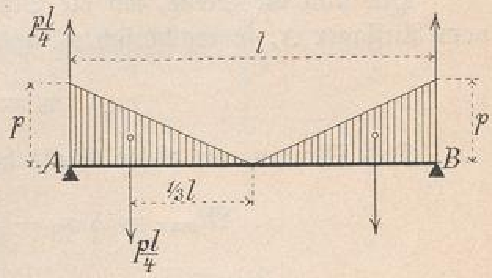


Fig. 63.



Für den symmetrischen Belastungsfall (Fig. 62) (Belastungshöhe in der Trägermitte $= p$, an den Auflagern $=$ Null) ist:

$$\mathbf{\mathfrak{M}_{max}} = \frac{p\, l}{4}\left(\frac{l}{2} - \frac{l}{6}\right) = \frac{\mathbf{p\, l^2}}{\mathbf{12}} \quad \ldots\ldots \quad 62)$$

Ist umgekehrt die Belastungshöhe an den Auflagern $= p$ und in der Trägermitte $=$ Null (Fig. 63), so wird:

$$\mathbf{\mathfrak{M}_{max}} = \frac{p\, l}{4}\left(\frac{l}{2} - \frac{l}{3}\right) = \frac{\mathbf{p\, l^2}}{\mathbf{24}} \quad \ldots\ldots \quad 63)$$

Die Addition der Gleichungen 62) und 63) ergibt wieder das Maximalmoment des gleichmäßig mit p auf die ganze Länge l belasteten Trägers (vergl. Gl. 53) S. 68) zu:

$$\mathfrak{M}_{max} = \frac{p\, l^2}{8}$$

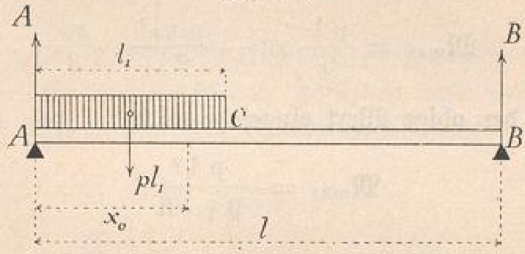
Der Träger A B (Fig. 64) sei von A bis C gleichmäßig mit p für die Längeneinheit belastet. Man erhält die Stützenwiderstände A und B, indem man sich die gleichmäßig verteilte Belastung im Schwerpunkte der Belastungsfläche vereinigt denkt, aus den Momentengleichungen:

$$A\,l - p\,l_1\,(l - \tfrac{1}{2}\,l_1) = 0$$
$$B\,l - p\,l_1 \,.\, \tfrac{1}{2}\,l_1 = 0$$

zu:

$$A = \frac{p\,l_1\,(l - \frac{1}{2}\,l_1)}{l} \qquad B = \frac{p\,l_1^2}{2\,l}$$

Fig. 64.



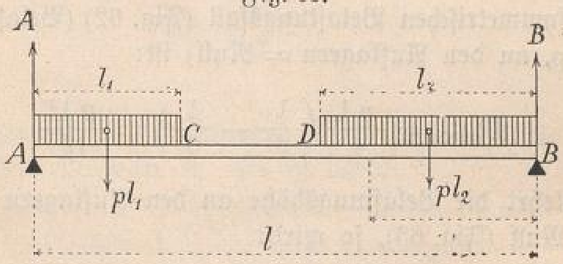
Hat nun die Stelle, wo die Schubkraft = Null ist, die Entfernung x_0 vom Auflager A, so ergibt sich x_0 aus der Bedingung $p\,x_0 = A$ zu:

$$x_0 = \frac{A}{p}$$

Das Moment an dieser Stelle hat die Größe:

$$\mathfrak{M}_{max} = A\,x_0 - \frac{p\,x_0^2}{2} = \frac{p\,x_0^2}{2}$$

Fig. 65.



Für den Belastungsfall (Fig. 65), bei welchem man sich die gleichmäßig verteilten Belastungen wieder in den Schwerpunkten der Belastungsflächen vereinigt zu denken hat, erhält man:

$$A = \frac{p\,l_1\,(l - \frac{1}{2}\,l_1) + p\,l_2 \,.\, \frac{1}{2}\,l_2}{l}$$

$$B = \frac{p\,l_1 \,.\, \frac{1}{2}\,l_1 + p\,l_2\,(l - \frac{1}{2}\,l_2)}{l}$$

Ist $l_2 > l_1$, so ergibt sich die Größe x_0, das ist die Entfernung der Stelle, wo die Schubkraft = Null ist, wo also zugleich das Biegungsmoment seinen größten Wert erreicht, vom Auflager B aus der Bedingung $p\,x_0 = B$ zu:

$$x_0 = \frac{B}{p}$$

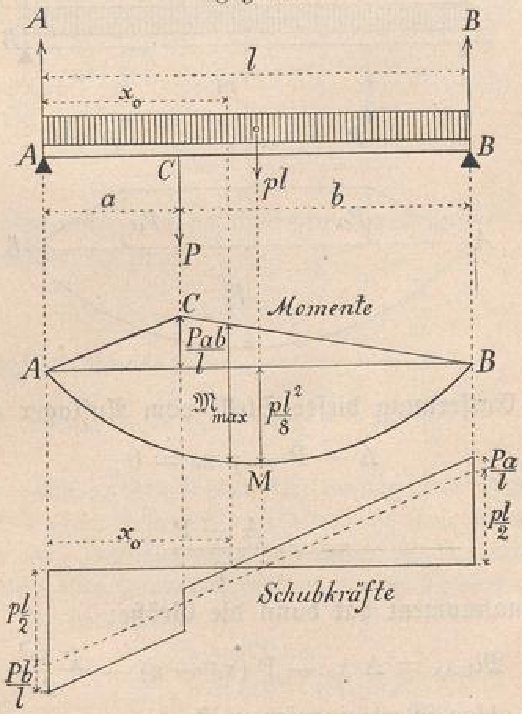
folglich wird:

$$\mathfrak{M}_{max} = B\,x_0 - \frac{p\,x_0^2}{2} = \frac{p\,x_0^2}{2}$$

3. Zusammengesetzte Belastung.

Wirkt auf einen an den Enden unterstützten, gleichmäßig durch p für die Längeneinheit belasteten Balken noch eine Einzelkraft P (Fig. 66), so setzt sich das Moment für eine beliebige Stelle des Balkens zusammen aus zwei Teilen,

Fig. 66.



nämlich aus einem Beitrage, herrührend von der gleichmäßig über die Länge verteilten Belastung und aus dem Beitrage, den die Einzelkraft P liefert. Diese Beiträge sind einzeln für sich zu berechnen und zu addieren.

Die Stützenwiderstände sind:

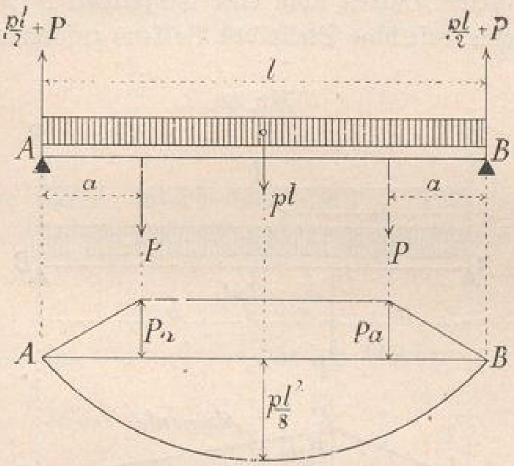
$$A = \frac{p\,l}{2} + \frac{P\,b}{l}$$

$$B = \frac{p\,l}{2} + \frac{P\,a}{l}$$

Das größte Moment findet entweder im Lastpunkt C statt oder es liegt zwischen der Trägermitte und dem Lastpunkte C und kann dann abgegriffen werden aus der graphischen Darstellung der Momente, welche sich zusammensetzt aus dem Dreiecke A B C mit der Höhe $P \frac{a\,b}{l}$ als Beitrag der Einzellast P, und aus der Parabel A M B mit der Pfeilhöhe $\frac{p\,l^2}{8}$ als Beitrag der gleichmäßigen Belastung.

Genauer erhält man die Lage des gefährlichen Querschnitts, indem man die Stelle aufsucht, wo die Schubkraft = Null ist.

Fig. 67.



Ist x_0 die Entfernung dieser Stelle vom Auflager A, so ist:

$$A - P - p\,x_0 = 0$$

also:

$$x_0 = \frac{A - P}{p}$$

Das Maximalmoment hat dann die Größe:

$$\mathfrak{M}_{max} = A\,x_0 - P\,(x_0 - a) - \frac{p\,x_0^{\,2}}{2}$$

worin für x_0 der obige Wert einzusetzen ist.

Für den Fall daß:

$$a = b = \frac{l}{2}$$

ist, liegt das Maximalmoment in der Mitte des Trägers und hat die Größe:

$$\mathfrak{M}_{max} = \frac{P\,l}{4} + p\,l \cdot \frac{l}{8}$$

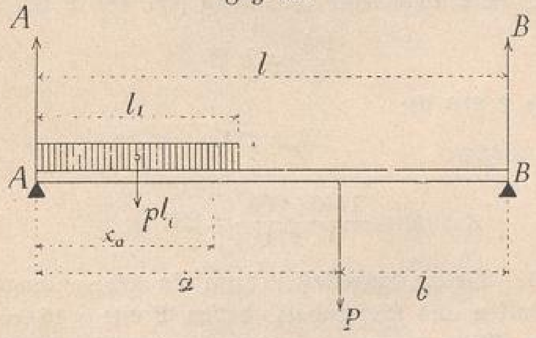
Für den symmetrischen Belastungsfall Fig. 67 liegt der gefährliche Querschnitt ebenfalls in der Trägermitte und der Träger ist zu berechnen aus der Gleichung:

$$P a + p l \cdot \frac{l}{8} = k W$$

Erstreckt sich die gleichmäßig verteilte Belastung nur über einen Teil l_1 des Trägers und wirkt außerdem die Einzellast P auf denselben, so ist nach Fig. 68:

$$A = \frac{P b}{l} + p l_1 \frac{(l - {}^1\!/_2 \, l_1)}{l}$$

Fig. 68.



Wird die Entfernung des gefährlichen Querschnittes vom Auflager A wieder mit x_0 bezeichnet, so ist:

$$A - p x_0 = 0 \text{ oder } x_0 = \frac{A}{p}$$

und danach das größte Moment:

$$\mathfrak{M}_{max} = A x_0 - \frac{p x_0^2}{2} = \frac{p x_0^2}{2}$$

Aufgabe 29. Ein an den Enden frei aufliegender Balken aus Eichenholz von 420 cm Länge ist 150 cm vom Auflager durch ein Gewicht von 900 kg belastet. Welchen Querschnitt muß derselbe erhalten, wenn sich die Breite zur Höhe wie 5 : 7 verhalten soll und eine Inanspruchnahme k = 80 kg/qcm gestattet ist?

Auflösung. Da hier:

$$a = 150 \text{ cm}$$
$$b = 420 - 150 = 270 \text{ cm}$$

in Gl. 47) S. 59 einzusetzen ist, so ist das größte Moment:

$$\mathfrak{M}_{max} = 900 \cdot \frac{150 \cdot 270}{420} = 86\,786$$

und das erforderliche Widerstandsmoment:

$$W = \frac{86\,786}{80} = 1085$$

Da nun für $b = {}^5\!/_7 \, h$

$$W = \frac{{}^5\!/_7 \, h \cdot h^2}{6} = \frac{5}{42} \cdot h^3$$

ist, so erhält man:

$$\frac{5}{42} h^3 = 1085$$

$$h = \sqrt[3]{\frac{42}{5} \cdot 1085} = \sim 21 \text{ cm}$$

$$b = \frac{5}{7} h = 15 \text{ cm}$$

Aufgabe 30. Ein mit den Enden frei aufliegender I-Träger Nr. 20 von 600 cm Länge ist in der Mitte durch ein Gewicht von 1400 kg belastet: wie groß ist die Inanspruchnahme k?

Auflösung. Die allgemeine Gleichung (Gl. 48) S. 60) lautet:

$$\frac{P\,l}{4} = k\,W$$

Nach Tabelle 2 § 6 ist:

$$W = 214$$

daher:

$$k = \frac{1400 \cdot 600}{4 \cdot 214} = 981 \text{ kg}$$

Aufgabe 31. Welche Einzellast P kann ein 400 cm langer, mit den Enden frei aufliegender Balken aus Kiefernholz, dessen Breite = 18 cm und dessen Höhe = 24 cm ist, in der Mitte tragen (k = 60 kg vorausgesetzt) und wie groß ist die Durchbiegung f?

Auflösung. Da nach Tabelle 15 § 6 S. 40:

$$W = 1728$$

ist, so wird nach Gl. 48) S. 60:

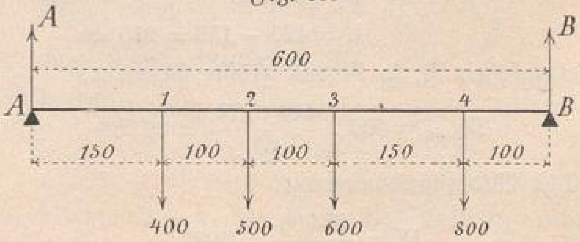
$$P = \frac{4\,k\,W}{l} = \frac{4 \cdot 60 \cdot 1728}{400} = 1037 \text{ kg}$$

und nach Gl. 49) S. 61:

$$f = \frac{1}{12} \, \frac{60}{120000} \cdot \frac{400^2}{12} = 0{,}56 \text{ cm}$$

Aufgabe 32. Ein I-Träger von 600 cm Länge ist nach Fig. 69 belastet. Es soll das Profil des Trägers ohne Berücksichtigung des Eigengewichts berechnet werden (k = 1000 kg).

Fig. 69.



Auflösung. Der Stützenwiderstand A hat die Größe:

$$A = \frac{400 \cdot 450 + 500 \cdot 350 + 600 \cdot 250 + 800 \cdot 100}{600} = 975$$

Die Gesamtbelastung beträgt:

$$400 + 500 + 600 + 800 = 2300 \text{ kg}$$

folglich ist:

$$B = 2300 - 975 = 1325 \text{ kg}$$

Für die Momente in den Lastpunkten 1, 2, 3, 4 ergeben sich die Größen:

$$\mathfrak{M}_1 = 975 \,.\, 150 = 146250$$
$$\mathfrak{M}_2 = 975 \,.\, 250 - 400 \,.\, 100 = 203750$$
$$\mathfrak{M}_3 = 1325 \,.\, 250 - 800 \,.\, 150 = 211250$$
$$\mathfrak{M}_4 = 1325 \,.\, 100 = 132500$$

Das Moment $\mathfrak{M}_3$ ist das größte, daher das erforderliche Widerstandsmoment:

$$W = \frac{211250}{1000} = 211$$

Es genügt Profil Nr. 20 mit $W = 214$.

Aufgabe 33. Es soll ein nach Fig. 53 S. 63 belasteter I-Träger berechnet werden unter Annahme folgender Größen:

$$P = 800 \text{ kg} \qquad a = 120 \text{ cm}$$
$$P_1 = 1200 \text{ kg} \qquad a_1 = 200 \text{ cm}$$
$$b_1 = 300 \text{ cm}$$
$$l = a_1 + b_1 = 500 \text{ cm}$$

Auflösung. Die Stützenwiderstände sind:

$$A = 800 + \frac{1200 \,.\, 300}{500} = 1520$$

$$B = 800 + \frac{1200 \,.\, 200}{500} = 1280$$

Das Moment über den Stützen hat die Größe:

$$\mathfrak{M} = P\,a = 800 \,.\, 120 = 96000$$

Das Moment im Lastpunkte C ist:

$$\mathfrak{M}_c = P_1 \frac{a_1\,b_1}{l} - P\,a$$

$$\mathfrak{M}_c = 1200 \,.\, \frac{200 \,.\, 300}{500} - 96000 = 48000$$

Der gefährliche Querschnitt liegt also über den Stützen und das erforderliche Widerstandsmoment ist:

$$W = \frac{96000}{1000} = 96$$

Gewählt Profil Nr. 15 mit $W = 97{,}9$.

Aufgabe 34. Es soll unter Beibehaltung aller anderen Größen in Aufg. 33 die Länge a so gewählt werden, daß die Momente einander gleich sind.

Auflösung. Nach S. 63 (unten) ist:

$$a = \frac{P_1}{P} \frac{a_1\,b_1}{2\,l} = \frac{1200}{800} \,.\, \frac{200 \,.\, 300}{2 \,.\, 500} = 90 \text{ cm}$$

Danach wird:

$$\mathfrak{M} = \frac{P_1}{2} \frac{a_1 b_1}{l} = \frac{1200}{2} \cdot \frac{200 \cdot 300}{500} = 72000$$

$$W = \frac{72000}{1000} = 72$$

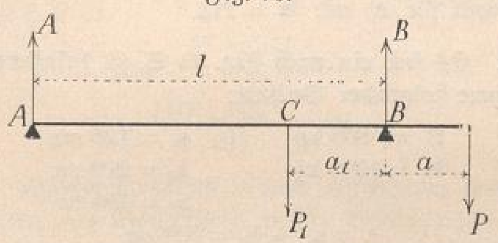
Gewählt Profil Nr. 14 mit $W = 81{,}7$.

Aufgabe 35. Ein Balken aus Eichenholz sei nach Fig. 70 belastet und es sei:

$$P = 800 \text{ kg} \qquad a = 96 \text{ cm}$$
$$P_1 = 3000 \text{ kg} \qquad a_1 = 100 \text{ cm}$$
$$l = 360 \text{ cm}$$

Wie stark muß der Balken genommen werden bei $k = 80$ kg?

Fig. 70.



Auflösung. In Bezug auf den Drehpunkt B ist:

$$A\, l = P_1\, a_1 - P\, a$$

folglich:

$$A = \frac{P_1\, a_1 - P\, a}{l} = \frac{3000 \cdot 100 - 800 \cdot 96}{390} = 620 \text{ kg}$$

Das Moment im Punkte C ist danach:

$$\mathfrak{M}_c = 620\,(360 - 100) = 161200$$

Das Moment über der Stütze B hat die Größe:

$$\mathfrak{M} = P\, a = 800 \cdot 96 = 76800$$

Der Balken ist daher nach $\mathfrak{M}_c$ zu berechnen und erfordert das Widerstandsmoment:

$$W = \frac{161200}{80} = 2015$$

Nach Tabelle 15 § 6 S. 40 genügt $b = 18$ cm, $h = 26$ cm.

Aufgabe 36. Eine $1^1/_2$ Stein (0,38 m) starke, 4 m breite und 12,5 m hohe Mauer soll durch zwei I-Eisen unterstützt werden. Welches Profil ist zu nehmen?

Auflösung. Der Rauminhalt der Mauer beträgt:

$$0{,}38 \cdot 4 \cdot 12{,}5 = 19 \text{ cbm}$$

Rechnet man das Kubikmeter Mauerwerk zu 1600 kg, so ist das Gewicht der ganzen Mauer:

$$1600 \cdot 19 = 30400 \text{ kg}$$

Die Gesamtbelastung eines Trägers beträgt daher:

$$p\, l = \frac{30400}{2} = 15200 \text{ kg}$$

Danach ist:

$$\mathfrak{M}_{max} = 15200 \frac{400}{8} = 760000$$

$$W = \frac{760000}{1000} = 760$$

Gewählt Profil Nr. 32 mit W = 781.

Der Auflagerdruck eines Trägers hat die Größe:

$$A = \frac{p\,l}{2} = 7600 \text{ kg}$$

Legt man den Träger auf gewöhnliches Ziegelmauerwerk und nimmt an, daß sich der Druck gleichförmig auf die Unterstützungsmauer verteilt (was streng genommen nicht ganz zutreffend ist), rechnet man dabei als zulässige Inanspruchnahme k = 7 kg, so ergibt sich die erforderliche Auflagerfläche zu:

$$F = \frac{7600}{7} = 1086 \text{ qcm}$$

Setzt man:

$$F = a\,b$$

wo a die Auflagerlänge und b die Breite des Trägers bedeutet, so wird, da nach Tabelle 2 § 6:

$$b = 13{,}1 \text{ cm}$$

beträgt, die Auflagerlänge:

$$a = \frac{1086}{13{,}1} = \backsim 83 \text{ cm}$$

Bei Holzbalken ist es Regel und im allgemeinen auch genügend, die Auflagerlänge gleich der Balkenhöhe zu nehmen. Bei Eisenträgern ist dies, wie schon aus obigem Beispiel hervorgeht, in vielen Fällen ganz ungenügend. Man sollte die I-Träger durch Werksteine unterstützen oder besser noch auf eisernen Unterstützungsplatten lagern, um den Druck auf eine größere Fläche der Mauer zu verteilen. Besonders gilt dies für kurze gleichmäßig belastete Träger.

Bei Anwendung von eisernen Trägern achte man auf die Auflager!

Aufgabe 37. Bei einem Dache mit Wellblecheindeckung sei die wagerechte Entfernung der Pfetten = 2,5 m; als gesamte Dachbelastung (Eigengewicht, Schnee und Wind) soll 180 kg für das Quadratmeter der Grundrißfläche angenommen werden. Welches Wellblech ist zu wählen?

Auflösung. Die Belastung des Wellbleches für 1 m Breite beträgt:

$$p\,l = 180 \,.\, 2{,}5 = 450 \text{ kg}$$

folglich ist das größte Moment:

$$\mathfrak{M}_{max} = p\,l \,.\, \frac{l}{8} = 450 \,.\, \frac{250}{8} = 14063$$

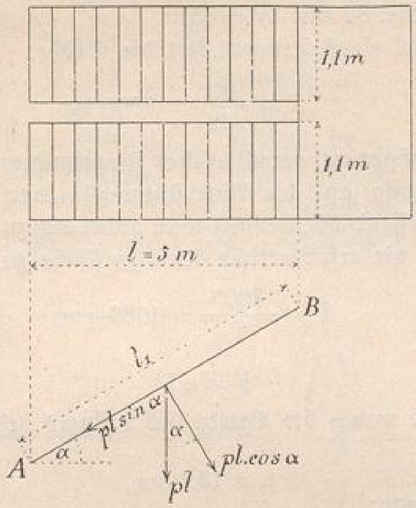
und das Widerstandsmoment (bei k = 500 kg):

$$W = \frac{14063}{500} = \backsim 28$$

Wählt man die Wellenhöhe gleich der halben Wellenbreite, und die Dicke $\delta = 0{,}1$ cm, so genügt nach Tabelle 11 § 6 S. 36 eine Wellenhöhe von 8 cm, eine Wellenbreite von 16 cm.

Aufgabe 38. Für einen Treppenarm (Fig. 71), bei welchem als Belastung 450 kg für 1 qm der Grundrißfläche angenommen wird, soll die äußere Wange, bestehend aus einem ⊏-Eisen, berechnet werden (k = 750).

Fig. 71.



Auflösung. Die Gesamtbelastung des Treppenarmes beträgt:

$$1{,}1 \,.\, 5 \,.\, 450 = 2475 \text{ kg}$$

Davon kommt auf die Wange die Hälfte:

$$p\,l = 1238 \text{ kg}$$

Durch Zerlegung von p l erhält man die rechtwinklig zum Träger A B wirkende Seitenkraft $p\,l \cos\alpha$, welche das größte Moment erzeugt:

$$\mathfrak{M}_{max} = \frac{p\,l \cos\alpha \,.\, l_1}{8} = \frac{p\,l \cos\alpha}{8} \, \frac{l}{\cos\alpha}$$

$$\mathfrak{M}_{max} = p\,l \,.\, \frac{l}{8}$$

Hieraus geht hervor, daß die Neigung des Trägers auf die Größe des Moments ganz ohne Einfluß ist, und daß die Wange von der Grundrißlänge l genau so zu berechnen ist, wie ein wagerechter, gleichmäßig belasteter Träger von der gleichen Länge l.

Das erforderliche Widerstandsmoment des Wangenträgers ist (bei k = 750) danach:

$$W = 1238 \, \frac{500}{8 \,.\, 750} = 103$$

Nach Tabelle 1 S. 28 genügt ⊏-Eisen Nr. 16 mit W = 116.

Die in der Richtung A B wirkende Kraft $p\,l \sin\alpha$ kann bei der geringen Beanspruchung k = 750 für den Träger selbst vernachlässigt werden.

Aufgabe 39. Eine Deckenkonstruktion soll mit Hilfe von eisernen Trägern ausgeführt werden, die in solchen Entfernungen voneinander anzuordnen sind, daß bei voller Belastung die Durchbiegung derselben $\frac{1}{600}$ der Stützweite beträgt.

Stützweite $l = 520$ cm

Belastung $= 700$ kg für 1 qm

Die Höhe der Träger muß mit Rücksicht auf die Durchbiegung nach Gl. 57) S. 70 mindestens sein:

$$h = \frac{520}{25} = 20{,}8 \text{ cm}$$

Es sind daher I-Eisen Nr. 21 mit $W = 244$ zu verwenden. Der diesem Widerstandsmomente entsprechende Trägerabstand b ergibt sich aus der Bedingungsgleichung:

$$\mathfrak{M} = k\,W$$

Die Gesamtbelastung eines Trägers ist:

$$p\,l\,b = 700 \,.\, 5{,}2 \,.\, b = 3640\,b$$

Für $k = 1000$ wird dann:

$$3640\,b\,\frac{520}{8} = 1000 \,.\, 244$$

folglich:

$$b = \frac{8 \,.\, 1000 \,.\, 244}{3640 \,.\, 520} = 1{,}03 \text{ m}$$

Aufgabe 40. Es soll ein nach Fig. 65 S. 78 belasteter I-Träger berechnet werden unter Annahme folgender Größen:

$$p = 10 \text{ kg} \qquad l_1 = 120 \text{ cm}$$
$$l = 600 \text{ cm} \qquad l_2 = 300 \text{ cm}$$

Auflösung. Die Stützenwiderstände sind:

$$A = \frac{10 \,.\, 120\,(600 - 60) + 10 \,.\, 300 \,.\, 150}{600} = 1830 \text{ kg}$$

$$B = \frac{10 \,.\, 120 \,.\, 60 + 10 \,.\, 300\,(600 - 150)}{600} = 2370 \text{ kg}$$

Die Größe x_0, d. i. die Entfernung des gefährlichen Querschnittes vom Auflager B ergibt sich zu:

$$x_0 = \frac{B}{p} = \frac{2370}{10} = 237 \text{ cm}$$

folglich wird:

$$\mathfrak{M}_{max} = \frac{10 \,.\, 237^2}{2} = 280845$$

$$W = \frac{280845}{1000} = 281$$

Nach Tabelle 2 § 6 ist erforderlich ein I-Eisen Nr. 23.

Aufgabe 41. Es soll die Profilnummer eines I-Eisens von 720 cm Länge bestimmt werden, welches gleichmäßig mit $p = 8$ kg für 1 cm Länge belastet ist. Dasselbe ist an seinem einen Endpunkte unterstützt und soll so weit über die zweite Stütze hinausragen, daß die Tragkraft voll ausgenutzt wird. (Vergl. Fig. 59 S. 73.)

Auflösung. Aus:

$$l + a = l + 0{,}4142 \,.\, l = 720$$

folgt:

$$l = 509 \text{ cm}$$
$$a = 0{,}4142 \,.\, 509 = 211 \text{ cm}$$
$$\mathfrak{M}_{max} = 0{,}0858 \,.\, 8 \,.\, 509^2 = 177\,833$$
$$W = \frac{177\,833}{1000} = 178$$

Es genügt ein I-Eisen Nr. 19.

Aufgabe 42. Ein nach Fig. 68 S. 81 belasteter Träger ist für folgende Angaben zu berechnen:

$$P = 600 \text{ kg} \qquad l = 600 \text{ cm}$$
$$p = 12 \text{ kg} \qquad l_1 = 400 \text{ cm}$$
$$a = 500 \text{ cm}; \; b = 100 \text{ cm}$$

Auflösung:

$$A = \frac{600 \,.\, 100}{600} + 12 \,.\, 400 \,\frac{(600 - 200)}{600} = 3300$$
$$x_0 = \frac{3300}{12} = 275 \text{ cm}$$
$$\mathfrak{M}_{max} = \frac{12 \,.\, 275^2}{2} = 453\,750$$
$$W = \frac{453\,750}{1000} = 454$$

Gewählt I-Eisen Nr. 27.

Aufgabe 43. Ein auf zwei Stützen ruhender Balken aus Eichenholz von 800 cm Länge soll gleichmäßig mit $p = 5$ kg für 1 cm Länge belastet und so unterstützt werden, daß die Tragkraft des Balkens voll ausgenutzt wird. Es soll der erforderliche Querschnitt des Balkens und die Lage der Stützen bestimmt werden (Fig. 57 S. 70).

Auflösung. Da nach S. 71:

$$a = \frac{l}{\sqrt{8}}$$

ist, so hat man:

$$800 = l + 2 \,.\, \frac{l}{\sqrt{8}}$$

Danach:

$$l = \frac{800}{\left(1 + \frac{2}{\sqrt{8}}\right)} = \infty\, 470 \text{ cm}$$
$$a = \frac{800 - 470}{2} = 165 \text{ cm}$$

Die Gesamtbelastung des Mittelteiles beträgt:

$$p\,l = 5 \,.\, 470 = 2350 \text{ kg}$$

folglich:

$$\mathfrak{M} = p\,l \,.\, \frac{l}{16} = 2350 \,.\, \frac{470}{16} = 69\,031$$

und bei $k = 80$ kg:

$$W = \frac{b\,h^2}{6} = \frac{69\,031}{80} = 863$$

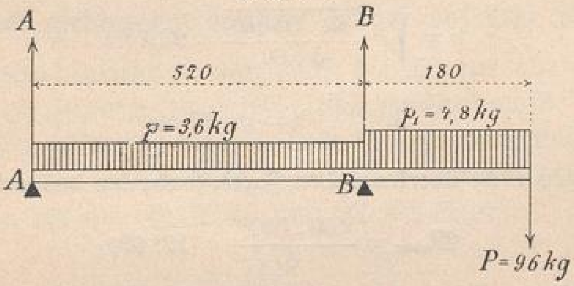
Wählt man $b = 14$ cm, so wird:

$$h = \sqrt{\frac{6}{14} \,.\, 863} = 19{,}2 \text{ cm}$$

Aufgabe 44. Zur Unterstützung eines Balkons von 1,8 m Ausladung sollen die über die Gebäudemauer hinausragenden Fußbodenbalken aus Kiefernholz benutzt werden, welche 0,8 m auseinander liegen und 5,2 m Spannweite haben. Die Fußbodenbelastung beträgt 450 kg/qm, die Balkonbelastung 600 kg/qm; das Gewicht der Brüstung ist = 120 kg für das laufende Meter.

Wie stark sind die mittleren Balken auszuführen?

Fig. 72.



Auflösung. Die Belastung eines Balkens zwischen den Stützen beträgt für 1 cm Länge:

$$p = 0{,}8 \,.\, 4{,}5 = 3{,}6 \text{ kg}$$

Die gleichförmig verteilte Belastung des überkragenden Balkenendes ist für 1 cm Länge:

$$p_1 = 0{,}8 \,.\, 6 = 4{,}8 \text{ kg}$$

Auf das freie Balkenende wirkt außerdem die Einzelkraft:

$$P = 0{,}8 \,.\, 120 = 96 \text{ kg}$$

In Fig. 72 sind diese Belastungen zusammengestellt.

Der Stützenwiderstand A ergibt sich aus:

$$A \,.\, 520 - \frac{3{,}6 \,.\, 520^2}{2} + \frac{4{,}8 \,.\, 180^2}{2} + 96 \,.\, 180 = 0$$

zu:

$$A = 753 \text{ kg}$$

Das Moment in der Entfernung x vom Auflager A ist:

$$\mathfrak{M}_x = A\,x - \frac{p\,x^2}{2} = 753 \,.\, x - \frac{3{,}6 \,.\, x^2}{2}$$

Dasselbe wird = Null für:

$$x_0 = \frac{753}{1{,}8} = 418 \text{ cm}$$

folglich hat das Maximalmoment zwischen den Stützen die Größe:

$$\mathfrak{M} = \frac{3{,}6 \cdot 418^2}{8} = 78626$$

Das Moment über der Stütze B ist:

$$\mathfrak{M}_1 = \frac{4{,}8 \cdot 180^2}{2} + 96 \cdot 180 = 95040$$

Das Stützenmoment ist mithin das größte und der Balken zu berechnen nach:

$$k \cdot \frac{b\,h^2}{6} = 95040$$

Nimmt man $b : h = 5 : 7$, so wird für $k = 60$

$$60\,\frac{{}^5\!/_7\,h \cdot h^2}{6} = 60 \cdot \frac{5}{42}\,h^3 = 95040$$

$$h = \sqrt[3]{\frac{42 \cdot 95040}{5 \cdot 60}} = 23{,}4 \text{ cm}$$

$$b = \frac{5}{7}\,h = \backsim 17 \text{ cm}$$

Da für die übrigen nicht überkragenden Fußbodenbalken das größte Moment:

$$\mathfrak{M}_{max} = \frac{3{,}6 \cdot 520^2}{8} = 121680$$

also größer als $\mathfrak{M}_1$ ist, so folgt, daß des Balkons wegen die Balken nicht verstärkt zu werden brauchen, sondern eher etwas schwächer gehalten werden könnten, was aus praktischen Rücksichten indessen wohl nicht geschehen würde.

Aufgabe 45. Welche Länge kann ein an den Enden unterstütztes I-Eisen Nr. 20 haben, um sich selbst noch mit Sicherheit tragen zu können?

Auflösung. Nach Tabelle 2 § 6 ist das Widerstandsmoment:

$$W = 214$$

und das Gewicht für 1 cm Länge:

$$g = 0{,}261 \text{ kg}$$

folglich das Gesamtgewicht:

$$G = 0{,}261 \cdot l$$

Die Trägerlänge ergibt sich dann aus der Gleichung:

$$l = \frac{8\,k\,W}{0{,}261 \cdot l}$$

$$0{,}261 \cdot l^2 = 8 \cdot 1000 \cdot 214$$

$$l = \sqrt{\frac{8 \cdot 1000 \cdot 214}{0{,}261}} = 2561 \text{ cm} = 25{,}61 \text{ m}$$

§ 10.

Die statisch unbestimmten Träger.

Statisch unbestimmt nennt man solche Träger, bei denen es nicht möglich ist, die unbekannten Größen (d. s. die Momente und Stützenwiderstände) nur mit Hilfe der allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen (§ 4 S. 16) zu bestimmen. Zur Berechnung solcher Träger sind außer den allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen noch die Elastizitätsgleichungen Gl. 31) bis 34) S. 43 und 44 zu benutzen.

Die einfachsten Fälle der statisch unbestimmten Träger sollen in folgendem kurz besprochen werden.

1. Der gleichmäßig belastete Träger auf drei Stützen.

Es soll vorausgesetzt werden, daß die Stützen alle in gleicher Höhe liegen und daß die Felder A C und B C die gleiche Spannweite l haben (Fig. 73).

Da die Durchbiegung des Punktes A gegen den Punkt C = Null ist, so erhält man, wenn die gleichmäßige Belastung wieder mit p bezeichnet wird, mit Anwendung der Gl. 36) S. 46 und Gl. 40) S. 49:

$$0 = \frac{A\,l^3}{3\,E\,J} - \frac{p\,l^4}{8\,E\,J}$$

Da wegen des symmetrischen Belastungszustandes A = B sein muß, so folgt aus der letzten Gleichung:

$$\mathbf{A} = \mathbf{B} = \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{8}}\,\mathbf{p\,l} \qquad \text{. . . . . 64)}$$

Die Summe aller drei Stützenwiderstände muß gleich der Gesamtbelastung = 2 p l sein, danach wird:

$$\mathbf{C} = \frac{\mathbf{10}}{\mathbf{8}}\,\mathbf{p\,l} = \frac{\mathbf{5}}{\mathbf{8}}\,.\,\mathbf{2\,p\,l} \qquad \text{. . . . . . . 65)}$$

Der Druck auf die Mittelstütze beträgt 5/8 der Gesamtbelastung.

Nachdem die Stützenwiderstände mit Hilfe der Elastizitätsgleichungen gefunden sind, erfolgt die weitere Behandlung des Trägers in gewohnter Weise.

Das Moment in der Entfernung x vom Auflager ist:

$$\mathfrak{M}_x = A\,x - \frac{p\,x^2}{2} = \frac{3}{8}\,p\,l\,.\,x - \frac{p\,x^2}{2}$$

Fügt man das Glied $^1/_8\,p\,l\,x$ positiv und negativ hinzu, so erhält man:

$$\mathfrak{M}_x = \frac{p\,l\,x}{2} - \frac{p\,x^2}{2} - \frac{p\,l\,x}{8} = \frac{p}{2}\,x\,(l - x) - {}^1/_8\,p\,l\,x$$

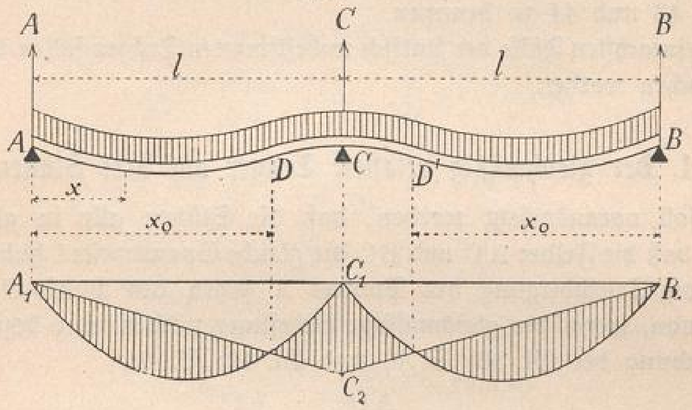
Das erste Glied der rechten Seite stimmt überein mit Gl. 52) S. 67, die graphische Darstellung desselben ist also eine Parabel mit der Pfeilhöhe $^1/_8\,p\,l^2$. Das zweite Glied ist proportional x, erreicht seinen größten

Wert $\frac{1}{8}\,p\,l^2$ für $x = l$ und läßt sich darstellen durch die Gerade $A_1 C_2$ bezw. $B_1 C_2$ (Fig. 73), wenn $C_1 C_2 = \frac{1}{8}\,p\,l^2$ aufgetragen wird.

Man erhält daher nach der letzten Gleichung graphisch die Momente $\mathfrak{M}$, wenn man von den Ordinaten der Parabel diejenigen der Geraden abzieht. Dadurch entsteht die in Fig. 73 schraffierte Momentenfläche.

Der Träger ist so durchgebogen, daß über der Mittelstütze die oberen Fasern, in den Feldern zwischen den Punkten A und D bezw. B und D' dagegen die unteren Fasern gezogen werden. In den Punkten D und D'

Fig. 73.



geht die eine Krümmung in die andere über, folglich ist in diesen Punkten das Moment = Null.

Bezeichnet man den Abstand der Punkte D und D' von den Auflagern mit x_0, so ergibt sich, indem man $\mathfrak{M}_x = 0$ setzt:

$$x_0 = \frac{3}{4}\,l$$

Diese Trägerstücke A D und B D' können daher als an den Enden frei aufliegende Träger von der Länge $\frac{3}{4}\,l$ angesehen werden. Das größte Moment für diese Trägerstücke ist:

$$\mathfrak{M} = p \cdot \frac{3}{4}\,l \cdot \frac{\frac{3}{4}\,l}{8} = \frac{9}{128}\,p\,l^2$$

Das Moment über der Mittelstütze erhält man, wenn man in dem Ausdruck $\mathfrak{M}_x$ für x den Wert l einsetzt.

Man findet:

$$\mathfrak{M}_c = -\frac{p\,l^2}{8}$$

Der absolute Wert von $\mathfrak{M}_c$ ist größer als $\mathfrak{M}$, der gefährliche Querschnitt findet also über der Stütze C statt, und der Träger ist zu berechnen nach der Gleichung:

$$\frac{\mathbf{p\,l^2}}{\mathbf{8}} = \mathbf{k\,W} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 66)$$

Diese Gleichung stimmt überein mit der Gleichung 54) S. 68.

Danach ist das Moment über der Mittelstütze des symmetrischen gleichmäßig belasteten Trägers von der Länge 2 l auf drei in gleicher Höhe liegenden Stützen gleich dem größten Momente des gleichmäßig belasteten, an beiden Enden frei aufliegenden Trägers von der Länge l.

Für die Berechnung des Trägerquerschnittes kann man daher annehmen, daß die Felder A C und B C durch je einen besonderen Träger überspannt sind.

Zur Berechnung der Stütze C selbst, die z. B. aus einer Säule oder einem Unterzug bestehen kann, ist diese Annahme dagegen unzulässig, denn der Druck, welchen zwei Einzelträger A C und B C auf die Stütze C übertragen, würde nur $= p\,l$ sein, während in Wirklichkeit der durchlaufende Träger A C B nach Gl. 65) einen größeren Druck auf die Mittelstütze ausübt.

Durch eine Aenderung in der Höhenlage der Stützen werden die Momente stark beeinflußt, und zwar wird durch eine Senkung der Mittelstütze das Moment $\mathfrak{M}_c$ verkleinert, die Momente $\mathfrak{M}$ vergrößert. Durch eine geringe Senkung der Mittelstütze läßt sich daher die Tragfähigkeit des Balkens vergrößern, wogegen eine Ueberhöhung der Mittelstütze nachteilig auf die Tragfähigkeit einwirkt. Da durch Zufälligkeiten, z. B. nachträgliches ungleichförmiges Setzen der Auflager, die Höhenlage derselben sich gegeneinander leicht etwas verändern kann und eine genaue Ueberwachung häufig schwer durchzuführen ist, so bleibt hauptsächlich aus diesem Grunde die Anwendung der Träger auf mehreren Stützen mit Recht beschränkt, obgleich bei diesen an Material etwas gespart werden kann.

2. Der durch Einzelkräfte belastete Träger auf drei Stützen.

Es wird auch hier wieder vorausgesetzt, daß die Stützen in gleicher Höhe liegen, und daß die Feldweiten A C und B C (Fig. 74) einander gleich sind. Die Einzelkräfte P sollen in den Feldmitten angreifen.

Die Durchbiegung des Punktes A gegen den Punkt C ist im ganzen = Null. Sie setzt sich zusammen aus einem Teile, hervorgebracht durch den Stützenwiderstand A und aus einem andern Teile in entgegengesetzter Richtung, welcher durch die Einzelkraft P erzeugt wird.

Der Angriffspunkt E der Einzelkraft P erfährt nach Gl. 36) S. 46 durch P allein die Durchbiegung:

$$f_1 = \frac{P\left(\frac{l}{2}\right)^3}{3\,E\,J} = \frac{P\,l^3}{24\,E\,J}$$

Der Punkt A liegt aber (Fig. 75) um das Maß:

$$f_2 = \frac{l}{2} \cdot \operatorname{tg} \alpha$$

tiefer als der Punkt E, und da nach Gl. 38) S. 47:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{P\left(\frac{l}{2}\right)^2}{2\,E\,J}$$

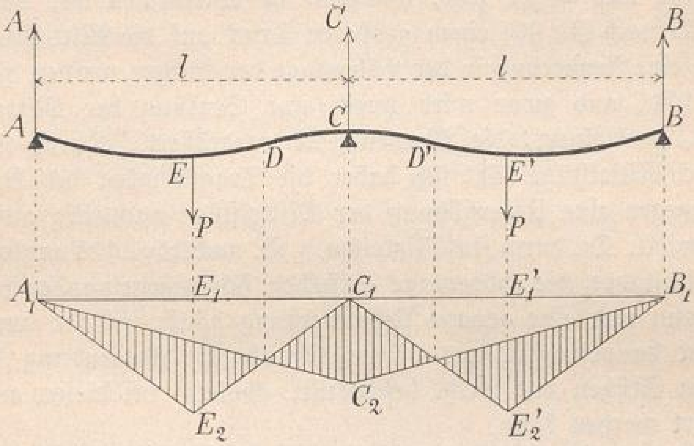
ist, so entsteht:

$$f_2 = \frac{l}{2} \cdot \frac{P\left(\frac{l}{2}\right)^2}{2\,E\,J} = \frac{P\,l^3}{16\,E\,J}$$

Die Gesamtdurchbiegung des Punktes A, hervorgebracht durch die Kraft P beträgt danach:

$$f_1 + f_2 = \frac{P\,l^3}{24\,E\,J} + \frac{P\,l^3}{16\,E\,J} = \frac{5}{48}\,\frac{P\,l^3}{E\,J}$$

Fig. 74.



Diese wird gerade wieder aufgehoben durch die von dem Stützenwiderstande A allein bewirkte Durchbiegung nach oben, welche nach Gl. 36) S. 46 die Größe hat:

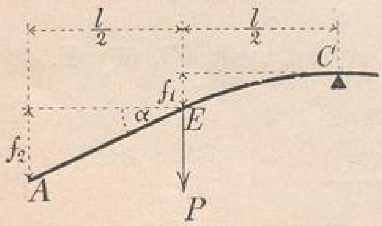
$$f = \frac{A\,l^3}{3\,E\,J}$$

Setzt man $f = f_1 + f_2$, so erhält man:

$$A = B = \frac{5}{16}\,P$$

$$C = \frac{22}{16}\,P$$

Fig. 75.



Das Moment im Angriffspunkte von P ist:

$$\mathfrak{M} = \frac{5}{16}\,P \cdot \frac{l}{2} = \frac{5}{32}\,P\,l$$

Das Moment über der Mittelstütze hat die Größe:

$$\mathfrak{M}_c = \frac{5}{16}\,P \cdot l - P \cdot \frac{l}{2} = -\,\frac{3}{16}\,P\,l$$

Der Träger ist daher zu berechnen nach:

$$\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{16}}\,\mathbf{P\,l = k\,W} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 67)$$

Für die Strecke von A bis E (Fig. 74) ist:

$$\mathfrak{M}_x = A\,x = \frac{5}{16}\,P\,x$$

oder:

$$\mathfrak{M}_x = \frac{P}{2}\,x - \frac{3}{16}\,P\,x$$

Für x = 0 wird:

$$\mathfrak{M} = 0$$

für $x = \frac{l}{2}$ wird:

$$\mathfrak{M} = \frac{P\,l}{4} - \frac{3}{32}\,P\,l$$

Für die Strecke von E bis C (Fig. 74) ist:

$$\mathfrak{M}_x = A\,x - P\left(x - \frac{l}{2}\right)$$

oder:

$$\mathfrak{M}_x = \frac{P}{2}\,(l - x) - \frac{3}{16}\,P\,x$$

Für $x = \frac{l}{2}$ wird (wie oben):

$$\mathfrak{M} = \frac{P\,l}{4} - \frac{3}{32}\,P\,l$$

Für x = l wird:

$$\mathfrak{M}_c = -\frac{3}{16}\,P\,l$$

hieraus ergibt sich die in Fig. 74 angedeutete graphische Darstellung der Momente. Darin ist:

$$E_1\,E_2 = E'_1\,E'_2 = \frac{P\,l}{4}$$

und:

$$C_1\,C_2 = \frac{3}{16}\,P\,l$$

Die Lage der Punkte D und D′ ist analytisch bestimmt durch die Bedingung:

$$\frac{P}{2}\,(l - x_0) - \frac{3}{16}\,P\,x_0 = 0$$

Man erhält:

$$x_0 = \frac{8}{11}\,l$$

3. Der an einem Ende wagerecht eingespannte, am anderen Ende frei aufliegende Träger.

a) Der Träger ist gleichmäßig auf seine ganze Länge belastet.

Liegt (Fig. 76) der Auflagerpunkt A mit der Einspannungsstelle C in gleicher Höhe, so ist dieser Träger anzusehen als die Hälfte des unter 1) besprochenen, gleichmäßig belasteten Trägers auf drei Stützen, welcher in der Mitte fest eingemauert gedacht ist.

Die Stützenwiderstände sind:

$$A = \frac{3}{8} p l \qquad C = \frac{5}{8} p l$$

Das größte Moment findet bei C statt und hat den Wert:

$$\mathfrak{M}_c = \frac{p l^2}{8}$$

die Berechnung des Trägers geschieht nach Gl. 66) S. 92.

Fig. 76.

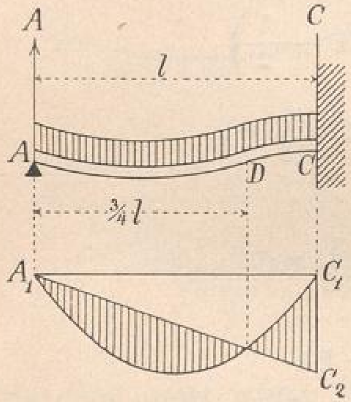
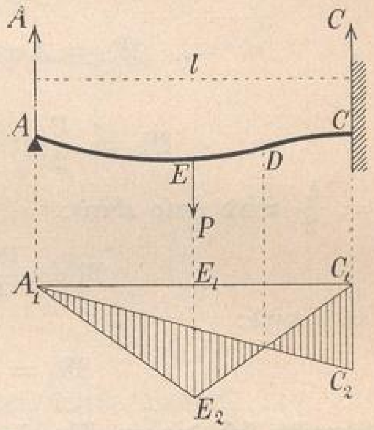


Fig. 77.



Die graphische Darstellung der in Fig. 76 schraffierten Momentfläche gibt ein deutliches Bild von der Veränderlichkeit des Momentes.

b) Der Träger ist in der Mitte durch die Einzelkraft P belastet.

Die Punkte A und C sollen auch hier wieder in gleicher Höhe liegen, so daß der Träger (Fig. 77) als die Hälfte des in Fig. 74 abgebildeten Trägers auf drei Stützen zu betrachten ist.

Die Stützenwiderstände sind:

$$A = \frac{5}{16} P \qquad C = \frac{11}{16} P$$

Das größte Moment bei C hat den Wert:

$$\mathfrak{M}_c = \frac{3}{16} P l$$

Die Berechnung des Trägers geschieht nach Gl. 67) S. 94. In der graphischen Darstellung der Momente ist:

$$E_1 E_2 = \frac{P l}{4} \text{ und } C_1 C_2 = \frac{3}{16} P l$$

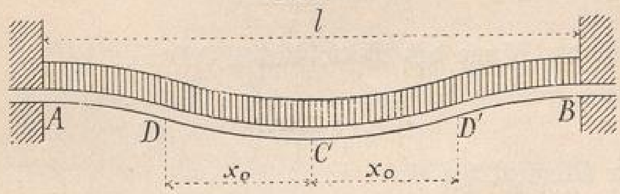
4. Der an beiden Enden wagerecht eingespannte, gleichmäßig belastete Träger.

Die Form der elastischen Linie bei diesem Träger (Fig. 78) zeigt, daß zwei Punkte D und D′ vorhanden sind, in denen das Moment = Null ist.

Die vorläufig noch unbekannte Entfernung dieser Punkte von der Mitte des Trägers sei x_0.

Das mittlere Trägerstück von der Länge $2x_0$ kann angesehen werden als ein an den Enden frei aufliegender Träger, welcher auf jeden Unter-

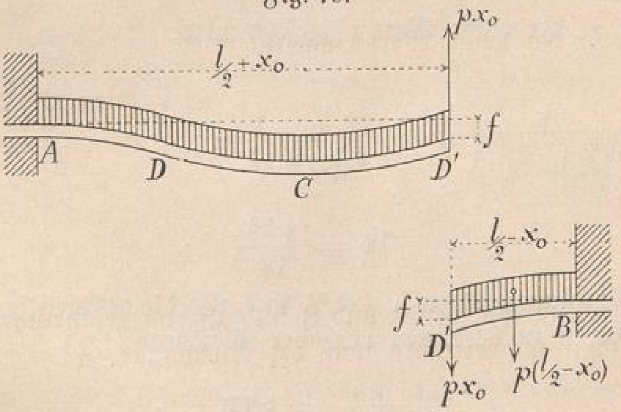
Fig. 78.



stützungspunkt den Auflagerdruck $p x_0$ überträgt. Die Seitenstücke AD und BD′ bilden daher gleichmäßig belastete Konsolträger, an deren freiem Ende die Einzelkraft $p x_0$ wirkt.

Der Gleichgewichtszustand wird nicht gestört, wenn man sich den Träger AB im Punkte D′ zerschnitten denkt und dafür für das linke Trägerstück AD′

Fig. 79.



die lotrecht aufwärts gerichtete Kraft $p x_0$, für das rechte Trägerstück die lotrecht abwärts gerichtete Kraft $p x_0$ als äußere Kraft hinzufügt (Fig. 79). Bezeichnet man die Durchbiegung des Punktes D′ gegen die Punkte A und B mit f, so ergibt sich nach Gl. 36) S. 46 und Gl. 40) S. 49 für das linke Trägerstück:

$$f = \frac{p\left(\frac{l}{2}+x_0\right)^4}{8EJ} - \frac{p x_0\left(\frac{l}{2}+x_0\right)^3}{3EJ}$$

und für das rechte Trägerstück:

$$f = \frac{p\left(\frac{l}{2} - x_0\right)^4}{8\,E\,J} + \frac{p\,x_0\left(\frac{l}{2} - x_0\right)^3}{3\,E\,J}$$

Setzt man diese beiden Werte von f einander gleich, so folgt:

$$3\left[\left(\frac{l}{2} + x_0\right)^4 - \left(\frac{l}{2} - x_0\right)^4\right] = 8\,x_0\left[\left(\frac{l}{2} + x_0\right)^3 + \left(\frac{l}{2} - x_0\right)^3\right]$$

Durch Auflösung dieser Gleichung ergibt sich:

$$x_0 = \frac{l}{2\sqrt{3}}$$

Danach ist die Länge des Mittelstückes D D′

$$2\,x_0 = \frac{l}{\sqrt{3}}$$

und das größte Moment bei C:

$$\mathfrak{M}_c = \frac{p\,\frac{l}{\sqrt{3}} \cdot \frac{l}{\sqrt{3}}}{8} = \frac{p\,l^2}{24}$$

Für das Moment bei B ergibt sich:

$$\mathfrak{M} = p\,x_0\left(\frac{l}{2} - x_0\right) + \frac{p\left(\frac{l}{2} - x_0\right)^2}{2}$$

und wenn für x_0 der obige Wert eingesetzt wird:

$$\mathfrak{M} = p\,\frac{l}{2\sqrt{3}}\left(\frac{l}{2} - \frac{l}{2\sqrt{3}}\right) + \frac{p\left(\frac{l}{2} - \frac{l}{2\sqrt{3}}\right)^2}{2}$$

woraus folgt:

$$\mathfrak{M} = \frac{p\,l^2}{12}$$

Die Einspannungsstellen A und B sind also die gefährlichen Querschnitte und der Träger ist zu berechnen nach der Gleichung:

$$\frac{\mathbf{p\,l^2}}{\mathbf{12}} = \mathbf{k\,W} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 68)$$

5. Der an beiden Enden wagerecht eingespannte, in der Mitte durch eine Einzelkraft P belastete Träger.

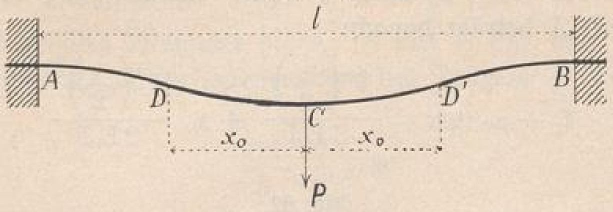
Die Entfernung x_0 der Punkte D und D′, in denen das Moment = Null ist, von der Mitte des Trägers erhält man in ähnlicher Weise wie unter 4).

Das mittlere Trägerstück D D′ von der Länge $2\,x_0$ kann betrachtet werden als ein an den Enden frei aufliegender Träger, welcher auf jeden

Unterstützungspunkt den Auflagerdruck $\frac{1}{2}$ P überträgt. Die Seitenstücke A D und B D′ bilden daher Konsolträger, an deren freiem Ende die Kraft $\frac{1}{2}$ P wirkt.

Denkt man sich den Träger A B (Fig. 80) im Punkte D′ zerschnitten, so hat man für das linke Trägerstück A D′ die lotrecht aufwärts gerichtete

Fig. 80.

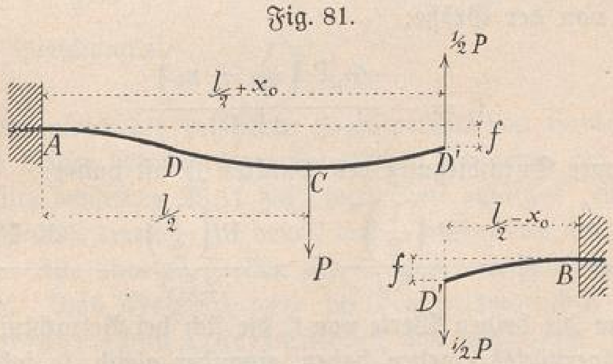


Kraft $\frac{1}{2}$ P, für das rechte Trägerstück B D′ die lotrecht abwärts gerichtete Kraft $\frac{1}{2}$ P als äußere Kraft hinzuzufügen (Fig. 81).

Die Durchbiegung f des Punktes D′ gegen die Punkte A und B ergibt sich dann für das rechte Trägerstück B D′ nach Gl. 36) S. 46 zu:

$$f = \frac{\frac{1}{2} P \left(\frac{l}{2} - x_0\right)^3}{3 E J}$$

Fig. 81.



Für das linke Trägerstück A D′ setzt sich die Durchbiegung f aus mehreren Teilen zusammen.

Die in C angreifende Kraft P (Fig. 82) erzeugt im Punkte C die Durchbiegung:

$$f_1 = \frac{P \left(\frac{l}{2}\right)^3}{3 E J}$$

Die Tangente des Winkels, den die Trägerachse in C mit der Wagerechten bildet, hat nach Gl. 38) S. 47 die Größe:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{P \left(\frac{l}{2}\right)^2}{2 E J}$$

folglich liegt der Punkt D' um:

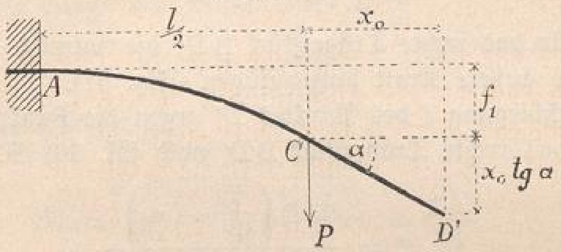
$$x_0 \operatorname{tg} \alpha = x_0 \frac{P\left(\frac{l}{2}\right)^2}{2EJ}$$

tiefer als der Punkt C.

Die von der Kraft P allein bewirkte Durchbiegung des Punktes D' gegen den Punkt A beträgt danach:

$$f_1 + x_0 \operatorname{tg} \alpha = \frac{P\left(\frac{l}{2}\right)^3}{3EJ} + x_0 \frac{P\left(\frac{l}{2}\right)^2}{2EJ}$$

Fig. 82.



Die in D' angreifende Kraft ½ P erzeugt nun aber eine Durchbiegung nach aufwärts von der Größe:

$$f_2 = -\frac{\frac{1}{2} P\left(\frac{l}{2} + x_0\right)^3}{3EJ}$$

Die gesamte Durchbiegung des Punktes D' ist daher:

$$f = f_1 + x_0 \operatorname{tg} \alpha + f_2 = \frac{P\left(\frac{l}{2}\right)^3}{3EJ} + x_0 \frac{P\left(\frac{l}{2}\right)^2}{2EJ} - \frac{\frac{1}{2} P\left(\frac{l}{2} + x_0\right)^3}{3EJ}$$

Setzt man die beiden Werte von f, die sich bei Betrachtung des rechten und linken Trägerstückes ergeben haben, einander gleich, so folgt:

$$\left(\frac{l}{2} - x_0\right)^3 + \left(\frac{l}{2} + x_0\right)^3 = 2\left(\frac{l}{2}\right)^3 + 3x_0\left(\frac{l}{2}\right)^2$$

woraus man durch Auflösung der Gleichung für x_0 erhält:

$$x_0 = \frac{l}{4}$$

Das mittlere Trägerstück D D' hat daher die Länge

$$2x_0 = \frac{l}{2}$$

und das Moment bei C ist:

$$\mathfrak{M}_c = \frac{P\left(\frac{l}{2}\right)}{4} = \frac{Pl}{8}$$

Die Konsolträger AD und BD' haben die Länge $\frac{l}{4}$ und sind am freien Ende durch die Kraft $\frac{P}{2}$ belastet. Die Momente bei A und B haben danach die Größe:

$$\mathfrak{M} = \frac{P}{2} \cdot \frac{l}{4} = \frac{Pl}{8}$$

Die drei größten Momente bei A, B und C sind also einander gleich und das erforderliche Widerstandsmoment des Trägers ergibt sich aus der Gleichung:

$$\frac{\mathbf{P\,l}}{\mathbf{8}} = \mathbf{k\,W} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 69)$$

In Bezug auf die eingespannten Träger verdient schließlich noch bemerkt zu werden, daß in der Praxis auf eine vollkommene Einspannung nicht leicht zu rechnen ist, und daß man sicherer geht, keine Rücksicht darauf zu nehmen und den Träger immer als Träger auf zwei Stützen anzusehen und zu berechnen.

§ 11.

Die Träger von gleichem Biegungswiderstand.

In der Gleichung:

$$\mathfrak{M} = k\,W$$

darf k höchstens gleich der zulässigen Inanspruchnahme werden.

Bei den bisher betrachteten prismatischen Trägern, bei denen W für alle Querschnitte denselben Wert hat, wird diese zulässige Inanspruchnahme nur in den Punkten erreicht, in denen das Moment der äußeren Kräfte ein Maximum ist. Alle anderen Stellen des Trägers erleiden eine geringere Inanspruchnahme. Das Material wird bei den prismatischen Trägern daher nur in den gefährlichen Querschnitten voll ausgenutzt.

Soll die Tragfähigkeit des Materials in allen Querschnitten voll ausgenutzt werden, so darf der Träger nur in den Teilen eine prismatische Form haben, in denen das Moment unveränderlich ist, wie z. B. bei dem Träger Fig. 37 S. 47 zwischen den Punkten A und C, in Fig. 51 S. 62 zwischen C und C' und in Fig. 52 S. 62 zwischen A und B. In allen übrigen Teilen muß sich der Querschnitt mit dem Momente ändern, und zwar muß der Träger eine solche Form erhalten, daß die Spannung der äußeren Faserschicht in allen Querschnitten gleich der zulässigen Inanspruchnahme wird.

Träger, welche dieser Bedingung entsprechen, nennt man Träger von gleichem Biegungswiderstand. Diese Träger besitzen außer dem Vorteil der Materialersparung vor den prismatischen Trägern auch noch den Vorteil, daß die Belastung durch das Eigengewicht geringer ausfällt.

Nach der obigen Erklärung muß bei einem Träger von gleichem Biegungswiderstand der Quotient:

$$\frac{\mathfrak{M}}{W} = \frac{\text{Kraftmoment}}{\text{Widerstandsmoment}}$$

für alle Querschnitte denselben unveränderlichen Wert haben. Bezeichnet man mit $\mathfrak{M}_x$ und W_x die Werte, welche die Größen $\mathfrak{M}$ und W für einen bestimmten Querschnitt des Trägers an einer Stelle in der Entfernung x vom Trägerende annehmen, so lautet die allgemeine Bedingungsgleichung für einen Träger von gleichem Biegungswiderstand:

$$\frac{\mathfrak{M}_x}{W_x} = \frac{\mathfrak{M}}{W}$$

oder:

$$\frac{\mathfrak{M}_x}{\mathfrak{M}} = \frac{W_x}{W} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 70)$$

Die Kraftmomente verhalten sich wie die Widerstandsmomente.

Sind für den kreisförmigen Querschnitt y und d die Durchmesser, welche den Widerstandsmomenten W_x und W entsprechen, ist also:

$$W_x = \frac{y^3 \pi}{32} \qquad W = \frac{d^3 \pi}{32}$$

so erhält man aus Gl. 70):

$$\frac{\mathfrak{M}_x}{\mathfrak{M}} = \frac{y^3}{d^3}$$

oder:

$$\frac{y}{d} = \sqrt[3]{\frac{\mathfrak{M}_x}{\mathfrak{M}}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 71)$$

Die Durchmesser verhalten sich wie die dritten Wurzeln aus den Momenten.

Bei einem an einem Ende fest eingespannten, am anderen Ende durch die Kraft P belasteten Träger (Fig. 83) kann man setzen:

$$\mathfrak{M}_x = P\,x \qquad \mathfrak{M} = P\,l$$

folglich wird:

$$\frac{y}{d} = \sqrt[3]{\frac{x}{l}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 72)$$

Nach Gl. 72) kann der Durchmesser y für jede beliebige Stelle x des Trägers bestimmt werden, nachdem der Durchmesser d aus der Gleichung:

$$k\,\frac{d^3 \pi}{32} = P\,l$$

berechnet ist.

Für einen Freiträger mit rechteckigem Querschnitt und der unveränderlichen Höhe h ist nach Fig. 84 für eine Stelle in der Entfernung x vom Angriffspunkte der Kraft P:

$$\mathfrak{M}_x = P\,x \qquad W_x = \frac{y\,h^2}{6}$$

und für die Einspannungsstelle:

$$\mathfrak{M} = P\,l \qquad W = \frac{b\,h^2}{6}$$

Fig. 83.

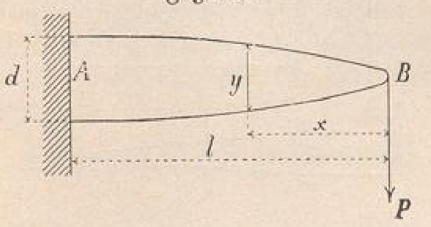
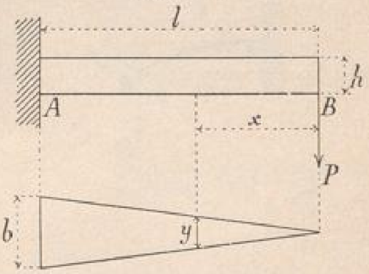


Fig. 84.



folglich nach Gl. 70):

$$\frac{x}{l} = \frac{y}{b} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 73)$$

Der Grundriß des Trägers bildet daher ein Dreieck.

Die Breite b an der Einspannungsstelle ergibt sich aus der Gleichung:

$$k\,\frac{b\,h^2}{6} = P\,l$$

Wird der Krümmungshalbmesser dieses Trägers an der Einspannungsstelle mit ϱ, an der Stelle x mit ϱ_x bezeichnet, so ist nach Gl. 29) S. 42:

$$\varrho = \frac{E\,J}{\mathfrak{M}} = \frac{E\,b\,h^3}{12\,P\,l}$$

$$\varrho_x = \frac{E\,J_x}{\mathfrak{M}_x} = \frac{E\,y\,h^3}{12\,P\,x}$$

folglich:

$$\frac{\varrho}{\varrho_x} = \frac{b}{y} \cdot \frac{x}{l}$$

Nach Gl. 73) ist aber die rechte Seite dieser Gleichung = 1, woraus folgt:

$$\varrho = \varrho_x$$

d. h. der Krümmungshalbmesser hat für alle Stellen des Trägers dieselbe Größe, der Träger ist also nach einer Kreislinie gekrümmt.

Ist r der Halbmesser dieser Kreislinie, so läßt sich die Durchbiegung f des Endpunktes B aus Fig. 85 folgendermaßen berechnen.

Es ist:

$$l^2 = r^2 - (r - f)^2$$

$$l^2 = 2\,r\,f - f^2$$

Wegen Kleinheit von f kann man das Glied f^2 vernachlässigen und erhält dann aus letzter Gleichung:

$$\mathbf{f} = \frac{\mathbf{l^2}}{\mathbf{2\,r}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 74)$$

Fig. 85.

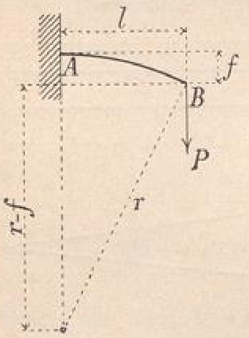
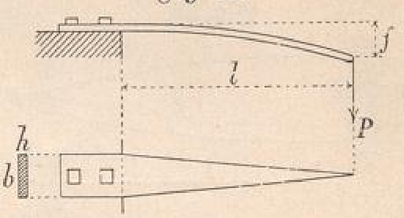


Fig. 86.



Nach Gl. 28) S. 42 ist aber:

$$\frac{1}{r} = \frac{k}{E\,e}$$

Setzt man diesen Wert in Gl. 74), so ergibt sich:

$$\mathbf{f} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\,\frac{\mathbf{k}}{\mathbf{E}}\,\frac{\mathbf{l^2}}{\mathbf{e}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 75)$$

Die Durchbiegung ist hier also 1,5mal so groß als unter sonst gleichen Umständen bei einem prismatischen Träger (vergl. Gl. 37) S. 46).

Führt man die ganze Trägerhöhe h ein, setzt also:

$$2\,e = h$$

und löst Gl. 75) für h auf, so erhält man:

$$\mathbf{h} = \frac{\mathbf{k}}{\mathbf{E}}\,\frac{\mathbf{l^2}}{\mathbf{f}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 76)$$

Nach dieser Gleichung kann z. B. die Stärke einer Dreiecksfeder berechnet werden, welche durch eine am Ende wirkende Kraft P die Durchbiegung f erfährt (Fig. 86).

Die erforderliche Breite b an der Befestigungsstelle ergibt sich dann aus der Gleichung:

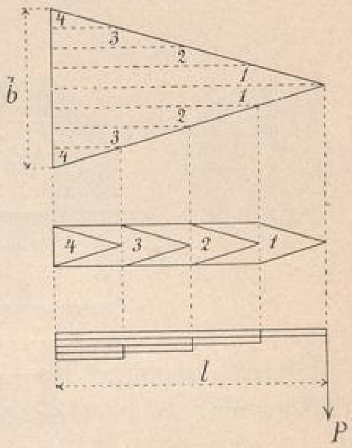
$$k \cdot \frac{b\,h^2}{6} = P\,l$$

zu:

$$\mathbf{b} = \frac{\mathbf{6\,P\,l}}{\mathbf{k\,h^2}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 77)$$

Fällt hiernach die Breite b größer aus als wünschenswert ist, so kann man die Feder, wie in Fig. 87 angedeutet ist, in einzelne Streifen von gleicher Breite zerlegen. Indem man sich dann je zwei mit gleichen Nummern versehene Streifen zu einem Stück wieder zusammengesetzt denkt, entsteht durch Uebereinanderlegen der einzelnen Stücke die sogen. Schichtfeder.

Fig. 87.



Aufgabe 46. Es sollen die Abmessungen h und b einer stählernen Feder von 50 cm Länge, welche sich unter Einwirkung einer Kraft $P = 256$ kg um 6 cm durchbiegt, berechnet werden. Die zulässige Inanspruchnahme für gehärteten Stahl sei dabei $k = 4000$ kg und der Elastizitätsmodul $E = 2\,000\,000$.

Auflösung. Nach Gl. 76) ist:

$$h = \frac{4000}{2\,000\,000} \cdot \frac{50^2}{6} = 0{,}8 \text{ cm}$$

Die Breite an der Einspannungsstelle ergibt sich aus Gl. 77) zu:

$$b = \frac{6 \cdot 256 \cdot 50}{4000 \cdot 0{,}8^2} = 30 \text{ cm}$$

Statt der einfachen Dreieckfeder kann hier eine Schichtfeder ausgeführt werden, welche z. B. aus:

4 Blättern von je $7^1/_2$ cm Breite
oder 3 Blättern von je 10 cm Breite

bestehen kann.

Aufgabe 47. Die in Fig. 88 skizzierte, aus Gußeisen vorausgesetzte ungleichschenklige Achse sei belastet mit $Q = 16000$ kg. Die Schenkellängen (bis zu den Mitten der Zapfen gemessen) seien: $L_1 = 36$ cm; $L_2 = 60$ cm. Es sollen die Zapfendurchmesser d_1 und d_2 und der Durchmesser D der Achse an der Laststelle berechnet werden. Das Verhältnis von Zapfenlänge zu Zapfendurchmesser ist dabei zu 1,4 anzunehmen.

Auflösung.
Die Zapfendrücke werden nach Gl. 45) und 46) S. 59:

$$P_1 = \frac{Q \cdot L_2}{L_1 + L_2} = \frac{16000 \cdot 60}{36 + 60} = 10000 \text{ kg}$$

$$P_2 = \frac{Q \cdot L_1}{L_1 + L_2} = \frac{16000 \cdot 36}{36 + 60} = 6000 \text{ kg}$$

Der Zapfendurchmesser d_1 ergibt sich aus:

$$P_1 \cdot \frac{l_1}{2} = k \frac{d_1^3 \pi}{32} = \infty\, 0{,}1 \cdot k\, d_1^3$$

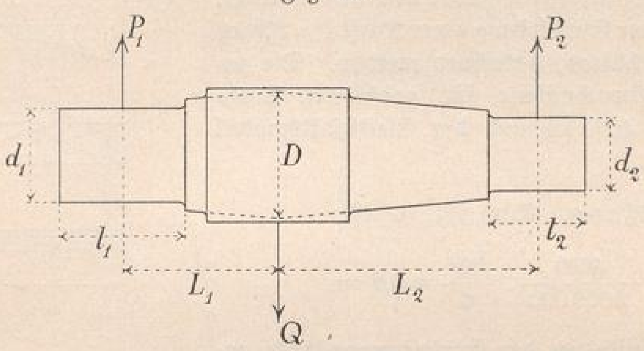
Wenn hierin $l_1 = 1{,}4\ d_1$ eingesetzt und die Gleichung für d_1 aufgelöst wird, erhält man:

$$d_1 = \sqrt{\frac{7}{k} P_1}$$

Ebenso wird:

$$d_2 = \sqrt{\frac{7}{k} P_2}$$

Fig. 88.



Für die zulässige Inanspruchnahme k, die beständig zwischen einem größten positiven und einem größten negativen Werte wechselt, ist die Tabelle III S. 5 (Biegung) maßgebend. Danach ist für Gußeisen k = 150 kg/qcm zu setzen, so daß man erhält:

$$d_1 = \sqrt{\frac{7 . P_1}{150}} = \sqrt{\frac{7 . 10000}{150}} = 21{,}6 \text{ cm}$$

$$d_2 = \sqrt{\frac{7 . P_2}{150}} = \sqrt{\frac{7 . 6000}{150}} = 16{,}7 \text{ cm}$$

Die Zapfenlängen werden:

$$l_1 = 1{,}4 . 21{,}6 = \infty\ 30 \text{ cm}$$
$$l_2 = 1{,}4 . 16{,}7 = \infty\ 23 \text{ cm}$$

Der Durchmesser D ergibt sich nach Gl. 71) S. 102 aus:

$$\frac{D}{d_1} = \sqrt[3]{\frac{P_1 L_1}{P_1 . {}^1/_2\, l_1}} = \sqrt[3]{\frac{2 L_1}{l_1}}$$

zu:

$$D = d_1 \sqrt[3]{\frac{2 L_1}{l_1}} = 21{,}6 \sqrt[3]{\frac{2 . 36}{30}} = \infty\ 29 \text{ cm}$$

Ebenso nach derselben Gleichung aus:

$$\frac{D}{d_2} = \sqrt[3]{\frac{P_2 L_2}{P_2 . {}^1/_2\, l_2}} = \sqrt[3]{\frac{2 L_2}{l_2}}$$

zu:

$$D = d_2 \sqrt[3]{\frac{2 L_2}{l_2}} = 16{,}7 \sqrt[3]{\frac{2 . 60}{23}} = \infty\ 29 \text{ cm}$$

Wenn die Achse als Hohlguß mit ringförmigem Querschnitt ausgeführt wird, so muß dieser dasselbe Widerstandsmoment besitzen als der volle Querschnitt der massiven Achse an derselben Stelle.

Wird für den vollen Querschnitt der Durchmesser mit D_0 und werden für den Ringquerschnitt an derselben Stelle die Durchmesser außen und innen mit D und d bezeichnet (Fig. 89), so muß sein:

$$\frac{D_0^3 \pi}{32} = \frac{(D^4 - d^4)\pi}{32\,D}$$

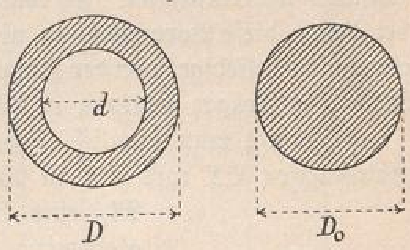
oder:

$$D_0^3 = \frac{D^4 - d^4}{D} = D^3\left[1 - \left(\frac{d}{D}\right)^4\right]$$

daraus:

$$\frac{\mathbf{D}}{\mathbf{D}_0} = \frac{1}{\sqrt[3]{1 - \left(\frac{\mathbf{d}}{\mathbf{D}}\right)^4}} \quad . \quad 78)$$

Fig. 89.



Gewöhnlich wird für das Verhältnis d : D ein bestimmter Wert angenommen und für diesen nach der letzten Gleichung D berechnet. Man erhält folgende Tabelle:

für $\frac{d}{D}$ =	0,4	0,5	0,6	0,65	0,7	0,75	0,8
wird $\frac{D}{D_0}$ =	1,01	1,03	1,05	1,07	1,1	1,14	1,2

Nimmt man z. B. bei der obigen Aufgabe für die (hohlen) Zapfen das Verhältnis der Durchmesser = 0,6 an, so werden nach der letzten Tabelle die äußeren Zapfendurchmesser:

$$d_1' = 1{,}05 \,.\, d_1 = 1{,}05 \,.\, 21{,}6 = 22{,}7 \text{ cm}$$
$$d_2' = 1{,}05 \,.\, d_2 = 1{,}05 \,.\, 16{,}7 = 17{,}5 \text{ cm}$$

Die inneren Zapfendurchmesser:

$$d_1'' = 0{,}6 \,.\, d_1' = 0{,}6 \,.\, 22{,}7 = 13{,}6 \text{ cm}$$
$$d_2'' = 0{,}6 \,.\, d_2' = 0{,}6 \,.\, 17{,}5 = 10{,}5 \text{ cm}$$

folglich die Wandstärken:

$$\delta_1 = \frac{d_1' - d_1''}{2} = \frac{22{,}7 - 13{,}6}{2} = \sim 4{,}6 \text{ cm}$$

$$\delta_2 = \frac{d_2' - d_2''}{2} = \frac{17{,}5 - 10{,}5}{2} = 3{,}5 \text{ cm}$$

Nimmt man ferner für die (hohle) Achse an der Laststelle das Verhältnis der Durchmesser = 0,7 an, so wird nach der Tabelle der äußere Durchmesser:

$$D' = 1{,}1 \,.\, D = 1{,}1 \,.\, 29 = 32 \text{ cm}$$

folglich der innere Durchmesser:

$$D'' = 0{,}7 \,.\, D' = 0{,}7 \,.\, 32 = 22{,}4 \text{ cm}$$

und die Wandstärke:

$$\delta = \frac{D' - D''}{2} = \frac{32 - 22{,}4}{2} = 4{,}8 \text{ cm}$$

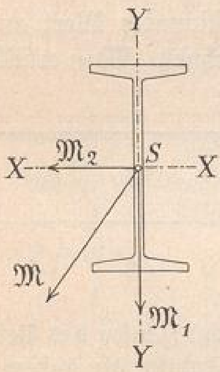
§ 12.

Die auf Doppelbiegung beanspruchten Träger.

Bisher wurde bei den belasteten Trägern stets vorausgesetzt, daß die Kraftebene, also auch die Momentenebene mit einer Hauptachse des Trägerquerschnittes übereinstimmt. Es kommen nun aber im Hochbau häufig Träger vor, bei denen diese Voraussetzung nicht zutrifft, bei denen vielmehr die Momentebene eine beliebige, von der Hauptachse des Querschnittes abweichende Richtung hat. Die Träger erfahren in diesem Falle eine Doppelbiegung.

Zerlegt man nämlich (Fig. 90) das Moment $\mathfrak{M}$ nach der Richtung der Hauptachsen YY und XX in die Seitenmomente $\mathfrak{M}_1$ und $\mathfrak{M}_2$, so wird durch $\mathfrak{M}_1$ eine Biegung des Trägers in der Y-Ebene und gleichzeitig durch $\mathfrak{M}_2$ eine Biegung in der X-Ebene hervorgerufen.

Fig. 90.



Das Moment $\mathfrak{M}_1$ für sich erzeugt die Randspannung:

$$k_1 = \frac{\mathfrak{M}_1}{W_x}$$

Das Moment $\mathfrak{M}_2$ für sich die Randspannung:

$$k_2 = \frac{\mathfrak{M}_2}{W_y}$$

Durch gleichzeitige Wirkung von $\mathfrak{M}_1$ und $\mathfrak{M}_2$ entsteht als größte überhaupt auftretende Spannung:

$$k = k_1 + k_2 = \frac{\mathfrak{M}_1}{W_x} + \frac{\mathfrak{M}_2}{W_y}$$

k darf dabei nicht größer als die zulässige Inanspruchnahme werden.

Aus der letzten Gleichung folgt:

$$k = \frac{1}{W_x}\left(\mathfrak{M}_1 + \frac{W_x}{W_y}\mathfrak{M}_2\right)$$

oder wenn man das Verhältnis $W_x : W_y$ kurz mit c bezeichnet:

$$\mathbf{W_x = \frac{\mathfrak{M}_1 + c\,\mathfrak{M}_2}{k}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 79)$$

Man setze nach Prof. R. Land*) für ein schätzungsweise passendes Profil aus den Profiltabellen die zugehörige Verhältniszahl c ein, bestimme nach Gl. 79) den Wert W_x und setze die zum nächstpassenden Profil gehörige Verhältniszahl c von neuem in Gl. 79), um den genaueren, mindestens erforderlichen Wert W_x zu erhalten. Mittelwerte für die erste Schätzung sind:

c = 8 für I-Profile
c = 6 für [-Profile

*) Siehe Zeitschr. d. V. d. J. 1895 S. 293.

Die genauen Werte von $c = W_x : W_y$ für die I-, [-, und Z-Profile sind in folgenden Tabellen aufgeführt:

1. I-Eisen.

Nr.	c =	Nr.	c =	Nr.	c =
8	6,50	19	8,20	30	9,07
9	6,80	20	8,26	32	9,23
10	7,01	21	8,31	34	9,40
11	7,23	22	8,34	36	9,53
12	7,38	23	8,50	38	9,67
13	7,57	24	8,50	40	9,76
14	7,65	25	8,54	$42^1/_2$	9,89
15	7,83	26	8,72	45	10,1
16	7,92	27	8,76	$47^1/_2$	10,1
17	8,02	28	8,91	50	10,3
18	8,10	29	8,99	55	10,3

2. [-Eisen.

Nr.	c =	Nr.	c =	Nr.	c =
3	1,59	12	5,48	22	7,28
4	2,31	14	5,85	24	7,57
5	2,82	16	6,32	26	7,76
$6^1/_2$	3,50	18	6,73	28	7,88
8	4,16	20	7,09	30	7,90
10	4,84				

3. Z-Eisen.

Nr.	c =	Nr.	c =	Nr.	c =
3	1,05	8	2,7	16	4,3
4	1,45	10	3,2	18	4,6
5	1,76	12	3,6	20	4,8
6	2,10	14	4,0		

Für den rechteckigen Querschnitt*) mit der Breite b und der Höhe h ist:

$$c = \frac{W_x}{W_y} = \frac{^1/_6\, b\, h^2}{^1/_6\, h\, b^2} = \frac{h}{b}$$

Daraus: $b = \frac{h}{c}$ und folglich $W_x = \frac{h^3}{6\,c}$

*) Vergl. R. Land, „Profilbestimmung von rechteckigen Balkenquerschnitten bei schiefer Belastung" in Zeitschr. d. V. d. I. 1899 S. 239.

Setzt man diesen Wert in Gl. 79) ein, so ergibt sich für die Seite h der Ausdruck:

$$\mathbf{h^3 = \frac{6\,c}{k}\,(\mathfrak{M}_1 + c\,\mathfrak{M}_2)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 80)$$

Wird, wie es vielfach geschieht, das Seitenverhältnis $c = h : b$ von vornherein angenommen, so ergibt sich h unmittelbar aus Gl. 80) und danach auch $b = h : c$.

Will man dagegen die bei staatlichen Bauten durch Erlaß des preußischen Ministeriums der öffentlichen Arbeiten vorgeschriebenen Normalprofile für Bauhölzer*) benutzen, so setze man für c einen vorläufigen Mittelwert ein. Dabei kann man bei den von der Quadratform am meisten abweichenden Querschnitten (beim Quadrat ist $c = 1$) etwa annehmen:

für starke Querschnitte (von $^{18}/_{24}$ cm ab): $c = 1{,}3$

für mittelstarke Querschnitte ($^{14}/_{20}$ und $^{16}/_{22}$ cm): $c = 1{,}4$.

Nötigenfalls wiederholt man die kurze Rechnung, wenn für den vorläufig ermittelten Querschnitt der angenommene c-Wert wesentlich von dem nunmehr genauer festzustellenden abweicht.

Die Abmessungen der Normalprofile in cm für Bauhölzer nebst den zugehörigen c-Werten sind in folgender Tabelle aufgeführt.

Höhe h =	Breite b =	c =	Höhe h =	Breite b =	c =	Höhe h =	Breite b =	c =
8	8	1,00	18	14	1,29	24	18	1,33
10	8	1,25		16	1,125		20	1,20
	10	1,00		18	1,00		24	1,00
12	10	1,20	20	14	1,43	26	20	1,30
	12	1,00		16	1,25		24	1,08
14	10	1,40		18	1,11		26	1,00
	12	1,17		20	1,00	28	22	1,27
	14	1,00	22	16	1,375		26	1,08
16	12	1,33		18	1,22		28	1,00
	14	1,14		20	1,10	30	24	1,25
	16	1,00					28	1,07

Aufgabe 48. Eine Decke ist aus I-Eisen und zwischen gespannten $^1/_2$ Stein (0,12 m) starken Backsteinkappen mit $^1/_{10}$ Stich ausgeführt.

Die Spannweite der Träger beträgt: $l = 3{,}7$ m

Die Entfernung der Träger beträgt: $b = 1{,}2$ m

Die Verkehrsbelastung ist angenommen zu: $p = 185$ kg/qm

*) Centralbl. d. Bauverw. 1898 S. 373.

Es sollen die Deckenträger berechnet werden unter der Annahme, daß ein anschließendes Feld die volle Verkehrsbelastung aufzunehmen hat, das andere nur durch das Eigengewicht belastet ist (Fig. 91).

Auflösung. Das Gewicht einer halben Kappe beträgt (bei $\gamma = 1600$ kg) für 1 m Tiefe angenähert:

$$G_1 = 0{,}6 \,.\, 0{,}12 \,.\, 1600 = 115 \text{ kg}$$

Dazu für Schlackenauffüllung und Fußboden ($\gamma_1 = 850$) bei 0,1 m mittlerer Stärke:

$$G_2 = 0{,}6 \,.\, 0{,}1 \,.\, 850 = 51 \text{ kg}$$

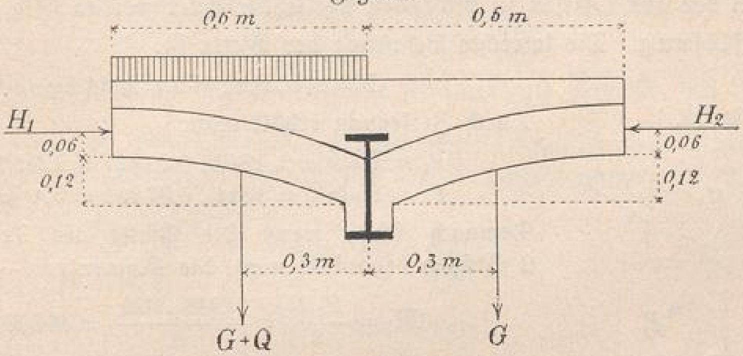
Zusammen:

$$G = 115 + 51 = 166 \text{ kg}$$

Verkehrsbelastung:

$$Q = 0{,}6 \,.\, 185 = 111 \text{ kg}$$

Fig. 91.



Nimmt man an, daß die Angriffspunkte der Lasten um 0,3 m von der Trägerachse entfernt sind, und daß die Horizontalschübe H_1 und H_2 der Gewölbekappen in der Mitte der Scheitelfuge angreifen (was streng genommen nicht ganz zutreffend ist), so erhält man:

$$H_1 = \frac{(G + Q)\, 0{,}3}{0{,}06 + 0{,}12} = \frac{(166 + 111)\, 0{,}3}{0{,}18} = 462 \text{ kg}$$

$$H_2 = \frac{G \,.\, 0{,}3}{0{,}06 + 0{,}12} = \frac{166 \,.\, 0{,}3}{0{,}18} = 277 \text{ kg}$$

Danach hat der Träger einen wagrechten Schub für 1 m Länge aufzunehmen von der Größe:

$$H = H_1 - H_2 = 462 - 277 = 185 \text{ kg}$$

Die lotrechte Belastung für 1 m Länge beträgt:

$$P = 2\, G + Q = 2 \,.\, 166 + 111 = 443 \text{ kg}$$

Hieraus ergeben sich die Momente:

$$\mathfrak{M}_1 = \frac{3{,}7\, P \,.\, \mathfrak{l}}{8} = \frac{3{,}7 \,.\, 443 \,.\, 370}{8} = 75808$$

$$\mathfrak{M}_2 = \frac{3{,}7\, H \,.\, \mathfrak{l}}{8} = \frac{3{,}7 \,.\, 185 \,.\, 370}{8} = 31658$$

Nach Gl. 79) S. 108 ist dann (bei $k = 1000$), wenn vorläufig $c = 8$ angenommen wird:

$$W_x = \frac{75808 + 8 \,.\, 31658}{1000} = 329$$

Das nächstliegende Profil ist (nach der Tabelle S. 29) Nr. 24 mit $W_x = 353$. Für dieses ist genau:

$$c = \frac{W_x}{W_y} = 8,5$$

folglich wird:

$$W_x = \frac{75\,808 + 8,5 \,.\, 31\,658}{1000} = 345$$

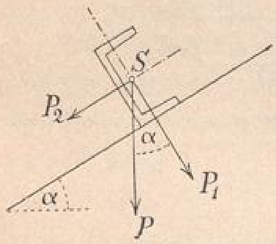
d. h. I-Eisen Nr. 24 genügt als Trägerquerschnitt.

Aufgabe 49. Bei einem eisernen Dache sei die wagerechte Entfernung der Pfetten = 2,4 m, die Binderentfernung b = 3,2 m. Der Neigungswinkel der Dachfläche ist angenommen zu $\alpha = 21^0\,50'$ entsprechend $\mathrm{tg}\,\alpha = 0,4 = 1 : 2,5$). Die lotrechte Belastung für 1 qm Grundrißfläche betrage p = 175 kg. Es soll das erforderliche Profil der aus ⊏-Eisen zu bildenden Pfette berechnet werden (Fig. 92).

Auflösung. Die lotrechte Belastung der Pfette ist:

$$P = 2,4 \,.\, 3,2 \,.\, 175 = 1344 \text{ kg}$$

Fig. 92.



Durch Zerlegung erhält man:

$$P_1 = P \cos \alpha = 1344 \,.\, 0,92827 = 1248 \text{ kg}$$
$$P_2 = P \sin \alpha = 1344 \,.\, 0,37191 = 500 \text{ kg}$$

Demnach sind, wenn die Pfette als Träger auf 2 Stützen behandelt wird, die Momente:

$$\mathfrak{M}_1 = \frac{P_1\, b}{8} = \frac{1248 \,.\, 320}{8} = 49\,920$$

$$\mathfrak{M}_2 = \frac{P_2\, b}{8} = \frac{500 \,.\, 320}{8} = 20\,000$$

Nach Gl. 79) S. 108 ist (bei k = 1000) und vorläufiger Annahme von c = 6:

$$W_x = \frac{49\,920 + 6 \,.\, 20\,000}{1000} = 170$$

Das nächstliegende Profil ist (nach Tabelle 1 S. 28) Nr. 20 mit W = 191. Für dieses ist genau c = 7,09, folglich würde bei Beibehaltung des Profiles Nr. 20 die Inanspruchnahme betragen:

$$k = \frac{49\,920 + 7,09 \,.\, 20\,000}{191} = 1004 \text{ kg|qcm}$$

§ 13.

Widerstand gegen Abscherung.

Der Widerstand gegen Abscherung tritt dann auf, wenn die äußeren Kräfte einen Teil des Körpers von dem anderen in einer Fläche abzuschieben oder abzuscheren streben. Dieser Widerstand ist verhältnisgleich der abzuscherenden Fläche.

Ist daher P die auf die Abscherung wirkende Kraft, F die abzuscherende

Fläche und t die dabei auftretende innere Spannung, so ist unter der Annahme, daß sich die Kraft gleichmäßig über die Querschnittsfläche verteilt:

$$\mathbf{P} = \mathbf{F} . \mathbf{t} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; 81)$$

Soll der Körper dem Abscheren mit Sicherheit widerstehen, so darf die **Schubspannung** t eine gewisse zulässige Grenze nicht überschreiten, und zwar kann man für Metalle annehmen:

$$\mathbf{t} = \frac{4}{5}\,\mathbf{k} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; 82)$$

wobei für k der **kleinere** Wert der nach der Tabelle § 1 S. 4 zulässigen Inanspruchnahme gegen Zug oder Druck einzusetzen ist.

Beim Holz kann man parallel zur Faserrichtung annehmen:

für Tannenholz $t = 4{,}5$ kg
für Kiefernholz $t = 6$ kg
für Eichenholz $t = 8$ kg

In der Richtung rechtwinklig zur Stammachse gilt Gl. 82).

Aufgabe 50. Wie groß muß der Durchmesser d eines schmiedeeisernen Bolzens sein, welcher eine Schubkraft von 6000 kg mit Sicherheit aufnehmen soll?

Auflösung. Da hier:

$$k = {}^4/_5 \,.\, 1000 = 800 \text{ kg}$$

einzusetzen ist, so wird:

$$\frac{d^2 \pi}{4} \,.\, 800 = 6000$$

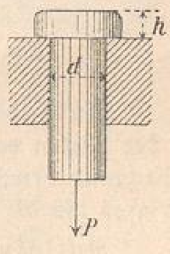
$$d = \sqrt{\frac{4 \,.\, 6000}{3{,}14 \,.\, 800}} = 3{,}1 \text{ cm}$$

Aufgabe 51. Ein schmiedeeiserner Bolzen (Fig. 93) soll durch eine in der Achsenrichtung wirkende Kraft P = 8000 kg belastet sein. Wie groß muß der Durchmesser d und wie groß die Kopfhöhe h ausgeführt werden?

Auflösung. Der Durchmesser d ergibt sich aus der Gleichung:

$$\frac{d^2 \pi}{4} \,.\, k = P$$

Fig. 93.



zu:

$$d = \sqrt{\frac{4\,P}{\pi\,k}} = \sqrt{\frac{4 \,.\, 8000}{3{,}14 \,.\, 1000}} = 3{,}2 \text{ cm}$$

Die abzuscherende Fläche des Kopfes ist:

$$F = d\,\pi\,h$$

folglich:

$$d\,\pi\,h \,.\, {}^4/_5\,k = P$$

$$h = \frac{P}{d\,\pi\,{}^4/_5\,k} = \frac{8000}{3{,}2 \,.\, 3{,}14 \,.\, 800} = 1 \text{ cm}$$

Aufgabe 52. Eine Blechtafel von $\delta = 1{,}2$ cm Stärke soll mit Nietlöchern von d = 2,5 cm Durchmesser versehen werden. Wie groß ist die zum Durchstoßen der Löcher erforderliche Kraft P, wenn man die Inanspruchnahme, bei welcher der Bruch erfolgt, = 4000 kg annimmt?

Auflösung. Die abzuscherende Fläche ist:

$$F = d \,.\, \pi \,.\, \delta = 2{,}5 \,.\, 3{,}14 \,.\, 1{,}2 = 9{,}42 \text{ qcm}$$

folglich:

$$P = 9{,}42 \,.\, 4000 = 37\,680 \text{ kg}$$

Aufgabe 53. Welcher Schubkraft kann ein Nagel aus Eichenholz von 2,6 cm Durchmesser mit Sicherheit widerstehen?

Auflösung. Die abzuscherende Fläche ist:

$$F = \frac{2{,}6^2 \,.\, 3{,}14}{4} = 5{,}31 \text{ qcm}$$

für:

$$t = {}^4/_5 \,.\, 80 = 64 \text{ kg}$$

wird dann:

$$P = 5{,}31 \,.\, 64 = 340 \text{ kg}$$

Aufgabe 54. Auf den Balken eines Hängewerkes wird durch die versatzte Strebe eine wagerechte Schubkraft H = 2484 kg ausgeübt (Fig. 94). Die Breite b von Balken und Strebe sei = 18 cm. Wie groß muß das Maß a angenommen werden, wenn der Balken aus Kiefernholz vorausgesetzt wird?

Fig. 94.

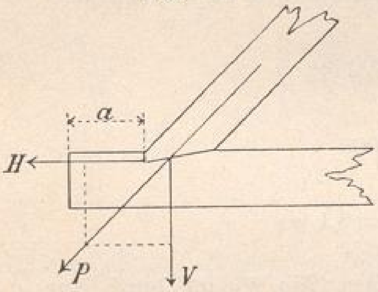
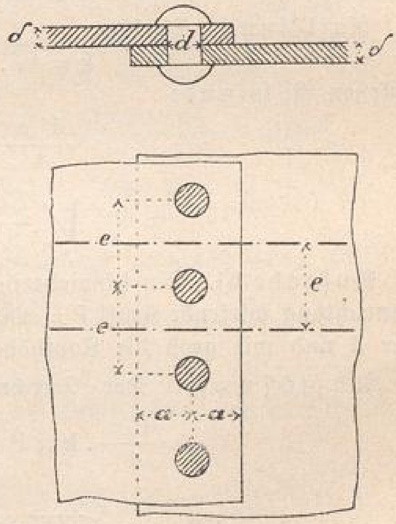


Fig. 95.



Auflösung. Die abzuscherende Fläche ist:

$$F = a \,.\, b = a \,.\, 18$$

für:

$t = 6$ kg (parallel zur Faserrichtung)

wird dann:

$$a \,.\, 18 \,.\, 6 = 2484$$

$$a = \frac{2484}{18 \,.\, 6} = 23 \text{ cm}$$

Aufgabe 55. Bei einer einfachen Vernietung (Fig. 95) soll die Entfernung e der Nieten voneinander und das Maß a, d. i. die Entfernung von Nietmitte bis Blechrand berechnet werden unter der Annahme, daß der Nietdurchmesser doppelt so groß als die Blechstärke ($d = 2\,\delta$) gewählt wird.

Auflösung. Eine Abscherung der Niete darf nicht eher eintreten als ein Zerreißen des Bleches zwischen den Nieten.

Denkt man sich also einen Streifen von der Breite der Nietteilung e herausgeschnitten, so ist für diesen:

$$\frac{d^2\,\pi}{4} \,.\, \frac{4}{5} k_{\text{Niet}} = (e - d)\,\delta\, k_{\text{Blech}}$$

Da für die Niete, welche starke Formänderung ertragen müssen, ein weit besseres Eisen verwendet wird, als für das Blech, so darf man annehmen:

$$\tfrac{4}{5}\, k_{\text{Niet}} = k_{\text{Blech}}$$

wodurch aus der letzten Gleichung, wenn darin noch $\delta = \tfrac{1}{2}\, d$ gesetzt wird, folgt:

$$\frac{d^2 \pi}{4} = (e - d) \frac{d}{2}$$

$$e = \left(1 + \frac{3{,}14}{2}\right) d$$

dafür genügend genau:

$$\mathbf{e = 2{,}5\, d}$$

Ferner darf eine Abscherung der Niete nicht eher eintreten als ein Herausschieben oder Aufstauchen des Bleches vor den Nieten; daher ist für einen Streifen von der Breite e:

$$\frac{d^2 \pi}{4} \cdot \frac{4}{5}\, k_{\text{Niet}} = 2 \left(a - \frac{d}{2}\right) \delta\, \frac{4}{5}\, k_{\text{Blech}}$$

Setzt man wieder:

$$\tfrac{4}{5}\, k_{\text{Niet}} = k_{\text{Blech}}$$

und:

$$\delta = \tfrac{1}{2}\, d$$

so folgt:

$$\frac{d^2 \pi}{4} = 2 \left(a - \frac{d}{2}\right) \frac{d}{2}\, \frac{4}{5}$$

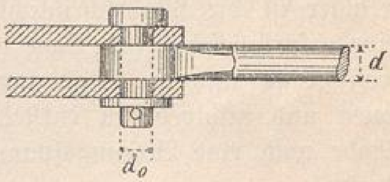
$$a = \left(\frac{5 \,.\, 3{,}14}{16} + \frac{1}{2}\right) d$$

dafür genügend genau:

$$\mathbf{a = 1{,}5\, d}$$

Aufgabe 56. Die schmiedeeiserne Zugstange eines Dachbinders sei mit $P = 10\,000$ kg belastet und soll mittels eines Stahlbolzens mit zwei Knotenblechen verbunden werden (Fig. 96). Wie groß ist der Durchmesser d der Zugstange, und wie groß der Durchmesser d_0 des Bolzens auszuführen?

Fig. 96.



Auflösung. Der Durchmesser der Zugstange ergibt sich (bei $k = 1000$ kg) aus der Gleichung:

$$\frac{d^2 \pi}{4} \,.\, 1000 = 10\,000$$

zu:

$$d = \sqrt{\frac{4 \,.\, 10000}{3{,}14 \,.\, 1000}} = \infty\ 3{,}6 \text{ cm}$$

Wird das Auge der Stange in derselben Breite ausgeführt, so kann der Bolzen angesehen werden als ein an beiden Enden eingespannter Träger von 3,6 cm Länge, welcher durch 10000 kg gleichmäßig belastet ist. Die Berechnung desselben geschieht nach Gl. 68) S. 98, worin:

$$p\, l = 10\,000$$

$$W = \frac{d_0^{\,3} \pi}{32}$$

einzusetzen ist.

$$10000 \cdot \frac{3{,}6}{12} = k \cdot \frac{d_o^3 \pi}{32}$$

für $k = 1200$ wird dann:

$$d_o = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 10000 \cdot 3{,}6}{12 \cdot 1200 \cdot 3{,}14}} = \infty\ 3{,}0 \text{ cm}$$

Wollte man den Bolzen auf Abscherung berechnen, so würde man zu geringe Abmessungen erhalten, wie sich aus folgender Rechnung ergibt.

Da der Bolzen zweischnittig ist, d. h. da hier zwei Querschnitte abzuscheren sind, so ist:

$$2\,\frac{d_o^2 \pi}{4} \cdot \frac{4}{5} \cdot 1200 = 10000$$

$$\frac{d_o^2 \pi}{4} = \frac{10000}{2 \cdot {}^4/_5 \cdot 1200} = 5{,}2 \text{ qcm}$$

$$d_o = 2{,}6 \text{ cm}$$

Das Beispiel zeigt, daß bei Bolzenverbindungen wie in Fig. 96 die Beanspruchung auf Biegung häufig größer ausfallen kann als auf Abscherung. In zweifelhaften Fällen thut man gut, beide Rechnungen, auf Biegung und auf Abscherung durchzuführen.

§ 14.

Widerstand gegen Zerknicken.

Ist ein gerader prismatischer Stab vom Querschnitt F mit seinen Enden A und B gelenkartig befestigt und wirkt, während der untere Endpunkt unterstützt ist, an dem oberen Endpunkte und in der Achsenrichtung des Stabes eine Kraft P, so erzeugt diese nach § 2 eine Druckspannung:

$$k = \frac{P}{F}$$

Je länger der Stab im Verhältnis zu seinem Querschnitt ist, desto geringer ist die Wahrscheinlichkeit, daß er unter Einwirkung der Kraft P seine ursprünglich gerade Lage beibehält: es wird vielmehr, wenn die Kraft P groß genug und der Stab lang genug ist, eine seitliche Ausbiegung eintreten und infolgedessen entsteht dann außer der Druckspannung k in dem Stabe noch eine Biegungsspannung, hervorgebracht durch das Moment der Kraft P.

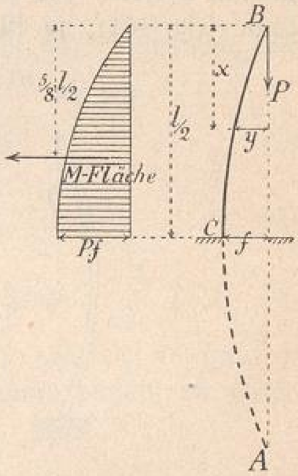
Bei allmählichem Anwachsen der Kraft P wird schließlich durch gleichzeitige Wirkung der Druckspannung k und der Biegungsspannung eine Zerstörung eintreten, der Stab wird zerknickt werden.

Lange dünne Stäbe werden daher eher zerknickt als zerdrückt und müssen außer auf Druck auch noch auf Zerknicken berechnet werden.

Der Stab AB (Fig. 97) erfahre durch die Kraft P in der Mitte die Durchbiegung f und befinde sich im Gleichgewicht. Wir denken uns den unteren Teil desselben bis zu der Mitte C fest eingespannt.

Es läßt sich nachweisen, daß die Biegungskurve CB eine Sinuslinie ist; statt derselben soll hier annäherungsweise die Parabel angenommen werden. Die Durchbiegung y der Stabachse in der Entfernung x vom Punkte B ist zugleich der Hebelarm der Kraft P, so daß das Moment an dieser Stelle $= Py$ ist. Das Moment bei C, wo die Durchbiegung f auftritt, ist $= Pf$. Die Momente sind also P-mal so groß als die Durchbiegungen, und die Momentenfläche wird danach begrenzt durch eine Parabel mit der Scheitelordinate Pf.

Fig. 97.



Da der Abstand des Schwerpunktes der Parabelfläche vom oberen Ende $= \frac{5}{8} \cdot \frac{l}{2} = \frac{5\,l}{16}$ beträgt*), so ist nach Gl. 34) S. 44:

$$f = \frac{1}{EJ}\left(\frac{2}{3}\,Pf \cdot \frac{l}{2}\right) \cdot \frac{5\,l}{16} = \frac{5}{48}\,\frac{Pfl^2}{EJ}$$

Daraus ergibt sich für die Kraft P der Ausdruck**):

$$\mathbf{P} = \frac{48}{5}\,\frac{EJ}{l^2} = 9{,}6\,\frac{EJ}{l^2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 83)$$

Wird als Biegungskurve die Sinuslinie zu Grunde gelegt (wie es streng genommen sein sollte), so erhält man die genaue Eulersche Formel:

$$\mathbf{P} = \frac{\pi^2}{l^2}\,EJ = 9{,}87\,\frac{EJ}{l^2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 84)$$

Von dieser Kraft P, welche gerade hinreichen würde, ein Zerknicken des Stabes herbeizuführen, ist, um Sicherheit zu haben, daß ein Zerknicken **nicht** stattfindet, für auszuführende Konstruktionen nur ein gewisser Teil, allgemein $^1/_n$ P zu nehmen.

Danach ist die praktische Tragkraft gegen Zerknicken eines an beiden Enden gelenkartig befestigten Stabes von der Länge l (Fig. 98):

$$\mathbf{P} = \frac{1}{n}\,\frac{\pi^2}{l^2}\,EJ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 85)$$

Ist das untere Ende des Stabes fest eingespannt, das obere Ende gelenkartig befestigt (Fig. 99), so ist die Tragkraft:

$$\mathbf{P} = \frac{2}{n}\,\frac{\pi^2}{l^2}\,EJ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 86)$$

---

*) Siehe Lauenstein, Mechanik. 5. Aufl. S. 51, Gl. 45).

**) Vergl. R. Land in Zeitschr. d. V. d. J. 1896 S. 99 und Könen im Centralblatt der Bauverw. 1884 S. 545.

Sind beide Enden des Stabes fest eingespannt (Fig. 100), so wird:

$$\mathbf{P} = \frac{4}{\mathbf{n}} \frac{\pi^2}{\mathfrak{l}^2} \mathbf{E J} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 87)$$

Ist ein Stab von der Länge $\mathfrak{l}$ mit seinem unteren Ende fest eingespannt, während das obere Ende vollständig frei ist, also seitlich ausweichen kann (Fig. 101), so ist derselbe anzusehen als die Hälfte eines an beiden

Fig. 98.

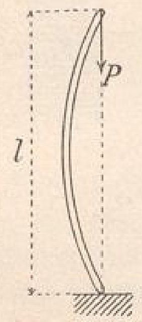


Fig. 99.

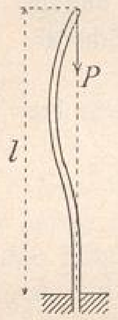


Fig. 100.

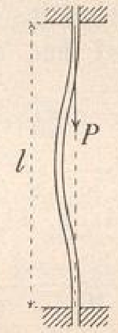
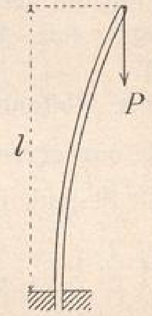


Fig. 101.



Enden gelenkartig befestigten Stabes (Fig. 97) von der Länge $2\mathfrak{l}$. Man erhält daher für diesen Fall die Tragkraft P, indem man in Gl. 85): $2\mathfrak{l}$ für $\mathfrak{l}$ einsetzt, zu:

$$\mathbf{P} = \frac{{}^1/_4}{\mathbf{n}} \frac{\pi^2}{\mathfrak{l}^2} \mathbf{E J} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 88)$$

Die Formeln 85) bis 88) lassen sich zusammenfassen in die allgemeine Zerknickungsformel:

$$\mathbf{P} = \frac{\mathbf{c}}{\mathbf{n}} \frac{\pi^2}{\mathfrak{l}^2} \mathbf{E J} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 89)$$

worin für c die in Fig. 102 Fall I bis IV angegebenen, durch die Art der Einspannung bedingten Werte einzusetzen sind.

Der Zahlenwert n ist abhängig vom Materiale, und zwar kann man annehmen:

für Schmiedeeisen . . $n = 5$ *)
für Gußeisen . . . . $n = 7{,}5$
für Holz und Stein . $n = 12{,}5$

Der Einspannungsfall IV kommt bei Säulen nur sehr selten vor, da diese an ihrem oberen Ende mit den übrigen Konstruktionsteilen meist so verbunden sind, daß ein Ausweichen aus der ursprünglichen Stabachse ausgeschlossen ist.

*) Im Maschinenbau pflegt man bei solchen beweglichen Teilen, die auf Zerknicken zu berechnen sind (wie z. B. Kolbenstangen und Schubstangen), die Sicherheit größer zu nehmen und geht wohl bei Schmiedeeisen bis zu $n = 20$ und sogar weiter. Man nimmt dabei n um so größer an, je langsamer die Maschine geht.

Der Fall II liegt vor, wenn die Säule einen fest angegossenen oder angeschraubten, mit Verstärkungsrippen versehenen, genügend großen Fuß besitzt.

Am meisten kommt wohl der Fall I vor, nach welchem auch dann zu rechnen ist, wenn die Säule auf einen für sich hergestellten, breiteren Fuß aufgesetzt ist. Es genügt dann aber, die freie Länge der Säule von Oberkante Fuß aus zu bemessen.

Für den Einspannungsfall I erhält man aus Gl. 89), wenn man, wie es bei praktischen Berechnungen üblich ist, $\pi^2 = 10$ setzt:

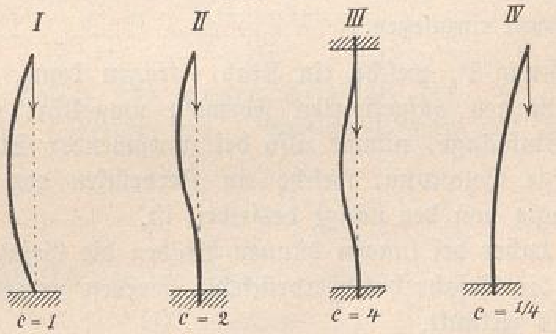
$$\mathbf{P} = 2\,\frac{\mathbf{EJ}}{\mathbf{l}^2} \text{ für Schmiedeeisen} \quad \ldots\ldots \quad 90)$$

$$\mathbf{P} = \frac{4}{3}\,\frac{\mathbf{EJ}}{\mathbf{l}^2} \text{ für Gußeisen} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 91)$$

$$\mathbf{P} = \frac{4}{5}\,\frac{\mathbf{EJ}}{\mathbf{l}^2} \text{ für Holz und Stein} \quad \ldots\ldots \quad 92)$$

Ist, was meistens der Fall, die Belastung P gegeben, so sind die Gleichungen 89) bezw. 90) bis 92) für J aufzulösen und danach die Quer-

Fig. 102.



schnittsabmessungen der Säule zu berechnen, wobei zu beachten ist, daß bei freistehenden Säulen J immer das kleinste Trägheitsmoment der Querschnittsfläche bedeutet.

Bei den aus mehreren Teilen zusammengesetzten Querschnitten der schmiedeeisernen Stützen ist es erforderlich, dieselben in solchen Entfernungen l_1 miteinander zu verbinden, daß gegen ein Einknicken der einzelnen Teile zwischen den Stützpunkten genügende Sicherheit vorhanden ist.

Bedeutet z die Anzahl der den Gesamtquerschnitt bildenden Eisen, i das kleinste Trägheitsmoment eines solchen Eisens, so wird nach Gl. 90):

$$\frac{P}{z} = 2\,\frac{E\,i}{l_1^2}$$

woraus sich für die größte zulässige Entfernung l_1 der Verbindungspunkte voneinander der Wert ergibt:

$$\mathbf{l_1} = \sqrt{\frac{\mathbf{z}}{\mathbf{P}}\,\mathbf{2\,E\,i}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 93)$$

Zur Berechnung der Tragfähigkeit der Säulen wird außer der Gleichung 89) (von Euler) häufig auch noch die folgende für den Einspannungsfall I geltende Erfahrungsformel von Schwarz benutzt:

$$P = kF \frac{J}{J + \alpha F l^2}$$

worin k die zulässige Druckbeanspruchung des Materials und F die Querschnittsfläche der Säule bedeutet, die Größen P J l aber die bereits oben angegebene Bedeutung haben.

Der Zahlenwert α ist vom Materiale abhängig; man kann als Mittelwerte annehmen:

$$\alpha = \frac{1}{10000} \text{ für Schmiedeeisen}$$

$$\alpha = \frac{1}{5000} \text{ „ Gußeisen}$$

$$\alpha = \frac{1}{6000} \text{ „ Holz}$$

Für den Einspannungsfall II ist: 0,7 l
„ „ „ III „ 0,5 l
„ „ „ IV „ 2 l

statt l in die Formel einzusetzen.

Die Belastung P, welche ein Stab ertragen kann, ohne zerknickt zu werden, ist nach den aufgeführten Formeln umgekehrt proportional dem Quadrate der Stablänge, nimmt also bei zunehmender Stablänge rasch ab, wogegen diejenige Belastung, welche ein Zerdrücken des Stabes bewirken würde, unabhängig von der Länge desselben ist.

Während daher bei langen dünnen Stäben die Gefahr des Zerknickens größer ist als die Gefahr des Zerdrückens, werden umgekehrt kurze Stäbe eher zerdrückt als zerknickt.

Bei einer gewissen Länge wird der Stab ebenso leicht zerdrückt als zerknickt. Diese Länge ergibt sich, wenn in die allgemeine Zerknickungsformel (Gl. 89) S. 118

$$P = k \cdot F$$

eingesetzt wird, zu:

$$l = \sqrt{\pi^2 \frac{c}{n} \frac{EJ}{kF}}$$

So z. B. wird für den Belastungsfall I und für Schmiedeeisen ($\pi^2 = 10$ gesetzt):

$$l = \sqrt{2 \frac{EJ}{kF}}$$

Für den vollen kreisförmigen Querschnitt mit dem Durchmesser d ist:

$$J = \frac{d^4 \pi}{64} \qquad F = \frac{d^2 \pi}{4}$$

also:

$$\frac{J}{F} = \frac{d^2}{16}$$

Nimmt man dann noch an:

$$E = 2000000$$
$$k = 1000$$

so erhält man:

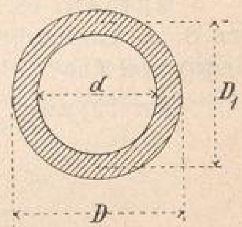
$$l = \sqrt{2 \frac{2000000}{1000} \cdot \frac{d^2}{16}} = 15{,}8 \,.\, d$$

Für $l < 15{,}8 \,.\, d$ braucht der Stab nur auf Druck berechnet zu werden, für $l > 15{,}8 \,.\, d$ ist die Berechnung auf Zerknicken maßgebend.

In derselben Weise kann die Untersuchung auch für andere Querschnitte durchgeführt werden.

Bei der ersten vorläufigen Berechnung der Säulen von ringförmigem Querschnitt ist es, wenn keine Tabellen der Trägheitsmomente zur Hand sind, genügend, statt des genauen Trägheitsmomentes einen bequemeren Annäherungsausdruck zu benutzen, der sich folgendermaßen ableiten läßt (Fig. 103):

Fig. 103.



$$J = \frac{(D^4 - d^4)\,\pi}{64}$$

$$J = \frac{(D^2 - d^2)\,\pi}{4} \cdot \frac{(D^2 + d^2)}{16}$$

Der erste Faktor der rechten Seite ist der Flächeninhalt des Querschnittes. Bezeichnet man mit D_1 den mittleren Durchmesser:

$$D_1 = \frac{D + d}{2}$$

und mit δ die Wandstärke der Säule, so wird:

$$\frac{(D^2 - d^2)\,\pi}{4} = D_1\,\pi\,\delta$$

Für den zweiten Faktor der rechten Seite kann man annähernd setzen:

$$\frac{D^2 + d^2}{16} = \frac{D_1{}^2}{8}$$

woraus dann folgt:

$$J = \frac{\pi}{8} D_1{}^3 \delta$$

dafür genügend genau:

$$\mathbf{J = 0{,}4\, D_1{}^3 \delta} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 94)$$

Nach dieser Gleichung kann der Durchmesser D_1 berechnet werden, wenn für δ ein bestimmter Wert angenommen wird. Für mittlere Verhältnisse kann man etwa annehmen:

$$\delta = 2 \text{ cm bis } 2{,}5 \text{ cm}$$

Aufgabe 57. Welche Belastung kann ein 3 m langer rechteckiger Pfosten aus Eichenholz ertragen, dessen Querschnittsseiten b = 16 cm und h = 18 cm sind, unter Annahme des Einspannungsfalles I (Fig. 102 S. 119)?

Auflösung. In Gl. 92) S. 119 ist einzusetzen:

$$E = 120\,000$$

$$l = 300$$

$$J = \frac{h \cdot b^3}{12} = \frac{18 \cdot 16^3}{12} = 6144$$

Es wird dann:

$$P = \frac{4}{5} \frac{120\,000 \cdot 6144}{300^2} = 6554 \text{ kg}$$

Da der Querschnitt der Säule:

$$F = 16 \cdot 18 = 288 \text{ qcm}$$

ist, so beträgt die Inanspruchnahme auf Druck:

$$k = \frac{P}{F} = \frac{6554}{288} = \infty\ 28 \text{ kg}$$

Aufgabe 58. Welche Belastung kann eine runde schmiedeeiserne Säule von 8 cm Durchmesser und 3,6 m Länge tragen, wenn beide Enden derselben fest eingespannt sind?

Auflösung. In Gl. 89) S. 118 ist zu setzen:

$$c = 4$$

$$n = 5$$

$$l = 360$$

$$E = 2\,000\,000$$

$$J = \frac{d^4 \pi}{64} = \frac{8^4 \cdot 3{,}14}{64} = 201$$

folglich wird ($\pi^2 = 10$ gesetzt):

$$P = \frac{4}{5} \cdot \frac{10 \cdot 2000000 \cdot 201}{360^2} = 24\,815 \text{ kg}$$

Die Tragfähigkeit auf Druck bei $k = 1000$ kg würde sein:

$$\frac{d^2 \pi}{4} \cdot k = 50{,}2655 \cdot 1000 = 50\,266 \text{ kg}$$

Aufgabe 59. Eine gußeiserne Säule von ringförmigem Querschnitt und 4,5 m Länge sei mit 30 000 kg belastet. Wie groß muß der äußere Durchmesser D der Säule genommen werden, wenn der Fuß derselben als fest eingespannt, der Kopf als geführt betrachtet werden kann, und die Wandstärke $\delta = 2$ cm gewählt wird?

Auflösung. Aus Gl. 89) folgt:

$$J = \frac{P\,l^2}{E} \frac{n}{c\,\pi^2} = \infty\ \frac{P\,l^2\,n}{10\,E\,c}$$

Hierin ist zu setzen:

$$n = 7{,}5$$

$$c = 2$$

$$P = 30000$$

$$l = 450$$

$$E = 1000000$$

Es wird dann:

$$J = \frac{30000 \cdot 450^2 \cdot 7{,}5}{10 \cdot 1000000 \cdot 2} = 2278$$

Der mittlere Durchmesser D_1 (siehe Fig. 103) ist aus Gl. 94) S. 121 zu bestimmen:

$$2278 = 0{,}4\, D_1{}^3 \,.\, 2$$

$$D_1 = \sqrt[3]{\frac{2278}{2\,.\,0{,}4}} = 14{,}2 \text{ cm}$$

Danach wird der äußere Durchmesser:

$$D = D_1 + \delta = 16{,}2 \text{ cm}$$

und der innere Durchmesser:

$$d = D_1 - \delta = 12{,}2 \text{ cm}$$

Die Querschnittsfläche der Säule ist:

$$F = \frac{(D^2 - d^2)\,\pi}{4} = 89{,}22 \text{ qcm}$$

folglich beträgt die Inanspruchnahme auf Druck:

$$k = \frac{30\,000}{89{,}22} = 336 \text{ kg}$$

Aufgabe 60. Eine hölzerne Strebe von 3,2 m Länge und quadratischem Querschnitt, welche einen Druck von 16000 kg aufzunehmen hat, soll unter Annahme des Einspannungsfalles I (Fig. 102 S. 119) berechnet werden.

Auflösung. Aus Gl. 92) S. 119 folgt:

$$J = \frac{5}{4} \,.\, \frac{P\,l^2}{E} = \frac{5}{4} \,.\, \frac{16000 \,.\, 320^2}{120\,000}$$

$$J = 17\,067$$

Wird die Seite des quadratischen Querschnittes mit a bezeichnet, so ist:

$$J = \frac{a^4}{12}$$

folglich:

$$17\,067 = \frac{a^4}{12}$$

$$a = \sqrt[4]{12 \,.\, 17\,067} = 21{,}3 \text{ cm}$$

Querschnitt: $a^2 = 453{,}7$

Inanspruchnahme auf Druck: $k = \frac{16\,000}{453{,}7} = 35$ kg

Aufgabe 61. Eine hohle gußeiserne runde Säule, 4,55 m lang, erfährt eine Belastung von 40000 kg. Welche Querschnittsabmessungen muß die Säule erhalten, wenn dieselbe am oberen und unteren Ende frei und in der ursprünglichen Achse geführt ist?

Auflösung. Nach Gl. 91) S. 119 ist:

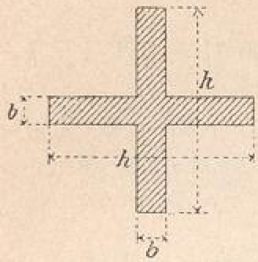
$$J = \frac{3}{4}\,\frac{P\,l^2}{E}$$

$$J = \frac{3}{4} \,.\, \frac{40000 \,.\, 455^2}{1\,000\,000} = 6211$$

Bei einer Wandstärke von 2 cm wird nach Tabelle 14 S. 38 der äußere Durchmesser

$$D = \backsim 22 \text{ cm}$$

Fig. 104.



Innerer Durchmesser: $d = 18$ cm

$$\text{Querschnitt: } \frac{(D^2 - d^2)\,\pi}{4} = 125{,}7 \text{ qcm}$$

$$\text{Inanspruchnahme auf Druck: } k = \frac{40\,000}{125{,}7} = 318 \text{ kg}$$

Aufgabe 62. Eine gußeiserne Strebe von kreuzförmigem Querschnitt (Fig. 104) und 2,5 m Länge sei mit $P = 15\,000$ kg belastet. Sie sei mittels Bolzenverbindung an die übrigen Konstruktionsteile angeschlossen, so daß der Einspannungsfall I (Fig. 102 S. 119) vorliegt. Welche Querschnittsabmessungen sind der Strebe zu geben?

Auflösung. Nimmt man an, daß die eine Rippe nur zur Aussteifung der andern dient, was zulässig ist, so ist zu setzen:

$$J = \frac{b\,h^3}{12}$$

Nach Gl. 91) S. 119 ist aber:

$$J = \frac{3}{4}\,\frac{P\,l^2}{E} = \frac{3}{4}\,\frac{15000\,.\,250^2}{1000000} = 703$$

folglich:

$$\frac{b\,h^3}{12} = 703$$

Wählt man:

$$b = 2 \text{ cm}$$

so wird:

$$h = \sqrt[3]{\frac{12\,.\,703}{2}} = \infty\ 16 \text{ cm}$$

Die Querschnittsfläche ist dann:

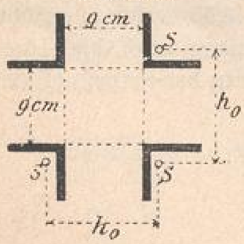
$$F = 16\,.\,2 + (16 - 2)\,2 = 60 \text{ qcm}$$

folglich die Inanspruchnahme auf Druck:

$$k = \frac{15000}{60} = 250 \text{ kg}$$

Aufgabe 63. Eine schmiedeeiserne Stütze von 5 m Länge sei mit 30000 kg belastet. Der Querschnitt soll aus 4 Winkeleisen zusammengesetzt sein und es sollen dabei die in Fig. 105 eingeschriebenen Maße eingehalten werden. Die Stütze sei am unteren Ende fest eingespannt, am oberen in der ursprünglichen Achse geführt. Welche Winkeleisen sind zu verwenden?

Fig. 105.



Auflösung. Setzt man in Gl. 89) S. 118:

$$n = 5$$
$$c = 2$$

so ergibt sich das erforderliche Trägheitsmoment zu:

$$J = \frac{5}{2}\,\frac{P\,l^2}{\pi^2\,E} = \infty\ \frac{5}{2}\,.\,\frac{30000\,.\,500^2}{10\,.\,2000000} = 937{,}5$$

Wird mit F die Querschnittsfläche eines Winkeleisens und mit h_0 der Abstand der Schwerpunkte bezeichnet, so ist:

$$J = 4\,F\,.\left(\frac{h_0}{2}\right)^2 = F\,.\,h_0^2$$

folglich:

$$F = \frac{J}{h_o^2} = \frac{937,5}{h_o^2}$$

Die Größe h_o wird abgeschätzt zu:

$$h_o = 12,2 \text{ cm}$$
$$h_o^2 = 149 \text{ qcm}$$

Danach:

$$F = \frac{937,5}{149} = 6,3 \text{ qcm}$$

Gewählt wird nach Tabelle 4 § 6 S. 31 das Winkeleisen:

$$5,5 \times 5,5 \times 0,6$$

mit:

$$F = 6,31 \text{ qcm}$$

Der Gesamtquerschnitt der Stütze beträgt dann:

$$4\,F = 25,24 \text{ qcm}$$

und die Inanspruchnahme auf Druck würde sein:

$$k = \frac{30\,000}{25,24} = 1188 \text{ kg}$$

Der Querschnitt würde bei einer zulässigen Inanspruchnahme von $k = 1000$ daher zu schwach sein und die Stütze ist in diesem Falle nicht auf Zerknicken, sondern auf Zerdrücken zu berechnen. Die erforderliche Querschnittsfläche ergibt sich aus:

$$4\,F = \frac{30\,000}{1000} = 30$$

zu:

$$F = 7,5 \text{ qcm}$$

Gewählt wird das Winkeleisen:

$$5,5 \times 5,5 \times 0,8$$

mit:

$$F = 8,23 \text{ qcm}$$

Das kleinste Trägheitsmoment dieses Winkels ist:

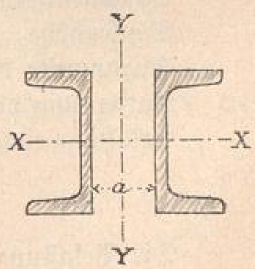
$$i = 9,35$$

folglich sind nach Gl. 93) S. 119 die Winkel untereinander zu verbinden in Abständen von höchstens der Größe:

$$l_1 = \sqrt{\frac{4\,.\,2\,.\,2\,000\,000\,.\,9,35}{30\,000}} = 71 \text{ cm}$$

d. h. es sind mindestens 6, besser 7 Verbindungen auszuführen.

Fig. 106.



Eine recht zweckmäßige Querschnittsform für schmiedeeiserne Säulen bilden zwei miteinander verbundene ⊏-Eisen, bei denen der Zwischenraum a so groß genommen wird, daß die Trägheitsmomente in Bezug auf die Achsen X X und Y Y einander gleich sind. (Fig. 106.)

Es ergeben sich dann folgende Werte für a:

Nr. des [-Eisens	$6^1/_2$	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30
a =	1,54	2,72	4,14	5,50	6,82	8,16	9,48	10,78	12,22	13,34	14,60	15,94	17,24

Aufgabe 64. Eine Säule aus zwei [-Eisen von 5,5 m Höhe ist belastet mit P = 36000 kg. Welches Profil ist zu wählen unter Voraussetzung des Einspannungsfalles I Fig. 102 S. 119?

Auflösung. Nach Gl. 90) S. 119 ist:

$$J = \frac{P\,l^2}{2\,E} = \frac{36000 \,.\, 550^2}{2 \,.\, 2000000} = 2722{,}5$$

Für jedes der beiden [-Eisen ist danach erforderlich:

$$J_x = \frac{J}{2} = 1361{,}25$$

Nach Tabelle 1 § 6 S. 28 genügt Nr. 18 mit:

$$J_x = 1354 \text{ und } F = 28 \text{ qcm}$$

Die Beanspruchung auf Druck beträgt:

$$k = \frac{36000}{2 \,.\, 28} = 643 \text{ kg}$$

Das kleinste Trägheitsmoment eines [-Eisens ist:

$$J_{min} = 114$$

Die beiden [-Eisen sind daher miteinander zu verbinden in Abständen von:

$$l_1 = \sqrt{\frac{2 \,.\, 2 \,.\, 2000000 \,.\, 114}{36000}} = 159 \text{ cm}$$

Danach sind erforderlich mindestens 3 Verbindungen.

Beispiel der Berechnung von Balken, Unterzügen und Säulen für ein einfaches zweistöckiges Gebäude. (Fig. 107.)

1. Oberer Stock. (Holzbalken und eiserner Unterzug.)

Es sollen folgende Angaben zu Grunde gelegt werden:

Säulenentfernung . . . . . . L = 480 cm
Säulenhöhe . . . . H = 500 cm
Spannweite der Balken . . . . l = 400 cm
Entfernung der Balken voneinander B = 60 cm
Belastung einschließlich Eigengewicht p = 500 kg für ein Quadratmeter.

a) Holzbalken.

Die Belastung eines Trägers ist:

$$P = 4 \,.\, 0{,}6 \,.\, 500 = 1200 \text{ kg}$$

folglich das größte Moment:

$$\mathfrak{M} = \frac{1200 \,.\, 400}{8} = 60000$$

Bei $k = 60$ kg wird:

$$W = \frac{60000}{60} = 1000 = \frac{b\,h^2}{6}$$

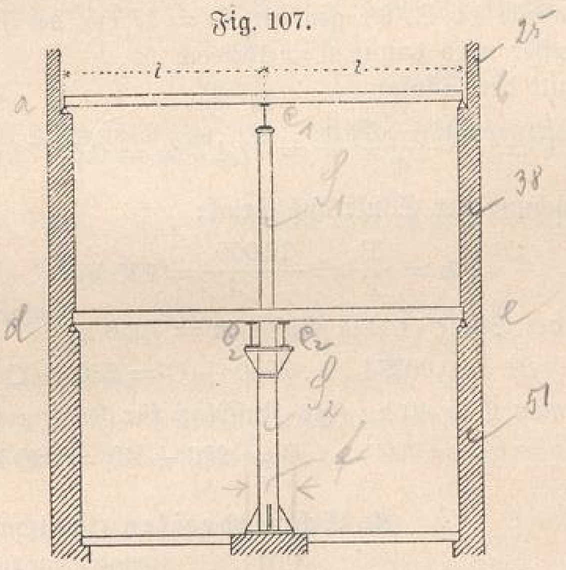
Nimmt man $b = \frac{3}{4}\,h$, so folgt:

$$\frac{3\,h^3}{4 \,.\, 6} = 1000$$

$$h = \sqrt[3]{\frac{4 \,.\, 6 \,.\, 1000}{3}} = \sqrt[3]{8000} = 20 \text{ cm}$$

$$b = \frac{3}{4}\,h = \frac{3}{4} \,.\, 20 = 15 \text{ cm}$$

Fig. 107.



b) Eiserner Unterzug.

Die Belastung ist, da die Balken als Träger auf drei Stützen $\frac{5}{8}$ ihrer Belastung auf den Unterzug übertragen:

$$P = \frac{5}{8} \,.\, L \,.\, 2\,l \,.\, p = \frac{5}{8} \,.\, 4{,}8 \,.\, 2 \,.\, 4 \,.\, 500 = 12000 \text{ kg}$$

Es genügt vollkommen, diese Belastung als gleichförmig verteilt anzunehmen; es wird dann:

$$\mathfrak{M} = \frac{12000 \,.\, 480}{8} = 720000$$

und für $k = 1000$ kg:

$$W = \frac{720000}{1000} = 720$$

Nach Tabelle 2 § 6 S. 29 ist erforderlich ein I-Eisen Nr. 32 mit $W_x = 781$.

Die Beanspruchung wird dann genau:

$$k = \frac{720\,000}{781} = 922 \text{ kg/qcm}$$

c) Säule.

Die Belastung der Säule ist gleich der des Unterzuges, also:

$$P = 12\,000 \text{ kg}$$

α) Gußeisen (ringförmiger Querschnitt).

$$J = \frac{3}{4}\,\frac{P\,H^2}{E} = \frac{3\,.\,12\,000\,.\,500^2}{4\,.\,1\,000\,000} = 2250$$

Nach Tabelle 14 S. 38 genügt: $D = 17$ cm bei $\delta = 1{,}6$ cm. Der innere Durchmesser wird dann: $d = 13{,}8$ cm.

Querschnitt der Säule:

$$F = \frac{(D^2 - d^2)\,\pi}{4} = 77{,}4 \text{ qcm} = 0{,}00774 \text{ qm}$$

Beanspruchung der Säule auf Druck:

$$k = \frac{P}{F} = \frac{12\,000}{77{,}4} = 155 \text{ kg}$$

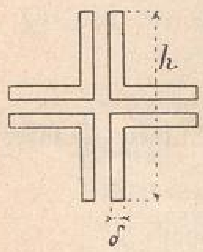
Gewicht der Säule (1 cbm Gußeisen = 7250 kg):

$$G = 0{,}00774\,.\,5\,.\,7250 + C = 280 + C$$

Rechnet man $C = 40$ kg (als Zuschlag für Kopf u. s. w.), so wird:

$$G = 280 + 40 = 320 \text{ kg}$$

Fig. 108.



β) Schmiedeeisen (Kreuzquerschnitt).

$$J = \frac{P\,H^2}{2\,E} = \frac{12\,000\,.\,500^2}{2\,.\,2\,000\,000} = 750$$

Zur vorläufigen Bestimmung der Abmessungen der erforderlichen Winkeleisen kann man statt des genauen Trägheitsmoments des Kreuzquerschnittes genügend genau setzen (Fig. 108):

$$J = \frac{2\,\delta\,h^3}{12}$$

Für $\delta = 1$ cm wird dann:

$$\frac{2\,.\,1\,.\,h^3}{12} = 750$$

$$h = \sqrt[3]{\frac{12\,.\,750}{2}} = 16{,}5 \text{ cm}$$

Danach genügen Winkel $7{,}5 \times 7{,}5 \times 1$ mit 1,5 cm Zwischenraum. Die Querschnittsfläche eines Winkels ist $f = 14{,}1$ qcm, folglich ist die Beanspruchung auf Druck:

$$k = \frac{P}{4f} = \frac{12\,000}{4 \cdot 14{,}1} = 213 \text{ kg}$$

Das Gewicht eines Winkels beträgt $g = 11$ kg für ein Meter Länge; danach berechnet sich das Gewicht der Säule zu:

$$G = 4 \cdot H \cdot g + C$$

$$G = 4 \cdot 5 \cdot 11 + C = 220 + C$$

$C = 30$ geschätzt gibt:

$$G = 220 + 30 = 250 \text{ kg}$$

Das kleinste Trägheitsmoment eines Winkels ist:

$$i = 29{,}8$$

folglich wird nach Gl. 93) S. 119, worin $z = 4$ einzusetzen ist:

$$l_1 = \sqrt{\frac{4 \cdot 2 \cdot 2\,000\,000 \cdot 29{,}8}{12\,000}} = 199 \text{ cm}$$

Es sind daher 2 Verbindungen der 4 Winkel untereinander erforderlich.

2. Unterer Stock. (Eiserne Balken und eiserner Unterzug.)

Die gegebenen Werte seien:

Säulenentfernung	$L = 480$ cm
Säulenhöhe	$H = 540$ cm
Spannweite der Balken	$l = 387$ cm
Entfernung der Balken voneinander	$B = 96$ cm
Belastung einschließlich Eigengewicht	$p = 800$ kg für ein Quadratmeter.

a) Eiserne Balken.

Belastung eines Balkens:

$$P = 3{,}87 \cdot 0{,}96 \cdot 800 = 2972 = \sim 3000 \text{ kg}$$

Erforderliches Widerstandsmoment:

$$W = \frac{3000 \cdot 387}{8 \cdot 1000} = 145$$

Gewählt: I-Eisen Nr. 18.

b) Eiserner Unterzug.

Belastung:

$$P = {}^5/_8 \cdot 4{,}8 \cdot 2 \cdot 3{,}87 \cdot 800 = 18576$$

Erforderliches Widerstandsmoment:

$$W = \frac{18576 \cdot 480}{8 \cdot 1000} = 1115$$

Gewählt: Zwei I-Eisen Nr. 29.

c) Säule.

Die Säule wird belastet durch den Unterzug mit 18576 kg; außerdem hat dieselbe die Belastung und das Eigengewicht der Säule des oberen Stockes aufzunehmen.

α) Gußeisen (ringförmiger Querschnitt).

$$P = 18576 + 12000 + 320 = 30896 \text{ kg}$$

Das erforderliche Trägheitsmoment ist:

$$J = \frac{3}{4} \frac{P H^2}{E} = \frac{3}{4} \frac{30896 \, . \, 540^2}{1000000} = 6757$$

Nach Tabelle 14 S. 38 genügt: $D = 22$ cm bei $\delta = 2{,}2$ cm
$d = 17{,}6$ cm

Querschnitt:

$$F = \frac{(D^2 - d^2)\,\pi}{4} = 137 \text{ qcm}$$

Beanspruchung auf Druck:

$$k = \frac{30896}{137} = 226 \text{ kg}$$

Gewicht:

$$G = 0{,}0137 \, . \, 5{,}4 \, . \, 7250 + C = 536 + C$$

$C = 64$ kg geschätzt gibt: $G = 600$ kg

β) Schmiedeeisen (Kreuzquerschnitt).

$$P = 18576 + 12000 + 250 = 30826 \text{ kg}$$

$$J = \frac{P H^2}{2 E} = \frac{30826 \, . \, 540^2}{2 \, . \, 2000000} = 2247$$

Für den Querschnitt Fig. 108 ist dann annähernd:

$$\frac{2 \delta h^3}{12} = 2247$$

und für $\delta = 1{,}2$ cm:

$$h = \sqrt[3]{\frac{12 \, . \, 2247}{2 \, . \, 1{,}2}} = 22{,}4 \text{ cm}$$

Danach sind erforderlich Winkel $10 \times 10 \times 1{,}2$ mit 2,4 cm Zwischenraum Querschnitt eines Winkels:

$$f = 22{,}7 \text{ qcm}$$

Beanspruchung auf Druck:

$$k = \frac{P}{4 f} = \frac{30826}{4 \, . \, 22{,}7} = 339 \text{ kg}$$

Gewicht eines Winkels:

$g = 17{,}7$ kg für ein Meter Länge

Gewicht der Säule:

$$G = 4 \, . \, 5{,}4 \, . \, 17{,}7 + C = 382 + C$$

$C = 58$ kg geschätzt gibt: $G = 382 + 58 = 440$ kg

Das kleinste Trägheitsmoment eines Winkels ist:

$$i = 86{,}2$$

folglich wird nach Gl. 93) S. 119 für $z = 4$:

$$l_1 = \sqrt{\frac{4\,.\,2\,.\,2\,000\,000\,.\,86{,}2}{30\,826}} = 212 \text{ cm}$$

Es sind daher zwei Verbindungen erforderlich.

d) Säulenfuß.

Nimmt man die zulässige Beanspruchung des Unterstützungsquaders zu $k = 18$ kg an, so ergibt sich die nötige Auflagerfläche der gußeisernen Säule zu:

$$F = \frac{30\,896 + 600}{18} = 1750 \text{ qcm}$$

Die Seite a des quadratischen Säulenfußes folgt dann aus:

$$F = a^2 - \frac{d^2\,\pi}{4}$$

$$1750 = a^2 - \frac{17{,}6^2\,.\,3{,}14}{4}$$

$$a = \sqrt{1993} = \infty\ 45 \text{ cm}$$

Für die schmiedeeiserne Säule wird:

$$F = a^2 = \frac{30\,826 + 440}{18} = 1737 \text{ qcm}$$

$$a = \sqrt{1737} = 42 \text{ cm}$$

§ 15.

Widerstand gegen Verdrehung.

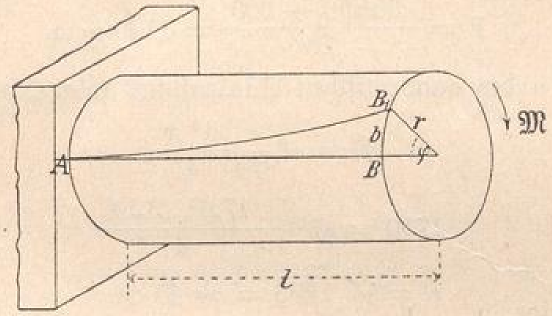
Ein an einem Ende fest eingespannter prismatischer Stab wird durch ein am anderen freien Ende wirkendes Kräftepaar, dessen Moment $\mathfrak{M}$ sei, auf Verdrehungsfestigkeit in Anspruch genommen, indem das Kräftepaar den Stab um seine Längsachse zu verdrehen oder zu verwinden strebt.

Der Stab soll hier als voller Kreiscylinder vorausgesetzt werden und es soll dabei angenommen werden, daß das Kräftepaar in einer Ebene wirkt, welche rechtwinklig zu der Achse des Cylinders steht.

Denkt man sich den Cylinder zusammengesetzt aus einer sehr großen Anzahl sehr dünner, unter sich gleicher Scheiben, so wird bei einer, durch das Kräftepaar bewirkten, eintretenden Verwindung jede einzelne Scheibe sich, durch eine geringe Drehung um ihren Mittelpunkt, gegen die nebenliegende Scheibe verschieben. Als innere Widerstände treten daher hier Schubspannungen auf, welche, solange die Elastizitätsgrenze nicht überschritten wird, dem äußeren Kräftepaare das Gleichgewicht halten und die einzelnen Scheiben in ihre ursprüngliche Lage zurückzudrehen streben.

Man kann sich auch hier wieder vorstellen, es bestehe der Cylinder aus einzelnen, der Achse parallelen Fasern. Diese kommen bei einer eintretenden Verdrehung in eine solche Lage, daß jede einzelne Faser die Gestalt einer Schraubenlinie annimmt. Die von der Achse am weitesten entfernten, also die in der Mantelfläche des Cylinders liegenden Fasern, erleiden die größte Ablenkung, während die eine, mit der Achse des Cylinders zusammenfallende Faser in ihrer ursprünglichen Lage bleibt und nur in sich selbst verwunden wird.

Fig. 109.



Es sei nun AB (Fig. 109) die ursprüngliche Lage einer in der Mantelfläche eines Cylinders von der Länge l liegenden Faser, welche nach eingetretener Verdrehung in die Lage AB_1 gekommen sein möge. Es stellt dann der Bogen

$$BB_1 = b$$

die Verschiebung des Endpunktes B dar. Der diesem Bogen entsprechende Winkel φ, d. i. derjenige Winkel, um welchen der durch B rechtwinklig zur Achse des Cylinders gelegte Querschnitt gegen den Querschnitt an der Einspannungsstelle A unter Einwirkung des Kraftmomentes 𝔐 verdreht ist, heißt der **Verdrehungswinkel**. Die bei dieser Verdrehung in der Mantelfläche des Cylinders auftretende Schubspannung sei $= t$.

Die Verschiebung des Punktes B, also der Bogen BB_1, wird um so größer ausfallen, je größer das Kraftmoment wird. Man kann sich vorstellen, das Kraftmoment erreichte eine solche Größe, daß unter Einwirkung desselben der Verdrehungsbogen BB_1 gleich der Länge l des Cylinders würde, wenn das Material eine solche Verdrehung überhaupt zuließe und die Elastizitätsgrenze dabei nicht überschritten würde. Wird die dabei in der Mantelfläche des Cylinders auftretende Schubspannung mit E_1 bezeichnet, so kann man folgendermaßen schließen:

Bei der Spannung t entsteht die Verschiebung b
" " " E_1 " " " l

Da sich nun erfahrungsmäßig innerhalb der Elastizitätsgrenze die Verschiebungen wie die Spannungen verhalten, so erhält man die Proportion

$$\frac{b}{l} = \frac{t}{E_1}$$

oder:

$$b = \frac{t\,l}{E_1}$$

Bezeichnet man mit r den Halbmesser des kreisförmigen Querschnittes, so ist:

$$b = r \cdot \varphi$$

Danach erhält man für den Verdrehungswinkel die Größe:

$$\varphi = \frac{\mathbf{t}}{\mathbf{E_1}} \frac{\mathbf{l}}{\mathbf{r}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 95)$$

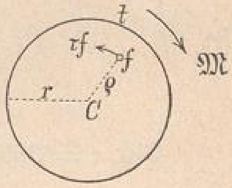
E_1 wird der Schub-Elastizitätsmodul genannt und ist durch Versuche bestimmt zu:

$$\mathbf{E_1 = 0{,}4 \cdot E} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 96)$$

wobei E den Elastizitätsmodul für Zug oder Druck bedeutet (siehe § 1 S. 3).

Für den Zustand des Gleichgewichtes muß das Moment des verdrehenden Kräftepaares gleich sein dem Momente sämtlicher, in einem Querschnitte des Cylinders auftretenden Verdrehungswiderstände in Bezug auf den Mittelpunkt des Querschnitts.

Fig. 110.



Es sei Fig. 110 ein solcher Kreisquerschnitt mit dem Halbmesser r und f ein Flächenteilchen desselben im Abstande ϱ vom Mittelpunkte C. Ist τ die Schubspannung für ein Quadratcentimeter an dieser Stelle, so ist der auf das Flächenteilchen f kommende Verdrehungswiderstand $= \tau f$ und das Moment desselben in Bezug auf den Mittelpunkt $= \tau f \varrho$.

Danach ist:

$$\mathfrak{M} = \Sigma (\tau f \varrho)$$

Ist nun t die am äußeren Umfange, also in der Entfernung r vom Mittelpunkte auftretende Schubspannung, so besteht, da sich die Spannungen verhalten wie die Entfernungen vom Mittelpunkte, die Proportion:

$$\frac{\tau}{t} = \frac{\varrho}{r}$$

oder:

$$\tau = \frac{t}{r} \varrho$$

Nach Einsetzung dieses Wertes erhält man für das Moment:

$$\mathfrak{M} = \frac{t}{r} \Sigma (f \varrho^2)$$

Der Ausdruck $\Sigma (f \varrho^2)$ bedeutet die Summe aller Flächenteilchen, multipliziert mit dem Quadrate ihrer Abstände von der durch den Mittelpunkt des

Querschnitts gelegten Drehachse, ist also das zentrale oder polare Trägheitsmoment der Querschnittsfläche. Wird dasselbe mit J_c bezeichnet, so ist:

$$\mathfrak{M} = t \frac{J_c}{r} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 97)$$

Ist d der Durchmesser des Kreisquerschnitts, so ist nach Gl. 22) S. 23:

$$J_c = \frac{d^4 \pi}{32}$$

Setzt man dann noch in Gl. 97) $r = \frac{d}{2}$, so erhält man:

$$\mathfrak{M} = \frac{d^3 \pi}{16} \cdot t \quad \ldots\ldots\ldots \quad 98)$$

Hieraus ergibt sich der Durchmesser d einer Welle, welche durch das Moment:

$$\mathfrak{M} = P R$$

auf Verdrehung in Anspruch genommen wird, zu:

$$d = \sqrt[3]{\frac{16}{\pi t}} \cdot \sqrt[3]{P R} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 99)$$

oder da:

$$\frac{16}{\pi} = \frac{16}{3{,}14} = 5{,}093 = \sim 5{,}1$$

ist:

$$d = \sqrt[3]{\frac{5{,}1 \cdot P R}{t}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 100)$$

Für $t = 365$ (bei Schmiedeeisen) wird:

$$d = \sqrt[3]{\frac{5{,}1}{365} P R} = 0{,}24 \sqrt[3]{P R} \quad \ldots\ldots \quad 101)$$

Ist das verdrehende Moment nicht unmittelbar gegeben, sondern die Anzahl der zu übertragenden Pferdekräfte $= N$ und die Anzahl der Umdrehungen in der Minute $= n$, so ist zu setzen*):

$$N = \frac{P v}{75} = P \frac{2 R \pi n}{75 \cdot 60 \cdot 100}$$

woraus folgt:

$$P R = 71620 \cdot \frac{N}{n} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 102)$$

Durch Einsetzen dieses Wertes in Gl. 100) entsteht leicht:

$$d = 10 \sqrt[3]{\frac{365}{t} \frac{N}{n}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 103)$$

und für $t = 365$ (bei Schmiedeeisen):

$$d = 10 \sqrt[3]{\frac{N}{n}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 104)$$

*) Vergl. Lauenstein, Mechanik, 5. Aufl., § 5 Gl. 18.

Lange dünne Wellen (Transmissionswellen) werden unter der Annahme berechnet, daß der Verdrehungswinkel φ für ein Meter Länge $^1/_4{}^\circ$ betragen soll.

Nach Gl. 95) S. 133 ist:

$$\varphi = \frac{t}{E_1} \frac{l}{r} = \frac{t}{E_1} \cdot \frac{2\,l}{d}$$

Setzt man hierin für t den sich aus Gl. 98) ergebenden Wert:

$$t = \frac{16\,\mathfrak{M}}{d^3\,\pi} = \frac{16\,P\,R}{d^3\,\pi}$$

so wird:

$$\varphi = \frac{16\,P\,R}{d^3\,\pi\,E_1} \frac{2\,l}{d}$$

Der Winkel φ ist hier in Winkeleinheiten ausgedrückt. Die Winkeleinheit ist bekanntlich ein Winkel, dessen Bogen gleich dem Halbmesser ist, und hat, in Graden angegeben, die Größe:

$$\sphericalangle\, 1 = \frac{360}{2\,\pi} = 57^\circ\, 17'\, 44{,}8''$$

Danach ist:

$$\varphi^\circ = \widehat{\varphi} \frac{360}{2\,\pi}$$

Setzt man hierin für $\widehat{\varphi}$ den oben gefundenen Wert ein, so erhält man unter Berücksichtigung der Gl. 102):

$$\varphi^\circ = \frac{360}{2\,\pi} \frac{16 \,.\, 71620 \dfrac{N}{n} 2\,l}{d^3\,\pi\,E_1\,d}$$

woraus sich für die Zahlenwerte:

$$\varphi = {}^1/_4{}^\circ$$
$$l = 100 \text{ cm}$$
$$E_1 = 0{,}4\,E = 800\,000$$

durch Auflösung für d der Wert ergibt:

$$\mathbf{d = 12 \sqrt[4]{\frac{N}{n}}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 105)$$

Abgesehen von dieser obigen, schon von Redtenbacher gegebenen Ableitung der Gl. 105), die sich auf die Voraussetzung stützt, daß der Verdrehungswinkel für ein Meter Länge $^1/_4{}^\circ$ betragen soll, kann die Gleichung auch abgeleitet werden unter Zugrundelegung einer bei kleineren Wellen kleineren, bei größeren Wellen größeren zulässigen Schubspannung. Mit anderen Worten, man nimmt die Schubspannung verhältnisgleich dem Durchmesser der Welle und setzt:

$$t = C\,d$$

wobei C eine vom Materiale abhängige durch Erfahrung festgesetzte Zahlengröße bedeutet.

Für Schmiedeeisen nimmt man:

$$t = 17{,}6\, d$$

was z. B. bei einer Welle von 20 cm Durchmesser einer Beanspruchung von 352 kg für das Quadratcentimeter gleichkommen würde. (Stärkere Wellen werden nicht mehr nach Gl. 105), sondern nach Gl. 101) bezw. 104) unter Annahme eines bestimmten, unveränderlichen Wertes für t berechnet.)

Aus der Gleichung

$$\varphi^0 = \widehat{\varphi}\, \frac{360}{2\,\pi} = \frac{t}{E_1}\, \frac{2\,l}{d}\, \frac{360}{2\,\pi}$$

folgt nach der obigen Voraussetzung ($t = C\,d$):

$$\varphi^0 = \frac{C}{E_1}\, \frac{360}{\pi}\, l$$

Der Verdrehungswinkel ist danach unabhängig vom Durchmesser der Welle, wächst aber in geradem Verhältnis mit der Länge derselben.

Aus den Gl. 98) und 102) S. 134 folgt:

$$71\,620\, \frac{N}{n} = \frac{d^3\,\pi}{16}\, t$$

Setzt man hierin: $t = 17{,}6\, d$, so ergibt sich durch Auflösung für d ebenfalls wieder der Wert Gl. 105).

Aufgabe 65. Auf eine schmiedeeiserne Welle wirke eine Kraft $P = 2400$ kg am Hebelarme $R = 50$ cm. Wie groß muß der Durchmesser der Welle genommen werden bei einer Inanspruchnahme von $t = 400$ kg?

Auflösung. Nach Gl. 100) S. 134 ist zu setzen:

$$d = \sqrt[3]{\frac{5{,}1}{400}} \cdot \sqrt[3]{2400\,.\,50} = \infty\; 11{,}5 \text{ cm}$$

Aufgabe 66. Wie groß ist der Verdrehungswinkel der vorigen Welle, wenn diese eine Länge von 15 m hat?

Auflösung. In Gl. 95) S. 133 ist zu setzen:

$$t = 400$$
$$E_1 = 0{,}4\,.\,2\,000\,000 = 800\,000$$
$$l = 1500$$
$$r = \frac{d}{2} = 5{,}75$$

Es wird dann:

$$\varphi = \frac{400}{800\,000}\, \frac{1500}{5{,}75} = 0{,}13$$

oder in Graden:

$$\varphi^0 = 0{,}13\,.\,(57^0\,17'\,44{,}8'') = 7^0\,26'\,54{,}4''$$

Aufgabe 67. Es soll der Durchmesser einer schmiedeeisernen Welle berechnet werden, welche eine mechanische Arbeit von 36 Pferdekräften zu übertragen hat und 60 Umdrehungen in der Minute macht.

Nach Gl. 104) ist (bei $t = 365$ kg/qcm):

$$d = 10 \sqrt[3]{\frac{36}{60}} = 10 \sqrt[3]{0,6} = 8,4 \text{ cm}$$

Der Verdrehungswinkel dieser Welle beträgt für 1 m Länge nach Gl. 95) S. 133:

$$\varphi = \frac{365}{800\,000} \cdot \frac{100}{4,2} = \frac{1}{92}$$

oder in Graden:

$$\varphi^0 = \frac{57^0\ 17'\ 44,8''}{92} = 37'\ 22''$$

Nach Gl. 105) S. 135 würde sich der Durchmesser der Welle ergeben zu:

$$d = 12 \sqrt[4]{\frac{36}{60}} = 10,6 \text{ cm}$$

§ 16.

Zusammengesetzte Widerstände.

1. Biegung und Zug oder Druck.

Wirken in der Längsrichtung eines prismatischen Stabes vom Querschnitt F zwei gleiche, aber entgegengesetzt gerichtete Zug- oder Druckkräfte P, so entsteht dadurch in dem Stabe eine Zug-, bezw. Druckspannung k_1, welche sich gleichförmig über den Querschnitt des Stabes verteilt und die Größe hat:

$$k_1 = \pm \frac{P}{F}$$

Wirken gleichzeitig, rechtwinklig zu der Längsrichtung des Stabes, Kräfte, welche denselben zu verbiegen streben, und ist W das Widerstandsmoment der Querschnittsfläche, $\mathfrak{M}$ das größte Biegungsmoment, so ist die dadurch bewirkte Biegungsspannung:

$$k_2 = \pm \frac{\mathfrak{M}}{W}$$

wobei das Zeichen + für Zugspannungen, das Zeichen — für Druckspannungen gelten soll. Die Summe der Spannungen k_1 und k_2 darf höchstens gleich der zulässigen Inanspruchnahme des Materials sein, daher:

$$\mathbf{k = \pm \frac{P}{F} \pm \frac{\mathfrak{M}}{W}} \quad \text{. . . . . 106)}$$

Ist z. B. der Stab mit seinen beiden Enden frei aufgelagert und durch Gewichte belastet, so bewirken letztere eine Durchbiegung des Stabes; dabei entstehen in den oberen Fasern Druckspannungen, in den unteren Fasern Zugspannungen. Durch Hinzutreten der in der Längsrichtung des Stabes wirkenden Zugkräfte P erleiden die unteren Fasern dann die Gesamt-Zugspannung:

$$k = + \frac{P}{F} + \frac{\mathfrak{M}}{W}$$

die oberen Fasern die Gesamtspannung:

$$k = + \frac{P}{F} - \frac{\mathfrak{M}}{W}$$

welche entweder positiv oder negativ, d. h. entweder Zug- oder Druckspannung sein kann, je nachdem das erste oder das zweite Glied der rechten Seite letzter Gleichung das absolut größte ist.

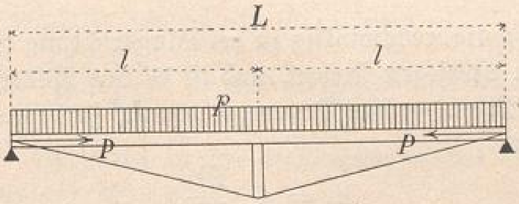
Wirken dagegen in der Richtung der Stabachse die Druckkräfte P, wie z. B. bei dem Balken eines versteiften Trägers (Fig. 111), so sind die oberen Fasern die am schärfsten beanspruchten; sie erleiden die Gesamt-Druckspannung:

$$k = - \frac{P}{F} - \frac{\mathfrak{M}}{W}$$

Es könnte bei einem solchen Träger, wenn nicht wenigstens zwei derselben in gewisser Entfernung nebeneinander angeordnet und fest miteinander verbunden sind, aber auch eine seitliche Ausbiegung eintreten, und es muß daher bei einem einzelnen versteiften Träger stets noch eine Untersuchung auf Knickfestigkeit durchgeführt werden.

Aufgabe 68. Der Holzbalken eines einfach versteiften Trägers von der Gesamtlänge $L = 2\,l = 6$ m (Fig. 111) sei gleichmäßig belastet mit $p = 5$ kg für 1 cm Länge. Die in seiner Achsenrichtung wirkende Druckkraft sei $P = 2800$ kg. Wie stark muß der Balken ausgeführt werden?

Fig. 111.



Auflösung. Die Gesamtbelastung einer Balkenhälfte ist:

$$p\,l = 5 \,.\, 300 = 1500 \text{ kg}$$

folglich das größte Biegungsmoment:

$$\mathfrak{M} = p\,l \,.\, \frac{l}{8} = 1500 \,.\, \frac{300}{8} = 56250$$

Wählt man den Balken 20 cm hoch, 16 cm breit, so ist der Querschnitt:

$$F = 20 \,.\, 16 = 320 \text{ qcm}$$

und das Widerstandsmoment:

$$W = \frac{b\,h^2}{6} = \frac{16 \,.\, 20^2}{6} = 1067$$

Nach Gl. 106) wird dann die größte Druckspannung in der oberen Faserschicht:

$$k = - \frac{2800}{320} - \frac{56250}{1067} = - 61{,}5 \text{ kg}$$

Damit der Balken gegen Zerknicken genügend stark ist, muß, wenn die Höhe $h = 20$ cm beibehalten wird, die Breite b etwas verstärkt werden, wie folgende Rechnung ergibt:

Nach Gl. 92) S. 119 ist das erforderliche Trägheitsmoment:

$$J = \frac{5}{4} \frac{P L^2}{E} = \frac{5 \cdot 2800 \cdot 600^2}{4 \cdot 120000} = 10500$$

daher:

$$\frac{h b^3}{12} = \frac{20 \cdot b^3}{12} = 10500$$

woraus folgt:

$$b = 18{,}5 \text{ cm}$$

Es wird dann:

$$F = 20 \cdot 18{,}5 = 370 \text{ qcm}$$

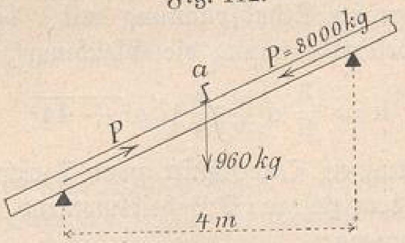
$$W = \frac{18{,}5 \cdot 20^2}{6} = 1233$$

folglich die größte Druckspannung:

$$k = -\frac{2800}{370} - \frac{56250}{1233} = -53 \text{ kg}$$

Aufgabe 69. Auf die obere aus zwei ⊏-Eisen bestehende Gurtung eines Dachbinders wirke in der Achsenrichtung die Druckkraft $P = 8000$ kg. Außerdem soll die Gurtung, deren Grundrißlänge 4 m sei, durch die in der Mitte befindliche Pfette a (Fig. 112) eine lotrechte Belastung von 960 kg erhalten. Welche Eisen sind zu wählen, wenn die Gesamtbeanspruchung k höchstens 800 kg betragen soll?

Fig. 112.



Auflösung. Das größte Biegungsmoment ist:

$$\mathfrak{M} = \frac{960 \cdot 400}{4} = 96000$$

Ist F die Querschnittsfläche, W das Widerstandsmoment eines ⊏-Eisens, so ist, da die Gurtung aus zwei ⊏-Eisen besteht, die größte Druckbeanspruchung nach Gl. 106) S. 137:

$$k = -\frac{8000}{2 F} - \frac{96000}{2 W}$$

Man verfährt nun zweckmäßig so, daß man aus den Profiltabellen probeweise ein Profil heraussucht, die Größen F und W dieses Profils in die letzte Gleichung einsetzt, und k danach berechnet. Erhält man danach für k einen zu großen Wert, so hat man ein stärkeres Profil zu wählen.

Nach Tabelle 1 § 6 S. 28 ist für Profil Nr. 14:

$$F = 20{,}4$$
$$W = 86{,}4$$

folglich:

$$k = \frac{8000}{2 \,.\, 20{,}4} + \frac{96\,000}{2 \,.\, 86{,}4} = 751 \text{ kg}$$

Das nächst kleinere Profil Nr. 12 würde eine Beanspruchung von über 1000 kg ergeben; das ⊏-Eisen Nr. 14 ist daher beizubehalten.

2. Biegung und Verdrehung.

Wirken auf einen prismatischen geraden Stab Kräfte, welche denselben um seine Längsachse zu verdrehen streben, und zugleich Kräfte, welche rechtwinklig zur Stabachse gerichtet sind, also eine Biegung hervorrufen, so treten in dem Stabe infolge der Verdrehung Schubspannungen und zugleich infolge der Biegung Zug- oder Druckspannungen auf, welche sich in jedem einzelnen Punkte zu einer Gesamtspannung vereinigen lassen.

Die Abmessungen des Stabes sind so zu bestimmen, daß die größte Gesamtspannung höchstens gleich der zulässigen Inanspruchnahme des Materiales wird.

Wird für irgend einen Querschnitt des Stabes das durch die rechtwinklig zur Stabachse gerichteten Kräfte hervorgerufene Biegungsmoment mit $\mathfrak{M}_B$, die dabei auftretende größte Zug- bezw. Druckspannung mit s, ferner das auf Verdrehung wirkende Moment (das Torsionsmoment) mit $\mathfrak{M}_T$, die dabei auftretende größte Schubspannung mit t bezeichnet, so hat man zur Bestimmung der Gesamtspannung die Gleichung*):

$$\mathbf{k} = \frac{3}{8}\,\mathbf{s} + \frac{5}{8}\sqrt{\mathbf{s}^2 + 4\,\mathbf{t}^2} \quad \ldots\ldots \quad 107)$$

Für den kreisförmigen Querschnitt vom Durchmesser d, dem Widerstandsmoment W und dem polaren Trägheitsmoment J_c bestehen für s bezw. t die Bedingungsgleichungen:

$$s = \frac{\mathfrak{M}_B}{W} = \frac{32\,\mathfrak{M}_B}{d^3\,\pi} \quad \ldots\ldots \quad 108)$$

$$t = \frac{\mathfrak{M}_T \,.\, d}{2\,J_c} = \frac{16\,\mathfrak{M}_T}{d^3\,\pi} \quad \ldots\ldots \quad 109)$$

Durch Einsetzung dieser Werte in Gl. 107) folgt:

$$\mathbf{k} = \frac{\mathbf{32}}{\mathbf{d^3\,\pi}}\left(\frac{3}{8}\,\mathfrak{M}_B + \frac{5}{8}\sqrt{\mathfrak{M}_B^2 + \mathfrak{M}_T^2}\right) \quad \ldots \quad 110)$$

oder:

$$\mathbf{d^3} = \frac{\mathbf{4}}{\mathbf{k\,\pi}}\left(3\,\mathfrak{M}_B + 5\sqrt{\mathfrak{M}_B^2 + \mathfrak{M}_T^2}\right) \quad \ldots\ldots \quad 111)$$

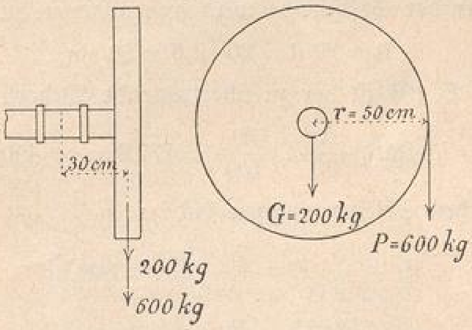
---

*) Vergl. Grashof, Theorie der Elastizität und Festigkeit, 2. Aufl. S. 215 und 216.

Nach Gl. 111) läßt sich z. B. der Durchmesser d einer durch Zahnräder, Riemenscheiben u. s. w. belasteten und auf Verdrehung beanspruchten Welle berechnen.

Aufgabe 70. Es soll der Durchmesser d einer schmiedeeisernen Welle berechnet werden, welche nach Fig. 113 durch ein Zahnrad, dessen Eigengewicht G = 200 kg ist und welches einen Zahndruck von P = 600 kg überträgt, belastet ist.

Fig. 113.



Auflösung. Für den durch die Mitte des Lagers gelegten Querschnitt ist das Biegungsmoment:

$$\mathfrak{M}_B = (600 + 200)\ 30 = 24000$$

Das Verdrehungsmoment hat die Größe:

$$\mathfrak{M}_T = 600\ .\ 50 = 30000$$

Bei k = 500 erhält man dann nach Gl. 111):

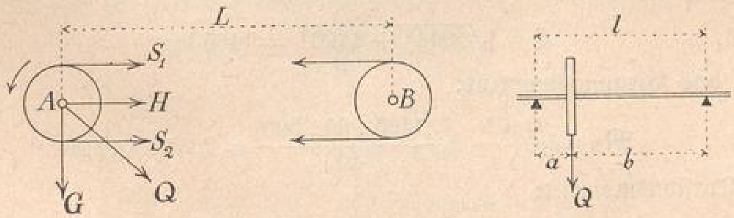
$$d^3 = \frac{4}{500\ .\ 3{,}14}\left(3\ .\ 24000 + 5\sqrt{24000^2 + 30000^2}\right)$$

woraus folgt:

$$d = 8{,}8 \text{ cm}$$

Aufgabe 71. Von einer Welle A, die n = 100 Umdrehungen in der Minute macht, sollen auf eine andere in L = 16 m Entfernung und in gleicher Höhe befindliche parallele Welle B mittels Hanfseilbetrieb N = 60 Pferdekräfte übertragen werden. Länge der Welle A zwischen den Lagern: l = 4 m; Abstand der Seilscheibe vom linken Lager: a = 0,8 m; vom rechten Lager: b = 3,2 m (Fig. 114).

Fig. 114.



Die Welle A, welche zugleich auf Biegung und auf Verdrehung in Anspruch genommen wird, ist zu berechnen.

Auflösung. Der bei Hanfseilbetrieb übliche Seildurchmesser ist:

$$d = 4{,}5 \text{ cm}$$

Diesem entspricht der Seilquerschnitt:

$$\frac{d^2 \pi}{4} = 15{,}9 = \infty\ 16 \text{ qcm}$$

Gewicht des Seiles für 1 m Länge:

$$q = 1{,}5 \text{ kg}$$

Der Halbmesser der Seilscheibe wird angenommen zu:

$$R = 20\,d = 20 \,.\, 4{,}5 = 90 \text{ cm}$$

Nach Gl. 102) S. 134 ist der zu übertragende Widerstand:

$$P = 71\,620 \,.\, \frac{1}{90} \,.\, \frac{60}{100} = 477{,}5 = \infty\ 480 \text{ kg}$$

Die erforderlichen Seilspannungen sind*):

$$S_1 = \frac{5}{3} P = \frac{5}{3} \,.\, 480 = 800 \text{ kg}$$

$$S_2 = \frac{2}{3} P = \frac{2}{3} \,.\, 480 = 320 \text{ kg}$$

Rechnet man für die zulässige Inanspruchnahme der Seile rund $k = 8$ kg/qcm, so ergibt sich die Anzahl der anzuordnenden Seile zu:

$$z = \frac{S_1}{k \,.\, \frac{d^2 \pi}{4}} = \frac{800}{8 \,.\, 16} = \infty\ 6$$

Das auf die Scheibe kommende Seilgewicht ist:

$$G_1 = z\,L\,q = 6 \,.\, 16 \,.\, 1{,}5 = 144 \text{ kg}$$

Das Eigengewicht der Scheibe beträgt (nach praktischen Ausführungen des Eisenwerkes Wülfel vor Hannover):

$$G_2 = 800 \text{ kg}$$

zusammen:

$$G = G_1 + G_2 = 944 \text{ kg}$$

Die auf die Welle A wirkende Horizontalkraft besteht aus der Summe der Seilspannungen und ist danach:

$$H = 800 + 320 = 1120 \text{ kg}$$

Aus G und H ergibt sich die Mittelkraft:

$$Q = \sqrt{944^2 + 1120^2} = 1465 \text{ kg}$$

mithin ist das Biegungsmoment:

$$\mathfrak{M}_B = \frac{Q\,a\,b}{l} = \frac{1465 \,.\, 80 \,.\, 320}{400} = 93\,760 \text{ kg/cm}$$

und das Torsionsmoment:

$$\mathfrak{M}_T = P\,R = 480 \,.\, 90 = 43\,200 \text{ kg/cm}$$

---

*) Vergl. Lauenstein, Mechanik, 5. Aufl. Gl. 164) S. 118.

Für k = 400 kg/qcm und $\frac{32}{\pi} = \infty 10$ wird dann nach Gl. 110) S. 140 der auszuführende Wellendurchmesser:

$$d^3 = \frac{10}{400}\left(\frac{3}{8} \,.\, 93\,760 + \frac{5}{8}\sqrt{93\,760^2 + 43\,200^2}\right) = 2492$$

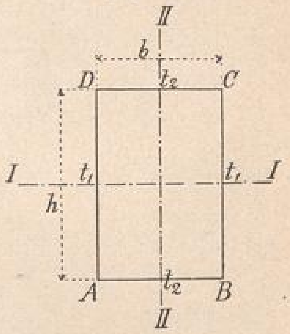
$$d = \sqrt[3]{2492} = 13{,}6 \text{ cm}$$

Bei dem rechteckigen Querschnitt (Fig. 115) ist die Schubspannung in den vier Ecken = Null. Die größten Schubspannungen treten auf in den Mitten der Umfangsseiten und sind*):

$$t_1 = \frac{3}{8}\,\frac{\mathfrak{M}_T \,.\, b}{J_{II}} \quad . \;.\;.\;. \quad 112)$$

$$t_2 = \frac{3}{8}\,\frac{\mathfrak{M}_T \,.\, h}{J_I} \quad . \;.\;.\;. \quad 113)$$

Fig. 115.



Ist $h > b$, so wird $J_{II} < J_I$, folglich $t_1 > t_2$, d. h. die stärkste überhaupt vorkommende Schubspannung erleiden diejenigen Punkte des Umfangs, deren Entfernung von der Stabachse am geringsten ist.

Für die Drehungsfestigkeit des rechteckigen Querschnittes ist daher stets das kleinste Trägheitsmoment maßgebend.

Setzt man $J_I = \frac{b\,h^3}{12}$ und $J_{II} = \frac{h\,b^3}{12}$ in die letzten Gleichungen ein, so entsteht:

$$\mathbf{t_1 = \frac{9}{2}\,\frac{\mathfrak{M}_T}{h\,b^2}} \quad . \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \quad 114)$$

$$\mathbf{t_2 = \frac{9}{2}\,\frac{\mathfrak{M}_T}{b\,h^2}} \quad . \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \quad 115)$$

Aufgabe 72. Es sollen die Abmessungen h und b der in Fig. 116 abgebildeten, mit P = 4000 kg belasteten Kurbel von rechteckigem Querschnitt berechnet werden, unter der Annahme, daß $b = \frac{1}{2}\,h$ ist.

Da hier die Biegungsebene ($\mathfrak{M}_B$-Ebene) parallel zu den Kanten A B bezw. C D gerichtet ist, so bildet E E′ die neutrale Achse, und die größte Biegungsspannung s entsteht in den Kanten A D und B C. Die größten Schubspannungen t_1 und t_2 treten auf in den Punkten E und E′ bezw. F und F′, die größte Gesamtspannung überhaupt in den Mitten der Seiten A D und B C, für welche:

$$s = \frac{\mathfrak{M}_B}{W} = \frac{6\,\mathfrak{M}_B}{b\,h^2}$$

und:

$$t_2 = \frac{9}{2}\,\frac{\mathfrak{M}_T}{b\,h^2}$$

Nun ist:

$$\mathfrak{M}_B = 4000 \,.\, 50 = 200\,000 \text{ kg/cm} = 200 \text{ t cm}$$

$$\mathfrak{M}_T = 4000 \,.\, 14 = 56\,000 \text{ kg/cm} = 56 \text{ t cm}$$

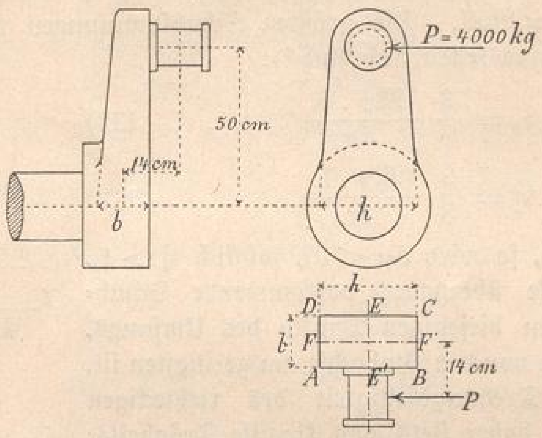
*) Vergl. Keck, Vorträge über Mechanik, T. II S. 69.

folglich für $b = \frac{1}{2} h$:

$$s = \frac{6 \cdot 200}{\frac{1}{2} h^3} = \frac{2400}{h^3}$$

$$t_2 = \frac{9}{2} \cdot \frac{56}{\frac{1}{2} h^3} = \frac{504}{h^3}$$

Fig. 116.



für $k = 500$ kg/qcm $= 0{,}5$ t/qcm wird somit nach Gl. 107):

$$0{,}5 = \frac{3}{8} \cdot \frac{2400}{h^3} + \frac{5}{8} \sqrt{\left(\frac{2400}{h^3}\right)^2 + 4\left(\frac{504}{h^3}\right)^2}$$

$$0{,}5 = \frac{1}{8\,h^3}\left(7200 + 5\sqrt{2400^2 + 4 \cdot 504^2}\right) = \frac{20215}{8\,h^3}$$

oder:

$$h = \sqrt[3]{5054} = 17{,}2 \text{ cm}$$

folglich:

$$b = \tfrac{1}{2} h = 8{,}6 \text{ cm}$$

Die Schubspannung in der Mitte der Seiten A B bezw. C D wird nach Gl. 114):

$$t_1 = \frac{9}{2} \frac{\mathfrak{M}_T}{h\,b^2} = \frac{9}{2} \frac{56}{17{,}2 \cdot 8{,}6^2} = 0{,}2 \text{ t/qcm} = 200 \text{ kg/qcm}$$

§ 17.

Zusammenstellung der wichtigsten Formeln.

Widerstand gegen Zug oder Druck.

$$\mathbf{P = F\,k} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 1) \text{ S. } 6$$

$$\lambda = \frac{\mathbf{P\,l}}{\mathbf{F\,E}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 3) \text{ S. } 6$$

Widerstand gegen Biegung.

$J = \Sigma (f y^2)$ . . . . 9) S. 14

$W = \frac{J}{e}$ . . . . 15) S. 17

$\mathfrak{M} = k W$ . . . . 17) S. 18

Trägheitsmomente und Widerstandsmomente.

Tabelle für die wichtigsten einfachen Querschnitte S. 26 und 27.

In Bezug auf eine der Schwerachse parallele andere Achse (Abstand a) ist:

$J_0 = J_s + F a^2$ . . . . . . 20) S. 20

Annäherungsformel für genietete Träger:

$W = h_0 (F + {}^1/_6 F_1)$ . . . . . . 27) S. 25

Krümmung und Durchbiegung belasteter Balken.

Krümmungshalbmesser: $\varrho = \frac{E J}{\mathfrak{M}}$ . . . 29) S. 42

$\operatorname{tg} \varphi = \frac{1}{E J} \cdot$ ($\mathfrak{M}$-Fläche) . . . . . 32) S. 43

$f = \frac{1}{E J} \cdot$ (Moment der $\mathfrak{M}$-Fläche) . . . 34) S. 44

Der an einem Ende eingespannte Träger.

Belastung durch Einzelkraft P.

$P l = k W$ . . . . 35) S. 45

$f = \frac{P l^3}{3 E J}$ . . . . 36) S. 46

$\operatorname{tg} \alpha = \frac{P l^2}{2 E J}$ . . . . 38) S. 47

Streckenbelastung.

$p l \cdot \frac{l}{2} = k W$ . . . . 39) S. 48

$f = \frac{p l^4}{8 E J}$ . . . . 40) S. 49

$\operatorname{tg} \alpha = \frac{p l^3}{6 E J}$ . . . . 42) S. 49

Der Träger auf zwei Stützen.

Belastung durch Einzelkraft P.

$A = \frac{P b}{l}$ . . . . 45) S. 59

$$B = \frac{P a}{l} \quad \ldots\ldots \quad 46) \text{ S. } 59$$

$$P \frac{a b}{l} = k W \quad \ldots\ldots \quad 47) \text{ S. } 59$$

Für $a = b = \frac{1}{2} l$ wird:

$$\frac{P l}{4} = k W \quad \ldots\ldots \quad 48) \text{ S. } 60$$

$$f = \frac{1}{12} \frac{k}{E} \frac{l^2}{e} \quad \ldots\ldots \quad 49) \text{ S. } 61$$

Streckenbelastung.

$$A = B = \frac{p l}{2} \quad \ldots\ldots \quad 51) \text{ S. } 67$$

$$\mathfrak{M}_x = \frac{p}{2} x (l - x) \quad \ldots\ldots \quad 52) \text{ S. } 67$$

$$\mathfrak{M}_{max} = p l \cdot \frac{l}{8} \quad \ldots\ldots \quad 53) \text{ S. } 68$$

$$p l \cdot \frac{l}{8} = k W \quad \ldots\ldots \quad 54) \text{ S. } 68$$

$$f = \frac{5}{48} \frac{k}{E} \frac{l^2}{e} \quad \ldots\ldots \quad 55) \text{ S. } 69$$

Der Träger auf drei Stützen.

Streckenbelastung bei gleichen Spannweiten.

$$A = B = \frac{3}{8} p l \quad \ldots\ldots \quad 64) \text{ S. } 91$$

$$C = \frac{10}{8} p l = \frac{5}{8} \cdot 2 p l \quad \ldots \quad 65) \text{ S. } 91$$

$$\frac{p l^2}{8} = k W \quad \ldots\ldots \quad 66) \text{ S. } 92$$

Die Träger von gleichem Biegungswiderstande.

$$\frac{\mathfrak{M}_x}{\mathfrak{M}} = \frac{W_x}{W} \quad \ldots\ldots \quad 70) \text{ S. } 102$$

Für kreisförmigen Querschnitt wird:

$$\frac{y}{d} = \sqrt[3]{\frac{\mathfrak{M}_x}{\mathfrak{M}}} \quad \ldots\ldots \quad 71) \text{ S. } 102$$

und für eingespannten Träger von der Länge l, am freien Ende durch P belastet:

$$\frac{y}{d} = \sqrt[3]{\frac{x}{l}} \quad \ldots\ldots \quad 72) \text{ S. } 102$$

Für Rechteckquerschnitt mit unveränderlicher Höhe h (eingespannter Träger, am freien Ende durch P belastet) wird:

$$\frac{y}{b} = \frac{x}{l} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 73)\ \text{S. } 103$$

$$h = \frac{k}{E}\,\frac{l^2}{f} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 76)\ \text{S. } 104$$

$$b = \frac{6\,P\,l}{k\,h^2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 77)\ \text{S. } 104$$

Die auf Doppelbiegung beanspruchten Träger.

$$W_x = \frac{\mathfrak{M}_1 + c\,\mathfrak{M}_2}{k} \quad \ldots\ldots \quad 79)\ \text{S. } 108$$

wobei $c = W_x : W_y$.

Für Rechteckquerschnitt ist $c = h : b$ und:

$$h^3 = \frac{6\,c}{k}\,(\mathfrak{M}_1 + c\,\mathfrak{M}_2) \quad \ldots\ldots \quad 80)\ \text{S. } 110$$

Widerstand gegen Abscherung.

$$P = F\,.\,t \quad \ldots\ldots\ldots \quad 81)\ \text{S. } 113$$

$$t = \frac{4}{5}\,k \quad \ldots\ldots\ldots \quad 82)\ \text{S. } 114$$

Widerstand gegen Zerknicken.

$$P = \frac{c}{n}\,\frac{\pi^2}{l^2}\,E\,J \quad \ldots\ldots\ldots \quad 89)\ \text{S. } 118$$

Sind beide Stabenden frei (nicht eingespannt) und in der ursprünglichen Achse geführt, so wird:

$$P = \frac{2\,E\,J}{l^2} \quad \text{für Schmiedeeisen} \quad \ldots \quad 90)\ \text{S. } 119$$

$$P = \frac{4}{3}\,\frac{E\,J}{l^2} \quad \text{für Gußeisen} \quad \ldots \quad 91)\ \text{S. } 119$$

$$P = \frac{4}{5}\,\frac{E\,J}{l^2} \quad \text{für Holz und Stein} \quad \ldots \quad 92)\ \text{S. } 119$$

Bei zusammengesetzten Querschnitten sind die einzelnen Eisen zu verbinden in Abständen:

$$l_1 = \sqrt{\frac{z}{P}\,2\,E\,i} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 93)\ \text{S. } 119$$

Für Ringquerschnitt ist angenähert das Trägheitsmoment:

$$J = 0{,}4\,D_1^{\,3}\,\delta \quad \ldots\ldots\ldots \quad 94)\ \text{S. } 121$$

Widerstand gegen Verdrehung.

$$\varphi = \frac{t}{E_1} \frac{l}{r} \quad \ldots \ldots \ldots \quad 95) \text{ S. } 133$$

$$E_1 = 0{,}4 \,.\, E \quad \ldots \ldots \ldots \quad 96) \text{ S. } 133$$

$$\mathfrak{M} = t \frac{J_c}{r} \quad \ldots \ldots \ldots \quad 97) \text{ S. } 134$$

Für Kreisquerschnitt wird:

$$\mathfrak{M} = \frac{d^3 \pi}{16} t \quad \ldots \ldots \ldots \quad 98) \text{ S. } 134$$

Daraus für $\mathfrak{M} = P R$:

$$d = \sqrt[3]{\frac{16}{\pi t}} \sqrt[3]{P R} \quad \ldots \ldots \quad 99) \text{ S. } 134$$

und wenn:

$$P R = 71\,620 \frac{N}{n} \quad \ldots \ldots \quad 102) \text{ S. } 134$$

gesetzt wird:

$$d = 10 \sqrt[3]{\frac{365}{t} \frac{N}{n}} \quad \ldots \ldots \quad 103) \text{ S. } 134$$

Für $t = 365$ entsteht:

$$d = 0{,}24 \sqrt[3]{P R} \quad \ldots \ldots \quad 101) \text{ S. } 134$$

oder:

$$d = 10 \sqrt[3]{\frac{N}{n}} \quad \ldots \ldots \quad 104) \text{ S. } 134$$

Lange dünne Wellen (Transmissionswellen) werden berechnet nach:

$$d = 12 \sqrt[4]{\frac{N}{n}} \quad \ldots \ldots \quad 105) \text{ S. } 135$$

Zusammengesetzte Widerstände.

Biegung und Zug oder Druck.

$$k = \frac{P}{F} + \frac{\mathfrak{M}}{W} \quad \ldots \ldots \quad 106) \text{ S. } 137$$

Biegung und Verdrehung.

$$k = \frac{3}{8} s + \frac{5}{8} \sqrt{s^2 + 4 t^2} \quad \ldots \quad 107) \text{ S. } 140$$

Für kreisförmigen Querschnitt wird:

$$k = \frac{32}{d^3 \pi} \left(\frac{3}{8} \mathfrak{M}_B + \frac{5}{8} \sqrt{\mathfrak{M}_B{}^2 + \mathfrak{M}_T{}^2} \right) \quad 110) \text{ S. } 140$$

Anhang.

1) Tabelle

der

Potenzen, Wurzeln, Kreisumfänge und Kreisinhalte der Zahlen 0,0 bis 100,0.

0—5

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$n \cdot \pi$	$\frac{n^2 \pi}{4}$
0,0	0,00	0,000	0,00000	0,00000	0,00000	0,000000
0,1	0,01	0,001	0,31623	0,46416	0,31416	0,007854
0,2	0,04	0,008	0,44721	0,58480	0,62832	0,031416
0,3	0,09	0,027	0,54772	0,66943	0,94248	0,070686
0,4	0,16	0,064	0,63246	0,73681	1,2566	0,125664
0,5	0,25	0,125	0,70711	0,79370	1,5708	0,196350
0,6	0,36	0,216	0,77460	0,84343	1,8850	0,282743
0,7	0,49	0,343	0,83666	0,88790	2,1991	0,384845
0,8	0,64	0,512	0,89443	0,92832	2,5133	0,502655
0,9	0,81	0,729	0,94868	0,96549	2,8274	0,636173
1,0	1,00	1,000	1,0000	1,0000	3,1416	0,78540
1,1	1,21	1,331	1,0488	1,0323	3,4558	0,95033
1,2	1,44	1,728	1,0954	1,0627	3,7699	1,13097
1,3	1,69	2,197	1,1402	1,0914	4,0841	1,32732
1,4	1,96	2,744	1,1832	1,1187	4,3982	1,53938
1,5	2,25	3,375	1,2247	1,1447	4,7124	1,76715
1,6	2,56	4,096	1,2649	1,1696	5,0265	2,01062
1,7	2,89	4,913	1,3038	1,1935	5,3407	2,26980
1,8	3,24	5,832	1,3416	1,2164	5,6549	2,54469
1,9	3,61	6,859	1,3784	1,2386	5,9690	2,83529
2,0	4,00	8,000	1,4142	1,2599	6,2832	3,14159
2,1	4,41	9,261	1,4491	1,2806	6,5973	3,46361
2,2	4,84	10,648	1,4832	1,3006	6,9115	3,80133
2,3	5,29	12,167	1,5166	1,3200	7,2257	4,15476
2,4	5,76	13,824	1,5492	1,3389	7,5398	4,52389
2,5	6,25	15,625	1,5811	1,3572	7,8540	4,90874
2,6	6,76	17,576	1,6125	1,3751	8,1681	5,30929
2,7	7,29	19,683	1,6432	1,3925	8,4823	5,72555
2,8	7,84	21,952	1,6733	1,4095	8,7965	6,15752
2,9	8,41	24,389	1,7029	1,4260	9,1106	6,60520
3,0	9,00	27,000	1,7321	1,4422	9,4248	7,06858
3,1	9,61	29,791	1,7607	1,4581	9,7389	7,54768
3,2	10,24	32,768	1,7889	1,4736	10,053	8,04248
3,3	10,89	35,937	1,8166	1,4888	10,367	8,55299
3,4	11,56	39,304	1,8439	1,5037	10,681	9,07920
3,5	12,25	42,875	1,8708	1,5183	10,996	9,62113
3,6	12,96	46,656	1,8974	1,5326	11,310	10,1788
3,7	13,69	50,653	1,9235	1,5467	11,624	10,7521
3,8	14,44	54,872	1,9494	1,5605	11,938	11,3411
3,9	15,21	59,319	1,9748	1,5741	12,252	11,9459
4,0	16,00	64,000	2,0000	1,5874	12,566	12,5664
4,1	16,81	68,921	2,0248	1,6005	12,881	13,2025
4,2	17,64	74,088	2,0494	1,6134	13,195	13,8544
4,3	18,49	79,507	2,0736	1,6261	13,509	14,5220
4,4	19,36	85,184	2,0976	1,6386	13,823	15,2053
4,5	20,25	91,125	2,1213	1,6510	14,137	15,9043
4,6	21,16	97,336	2,1448	1,6631	14,451	16,6190
4,7	22,09	103,823	2,1679	1,6751	14,765	17,3494
4,8	23,04	110,592	2,1909	1,6869	15,080	18,0956
4,9	24,01	117,649	2,2136	1,6985	15,394	18,8574
5,0	25,00	125,000	2,2361	1,7100	15,708	19,6350

5—10

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$n \cdot \pi$	$\frac{n^2 \pi}{4}$
5,0	25,00	125,000	2,2361	1,7100	15,708	19,6350
5,1	26,01	132,651	2,2583	1,7213	16,022	20,4282
5,2	27,04	140,608	2,2804	1,7325	16,336	21,2372
5,3	28,09	148,877	2,3022	1,7435	16,650	22,0618
5,4	29,16	157,464	2,3238	1,7544	16,965	22,9022
5,5	30,25	166,375	2,3452	1,7652	17,279	23,7583
5,6	31,36	175,616	2,3664	1,7758	17,593	24,6301
5,7	32,49	185,193	2,3875	1,7863	17,907	25,5176
5,8	33,64	195,112	2,4083	1,7967	18,221	26,4208
5,9	34,81	205,379	2,4290	1,8070	18,535	27,3397
6,0	36,00	216,000	2,4495	1,8171	18,850	28,2743
6,1	37,21	226,981	2,4698	1,8272	19,164	29,2247
6,2	38,44	238,328	2,4900	1,8371	19,478	30,1907
6,3	39,69	250,047	2,5100	1,8469	19,792	31,1725
6,4	40,96	262,144	2,5298	1,8566	20,106	32,1699
6,5	42,25	274,625	2,5495	1,8663	20,420	33,1831
6,6	43,56	287,496	2,5690	1,8758	20,735	34,2119
6,7	44,89	300,763	2,5884	1,8852	21,049	35,2565
6,8	46,24	314,432	2,6077	1,8945	21,363	36,3168
6,9	47,61	328,509	2,6268	1,9038	21,677	37,3928
7,0	49,00	343,000	2,6458	1,9129	21,991	38,4845
7,1	50,41	357,911	2,6646	1,9220	22,305	39,5919
7,2	51,84	373,248	2,6833	1,9310	22,619	40,7150
7,3	53,29	389,017	2,7019	1,9399	22,934	41,8539
7,4	54,76	405,224	2,7203	1,9487	23,248	43,0084
7,5	56,25	421,875	2,7386	1,9574	23,562	44,1786
7,6	57,76	438,976	2,7568	1,9661	23,876	45,3646
7,7	59,29	456,533	2,7749	1,9747	24,190	46,5663
7,8	60,84	474,552	2,7928	1,9832	24,504	47,7836
7,9	62,41	493,039	2,8107	1,9916	24,819	49,0167
8,0	64,00	512,000	2,8284	2,0000	25,133	50,2655
8,1	65,61	531,441	2,8461	2,0083	25,447	51,5300
8,2	67,24	551,368	2,8636	2,0165	25,761	52,8102
8,3	68,89	571,787	2,8810	2,0247	26,075	54,1061
8,4	70,56	592,704	2,8983	2,0328	26,389	55,4177
8,5	72,25	614,125	2,9155	2,0408	26,704	56,7450
8,6	73,96	636,056	2,9326	2,0488	27,018	58,0880
8,7	75,69	658,503	2,9496	2,0567	27,332	59,4468
8,8	77,44	681,472	2,9665	2.0646	27,646	60,8212
8,9	79,21	704,969	2,9833	2,0724	27,960	62,2114
9,0	81,00	729,000	3,0000	2,0801	28,274	63,6173
9,1	82,81	753,571	3,0166	2,0878	28,588	65,0388
9,2	84,64	778,688	3,0332	2,0954	28,903	66,4761
9,3	86,49	804,357	3,0496	2,1029	29,217	67,9291
9,4	88,36	830,584	3,0659	2,1105	29,531	69,3978
9,5	90,25	857,375	3,0822	2,1179	29,845	70,8822
9,6	92,16	884,736	3,0984	2,1253	30,159	72,3823
9,7	94,09	912,673	3,1145	2,1327	30,473	73,8981
9,8	96,04	941,192	3,1305	2,1400	30,788	75,4296
9,9	98,01	970,299	3,1464	2,1472	31,102	76,9769
10,0	100,00	1000,000	3,1623	2,1544	31,416	78,5398

10—15

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$n \cdot \pi$	$\frac{n^2 \pi}{4}$
10,0	100,00	1000,000	3,1623	2,1544	31,416	78,5398
10,1	102,01	1030,301	3,1780	2,1616	31,730	80,1185
10,2	104,04	1061,208	3,1937	2,1687	32,044	81,7128
10,3	106,09	1092,727	3,2094	2,1757	32,358	83,3229
10,4	108,16	1124,864	3,2249	2,1828	32,673	84,9487
10,5	110,25	1157,625	3,2404	2,1898	32,987	86,5901
10,6	112,36	1191,016	3,2558	2,1967	33,301	88,2473
10,7	114,49	1225,043	3,2711	2,2036	33,615	89,9202
10,8	116,64	1259,712	3,2863	2,2104	33,929	91,6088
10,9	118,81	1295,029	3,3015	2,2172	34,243	93,3132
11,0	121,00	1331,000	3,3166	2,2239	34,558	95,0332
11,1	123,21	1367,631	3,3317	2,2307	34,872	96,7689
11,2	125,44	1404,928	3,3466	2,2374	35,186	98,5203
11,3	127,69	1442,897	3,3615	2,2441	35,500	100,287
11,4	129,96	1481,544	3,3764	2,2506	35,814	102,070
11,5	132,25	1520,875	3,3912	2,2572	36,128	103,869
11,6	134,56	1560,896	3,4059	2,2637	36,442	105,683
11,7	136,89	1601,613	3,4205	2,2702	36,757	107,513
11,8	139,24	1643,032	3,4351	2,2766	37,071	109,359
11,9	141,61	1685,159	3,4496	2,2831	37,385	111,220
12,0	144,00	1728,000	3,4641	2,2894	37,699	113,097
12,1	146,41	1771,561	3,4785	2,2957	38,013	114,990
12,2	148,84	1815,848	3,4928	2,3021	38,327	116,899
12,3	151,29	1860,867	3,5071	2,3084	38,642	118,823
12,4	153,76	1906,624	3,5214	2,3146	38,956	120,763
12,5	156,25	1953,125	3,5355	2,3208	39,270	122,718
12,6	158,76	2000,376	3,5496	2,3270	39,584	124,690
12,7	161,29	2048,383	3,5637	2,3331	39,898	126,677
12,8	163,84	2097,152	3,5777	2,3392	40,212	128,680
12,9	166,41	2146,689	3,5917	2,3453	40,527	130,698
13,0	169,00	2197,000	3,6056	2,3513	40,841	132,732
13,1	171,61	2248,091	3,6194	2,3573	41,155	134,782
13,2	174,24	2299,968	3,6332	2,3633	41,469	136,848
13,3	176,89	2352,637	3,6469	2,3693	41,783	138,929
13,4	179,56	2406,104	3,6606	2,3752	42,097	141,026
13,5	182,25	2460,375	3,6742	2,3811	42,412	143,139
13,6	184,96	2515,456	3,6878	2,3870	42,726	145,267
13,7	187,69	2571,353	3,7014	2,3928	43,040	147,411
13,8	190,44	2628,072	3,7148	2,3986	43,354	149,571
13,9	193,21	2685,619	3,7283	2,4044	43,668	151,747
14,0	196,00	2744,000	3,7417	2,4101	43,982	153,938
14,1	198,81	2803,221	3,7550	2,4159	44,296	156,145
14,2	201,64	2863,288	3,7683	2,4216	44,611	158,368
14,3	204,49	2924,207	3,7815	2,4272	44,925	160,606
14,4	207,36	2985,984	3,7947	2,4329	45,239	162,860
14,5	210,25	3048,625	3,8079	2,4385	45,553	165,130
14,6	213,16	3112,136	3,8210	2,4441	45,867	167,415
14,7	216,09	3176,523	3,8341	2,4497	46,181	169,717
14,8	219,04	3241,792	3,8471	2,4552	46,496	172,034
14,9	222,01	3307,949	3,8601	2,4607	46,810	174,366
15,0	225,00	3375,000	3,8730	2,4662	47,124	176,715

15—20

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$n \cdot \pi$	$\frac{n^2 \pi}{4}$
15,0	225,00	3375,000	3,8730	2,4662	47,124	176,715
15,1	228,01	3442,951	3,8859	2,4717	47,438	179,079
15,2	231,04	3511,808	3,8987	2,4771	47,752	181,458
15,3	234,09	3581,577	3,9115	2,4825	48,066	183,854
15,4	237,16	3652,264	3,9243	2,4879	48,381	186,265
15,5	240,25	3723,875	3,9370	2,4933	48,695	188,692
15,6	243,36	3796,416	3,9497	2,4987	49,009	191,134
15,7	246,49	3869,893	3,9623	2,5040	49,323	193,593
15,8	249,64	3944,312	3,9749	2,5093	49,637	196,067
15,9	252,81	4019,679	3,9875	2,5146	49,951	198,557
16,0	256,00	4096,000	4,0000	2,5198	50,265	201,062
16,1	259,21	4173,281	4,0125	2,5251	50,580	203,583
16,2	262,44	4251,528	4,0249	2,5303	50,894	206,120
16,3	265,69	4330,747	4,0373	2,5355	51,208	208,672
16,4	268,96	4410,944	4,0497	2,5407	51,522	211,241
16,5	272,25	4492,125	4,0620	2,5458	51,836	213,825
16,6	275,56	4574,296	4,0743	2,5509	52,150	216,424
16,7	278,89	4657,463	4,0866	2,5561	52,465	219,040
16,8	282,24	4741,632	4,0988	2,5612	52,779	221,671
16,9	285,61	4826,809	4,1110	2,5662	53,093	224,318
17,0	289,00	4913,000	4,1231	2,5713	53,407	226,980
17,1	292,41	5000,211	4,1352	2,5763	53,721	229,658
17,2	295,84	5088,448	4,1473	2,5813	54,035	232,352
17,3	299,29	5177,717	4,1593	2,5863	54,350	235,062
17,4	302,76	5268,024	4,1713	2,5913	54,664	237,787
17,5	306,25	5359,375	4,1833	2,5962	54,978	240,528
17,6	309,76	5451,776	4,1952	2,6012	55,292	243,285
17,7	313,29	5545,233	4,2071	2,6061	55,606	246,057
17,8	316,84	5639,752	4,2190	2,6110	55,920	248,846
17,9	320,41	5735,339	4,2308	2,6159	56,235	251,649
18,0	324,00	5832,000	4,2426	2,6207	56,549	254,469
18,1	327,61	5929,741	4,2544	2,6256	56,863	257,304
18,2	331,24	6028,568	4,2661	2,6304	57,177	260,155
18,3	334,89	6128,487	4,2778	2,6352	57,491	263,022
18,4	338,56	6229,504	4,2895	2,6400	57,805	265,904
18,5	342,25	6331,625	4,3012	2,6448	58,119	268,803
18,6	345,96	6434,856	4,3128	2,6495	58,434	271,716
18,7	349,69	6539,203	4,3243	2,6543	58,748	274,646
18,8	353,44	6644,672	4,3359	2,6590	59,062	277,591
18,9	357,21	6751,269	4,3474	2,6637	59,376	280,552
19,0	361,00	6859,000	4,3589	2,6684	59,690	283,529
19,1	364,81	6967,871	4,3704	2,6731	60,004	286,521
19,2	368,64	7077,888	4,3818	2,6777	60,319	289,529
19,3	372,49	7189,057	4,3932	2,6824	60,633	292,553
19,4	376,36	7301,384	4,4045	2,6870	60,947	295,592
19,5	380,25	7414,875	4,4159	2,6916	61,261	298,648
19,6	384,16	7529,536	4,4272	2,6962	61,575	301,719
19,7	388,09	7645,373	4,4385	2,7008	61,889	304,805
19,8	392,04	7762,392	4,4497	2,7053	62,204	307,907
19,9	396,01	7880,599	4,4609	2,7099	62,518	311,026
20,0	400,00	8000,000	4,4721	2,7144	62,832	314,159

20—25

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$n . \pi$	$\frac{n^2 \pi}{4}$
20,0	400,00	8 000,000	4,4721	2,7144	62,832	314,159
20,1	404,01	8 120,601	4,4833	2,7189	63,146	317,309
20,2	408,04	8 242,408	4,4944	2,7234	63,460	320,474
20,3	412,09	8 365,427	4,5056	2,7279	63,774	323,655
20,4	416,16	8 489,664	4,5166	2,7324	64,088	326,851
20,5	420,25	8 615,125	4,5277	2,7369	64,403	330,064
20,6	424,36	8 741,816	4,5387	2,7413	64,717	333,292
20,7	428,49	8 869,743	4,5497	2,7457	65,031	336,535
20,8	432,64	8 998,912	4,5607	2,7501	65,345	339,795
20,9	436,81	9 129,329	4,5717	2,7545	65,659	343,070
21,0	441,00	9 261,000	4,5826	2,7589	65,973	346,361
21,1	445,21	9 393,931	4,5935	2,7633	66,288	349,667
21,2	449,44	9 528,128	4,6043	2,7677	66,602	352,989
21,3	453,69	9 663,597	4,6152	2,7720	66,916	356,327
21,4	457,96	9 800,344	4,6260	2,7763	67,230	359,681
21,5	462,25	9 938,375	4,6368	2,7806	67,544	363,050
21,6	466,56	10 077,696	4,6476	2,7850	67,858	366,435
21,7	470,89	10 218,313	4,6583	2,7892	68,173	369,836
21,8	475,24	10 360,232	4,6690	2,7935	68,487	373,253
21,9	479,61	10 503,459	4,6797	2,7978	68,801	376,685
22,0	484,00	10 648,000	4,6904	2,8020	69,115	380,133
22,1	488,41	10 793,861	4,7011	2,8063	69,429	383,596
22,2	492,84	10 941,048	4,7117	2,8105	69,743	387,076
22,3	497,29	11 089,567	4,7223	2,8147	70,058	390,571
22,4	501,76	11 239,424	4,7329	2,8189	70,372	394,081
22,5	506,25	11 390,625	4,7434	2,8231	70,686	397,608
22,6	510,76	11 543,176	4,7539	2,8273	71,000	401,150
22,7	515,29	11 697,083	4,7645	2,8314	71,314	404,708
22,8	519,84	11 852,352	4,7749	2,8356	71,628	408,281
22,9	524,41	12 008,989	4,7854	2,8397	71,942	411,871
23,0	529,00	12 167,000	4,7958	2,8439	72,257	415,476
23,1	533,61	12 326,391	4,8062	2,8480	72,571	419,096
23,2	538,24	12 487,168	4,8166	2,8521	72,885	422,733
23,3	542,89	12 649,337	4,8270	2,8562	73,199	426,385
23,4	547,56	12 812,904	4,8374	2,8603	73,513	430,053
23,5	552,25	12 977,875	4,8477	2,8643	73,827	433,736
23,6	556,96	13 144,256	4,8580	2,8684	74,142	437,435
23,7	561,69	13 312,053	4,8683	2,8724	74,456	441,150
23,8	566,44	13 481,272	4,8785	2,8765	74,770	444,881
23,9	571,21	13 651,919	4,8888	2,8805	75,084	448,627
24,0	576,00	13 824,000	4,8990	2,8845	75,398	452,389
24,1	580,81	13 997,521	4,9092	2,8885	75,712	456,167
24,2	585,64	14 172,488	4,9193	2,8925	76,027	459,961
24,3	590,49	14 348,907	4,9295	2,8965	76,341	463,770
24,4	595,36	14 526,784	4,9396	2,9004	76,655	467,595
24,5	600,25	14 706,125	4,9497	2,9044	76,969	471,435
24,6	605,16	14 886,936	4,9598	2,9083	77,283	475,292
24,7	610,09	15 069,223	4,9699	2,9123	77,597	479,164
24,8	615,04	15 252,992	4,9800	2,9162	77,911	483,051
24,9	620,01	15 438,249	4,9900	2,9201	78,226	486,955
25,0	625,00	15 625,000	5,0000	2,9240	78,540	490,874

25—30

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$n \cdot \pi$	$\frac{n^2 \pi}{4}$
25,0	625,00	15 625,000	5,0000	2,9240	78,540	490,874
25,1	630,01	15 813,251	5,0099	2,9279	78,854	494,809
25,2	635,04	16 003,008	5,0199	2,9318	79,168	498,759
25,3	640,09	16 194,277	5,0299	2,9357	79,482	502,726
25,4	645,16	16 387,064	5,0398	2,9395	79,796	506,707
25,5	650,25	16 581,375	5,0498	2,9434	80,111	510,705
25,6	655,36	16 777,216	5,0596	2,9472	80,425	514,719
25,7	660,49	16 974,593	5,0695	2,9511	80,739	518,748
25,8	665,64	17 173,512	5,0794	2,9549	81,053	522,792
25,9	670,81	17 373,979	5,0892	2,9587	81,367	526,853
26,0	676,00	17 576,000	5,0990	2,9625	81,681	530,929
26,1	681,21	17 779,581	5,1088	2,9663	81,996	535,021
26,2	686,44	17 984,728	5,1186	2,9701	82,310	539,129
26,3	691,69	18 191,447	5,1284	2,9738	82,624	543,252
26,4	696,96	18 399,744	5,1381	2,9776	82,938	547,391
26,5	702,25	18 609,625	5,1478	2,9814	83,252	551,546
26,6	707,56	18 821,096	5,1575	2,9851	83,566	555,716
26,7	712,89	19 034,163	5,1672	2,9888	83,881	559,902
26,8	718,24	19 248,832	5,1769	2,9926	84,195	564,104
26,9	723,61	19 465,109	5,1865	2,9963	84,509	568,322
27,0	729,00	19 683,000	5,1962	3,0000	84,823	572,555
27,1	734,41	19 902,511	5,2058	3,0037	85,137	576,804
27,2	739,84	20 123,648	5,2154	3,0074	85,451	581,069
27,3	745,29	20 346,417	5,2249	3,0111	85,765	585,349
27,4	750,76	20 570,824	5,2345	3,0147	86,080	589,646
27,5	756,25	20 796,875	5,2440	3,0184	86,394	593,957
27,6	761,76	21 024,576	5,2536	3,0221	86,708	598,285
27,7	767,29	21 353,933	5,2631	3,0257	87,022	602,628
27,8	772,84	21 484,952	5,2726	3,0293	87,336	606,987
27,9.	778,41	21 717,639	5,2820	3,0330	87,650	611,362
28,0	784,00	21 952,000	5,2915	3,0366	87,965	615,752
28,1	789,61	22 188,041	5,3009	3,0402	88,279	620,158
28,2	795,24	22 425,768	5,3104	3,0438	88,593	624,580
28,3	800,89	22 665,187	5,3198	3,0474	88,907	629,018
28,4	806,56	22 906,304	5,3292	3,0510	89,221	633,471
28,5	812,25	23 149,125	5,3385	3,0546	89,535	637,940
28,6	817,96	23 393,656	5,3479	3,0581	89,850	642,424
28,7	823,69	23 639,903	5,3572	3,0617	90,164	646,925
28,8	829,44	23 887,872	5,3666	3,0652	90,478	651,441
28,9	835,21	24 137,569	5,3759	3,0688	90,792	655,972
29,0	841,00	24 389,000	5,3852	3,0723	91,106	660,520
29,1	846,81	24 642,171	5,3944	3,0758	91,420	665,083
29,2	852,64	24 897,088	5,4037	3,0794	91,735	669,662
29,3	858,49	25 153,757	5,4129	3,0829	92,049	674,256
29,4	864,36	25 412,184	5,4222	3,0864	92,363	678,867
29,5	870,25	25 672,375	5,4314	3,0899	92,677	683,493
29,6	876,16	25 934,336	5,4406	3,0934	92,991	688,134
29,7	882,09	26 198,073	5,4498	3,0968	93,305	692,792
29,8	888,04	26 463,592	5,4589	3,1003	93,619	697,465
29,9	894,01	26 730,899	5,4681	3,1038	93,934	702,154
30,0	900,00	27 000,000	5,4772	3,1072	94,248	706,858

30—35

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$n \cdot \pi$	$\frac{n^2\pi}{4}$
30,0	900,00	27 000,000	5,4772	3,1072	94,248	706,858
30,1	906,01	27 270,901	5,4863	3,1107	94,562	711,579
30,2	912,04	27 543,608	5,4955	3,1141	94,876	716,315
30,3	918,09	27 818,127	5,5045	3,1176	95,190	721,066
30,4	924,16	28 094,464	5,5136	4,1210	95,504	725,834
30,5	930,25	28 372,625	5,5227	3,1244	95,819	730,617
30,6	936,36	28 652,616	5,5317	3,1278	96,133	735,415
30,7	942,49	28 934,443	5,5408	3,1312	96,447	740,230
30,8	948,64	29 218,112	5,5498	3,1346	96,761	745,060
30,9	954,81	29 503,629	5,5588	3,1380	97,075	749,906
31,0	961,00	29 791,000	5,5678	3,1414	97,389	754,768
31,1	967,21	30 080,231	5,5767	3,1448	97,704	759,645
31,2	973,44	30 371,328	5,5857	3,1481	98,018	764,538
31,3	979,69	30 664,297	5,5946	3,1515	98,332	769,447
31,4	985,96	30 959,144	5,6036	3,1548	98,646	774,371
31,5	992,25	31 255,875	5,6125	3,1582	98,960	779,311
31,6	998,56	31 554,496	5,6214	3,1615	99,274	784,267
31,7	1004,89	31 855,013	5,6303	3,1648	99,588	789,239
31,8	1011,24	32 157,432	5,6391	3,1682	99,903	794,226
31,9	1017,61	32 461,759	5,6480	3,1715	100,22	799,229
32,0	1024,00	32 768,000	5,6569	3,1748	100,53	804,248
32,1	1030,41	33 076,161	5,6657	3,1781	100,85	809,282
32,2	1036,84	33 386,248	5,6745	3,1814	101,16	814,332
32,3	1043,29	33 698,267	5,6833	3,1847	101,47	819,398
32,4	1049,76	34 012,224	5,6921	3,1880	101,79	824,480
32,5	1056,25	34 328,125	5,7009	3,1913	102,10	829,577
32,6	1062,76	34 645,976	5,7096	3,1945	102,42	834,690
32,7	1069,29	34 965,783	5,7184	3,1978	102,73	839,818
32,8	1075,84	35 287,552	5,7271	3,2010	103,04	844,963
32,9	1082,41	35 611,289	5,7359	3,2043	103,36	850,123
33,0	1089,00	35 937,000	5,7446	3,2075	103,67	855,299
33,1	1095,61	36 264,691	5,7533	3,2108	103,99	860,490
33,2	1102,24	36 594,368	5,7619	3,2140	104,30	865,697
33,3	1108,89	36 926,037	5,7706	3,2172	104,62	870,920
33,4	1115,56	37 259,704	5,7792	3,2204	104,93	876,159
33,5	1122,25	37 595,375	5,7879	3,2237	105,24	881,413
33,6	1128,96	37 933,056	5,7966	3,2269	105,56	886,683
33,7	1135,69	38 272,753	5,8052	3,2301	105,87	891,969
33,8	1142,44	38 614,472	5,8138	3,2332	106,19	897,270
33,9	1149,21	38 958,219	5,8224	3,2364	106,50	902,587
34,0	1156,00	39 304,000	5,8310	3,2396	106,81	907,920
34,1	1162,81	39 651,821	5,8395	3,2428	107,13	913,269
34,2	1169,64	40 001,688	5,8481	3,2460	107,44	918,633
34,3	1176,49	40 353,607	5,8566	3,2491	107,76	924,013
34,4	1183,36	40 707,584	5,8652	3,2523	108,07	929,409
34,5	1190,25	41 063,625	5,8737	3,2554	108,38	934,820
34,6	1197,16	41 421,736	5,8822	3,2586	108,70	940,247
34,7	1204,09	41 781,923	5,8907	3,2617	109,01	945,690
34,8	1211,04	12 144,192	5,8992	3,2648	109,33	951,149
34,9	1218,01	42 508,549	5,9076	3,2679	109,64	956,623
35,0	1225,00	42 875,000	5,9161	3,2711	109,96	962,113

35—40

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$n \cdot \pi$	$\frac{n^2\pi}{4}$
35,0	1225,00	42 875,000	5,9161	3,2711	109,96	962,113
35,1	1232,01	43 243,551	5,9245	3,2742	110,27	967,618
35,2	1239,04	43 614,208	5,9330	3,2773	110,58	973,140
35,3	1246,09	43 986,977	5,9414	3,2804	110,90	978,677
35,4	1253,16	44 361,864	5,9498	3,2835	111,21	984,230
35,5	1260,25	44 738,875	5,9582	3,2866	111,53	989,798
35,6	1267,36	45 118,016	5,9666	3,2897	111,84	995,382
35,7	1274,49	45 499,293	5,9749	3,2927	112,15	1000,98
35,8	1281,64	45 882,712	5,9833	3.2958	112,47	1006,60
35,9	1288,81	46 268,279	5,9917	3,2989	112,78	1012,23
36,0	1296,00	46 656,000	6,0000	3,3019	113,10	1017,88
36,1	1303,21	47 045,881	6,0083	3,3050	113,41	1023,54
36,2	1310,44	47 437,928	6,0116	3,3080	113,73	1029,22
36,3	1317,69	47 832,147	6,0249	3,3111	114,04	1034,91
36,4	1324,96	48 228,544	6,0332	3,3141	114,35	1040,62
36,5	1332,25	48 627,125	6,0415	3,3171	114,67	1046,35
36,6	1339,56	49 027,896	6,0498	3,3202	114,98	1052,09
36,7	1346,89	49 430,863	6,0581	3,3232	115,30	1057,84
36,8	1354,24	49 836,032	6,0663	3,3262	115,61	1063,62
36,9	1361,61	50 243,409	6,0745	3,3292	115,92	1069,41
37,0	1369,00	50 653,000	6,0828	3,3322	116,24	1075,21
37,1	1376,41	51 064,811	6,0910	3,3352	116,55	1081,03
37,2	1383,84	51 478,848	6,0992	3,3382	116,87	1086,87
37,3	1391,29	51 895,117	6,1074	3,3412	117,18	1092,72
37,4	1398,76	52 313,624	6,1156	3,3442	117,50	1098,58
37,5	1406,25	52 734,375	6,1237	3,3472	117,81	1104,47
37,6	1413,76	53 157,376	6,1319	3,3501	118,12	1110,36
37,7	1421,29	53 582,633	6,1400	3,3531	118,44	1116,28
37,8	1428,84	54 010,152	6,1482	3,3561	118,75	1122,21
37,9	1436,41	54 439,939	6,1563	3,3590	119,07	1128,15
38,0	1444,00	54 872,000	6,1644	3,3620	119,38	1134,11
38,1	1451,61	55 306,341	6,1725	3,3649	119,69	1140,09
38,2	1459,24	55 742,968	6,1806	3,3679	120,01	1146,08
38,3	1466,89	56 181,887	6,1887	3,3708	120,32	1152,09
38,4	1474,56	56 623,104	6,1968	3,3737	120,64	1158,12
38,5	1482,25	57 066,625	6.2048	3,3767	120,95	1164,16
38,6	1489,96	57 512,456	6,2129	3,3796	121,27	1170,21
38,7	1497,69	57 960,603	6,2209	3,3825	121,58	1176,28
38,8	1505,44	58 411,072	6,2290	3,3854	121,89	1182,37
38,9	1513,21	58 863,869	6,2370	3,3883	122,21	1188,47
39,0	1521,00	59 319,000	6,2450	3,3912	122,52	1194,59
39,1	1528,81	59 776,471	6,2530	3,3941	122,84	1200,72
39,2	1536,64	60 236,288	6,2610	3,3970	123,15	1206,87
39,3	1544,49	60 698,457	6,2690	3,3999	123,46	1213,04
39,4	1552,36	61 162,984	6,2769	3,4028	123,78	1219,22
39,5	1560,25	61 629,875	6,2849	3,4056	124,09	1225,42
39,6	1568,16	62 099,136	6,2929	3,4085	124,41	1231,63
39,7	1576,09	62 570,773	6,3008	3,4114	124,72	1237,86
39,8	1584,04	63 044,792	6,3087	3,4142	125,04	1244,10
39,9	1592,01	63 521,199	6,3166	3,4171	125,35	1250,36
40,0	1600,00	64 000,000	6,3246	3,4200	125,66	1256,64

40—45

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$n \cdot \pi$	$\frac{n^2\pi}{4}$
40,0	1600,00	64 000,000	6,3246	3,4200	125,66	1256,64
40,1	1608,01	64 481,201	6,3325	3,4228	125,98	1262,93
40,2	1616,04	64 964,808	6,3403	3,4256	126,29	1269,23
40,3	1624,09	65 450,827	6,3482	3,4285	126,61	1275,56
40,4	1632,16	65 939,264	6,3561	3,4313	126,92	1281,90
40,5	1640,25	66 430,125	6,3640	3,4341	127,23	1288,25
40,6	1648,36	66 923,416	6,3718	3,4370	127,55	1294,62
40,7	1656,49	67 419,143	6,3797	3,4398	127,86	1301,00
40,8	1664,64	67 917,312	6,3875	3,4426	128,18	1307,41
40,9	1672,81	68 417,929	6,3953	3,4454	128,49	1313,82
41,0	1681,00	68 921,000	6,4031	3,4482	128,81	1320,25
41,1	1689,21	69 426,531	6,4109	3,4510	129,12	1326,70
41,2	1697,44	69 934,528	6,4187	3,4538	129,43	1333,17
41,3	1705,69	70 444,997	6,4265	3,4566	129,75	1339,65
41,4	1713,96	70 957,944	6,4343	3,4594	130,06	1346,14
41,5	1722,25	71 473,375	6,4420	3,4622	130,38	1352,65
41,6	1730,56	71 991,296	6,4498	3,4650	130,69	1359,18
41,7	1738,89	72 511,713	6,4576	3,4677	131,00	1365,72
41,8	1747,24	73 034,623	6,4653	3,4705	131,32	1372,28
41,9	1755,61	73 560,059	6,4730	3,4733	131,63	1378,85
42,0	1764,00	74 088,000	6,4807	3,4760	131,95	1385,44
42,1	1772,41	74 618,461	6,4885	3,4788	132,26	1392,05
42,2	1780,84	75 151,448	6,4961	3,4815	132,58	1398,67
42,3	1789,29	75 686,967	6,5038	3,4843	132,89	1405,31
42,4	1797,76	76 225,024	6,5115	3,4870	133,20	1411,96
42,5	1806,25	76 765,625	6,5192	3,4898	133,52	1418,63
42,6	1814,76	77 308,776	6,5269	3,4925	133,83	1425,31
42,7	1823,29	77 854,483	6,5345	3,4952	134,15	1432,01
42,8	1831,84	78 402,752	6,5422	3,4980	134,46	1438,72
42,9	1840,41	78 953,589	6,5498	3,5007	134,77	1445,45
43,0	1849,00	79 507,000	6,5574	3,5034	135,09	1452,20
43,1	1857,61	80 062,991	6,5651	3,5061	135,40	1458,96
43,2	1866,24	80 621,568	6,5727	3,5088	135,72	1465,74
43,3	1874,89	81 182,737	6,5803	3,5115	136,03	1472,54
43,4	1883,56	81 746,504	6,5879	3,5142	136,35	1479,34
43,5	1892,25	82 312,875	6,5955	3,5169	136,66	1486,17
43,6	1900,96	82 881,856	6,6030	3,5196	136,97	1493,01
43,7	1909,69	83 453,453	6,6106	3,5223	137,29	1499,87
43,8	1918,44	84 027,672	6,6182	3,5250	137,60	1506,74
43,9	1927,21	84 604,519	6,6257	3,5277	137,92	1513,63
44,0	1936,00	85 184,000	6,6332	3,5303	138,23	1520,53
44,1	1944,81	85 766,121	6,6408	3,5330	138,54	1527,45
44,2	1953,64	86 350,888	6,6483	3,5357	138,86	1534,39
44,3	1962,49	86 938,307	6,6558	3,5384	139,17	1541,34
44,4	1971,36	87 528,384	6,6633	3,5410	139,49	1548,30
44,5	1980,25	88 121,125	6,6708	3,5437	139,80	1555,28
44,6	1989,16	88 716,536	6,6783	3,5463	140,12	1562,28
44,7	1998,09	89 314,623	6,6858	3,5490	140,43	1569,30
44,8	2007,04	89 915,392	6,6933	3,5516	140,74	1576,33
44,9	2016,01	90 518,849	6,7007	3,5543	141,06	1583,37
45,0	2025,00	91 125,000	6,7082	3,5569	141,37	1590,43

45—50

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$n . \pi$	$\frac{n^2 \pi}{4}$
45,0	2025,00	91 125,000	6,7082	3,5569	141,37	1590,43
45,1	2034,01	91 733,851	6,7157	3,5595	141,69	1597,51
45,2	2043,04	92 345,408	6,7231	3,5622	142,00	1604,60
45,3	2052,09	92 959,677	6,7305	3,5648	142,31	1611,71
45,4	2061,16	93 576,664	6,7380	3,5674	142,63	1618,83
45,5	2070,25	94 196,375	6,7454	3,5700	142,94	1625,97
45,6	2079,36	94 818,816	6,7528	3,5726	143,26	1633,13
45,7	2088,49	95 443,993	6,7602	3,5752	143,57	1640,30
45,8	2097,64	96 071,912	6,7676	3,5778	143,88	1647,48
45,9	2106,81	96 702,579	6,7750	3,5805	144,20	1654,68
46,0	2116,00	97 336,000	6,7823	3,5830	144,51	1661,90
46,1	2125,21	97 972,181	6,7897	3,5856	144,83	1669,14
46,2	2134,44	98 611,128	6,7971	3,5882	145,14	1676,39
46,3	2143,69	99 252,847	6,8044	3,5908	145,46	1683,65
46,4	2152,96	99 897,344	6,8118	3,5934	145,77	1690,93
46,5	2162,25	100 544,625	6,8191	3,5960	146,08	1698,23
46,6	2171,56	101 194,696	6,8264	3,5986	146,40	1705,54
46,7	2180,89	101 847,563	6,8337	3,6011	146,71	1712,87
46,8	2190,24	102 503,232	6,8411	3,6037	147,03	1720,21
46,9	2199,61	103 161,709	6,8484	3,6063	147,34	1727,57
47,0	2209,00	103 823,000	6,8557	3,6088	147,65	1734,94
47,1	2218,41	104 487,111	6,8629	3,6114	147,97	1742,34
47,2	2227,84	105 154,048	6,8702	3,6139	148,28	1749,74
47,3	2237,29	105 823,817	6,8775	3,6165	148,60	1757,16
47,4	2246,76	106 496,424	6,8848	3,6190	148,91	1764,60
47,5	2256,25	107 171,875	6,8920	3,6216	149,23	1772,05
47,6	2265,76	107 850,176	6,8993	3,6241	149,54	1779,52
47,7	2275,29	108 531,333	6,9065	3,6267	149,85	1787,01
47,8	2284,84	109 215,352	6,9138	3,6292	150,17	1794,51
47,9	2294,41	109 902,239	6,9209	3,6317	150,48	1802,03
48,0	2304,00	110 592,000	6,9282	3,6342	150,80	1809,56
48,1	2313,61	111 284,641	6,9354	3,6368	151,11	1817,11
48,2	2323,24	111 980,168	6,9426	3,6393	151,42	1824,67
48,3	2332,89	112 678,587	6,9498	3,6418	151,74	1832,25
48,4	2342,56	113 379,904	6,9570	3,6443	152,05	1839,84
48,5	2352,25	114 084,125	6,9642	3,6468	152,37	1847,45
48,6	2361,96	114 791,256	6,9714	3,6493	152,68	1855,08
48,7	2371,69	115 501,303	6,9785	3,6518	153,00	1862,72
48,8	2381,44	116 214,272	6,9857	3,6543	153,31	1870,38
48,9	2391,21	116 930,169	6,9929	3,6568	153,62	1878,05
49,0	2401,00	117 649,000	7,0000	3,6593	153,94	1885,74
49,1	2410,81	118 370,771	7,0071	3,6618	154,25	1893,45
49,2	2420,64	119 095 488	7,0143	3,6643	154,57	1901,17
49,3	2430,49	119 823,157	7,0214	3,6668	154,88	1908,90
49,4	2440,36	120 553,784	7,0285	3,6692	155,19	1916,65
49,5	2450,25	121 287,375	7,0356	3,6717	155,51	1924,42
49,6	2460,16	122 023,936	7,0427	3,6742	155,82	1932,31
49,7	2470,09	122 763,473	7,0498	3,6767	156,14	1940,00
49,8	2480,04	123 505,992	7,0569	3,6791	156,45	1947,82
49,9	2490,01	124 251,499	7,0640	3,6816	156,77	1955,65
50,0	2500,00	125 000,000	7,0711	3,6840	157,08	1963,50

50—55

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$n \cdot \pi$	$\frac{n^2\pi}{4}$
50,0	2500,00	125 000,000	7,0711	3,6840	157,08	1963,50
50,1	2510,01	125 751,501	7,0781	3,6865	157,39	1971,36
50,2	2520,04	126 506,008	7,0852	3,6889	157,71	1979,23
50,3	2530,09	127 263,527	7,0922	3,6914	158,02	1987,13
50,4	2540,16	128 024,064	7,0993	3,6938	158,34	1995,04
50,5	2550,25	128 787,625	7,1063	3,6963	158,65	2002,96
50,6	2560,36	129 554,216	7,1134	3,6987	158,96	2010,90
50,7	2570,49	130 323,843	7,1204	3,7011	159,28	2018,86
50,8	2580,64	131 096,512	7,1274	3,7036	159,59	2026,83
50,9	2590,81	131 872,229	7,1344	3,7060	159,91	2034,82
51,0	2601,00	132 651,000	7,1414	3,7084	160,22	2042,82
51,1	2611,21	133 432,831	7,1484	3,7109	160,54	2050,84
51,2	2621,44	134 217,728	7,1554	3,7133	160,85	2058,87
51,3	2631,69	135 005,697	7,1624	3,7157	161,16	2066,92
51,4	2641,96	135 796,744	7,1694	3,7181	161,48	2074,99
51,5	2652,25	136 590,875	7,1764	3,7205	161,79	2083,07
51,6	2662,56	137 388,096	7,1833	3,7229	162,11	2091,17
51,7	2672,89	138 188,413	7,1903	3,7253	162,42	2099,28
51,8	2683,24	138 991,832	7,1972	3,7277	162,73	2107,41
51,9	2693,61	139 798,359	7,2042	3,7301	163,05	2115,56
52,0	2704,00	140 608,000	7,2111	3,7325	163,36	2123,72
52,1	2714,41	141 420,761	7,2180	3,7349	163,68	2131,89
52,2	2724,84	142 236,648	7,2250	3,7373	163,99	2140,08
52,3	2735,29	143 055,667	7,2319	3,7397	164,31	2148,29
52,4	2745,76	143 877,824	7,2388	3,7421	164,62	2156,51
52,5	2756,25	144 703,125	7,2457	3,7444	164,93	2164,75
52,6	2766,76	145 531,576	7,2526	3,7468	165,25	2173,01
52,7	2777,29	146 363,183	7,2595	3,7492	165,56	2181,28
52,8	2787,84	147 197,952	7,2664	3,7516	165,88	2189,56
52,9	2798,41	148 035,889	7,2732	3,7539	166,19	2197,87
53,0	2809,00	148 877,000	7,2801	3,7563	166,50	2206,18
53,1	2819,61	149 721,291	7,2870	3,7586	166,82	2214,52
53,2	2830,24	150 568,768	7,2938	3,7610	167,13	2222,87
53,3	2840,89	151 419,437	7,3007	3,7634	167,45	2231,23
53,4	2851,56	152 273,304	7,3075	3,7657	167,76	2239,61
53,5	2862,25	153 130,375	7,3144	3,7681	168,08	2248,01
53,6	2872,96	153 990,656	7,3212	3,7704	168,39	2256,42
53,7	2883,69	154 854,153	7,3280	3,7728	168,70	2264,84
53,8	2894,44	155 720,872	7,3348	3,7751	169,02	2273,29
53,9	2905,21	156 590,819	7,3417	3,7774	169,33	2281,75
54,0	2916,00	157 464,000	7,3485	3,7798	169,65	2290,22
54,1	2926,81	158 340,421	7,3553	3,7821	169,96	2298,71
54,2	2937,64	159 220,088	7,3621	3,7844	170,27	2307,22
54,3	2948,49	160 103,007	7,3689	3,7868	170,59	2315,74
54,4	2959,36	160 989,184	7,3756	3,7891	170,90	2324,28
54,5	2970,25	161 878,625	7,3824	3,7914	171,22	2332,83
54,6	2981,16	162 771,336	7,3892	3,7937	171,53	2341,40
54,7	2992,09	163 667,323	7,3959	3,7960	171,85	2349,98
54,8	3003,04	164 566,592	7,4027	3,7983	172,16	2358,58
54,9	3014,01	165 469,149	7,4095	3,8006	172,47	2367,20
55,0	3025,00	166 375,000	7,4162	3,8030	172,79	2375,83

55—60

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$n \cdot \pi$	$\frac{n^2\pi}{4}$
55,0	3025,00	166 375,000	7,4162	3,8030	172,79	2375,83
55,1	3036,01	167 284,151	7,4229	3,8053	173,10	2384,48
55,2	3047,04	168 196,608	7,4297	3,8076	173,42	2393,14
55,3	3058,09	169 112,377	7,4364	3,8099	173,73	2401,82
55,4	3069,16	170 031,464	7,4431	3,8121	174,04	2410,41
55,5	3080,25	170 953,875	7,4498	3,8144	174,36	2419,22
55,6	3091,36	171 879,616	7,4565	3,8167	174,67	2427,95
55,7	3102,49	172 808,693	7,4632	3,8190	174,99	2436,69
55,8	3113,64	173 741,112	7,4699	3,8213	175,30	2445,45
55,9	3124,81	174 676,879	7,4766	3,8236	175,62	2454,22
56,0	3136,00	175 616,000	7,4833	3,8259	175,93	2463,01
56,1	3147,21	176 558,481	7,4900	3,8281	176,24	2471,81
56,2	3158,44	177 504,328	7,4967	3,8304	176,56	2480,63
56,3	3169,69	178 453,547	7,5033	3,8327	176,87	2489,47
56,4	3180,96	179 406,144	7,5100	3,8349	177,19	2498,32
56,5	3192,25	180 362,125	7,5166	3,8372	177,50	2507,19
56,6	3203,56	181 321,496	7,5233	3,8395	177,81	2516,07
56,7	3214,89	182 284,263	7,5299	3,8417	178,13	2524,97
56,8	3226,24	183 250,432	7,5366	3,8440	178,44	2533,88
56,9	3237,61	184 220,009	7,5432	3,8462	178,76	2542,81
57,0	3249,00	185 193,000	7,5498	3,8485	179,07	2551,76
57,1	3260,41	186 169,411	7,5565	3,8508	179,38	2560,72
57,2	3271,84	187 149,218	7,5631	3,8530	179,70	2569,70
57,3	3283,29	188 132,517	7,5697	3,8552	180,01	2578,69
57,4	3294,76	189 119,224	7,5763	3,8575	180,33	2587,70
57,5	3306,25	190 109,375	7,5829	3,8597	180,64	2596,72
57,6	3317,76	191 102,976	7,5895	3,8620	180,96	2605,76
57,7	3329,29	192 100,033	7,5961	3,8642	181,27	2614,82
57,8	3340,84	193 100,552	7,6026	3,8664	181,58	2623,89
57,9	3352,41	194 104,539	7,6092	3,8687	181,90	2632,98
58,0	3364,00	195 112,000	7,6158	3,8709	182,21	2642,08
58,1	3375,61	196 122,941	7,6223	3,8731	182,53	2651,20
58,2	3387,24	197 137,368	7,6289	3,8753	182,84	2660,33
58,3	3398,89	198 155,287	7,6354	3,8775	183,15	2669,48
58,4	3410,56	199 176,704	7,6420	3,8798	183,47	2678,65
58,5	3422,25	200 201,625	7,6485	3,8820	183,78	2687,83
58,6	3433,96	201 230,056	7,6551	3,8842	184,10	2697,03
58,7	3445,69	202 262,003	7,6616	3,8864	184,41	2706,24
58,8	3457,44	203 297,472	7,6681	3,8886	184,73	2715,47
58,9	3469,21	204 336,469	7,6746	3,8908	185,04	2724,71
59,0	3481,00	205 379,000	7,6811	3,8930	185,35	2733,97
59,1	3492,81	206 425,071	7,6877	3,8952	185,67	2743,25
59,2	3504,64	207 474,688	7,6942	3,8974	185,98	2752,54
59,3	3516,49	208 527,857	7,7006	3,8996	186,30	2761,84
59,4	3528,36	209 584,584	7,7071	3,9018	186,61	2771,17
59,5	3540,25	210 644,875	7,7136	3,9040	186,92	2780,51
59,6	3552,16	211 708,736	7,7201	3,9061	187,24	2789,86
59,7	3564,09	212 776,173	7,7266	3,9083	187,55	2799,23
59,8	3576,04	213 847,192	7,7330	3,9105	187,87	2808,62
59,9	3588,01	214 921,799	7,7395	3,9127	188,18	2818,02
60,0	3600,00	216 000,000	7,7460	3,9149	188,50	2827,43

60—65

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$n \cdot \pi$	$\frac{n^2\pi}{4}$
60,0	3600,00	216 000,000	7,7460	3,9149	188,50	2827,43
60,1	3612,01	217 081,801	7,7524	3,9170	188,81	2836,87
60,2	3624,04	218 167,208	7,7589	3,9192	189,12	2846,31
60,3	3636,09	219 256,227	7,7653	3,9214	189,44	2855,78
60,4	3648,16	220 348,864	7,7717	3,9235	189,75	2865,26
60,5	3660,25	221 445,125	7,7782	3,9257	190,07	2874,75
60,6	3672,36	222 545,016	7,7846	3,9279	190,38	2884,26
60,7	3684,49	223 648,543	7,7910	3,9300	190,69	2893,79
60,8	3696,64	224 755,712	7,7974	3,9322	191,01	2903,33
60,9	3708,81	225 866,529	7,8038	3,9343	191,32	2912,89
61,0	3721,00	226 981,000	7,8102	3,9365	191,64	2922,47
61,1	3733,21	228 099,131	7,8166	3,9386	191,95	2932,06
61,2	3745,44	229 220,928	7,8230	3,9408	192,27	2941,66
61,3	3757,69	230 346,397	7,8294	3,9429	192,58	2951,28
61,4	3769,96	231 475,544	7,8358	3,9451	192,89	2960,92
61,5	3782,25	232 608,375	7,8422	3,9472	193,21	2970,57
61,6	3794,56	233 744,896	7,8486	3,9494	193,52	2980,24
61,7	3806,89	234 885,113	7,8549	3,9515	193,84	2989,92
61,8	3819,24	236 029,032	7,8613	3,9536	194,15	2999,62
61,9	3831,61	237 176,659	7,8677	3,9558	194,46	3009,34
62,0	3844,00	238 328,000	7,8740	3,9579	194,78	3019,07
62,1	3856,41	239 483,061	7,8804	3,9600	195,09	3028,82
62,2	3868,84	240 641,848	7,8867	3,9621	195,41	3038,58
62,3	3881,29	241 804,367	7,8930	3,9643	195,72	3048,36
62,4	3893,76	242 970,624	7,8994	3,9664	196,04	3058,15
62,5	3906,25	244 140,625	7,9057	3,9685	196,35	3067,96
62,6	3918,76	245 314,376	7,9120	3,9706	196,66	3077,79
62,7	3931,29	246 491,883	7,9183	3,9727	196,98	3087,63
62,8	3943,84	247 673,152	7,9246	3,9748	197,29	3097,48
62,9	3956,41	248 858,189	7,9310	3,9770	197,61	3107,36
63,0	3969,00	250 047,000	7,9373	3,9791	197,92	3117,25
63,1	3981,61	251 239,591	7,9436	3,9812	198,23	3127,15
63,2	3994,24	252 435,968	7,9498	3,9833	198,55	3137,07
63,3	4006,89	253 636,137	7,9561	3,9854	198,86	3147,00
63,4	4019,56	254 840,104	7,9624	3,9875	199,18	3156,96
63,5	4032,25	256 047,875	7,9687	3,9896	199,49	3166,92
63,6	4044,96	257 259,456	7,9750	3,9916	199,81	3176,90
63,7	4057,69	258 474,853	7,9812	3,9937	200,12	3186,90
63,8	4070,44	259 694,072	7,9875	3,9958	200,43	3196,92
63,9	4083,21	260 917,119	7,9937	3,9979	200,75	3206,95
64,0	4096,00	262 144,000	8,0000	4,0000	201,06	3216,99
64,1	4108,81	263 374,721	8,0062	4,0021	201,38	3227,05
64,2	4121,64	264 609,288	8,0125	4,0042	201,69	3237,13
64,3	4134,49	265 847,707	8,0187	4,0062	202,00	3247,22
64,4	4147,36	267 089,984	8,0250	4,0083	202,32	3257,33
64,5	4160,25	268 336,125	8,0312	4,0104	202,63	3267,45
64,6	4173,16	269 586,136	8,0374	4,0125	202,95	3277,59
64,7	4186,09	270 840,023	8,0436	4,0145	203,26	3287,75
64,8	4199,04	272 097,792	8,0498	4,0166	203,58	3297,92
64,9	4212,01	273 359,449	8,0561	4,0187	203,89	3308,10
65,0	4225,00	274 625,000	8,0623	4,0207	204,20	3318,31

65—70

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$n \cdot \pi$	$\frac{n^2\pi}{4}$
65,0	4225,00	274 625,000	8,0623	4,0207	204,20	3318,31
65,1	4238,01	275 894,451	8,0685	4,0228	204,52	3328,53
65,2	4251,04	277 167,808	8,0747	4,0248	204,83	3338,76
65,3	4264,09	278 445,077	8,0808	4,0269	205,15	3349,01
65,4	4277,16	279 726,264	8,0870	4,0290	205,46	3359,27
65,5	4290,25	281 011,375	8,0932	4,0310	205,78	3369,55
65,6	4303,36	282 300,416	8,0994	4,0331	206,09	3379,85
65,7	4316,49	283 593,393	8,1056	4,0351	206,40	3390,16
65,8	4329,64	284 890,312	8,1117	4,0372	206,72	3400,49
65,9	4342,81	286 191,179	8,1179	4,0392	207,03	3410,83
66,0	4356,00	287 496,000	8,1240	4,0412	207,35	3421,19
66,1	4369,21	288 804,781	8,1302	4,0433	207,66	3431,57
66,2	4382,44	290 117,528	8,1363	4,0453	207,97	3441,96
66,3	4395,69	291 434,247	8,1425	4,0474	208,29	3452,37
66,4	4408,96	292 754,944	8,1486	4,0494	208,60	3462,79
66,5	4422,25	294 079,625	8,1548	4,0514	208,92	3473,23
66,6	4435,56	295 408,296	8,1609	4,0534	209,23	3483,68
66,7	4448,89	296 740,963	8,1670	4,0555	209,54	3494,15
66,8	4462,24	298 077,632	8,1731	4,0575	209,86	3504,64
66,9	4475,61	299 418,309	8,1792	4,0595	210,17	3515,14
67,0.	4489,00	300 763,000	8,1854	4,0615	210,49	3525,65
67,1	4502,41	302 111,711	8,1915	4,0636	210,80	3536,18
67,2	4515,84	303 464,448	8,1976	4,0656	211,12	3546,73
67,3	4529,29	304 821,217	8,2037	4,0676	211,43	3557,30
67,4	4542,76	306 182,024	8,2098	4,0696	211,74	3567,88
67,5	4556,25	307 546,875	8,2158	4,0716	212,06	3578,47
67,6	4569,76	308 915,776	8,2219	4,0736	212,37	3589,08
67,7	4583,29	310 288,733	8,2280	4,0756	212,69	3599,71
67,8	4596,84	311 665,752	8,2341	4,0776	213,00	3610,35
67,9	4610,41	313 046,839	8,2401	4,0797	213,51	3621,01
68,0	4624,00	314 432,000	8,2462	4,0817	213,63	3631,68
68,1	4637,61	315 821,241	8,2523	4,0837	213,94	3642,37
68,2	4651,24	317 214,568	8,2583	4,0857	214,26	3653,08
68,3	4664,89	318 611,987	8,2644	4,0877	214,57	3663,80
68,4	4678,56	320 013,504	8,2704	4,0896	214,88	3674,53
68,5	4692,25	321 419,125	8,2765	4,0916	215,20	3685,28
68,6	4705,96	322 828,856	8,2825	4,0936	215,51	3696,05
68,7	4719,69	324 242,703	8,2885	4,0956	215,83	3706,84
68,8	4733,44	325 660,672	8,2946	4,0976	216,14	3717,64
68,9	4747,21	327 082,769	8,3006	4,0996	216,46	3728,45
69,0	4761,00	328 509,000	8,3066	4,1016	216,77	3739,28
69,1	4774,81	329 939,371	8,3126	4,1035	217,08	3750,13
69,2	4788,64	331 373,888	8,3187	4,1055	217,40	3760,99
69,3	4802,49	332 812,557	8,3247	4,1075	217,71	3771,87
69,4	4816,36	334 255,384	8,3307	4,1095	218,03	3782,76
69,5	4830,25	335 702,375	8,3367	4,1114	218,34	3793,67
69,6	4844,16	337 153,536	8,3427	4,1134	218,65	3804,59
69,7	4858,09	338 608,873	8,3487	4,1154	218,97	3815,53
69,8	4872,04	340 068,392	8,3546	4,1174	219,28	3826,49
69,9	4886,01	341 532,099	8,3606	4,1193	219,60	3837,46
70,0	4900,00	343 000,000	8,3366	4,1213	219,91	3848,45

70—75

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$n \cdot \pi$	$\frac{n^2 \pi}{4}$
70,0	4900,00	343 000,000	8,3666	4,1213	219,91	3848,45
70,1	4914,01	344 472,101	8,3726	4,1232	220,23	3859,45
70,2	4928,04	345 948,408	8,3785	4,1252	220,54	3870,47
70,3	4942,09	347 428,927	8,3845	4,1272	220,85	3881,51
70,4	4957,16	348 913,664	8,3905	4,1291	221,17	3892,56
70,5	4970,25	350 402,625	8,3964	4,1311	221,48	3903,63
70,6	4984,36	351 895,816	8,4024	4,1330	221,80	3914,71
70,7	4989,49	353 393,243	8,4083	4,1350	222,11	3925,80
70,8	5012,64	354 894,912	8,4143	4,1369	222,42	3936,92
70,9	5026,81	356 400,829	8,4202	4,1389	222,74	3948,05
71,0	5041,00	357 911,000	8,4261	4,1408	223,05	3959,19
71,1	5055,21	359 425,431	8,4321	4,1428	223,37	3970,35
71,2	5069,44	360 944,128	8,4380	4,1447	223,68	3981,53
71,3	5083,69	362 467,097	8,4439	4,1466	224,00	3992,72
71,4	5097,96	363 994,344	8,4499	4,1486	224,31	4003,93
71,5	5112,25	365 525,875	8,4558	4,1505	224,62	4015,15
71,6	5126,56	367 061,696	8,4617	4,1524	224,94	4026,39
71,7	5140,89	368 601,813	8,4676	4,1544	225,25	4037,65
71,8	5155,24	370 146,232	8,4735	4,1563	225,57	4048,92
71,9	5169,61	371 694,959	8,4794	4,1582	225,88	4060,20
72,0	5184,00	373 248,000	8,4853	4,1602	226,19	4071,50
72,1	5198,41	374 805,361	8,4912	4,1621	226,51	4082,82
72,2	5212,84	376 367,048	8,4971	4,1640	226,82	4094,15
72,3	5227,29	377 933,067	8,5029	4,1659	227,14	4105,50
72,4	5241,76	379 503,424	8,5088	4,1679	227,45	4116,87
72,5	5256,25	381 078,125	8,5147	4,1698	227,77	4128,25
72,6	5270,76	382 657,176	8,5206	4,1717	228,08	4139,65
72,7	5285,29	384 240,583	8,5264	4,1736	228,39	4151,06
72,8	5299,84	385 828,352	8,5323	4,1755	228,71	4162,48
72,9	5314,41	387 420,489	8,5381	4,1774	229,02	4173,93
73,0	5329,00	389 017,000	8,5440	4,1793	229,34	4185,39
73,1	5343,61	390 617,891	8,5499	4,1812	229,65	4196,86
73,2	5358,24	392 223,168	8,5557	4,1832	229,96	4208,35
73,3	5372,89	393 832,837	8,5615	4,1851	230,28	4219,86
73,4	5387,56	395 446,904	8,5674	4,1870	230,59	4231,38
73,5	5402,25	397 065,375	8,5732	4,1889	230,91	4242,92
73,6	5416,96	398 688,256	8,5790	4,1908	231,22	4254,47
73,7	5431,69	400 315,553	8,5849	4,1927	231,54	4266,04
73,8	5446,44	401 947,272	8,5907	4,1946	231,85	4277,62
73,9	5461,21	403 583,419	8,5965	4,1964	232,16	4289,22
74,0	5476,00	405 224,000	8,6023	4,1983	232,48	4300,84
74,1	5490,81	406 869,021	8,6081	4,2002	232,79	4312,47
74,2	5505,64	408 518,488	8,6139	4,2021	233,11	4324,22
74,3	5520,49	410 172,407	8,6197	4,2040	233,42	4335,78
74,4	5535,36	411 830,784	8,6255	4,2059	233,73	4347,46
74,5	5550,25	413 493,625	8,6313	4,2078	234,05	4359,16
74,6	5565,16	415 160,936	8,6371	4,2097	234,36	4370,87
74,7	5580,09	416 832,723	8,6429	4,2115	234,68	4382,59
74,8	5595,04	418 508,992	8,6487	4,2134	234,99	4394,33
74,9	5610,01	420 189,749	8,6545	4,2153	235,31	4406,09
75,0	5625,00	421 875,000	8,6603	4,2172	235,62	4417,86

75—80

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$n \cdot \pi$	$\frac{n^2\pi}{4}$
75,0	5625,00	421 875,000	8,6603	4,2172	235,62	4417,86
75,1	5640,01	423 564,751	8,6660	4,2190	235,93	4429,65
75,2	5655,04	425 259,008	8,6718	4,2209	236,25	4441,46
75,3	5670,09	426 957,777	8,6776	4,2228	236,56	4453,28
75,4	5685,15	428 661,064	8,6833	4,2246	236,88	4465,11
75,5	5700,25	430 368,875	8,6891	4,2265	237,19	4476,97
75,6	5715,36	432 081,216	8,6948	4,2284	237,50	4488,83
75,7	5730,49	433 798,093	8,7006	4,2302	237,82	4500,72
75,8	5745,64	435 519,512	8,7063	4,2321	238,13	4512,62
75,9	5760,81	437 245,479	8,7121	4,2340	238,45	4524,53
76,0	5776,00	438 976,000	8,7178	4,2358	238,76	4536,46
76,1	5791,21	440 711,081	8,7235	4,2377	239,08	4548,41
76,2	5806,44	442 450,728	8,7293	4,2395	239,39	4560,37
76,3	5821,69	444 194,947	8,7350	4,2414	239,70	4572,34
76,4	5836,90	445 943,744	8,7407	4,2432	240,02	4584,34
76,5	5852,25	447 697,125	8,7464	4,2451	240,33	4596,35
76,6	5867,56	449 455,096	8,7521	4,2469	240,65	4608,37
76,7	5882,89	451 217,663	8,7579	4,2488	240,96	4620,41
76,8	5898,24	452 984,832	8,7636	4,2506	241,27	4632,47
76,9	5913,61	454 756,509	8,7693	4,2525	241,59	4644,54
77,0	5929,00	456 533,000	8,7750	4,2543	241,90	4656,63
77,1	5944,41	458 314,011	8,7807	4,2562	242,22	4668,73
77,2	5959,84	460 099,648	8,7864	4,2580	242,53	4680,85
77,3	5975,29	461 889,917	8,7920	4,2598	242,85	4692,98
77,4	5990,76	463 684,824	8,7977	4,2617	243,16	4705,13
77,5	6006,25	465 484,375	8,8034	4,2635	243,47	4717,30
77,6	6021,76	467 288,576	8,8091	4,2653	243,79	4729,48
77,7	6037,29	469 097,433	8,8148	4,2672	244,10	4741,68
77,8	6052,84	470 910,952	8,8204	4,2690	244,42	4753,89
77,9	6068,41	472 729,139	8,8261	4,2708	244,73	4766,12
78,0	6084,00	474 552,000	8,8318	4,2727	245,04	4778,36
78,1	6099,61	476 379,541	8,8374	4,2745	245,36	4790,62
78,2	6115,24	478 211,768	8,8431	4,2763	245,67	4802,90
78,3	6130,89	480 048,687	8,8487	4,2781	245,99	4815,19
78,4	6146,56	481 890,304	8,8544	4,2799	246,30	4827,50
78,5	6162,25	483 736,625	8,8600	4,2818	246,62	4839,82
78,6	6177,96	485 587,656	8,8657	4,2836	246,93	4852,16
78,7	6193,69	487 443,403	8,8713	4,2854	247,24	4864,51
78,8	6209,44	489 303,872	8,8769	4,2872	247,56	4876,88
78,9	6225,21	491 169,069	8,8826	4,2890	247,87	4889,27
79,0	6241,00	493 039,000	8,8882	4,2908	248,19	4901,67
79,1	6256,81	494 913,671	8,8938	4,2927	248,50	4914,09
79,2	6272,64	496 793,088	8,8994	4,2945	248,81	4926,52
79,3	6288,49	498 677,257	8,9051	4,2963	249,13	4938,97
79,4	6304,36	500 566,184	8,9107	4,2981	249,44	4951,43
79,5	6320,25	502 459,875	8,9163	4,2999	249,76	4963,91
79,6	6336,16	504 358,336	8,9219	4,3017	250,07	4976,41
79,7	6352,09	506 261,573	8,9275	4,3035	250,38	4988,92
79,8	6368,04	508 169,592	8,9331	4,3053	250,70	5001,45
79,9	6384,01	510 082,399	8,9387	4,3071	251,01	5013,99
80,0	6400,00	512 000,000	8,9443	4,3089	251,33	5026,55

80—85

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$n \cdot \pi$	$\frac{n^2 \pi}{4}$
80,0	6400,00	512 000,000	8,9443	4,3089	251,33	5026,55
80,1	6416,01	513 922,401	8,9499	4,3107	251,64	5039,12
80,2	6432,04	515 849,608	8,9554	4,3125	251,96	5051,71
80,3	6448,09	517 781,627	8,9610	4,3143	252,27	5064,32
80,4	6464,16	519 718,464	8,9666	4,3160	252,58	5076,94
80,5	6480,25	521 660,125	8,9722	4,3178	252,90	5089,58
80,6	6496,36	523 606,616	8,9778	4,3196	253,21	5102,23
80,7	6512,49	525 557,943	8,9833	4,3214	253,53	5114,90
80,8	6528,64	527 514,112	8,9889	4,3232	253,84	5127,58
80,9	6544,81	529 475,129	8,9944	4,3250	254,15	5140,28
81,0	6561,00	531 441,000	9,0000	4,3267	254,47	5153,00
81,1	6577,21	533 411,731	9,0056	4,3285	254,78	5165,73
81,2	6593,44	535 387,328	9,0111	4,3303	255,10	5178,48
81,3	6609,69	537 367,797	9,0167	4,3321	255,41	5191,24
81,4	6625,96	539 353,144	9,0222	4,3339	255,73	5204,02
81,5	6642,25	541 343,375	9,0277	4,3356	256,04	5216,81
81,6	6658,56	543 338,496	9,0333	4,3374	256,35	5229,62
81,7	6674,89	545 338,513	9,0388	4,3392	256,67	5242,45
81,8	6691,24	547 343,432	9,0443	4,3409	256,98	5255,29
81,9	6707,61	549 353,259	9,0499	4,3427	257,30	5268,14
82,0	6724,00	551 368,000	9,0554	4,3445	257,61	5281,02
82,1	6740,41	553 387,661	9,0609	4,3463	257,92	5293,91
82,2	6756,84	555 412,248	9,0664	4,3480	258,24	5306,81
82,3	6773,29	557 441,767	9,0719	4,3498	258,55	5319,73
82,4	6789,76	559 476,224	9,0774	4,3515	258,87	5332,67
82,5	6806,25	561 515,625	9,0830	4,3533	259,18	5345,62
82,6	6822,76	563 559,976	9,0885	4,3551	259,50	5358,58
82,7	6839,29	565 609,283	9,0940	4,3568	259,81	5371,57
82,8	6855,84	567 663,552	9,0995	4,3586	260,12	5384,56
82,9	6872,41	569 722,789	9,1049	4,3603	260,44	5397,58
83,0	6889,00	571 787,000	9,1104	4,3621	260,75	5410,61
83,1	6905,61	573 856,191	9,1159	4,3638	261,07	5423,65
83,2	6922,24	575 930,368	9,1214	4,3656	261,38	5436,71
83,3	6938,89	578 009,537	9,1269	4,3673	261,69	5449,79
83,4	6955,56	580 093,704	9,1324	4,3691	262,01	5462,88
83,5	6972,25	582 182,875	9,1378	4,3708	262,32	5475,99
83,6	6988,96	584 277,056	9,1433	4,3726	262,64	5489,12
83,7	7005,69	586 376,253	9,1488	4,3743	262,95	5502,26
83,8	7022,44	588 480,472	9,1542	4,3760	263,27	5515,41
83,9	7039,21	590 589,719	9,1597	4,3778	263,58	5528,58
84,0	7056,00	592 704,000	9,1652	4,3795	263,89	5541,77
84,1	7072,81	594 823,321	9,1706	4,3813	264,21	5554,97
84,2	7089,64	596 947,688	9,1761	4,3830	264,52	5568,19
84,3	7106,49	599 077,107	9,1815	4,3847	264,84	5581,42
84,4	7123,36	601 211,584	9,1869	4,3865	265,15	5594,67
84,5	7140,25	603 351,125	9,1924	4,3882	265,46	5607,94
84,6	7157,16	605 495,736	9,1978	4,3899	265,78	5621,22
84,7	7174,09	607 645,423	9,2033	4,3917	266,09	5634,52
84,8	7191,04	609 800,192	9,2087	4,3934	266,41	5647,83
84,9	7208,01	611 960,049	9,2141	4,3951	266,72	5661,16
85,0	7225,00	614 125,000	9,2195	4,3968	267,04	5674,50

85—90

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$n \cdot \pi$	$\frac{n^2\pi}{4}$
85,0	7225,00	614 125,000	9,2195	4,3968	267,04	5674,50
85,1	7242,01	616 295,051	9,2250	4,3986	267,35	5687,86
85,2	7259,04	618 470,208	9,2304	4,4003	267,66	5701,24
85,3	7276,09	620 650,477	9,2358	4,4020	267,98	5714,63
85,4	7293,16	622 835,864	9,2412	4,4037	268,29	5728,03
85,5	7310,25	625 026,375	9,2466	4,4054	268,61	5741,46
85,6	7327,36	627 222,016	9,2520	4,4072	268,92	5754,90
85,7	7344,49	629 422,793	9,2574	4,4089	269,23	5768,35
85,8	7361,64	631 628,712	9,2628	4,4106	269,55	5781,82
85,9	7378,81	633 839,779	9,2682	4,4123	269,86	5795,30
86,0	7396,00	636 056,000	9,2736	4,4140	270,18	5808,80
86,1	7413,21	638 277,381	9,2790	4,4157	270,49	5822,32
86,2	7430,44	640 503,928	9,2844	4,4174	270,81	5835,85
86,3	7447,69	642 735,647	9,2898	4,4191	271,12	5849,40
86,4	7464,96	644 972,544	9,2952	4,4208	271,43	5862,97
86,5	7482,25	647 214,625	9,3005	4,4225	271,75	5876,55
86,6	7499,56	649 461,896	9,3059	4,4242	272,06	5890,14
86,7	7516,89	651 714,363	9,3113	4,4259	272,38	5903,75
86,8	7534,24	653 972,032	9,3167	4,4276	272,69	5917,38
86,9	7551,61	656 234,909	9,3220	4,4293	273,00	5931,02
87,0	7569,00	658 503,000	9,3274	4,4310	273,32	5944,68
87,1	7586,41	660 776,311	9,3327	4,4327	273,63	5958,35
87,2	7603,84	663 054,848	9,3381	4,4344	273,95	5972,04
87,3	7621,29	665 338,617	9,3434	4,4361	274,26	5985,75
87,4	7638,76	667 627,624	9,3488	4,4378	274,58	5999,47
87,5	7656,25	669 921,875	9,3541	4,4395	274,89	6013,20
87,6	7673,76	672 221,376	9,3595	4,4412	275,20	6026,96
87,7	7691,29	674 526,133	9,3648	4,4429	275,52	6040,73
87,8	7708,84	676 836,152	9,3702	4,4446	275,83	6054,51
87,9	7726,41	679 151,439	9,3755	4,4463	276,15	6068,31
88,0	7744,00	681 472,000	9,3808	4,4480	276,46	6082,12
88,1	7761,61	683 797,841	9,3862	4,4496	276,77	6095,95
88,2	7779,24	686 128,968	9,3915	4,4513	277,09	6109,80
88,3	7796,89	688 465,387	9,3968	4,4530	277,40	6123,66
88,4	7814,56	690 807,104	9,4021	4,4547	277,72	6137,54
88,5	7832,25	693 154,125	9,4074	4,4564	278,03	6151,43
88,6	7849,96	695 506,456	9,4128	4,4580	278,35	6165,34
88,7	7867,69	697 864,103	9,4181	4,4597	278,66	6179,27
88,8	7885,44	700 227,072	9,4234	4,4614	278,97	6193,21
88,9	7903,21	702 595,369	9,4287	4,4630	279,29	6207,17
89,0	7921,00	704 969,000	9,4340	4,4647	279,60	6221,14
89,1	7938,81	707 347,971	9,4393	4,4664	279,92	6235,13
89,2	7956,64	709 732,288	9,4446	4,4681	280,23	6249,13
89,3	7974,49	712 121,957	9,4499	4,4698	280,54	6263,15
89,4	7992,36	714 516,984	9,4552	4,4714	280,86	6277,18
89,5	8010,25	716 917,375	9,4604	4,4731	281,17	6291,24
89,6	8028,16	719 323,136	9,4657	4,4748	281,49	6305,30
89,7	8046,09	721 734,273	9,4710	4,4764	281,80	6319,38
89,8	8064,04	724 150,792	9,4763	4,4781	282,12	6333,48
89,9	8082,01	726 572,699	9,4816	4,4797	282,43	6347,60
90,0	8100,00	729 000,000	9,4868	4,4814	282,74	6361,73

90—95

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$n \cdot \pi$	$\frac{n^2\pi}{4}$
90,0	8100,00	729 000,000	9,4868	4,4814	282,74	6361,73
90,1	8118,01	731 432,701	9,4921	4,4831	283,06	6375,87
90,2	8136,04	733 870,808	9,4974	4,4847	283,37	6390,03
90,3	8154,09	736 314,327	9,5026	4,4864	283,69	6404,21
90,4	8172,16	738 763,264	9,5079	4,4880	284,00	6418,40
90,5	8190,25	741 217,625	9,5131	4,4897	284,31	6432,61
90,6	8208,36	743 677,416	9,5184	4,4913	284,63	6446,83
90,7	8226,49	746 142,643	9,5237	4,4930	284,94	6461,07
90,8	8244,64	748 613,312	9,5289	4,4946	285,26	6475,33
90,9	8262,81	751 089,429	9,5341	4,4963	285,57	6489,60
91,0	8281,00	753 571,000	9,5394	4,4979	285,88	6503,88
91,1	8299,21	756 058,031	9,5446	4,4996	286,20	6518,18
91,2	8317,44	758 550,528	9,5499	4,5012	286,51	6532,50
91,3	8335,69	761 048,497	9,5551	4,5029	286,83	6546,84
91,4	8353,96	763 551,944	9,5603	4,5045	287,14	6561,18
91,5	8372,25	766 060,875	9,5656	4,5062	287,46	6575,55
91,6	8390,56	768 575,296	9,5708	4,5078	287,77	6589,93
91,7	8408,89	771 095,213	9,5760	4,5094	288,08	6604,33
91,8	8427,24	773 620,632	9,5812	4,5111	288,40	6618,74
91,9	8445,61	776,151,559	9,5864	4,5127	288,71	6633,17
92,0	8464,00	778 688,000	9,5917	4,5144	289,03	6647,61
92,1	8482,41	781 229,961	9,5969	4,5160	289,34	6662,07
92,2	8500,84	783 777,448	9,6021	4,5176	289,65	6676,54
92,3	8519,29	786 330,467	9,6073	4,5193	289,97	6691,03
92,4	8537,76	788 889,024	9,6125	4,5209	290,28	6705,54
92,5	8556,25	791 453,125	9,6177	4,5225	290,60	6720,06
92,6	8574,76	794 022,776	9,6229	4,5241	290,91	6734,60
92,7	8593,29	796 597,983	9,6281	4,5258	291,23	6749,15
92,8	8611,84	799 178,752	9,6333	4,5274	291,54	6763,72
92,9	8630,41	801 765,089	9,6385	4,5290	291,85	6778,31
93,0	8649,00	804 357,000	9,6437	4,5307	292,17	6792,91
93,1	8667,61	806 954,491	9,6488	4,5323	292,48	6807,52
93,2	8686,24	809 557,568	9,6540	4,5339	292,80	6822,16
93,3	8704,89	812 166,237	9,6592	4,5355	293,11	6836,80
93,4	8723,56	814 780,504	9,6644	4,5371	293,42	6851,47
93,5	8742,25	817 400,375	9,6695	4,5388	293,74	6866,15
93,6	8760,96	820 025,856	9,6747	4,5404	294,05	6880,84
93,7	8779,69	822 656,953	9,6799	4,5420	294,37	6895,55
93,8	8798,44	825 293,672	9,6850	4,5436	294,68	6910,28
93,9	8817,21	827 936,019	9,6902	4,5452	295,00	6925,02
94,0	8836,00	830 584,000	9,6954	4,5468	295,31	6939,78
94,1	8854,81	833 237,621	9,7005	4,5485	295,62	6954,55
94,2	8873,64	835 896,888	9,7057	4,5501	295,94	6969,34
94,3	8892,49	838 561,807	9,7108	4,5517	296,25	6984,15
94,4	8911,36	841 232,384	9,7160	4,5533	296,57	6998,97
94,5	8930,25	843 908,625	9,7211	4,5549	296,88	7013,80
94,6	8949,16	846 590,536	9,7263	4,5565	297,19	7028,65
94,7	8968,09	849 278,123	9,7314	4,5581	297,51	7043,52
94,8	8987,04	851 971,392	9,7365	4,5597	297,82	7058,40
94,9	9006,01	854 670,349	9,7417	4,5613	298,14	7073,30
95,0	9025,00	857 375,000	9,7468	4,5629	298,45	7088,22

95—100

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$n . \pi$	$\frac{n^2\pi}{4}$
95,0	9025,00	857 375,000	9,7468	4,5629	298,45	7088,22
95,1	9044,01	860 085,351	9,7519	4,5645	298,77	7103,15
95,2	9063,04	862 801,408	9,7570	4,5661	299,08	7118,09
95,3	9082,09	865 523,177	9,7622	4,5677	299,39	7133,06
95,4	9101,16	868 250,664	9,7673	4,5693	299,71	7148,03
95,5	9120,25	870 983,875	9,7724	4,5709	300,02	7163,03
95,6	9139,36	873 722,816	9,7775	4,5725	300,34	7178,04
95,7	9158,49	876 467,493	9,7826	4,5741	300,65	7193,06
95,8	9177,64	879 217,912	9,7877	4,5757	300,96	7208,10
95,9	9196,81	881 974,079	9,7929	4,5773	301,28	7223,16
96,0	9216,00	884 736,000	9,7980	4,5789	301,59	7238,23
96,1	9235,21	887 503,681	9,8031	4,5804	301,91	7253,32
96,2	9254,44	890 277,128	9,8082	4,5820	302,22	7268,42
96,3	9273,69	893 056,347	9,8133	4,5836	302,54	7283,54
96,4	9292,96	895 841,344	9,8184	4,5852	302,85	7298,67
96,5	9312,25	898 632,125	9,8234	4,5868	303,16	7313,82
96,6	9331,56	901 428,696	9,8285	4,5884	303,48	7328,99
96,7	9350,89	904 231,063	9,8336	4,5900	303,79	7344,17
96,8	9370,24	907 039,232	9,8387	4,5915	304,11	7359,37
96,9	9389,61	909 853,209	8,8438	4,5931	304,42	7374,58
97,0	9409,00	912 673,000	9,8489	4,5947	304,73	7389,81
97,1	9428,41	915 498,611	9,8539	4,5963	305,05	7405,06
97,2	9447,84	918 330,048	9,8590	4,5979	305,36	7420,32
97,3	9467,29	921 167,317	9,8641	4,5994	305,68	7435,59
97,4	9486,76	924 010,424	9,8691	4,6010	305,99	7450,88
97,5	9506,25	926 859,375	9,8742	4,6026	306,31	7466,19
97,6	9525,76	929 714,176	9,8793	4,6042	306,62	7481,51
97,7	9545,29	932 574,833	9,8843	4,6057	306,93	7496,85
97,8	9564,84	935 441,352	9,8894	4,6073	307,25	7512,21
97,9	9584,41	938 313,739	9,8944	4,6089	307,56	7527,58
98,0	9604,00	941 192,000	9,8995	4,6104	307,88	7542,96
98,1	9623,61	944 076,141	9,9045	4,6120	308,19	7558,37
98,2	9643,24	946 966,168	9,9096	4,6136	308,50	7573,78
98,3	9662,89	949 862,087	9,9146	4,6151	308,82	7589,22
98,4	9682,56	952 763,904	9,9197	4,6167	309,13	7604,66
98,5	9702,25	955 671,625	9,9247	4,6183	309,45	7620,13
98,6	9721,96	958 585,256	9,9298	4,6198	309,76	7635,61
98,7	9741,69	961 504,803	9,9348	4,6214	310,08	7651,11
98,8	9761,44	964 430,272	9,9398	4,6229	310,39	7666,62
98,9	9781,21	967 361,669	9,9448	4,6245	310,70	7682,14
99,0	9801,00	970 299,000	9,9499	4,6261	311,02	7697,69
99,1	9820,81	973 242,271	9,9549	4,6276	311,33	7713,25
99,2	9840,64	976 191,488	9,9599	4,6292	311,65	7728,82
99,3	9860,49	979 146,657	9,9649	4,6307	311,96	7744,41
99,4	9880,36	982 107,784	9,9700	4,6323	312,27	7760,02
99,5	9900,25	985 074,875	9,9750	4,6338	312,59	7775,64
99,6	9920,16	988 047,936	9,9800	4,6354	312,90	7791,28
99,7	9940,09	991 026,973	9,9850	4,6369	313,22	7806,93
99,8	9960,04	994 011,992	9,9900	4,6385	313,53	7822,60
99,9	9980,01	997 002,999	9,9950	4,6400	313,85	7838,28
100,0	10 000,0	1 000 000,00	10,000	4,6416	314,16	7853,98

2) Tabelle

der

Quadrat- und Kubikwurzeln der Zahlen 100 bis 1000.

100—200

n	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	n	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$
100	10,0000	4,6416	**150**	12,2474	5,3133
101	10,0499	4,6570	151	12,2882	5,3251
102	10,0995	4,6723	152	12,3288	5,3368
103	10,1489	4,6875	153	12,3693	5,3485
104	10,1980	4,7027	154	12,4097	5,3601
105	10,2470	4,7177	155	12,4499	5,3717
106	10,2956	4,7326	156	12,4900	5,3832
107	10,3441	4,7475	157	12,5300	5,3947
108	10,3923	4,7622	158	12,5698	5,4061
109	10,4403	4,7769	159	12,6095	5,4175
110	10,4881	4,7914	**160**	12,6491	5,4288
111	10,5357	4,8059	161	12,6886	5,4401
112	10,5830	4,8203	162	12,7279	5,4514
113	10,6301	4,8346	163	12,7671	5,4626
114	10,6771	4,8488	164	12,8062	5,4737
115	10,7238	4,8629	165	12,8452	5,4848
116	10,7703	4,8770	166	12,8841	5,4959
117	10,8167	4,8910	167	12,9228	5,5069
118	10,8628	4,9049	168	12,9615	5,5178
119	10,9087	4,9187	169	13,0000	5,5288
120	10,9545	4,9324	**170**	13,0384	5,5397
121	11,0000	4,9461	171	13,0767	5,5505
122	11,0454	4,9597	172	13,1149	5,5613
123	11,0905	4,9732	173	13,1529	5,5721
124	11,1355	4,9866	174	13,1909	5,5828
125	11,1803	5,0000	175	13,2288	5,5934
126	11,2250	5,0133	176	13,2665	5,6041
127	11,2694	5,0265	177	13,3041	5,6147
128	11,3137	5,0397	178	13,3417	5,6252
129	11,3578	5,0528	179	13,3791	5,6357
130	11,4018	5,0658	**180**	13,4164	5,6462
131	11,4455	5,0788	181	13,4536	5,6567
132	11,4891	5,0916	182	13,4907	5,6671
133	11,5326	5,1045	183	13,5277	5,6774
134	11,5758	5,1172	184	13,5647	5,6877
135	11,6190	5,1299	185	13,6015	5,6980
136	11,6619	5,1426	186	13,6382	5,7083
137	11,7047	5,1551	187	13,6748	5,7185
138	11,7473	5,1676	188	13,7113	5,7287
139	11,7898	5,1801	189	13,7477	5,7388
140	11,8322	5,1925	**190**	13,7840	5,7489
141	11,8743	5,2048	191	13,8203	5,7590
142	11,9164	5,2171	192	13,8564	5,7690
143	11,9583	5,2293	193	13,8924	5,7790
144	12,0000	5,2415	194	13,9284	5,7890
145	12,0416	5,2536	195	13,9642	5,7989
146	12,0830	5,2656	196	14,0000	5,8088
147	12,1244	5,2776	197	14,0357	5,8186
148	12,1655	5,2896	198	14,0712	5,8285
149	12,2066	5,3015	199	14,1067	5,8383
150	12,2474	5,3133	**200**	14,1421	5,8480

200—300

n	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	n	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$
200	14,1421	5,8480	**250**	15,8114	6,2996
201	14,1774	5,8578	251	15,8430	6,3080
202	14,2127	5,8675	252	15,8745	6,3164
203	14,2478	5,8771	253	15,9060	6,3247
204	14,2829	5,8868	254	15,9374	6,3330
205	14,3178	5,8964	255	15,9687	6,3413
206	14,3527	5,9059	256	16,0000	6,3496
207	14,3875	5,9155	257	16,0312	6,3579
208	14,4222	5,9250	258	16,0624	6,3661
209	14,4568	5,9345	259	16,0935	6,3743
210	14,4914	5,9439	**260**	16,1245	6,3825
211	14,5258	5,9533	261	16,1555	6,3907
212	14,5602	5,9627	262	16,1864	6,3988
213	14,4945	5,9721	263	16,2173	6,4070
214	14,6287	5,9814	264	16,2481	6,4151
215	14,6629	5,9907	265	16,2788	6,4232
216	14,6969	6,0000	266	16,3095	6,4312
217	14,7308	6,0092	267	16,3401	6,4393
218	14,7648	6,0185	268	16,3707	6,4473
219	14,7986	6,0277	269	16,4012	6,4553
220	14,8324	6,0368	**270**	16,4317	6,4633
221	14,8661	6,0459	271	16,4621	6,4713
222	14,8997	6,0550	272	16,4924	6,4792
223	14,9332	6,0641	273	16,5227	6,4872
224	14,9666	6,0732	274	16,5529	6,4951
225	15,0000	6,0822	275	16,5831	6,5030
226	15,0333	6,0912	276	16,6132	6,5108
227	15,0665	6,1002	277	16,6433	6,5187
228	15,0997	6,1091	278	16,6733	6,5265
229	15,1327	6,1180	279	16,7033	6,5343
230	15,1658	6,1269	**280**	16,7332	6,5421
231	15,1987	6,1358	281	16,7631	6,5499
232	15,2315	6,1446	282	16,7929	6,5577
233	15,2643	6,1534	283	16,8226	6,5654
234	15,2971	6,1622	284	16,8523	6,5731
235	15,3297	6,1710	285	16,8819	6,5808
236	15,3623	6,1797	286	16,9115	6,5885
237	15,3948	6,1885	287	16,9411	6,5962
238	15,4272	6,1972	288	16,9706	6,6039
239	15,4596	6,2058	289	17,0000	6,6115
240	15,4919	6,2145	**290**	17,0294	6,6191
241	15,5242	6,2231	291	17,0587	6,6267
242	15,5563	6,2317	292	17,0880	6,6343
243	15,5885	6,2403	293	17,1172	6,6419
244	15,6205	6,2488	294	17,1464	6,6494
245	15,6525	6,2573	295	17,1756	6,6569
246	15,6844	6,2658	296	17,2047	6,6644
247	15,7162	6,2743	297	17,2337	6,6719
248	15,7480	6,2828	298	17,2627	6,6794
249	15,7797	6,2912	299	17,2916	6,6869
250	15,8114	6,2996	**300**	17,3205	6,6943

300—400

n	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	n	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$
300	17,3205	6,6943	**350**	18,7083	7,0473
301	17,3494	6,7018	351	18,7350	7,0540
302	17,3781	6,7092	352	18,7617	7,0607
303	17,4069	6,7166	353	18,7883	7,0674
304	17,4356	6,7240	354	18,8149	7,0740
305	17,4642	6,7313	355	18,8414	7,0807
306	17,4929	6,7387	356	18,8680	7,0873
307	17,5214	6,7460	357	18,8944	7,0940
308	17,5499	6,7533	358	18,9209	7,1006
309	17,5784	6,7606	359	18,9473	7,1072
310	17,6068	6,7679	**360**	18,9737	7,1138
311	17,6352	6,7752	361	19,0000	7,1204
312	17,6635	6,7824	362	19,0263	7,1269
313	17,6918	6,7897	363	19,0526	7,1335
314	17,7200	6,7969	364	19,0788	7,1400
315	17,7482	6,8041	365	19,1050	7,1466
316	17,7764	6,8113	366	19,1311	7,1531
317	17,8045	6,8185	367	19,1572	7,1596
318	17,8326	6,8256	368	19,1833	7,1661
319	17,8606	6,8328	369	19,2094	7,1726
320	17,8885	6,8399	**370**	19,2354	7,1791
321	17,9165	6,8470	371	19,2614	7,1855
322	17,9444	6,8541	372	19,2873	7,1920
323	17,9722	6,8612	373	19,3132	7,1984
324	18,0000	6,8683	374	19,3391	7,2048
325	18,0278	6,8753	375	19,3649	7,2112
326	18,0555	6,8824	376	19,3907	7,2177
327	18,0831	6,8894	377	19,4165	7,2240
328	18,1108	6,8964	378	19,4422	7,2304
329	18,1384	6,9034	379	19,4679	7,2368
330	18,1659	6,9104	**380**	19,4936	7,2432
331	18,1934	6,9174	381	19,5192	7,2495
332	18,2209	6,9244	382	19,5448	7,2558
333	18,2483	6,9313	383	19,5704	7,2622
334	18,2757	6,9382	384	19,5959	7,2685
335	18,3030	6,9451	385	19,6214	7,2748
336	18,3303	6,9521	386	19,6469	7,2811
337	18,3576	6,9589	387	19,6723	7,2874
338	18,3848	6,9658	388	19,6977	7,2936
339	18,4120	6,9727	389	19,7231	7,2999
340	18,4391	6,9795	**390**	19,7484	7,3061
341	18,4662	6,9864	391	19,7737	7,3124
342	18,4932	6,9932	392	19,7990	7,3186
343	18,5203	7,0000	393	19,8242	7,3248
344	18,5472	7,0068	394	19,8494	7,3310
345	18,5742	7,0136	395	19,8746	7,3372
346	18,6011	7,0203	396	19,8997	7,3434
347	18,6279	7,0271	397	19,9249	7,3496
348	18,6548	7,0338	398	19,9499	7,3558
349	18,6815	7,0406	399	19,9750	7,3619
350	18,7083	7,0473	**400**	20,0000	7,3681

400—500

n	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	n	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$
400	20,0000	7,3681	**450**	21,2132	7,6631
401	20,0250	7,3742	451	21,2368	7,6688
402	20,0499	7,3803	452	21,2603	7,6744
403	20,0749	7,3864	453	21,2838	7,6801
404	20,0998	7,3925	454	21,3073	7,6857
405	20,1246	7,3986	455	21,3307	7,6914
406	20,1494	7,4047	456	21,3542	7,6970
407	20,1742	7,4108	457	21,3776	7,7026
408	20,1990	7,4169	458	21,4009	7,7082
409	20,2237	7,4229	459	21,4243	7,7138
410	20,2485	7,4290	**460**	21,4476	7,7194
411	20,2731	7,4350	461	21,4709	7,7250
412	20,2978	7,4410	462	21,4942	7,7306
413	20,3224	7,4470	463	21,5174	7,7362
414	20,3470	7,4530	464	21,5407	7,7418
415	20,3715	7,4590	465	21,5639	7,7473
416	20,3961	7,4650	466	21,5870	7,7529
417	20,4206	7,4710	467	21,6102	7,7584
418	20,4450	7,4770	468	21,6333	7,7639
419	20,4695	7,4829	469	21,6564	7,7695
420	20,4939	7,4889	**470**	21,6795	7,7750
421	20,5183	7,4948	471	21,7025	7,7805
422	20,5426	7,5007	472	21,7256	7,7860
423	20,5670	7,5067	473	21,7486	7,7915
424	20,5913	7,5126	474	21,7715	7,7970
425	20,6155	7,5185	475	21,7945	7,8025
426	20,6398	7,5244	476	21,8174	7,8079
427	20,6640	7,5302	477	21,8403	7,8134
428	20,6882	7,5361	478	21,8632	7,8188
429	20,7123	7,5420	479	21,8861	7,8243
430	20,7364	7,5478	**480**	21,9089	7,8297
431	20,7605	7,5537	481	21,9317	7,8352
432	20,7846	7,5595	482	21,9545	7,8406
433	20,8087	7,5654	483	21,9773	7,8460
434	20,8327	7,5712	484	22,0000	7,8514
435	20,8567	7,5770	485	22,0227	7,8568
436	20,8806	7,5828	486	22,0454	7,8622
437	20,9045	7,5886	487	22,0681	7,8676
438	20,9284	7,5944	488	22,0907	7,8730
439	20,9523	7,6001	489	22,1133	7,8784
440	20,9762	7,6059	**490**	22,1359	7,8837
441	21,0000	7,6117	491	22,1585	7,8891
442	21,0238	7,6174	492	22,1811	7,8944
443	21,0476	7,6232	493	22,2036	7,8998
444	21,0713	7,6289	494	22,2261	7,9051
445	21,0950	7,6346	495	22,2486	7,9105
446	21,1187	7,6403	496	22,2711	7,9158
447	21,1424	7,6460	497	22,2935	7,9211
448	21,1660	7,6517	498	22,3159	7,9264
449	21,1896	7,6574	499	22,3383	7,9317
450	21,2132	7,6631	**500**	22,3607	7,9370

500—600

n	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	n	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$
500	22,3607	7,9370	**550**	23,4521	8,1932
501	22,3830	7,9423	551	23,4734	8,1982
502	22,4054	7,9476	552	23,4947	8,2031
503	22,4277	7,9528	553	23,5160	8,2081
504	22,4499	7,9581	554	23,5372	8,2130
505	22,4722	7,9634	555	23,5584	8,2180
506	22,4944	7,9686	556	23,5797	8,2229
507	22,5167	7,9739	557	23,6008	8,2278
508	22,5389	7,9791	558	23,6220	8,2327
509	22,5610	7,9843	559	23,6432	8,2377
510	22,5832	7,9896	**560**	23,6643	8,2426
511	22,6053	7,9948	561	23,6854	8,2475
512	22,6274	8,0000	562	23,7065	8,2524
513	22,6495	8,0052	563	23,7276	8,2573
514	22,6716	8,0104	564	23,7487	8,2621
515	22,6936	8,0156	565	23,7697	8,2670
516	22,7156	8,0208	566	23,7908	8,2719
517	22,7376	8,0260	567	23,8118	8,2768
518	22,7596	8,0311	568	23,8328	8,2816
519	22,7816	8,0363	569	23,8537	8,2865
520	22,8035	8,0415	**570**	23,8747	8,2913
521	22,8254	8,0466	571	23,8956	8,2962
522	22,8473	8,0517	572	23,9165	8,3010
523	22,8692	8,0569	573	23,9374	8,3059
524	22,8910	8,0620	574	23,9583	8,3107
525	22,9129	8,0671	575	23,9792	8,3155
526	22,9347	8,0723	576	24,0000	8,3203
527	22,9565	8,0774	577	24,0208	8,3251
528	22,9783	8,0825	578	24,0416	8,3300
529	23,0000	8,0876	579	24,0624	8,3348
530	23,0217	8,0927	**580**	24,0832	8,3396
531	23,0434	8,0978	581	24,1039	8,3443
532	23,0651	8,1028	582	24,1247	8,3491
533	23,0868	8,1079	583	24,1454	8,3539
534	23,1084	8,1130	584	24,1661	8,3587
535	23,1301	8,1180	585	24,1868	8,3634
536	23,1517	8,1231	586	24,2074	8,3682
537	23,1733	8,1281	587	24,2281	8,3730
538	23,1948	8,1332	588	24,2487	8,3777
539	23,2164	8,1382	589	24,2693	8,3825
540	23,2379	8,1433	**590**	24,2899	8,3872
541	23,2594	8,1483	591	24,3105	8,3919
542	23,2809	8,1533	592	24,3311	8,3967
543	23,3024	8,1583	593	24,3516	8,4014
544	23,3238	8,1633	594	24,3721	8,4061
545	23,3452	8,1683	595	24,3926	8,4108
546	23,3666	8,1733	596	24,4131	8,4155
547	23,3880	8,1783	597	24,4336	8,4202
548	23,4094	8,1833	598	24,4540	8,4249
549	23,4307	8,1882	599	24,4745	8,4396
550	23,4521	8,1932	**600**	24,4949	8,4343

600—700

n	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	n	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$
600	24,4949	8,4343	**650**	25,4951	8,6624
601	24,5153	8,4390	651	25,5147	8,6668
602	24,5357	8,4437	652	25,5343	8,6713
603	24,5561	8,4484	653	25,5539	8,6757
604	24,5764	8,4530	654	25,5734	8,6801
605	24,5967	8,4577	655	25,5930	8,6845
606	24,6171	8,4623	656	25,6125	8,6890
607	24,6374	8,4670	657	25,6320	8,6934
608	24,6577	8,4716	658	25,6515	8,6978
609	24,6779	8,4763	659	25,6710	8,7022
610	24,6982	8,4809	**660**	25,6905	8,7066
611	24,7184	8,4856	661	25,7099	8,7110
612	24,7386	8,4902	662	25,7294	8,7154
613	24,7588	8,4948	663	25,7488	8,7198
614	24,7790	8,4994	664	25,7682	8,7241
615	24,7992	8,5040	665	25,7876	8,7285
616	24,8193	8,5086	666	25,8070	8,7329
617	24,8395	8,5132	667	25,8263	8,7373
618	24,8596	8,5178	668	25,8457	8,7416
619	24,8797	8,5224	669	25,8650	8,7460
620	24,8998	8,5270	**670**	25,8844	8,7503
621	24,9199	8,5316	671	25,9037	8,7547
622	24,9399	8,5362	672	25,9230	8,7590
623	24,9600	8,5408	673	25,9422	8,7634
624	24,9800	8,5453	674	25,9615	8,7677
625	25,0000	8,5499	675	25,9808	8,7721
626	25,0200	8,5544	676	26,0000	8,7764
627	25,0400	8,5590	677	26,0192	8,7807
628	25,0599	8,5635	678	26,0384	8,7850
629	25,0799	8,5681	679	26,0576	8,7893
630	25,0998	8,5726	**680**	26,0768	8,7937
631	25,1197	8,5772	681	26,0960	8,7980
632	25,1396	8,5817	682	26,1151	8,8023
633	25,1595	8,5862	683	26,1343	8,8066
634	25,1794	8,5907	684	26,1534	8,8109
635	25,1992	8,5952	685	26,1725	8,8152
636	25,2190	8,5997	686	26,1916	8,8194
637	25,2389	8,6043	687	26,2107	8,8237
638	25,2587	8,6088	688	26,2298	8,8280
639	25,2784	8,6132	689	26,2488	8,8323
640	25,2982	8,6177	**690**	26,2679	8,8366
641	25,3180	8,6222	691	26,2869	8,8408
642	25,3377	8,6267	692	26,3059	8,8451
643	25,3574	8,6312	693	26,3249	8,8493
644	25,3772	8,6357	694	26,3439	8,8536
645	25,3969	8,6401	695	26,3629	8,8578
646	25,4165	8,6446	696	26,3818	8,8621
647	25,4362	8,6490	697	26,4008	8,8663
648	25,4558	8,6535	698	26,4197	8,8706
649	25,4755	8,6579	699	26,4386	8,8748
650	25,4951	8,6624	**700**	26,4575	8,8790

700—800

n	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	n	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$
700	26,4575	8,8790	**750**	27,3861	9,0856
701	26,4764	8,8833	751	27,4044	9,0896
702	26,4953	8,8875	752	27,4226	9,0937
703	26,5141	8,8917	753	27,4408	9,0977
704	26,5330	8,8959	754	27,4591	9,1017
705	26,5518	8,9001	755	27,4773	9,1057
706	26,5707	8,9043	756	27,4955	9,1098
707	26,5895	8,9085	757	27,5136	9,1138
708	26,6083	8,9127	758	27,5318	9,1178
709	26,6271	8,9169	759	27,5500	9,1218
710	26,6458	8,9211	**760**	27,5681	9,1258
711	26,6646	8,9253	761	27,5862	9,1298
712	26,6833	8,9295	762	27,6043	9,1338
713	26,7021	8,9337	763	27,6225	9,1378
714	26,7208	8,9378	764	27,6405	9,1418
715	26,7395	8,9420	765	27,6586	9,1458
716	26,7582	8,9462	766	27,6767	9,1498
717	26,7769	8,9503	767	27,6948	9,1537
718	26,7955	8,9545	768	27,7128	9,1577
719	26,8142	8,9587	769	27,7308	9,1617
720	26,8328	8,9628	**770**	27,7489	9,1657
721	26,8514	8,9670	771	27,7669	9,1696
722	26,8701	8,9711	772	27,7849	9,1736
723	26,8887	8,9752	773	27,8029	9,1775
724	26,9072	8,9794	774	27,8209	9,1815
725	26,9258	8,9835	775	27,8388	9,1855
726	26,9444	8,9876	776	27,8568	9,1894
727	26,9629	8,9918	777	27,8747	9,1933
728	26,9815	8,9959	778	27,8927	9,1973
729	27,0000	9,0000	779	27,9106	9,2012
730	27,0185	9,0041	**780**	27,9285	9,2052
731	27,0370	9,0082	781	27,9464	9,2091
732	27,0555	9,0123	782	27,9643	9,2130
733	27,0740	9,0164	783	27,9821	9,2170
734	27,0924	9,0205	784	28,0000	9,2209
735	27,1109	9,0246	785	28,0179	9,2248
736	27,1293	9,0287	786	28,0357	9,2287
737	27,1477	9,0328	787	28,0535	9,2326
738	27,1662	9,0369	788	28,0713	9,2365
739	27,1846	9,0410	789	28,0891	9,2404
740	27,2029	9,0450	**790**	28,1069	9,2443
741	27,2213	9,0491	791	28,1247	9,2482
742	27,2397	9,0532	792	28,1425	9,2521
743	27,2580	9,0572	793	28,1603	9,2560
744	27,2764	9,0613	794	28,1780	9,2599
745	27,2947	9,0654	795	28,1957	9,2638
746	27,3130	9,0694	796	28,2135	9,2677
747	27,3313	9,0735	797	28,2312	9,2716
748	27,3496	9,0775	798	28,2489	9,2754
749	27,3679	9,0816	799	28,2666	9,2793
750	27,3861	9,0856	**800**	28,2843	9,2832

800—900

n	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	n	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$
800	28,2843	9,2832	**850**	29,1548	9,4727
801	28,3019	9,2870	851	29,1719	9,4764
802	28,3196	9,2909	852	29,1890	9,4801
803	28,3373	9,2948	853	29,2062	9,4838
804	28,3549	9,2968	854	29,2233	9,4875
805	28,3725	9,3025	855	29,2404	9,4912
806	28,3901	9,3063	856	29,2575	9,4949
807	28,4077	9,3102	857	29,2746	9,4986
808	28,4253	9,3140	858	29,2916	9,5023
809	28,4429	9,3179	859	29,3087	9,5060
810	28,4605	9,3217	**860**	29,3258	9,5097
811	28,4781	9,3255	861	29,3428	9,5134
812	28,4956	9,3294	862	29,3598	9,5171
813	28,5132	9,3332	863	29,3769	9,5207
814	28,5307	9,3370	864	29,3939	9,5244
815	28,5482	9,3408	865	29,4109	9,5281
816	28,5657	9,3447	866	29,4279	9,5317
817	28,5832	9,3485	867	29,4449	9,5354
818	28,6001	9,3523	868	29,4618	9,5391
819	28,6182	9,3561	869	29,4788	9,5427
820	28,6356	9,3599	**870**	29,4958	9,5464
821	28,6531	9,3637	871	29,5127	9,5501
822	28,6705	9,3675	872	29,5296	9,5537
823	28,6880	9,3713	873	29,5466	9,5574
824	28,7054	9,3751	874	29,5635	9,5610
825	28,7228	9,3789	875	29,5804	9,5647
826	28,7402	9,3827	876	29,5973	9,5683
827	28,7576	9,3865	877	29,6142	9,5719
828	28,7750	9,3902	878	29,6311	9,5756
829	28,7924	9,3940	879	29,6479	9,5792
830	28,8097	9,3978	**880**	29,6648	9,5828
831	28,8271	9,4016	881	29,6816	9,5865
832	28,8444	9,4053	882	29,6985	9,5901
833	28,8617	9,4091	883	29,7153	9,5937
834	28,8791	9,4129	884	29,7321	9,5973
835	28,8964	9,4166	885	29,7489	9,6010
836	28,9137	9,4204	886	29,7658	9,6046
837	28,9310	9,4241	887	29,7825	9,6082
838	28,9482	9,4279	888	29,7993	9,6118
839	28,9655	9,4316	889	29,8161	9,6154
840	28,9828	9,4354	**890**	29,8329	9,6190
841	29,0000	9,4391	891	29,8496	9,6226
842	29,0172	9,4429	892	29,8664	9,6262
843	29,0345	9,4466	893	29,8831	9,6298
844	29,0517	9,4503	894	29,8998	9,6334
845	29,0689	9,4541	895	29,9166	9,6370
846	29,0861	9,4578	896	29,9333	9,6406
847	29,1033	9,4615	897	29,9500	9,6442
848	29,1204	9,4652	898	29,9666	9,6477
849	29,1376	9,4690	899	29,9833	9,6513
850	29,1548	9,4727	**900**	30,0000	9,6549

900—1000

n	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	n	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$
900	30,0000	9,6549	**950**	30,8221	9,8305
901	30,0167	9,6585	951	30,8383	9,8339
902	30,0333	9,6620	952	30,8545	9,8374
903	30,0500	9,6656	953	30,8707	9,8408
904	30,0666	9,6692	954	30,8869	9,8443
905	30,0832	9,6727	955	30,9031	9,8477
906	30,0998	9,6763	956	30,9192	9,8511
907	30,1164	9,6799	957	30,9354	9,8546
908	30,1330	9,6834	958	30,9516	9,8580
909	30,1496	9,6870	959	30,9677	9,8614
910	30,1662	9,6905	**960**	30,9839	9,8648
911	30,1828	9,6941	961	31,0000	9,8683
912	30,1993	9,6976	962	31,0161	9,8717
913	30,2159	9,7012	963	31,0322	9,8751
914	30,2324	9,7047	964	31,0483	9,8785
915	30,2490	9,7082	965	31,0644	9,8819
916	30,2655	9,7118	966	31,0805	9,8854
917	30,2820	9,7153	967	31,0966	9,8888
918	30,2985	9,7188	968	31,1127	9,8922
919	30,3150	9,7224	969	31,1288	9,8956
920	30,3315	9,7259	**970**	31,1448	9,8990
921	30,3480	9,7294	971	31,1609	9,9024
922	30,3645	9,7329	972	31,1769	9,9058
923	30,3809	9,7364	973	31,1929	9,9092
924	30,3974	9,7400	974	31,2090	9,9126
925	30,4138	9,7435	975	31,2250	9,9160
926	30,4302	9,7470	976	31,2410	9,9194
927	30,4467	9,7505	977	31,2570	9,9227
928	30,4631	9,7540	978	31,2730	9,9261
929	30,4795	9,7575	979	31,2890	9,9295
930	30,4959	9,7610	**980**	31,3050	9,9329
931	30,5123	9,7645	981	31,3209	9,9363
932	30,5287	9,7680	982	31,3369	9,9396
933	30,5450	9,7715	983	31,3528	9,9430
934	30,5614	9,7750	984	31,3688	9,9464
935	30,5778	9,7785	985	31,3847	9,9497
936	30,5941	9,7819	986	31,4006	9,9531
937	30,6105	9,7854	987	31,4166	9,9565
938	30,6268	9,7889	988	31,4325	9,9598
939	30,6431	9,7924	989	31,4484	9,9632
940	30,6594	9,7959	**990**	31,4643	9,9666
941	30,6757	9,7993	991	31,4802	9,9699
942	30,6920	9,8028	992	31,4960	9,9733
943	30,7083	9,8063	993	31,5119	9,9766
944	30,7246	9,8097	994	31,5278	9,9800
945	30,7409	9,8132	995	31,5436	9,9833
946	30,7571	9,8167	996	31,5595	9,9866
947	30,7734	9,8201	997	31,5753	9,9900
948	30,7896	9,8236	998	31,5911	9,9933
949	30,8058	9,8270	999	31,6070	9,9967
950	30,8221	9,8305	**1000**	31,6228	10,0000

Arnold Bergsträsser Verlagsbuchhandlung (A. Kröner) in Stuttgart.

Uhlands Kalender

für

MASCHINEN-INGENIEURE

Unter Mitwirkung bewährter Ingenieure

herausgegeben von

Wilhelm Heinrich Uhland,

Civil-Ingenieur und Patentanwalt in Leipzig.

Erscheint seit 1875 alljährlich im Herbst mit gegen 900 Abbildungen.

In zwei Teilen:

Erster Teil: Taschenbuch.

Zweiter Teil: Für den Konstruktionstisch.

Preis:

In Leinenband 3 Mark, in Lederband 4 Mark, in Brieftaschenlederband 5 Mark.

Uhlands Kalender für Maschinen-Ingenieure erfreut sich einer von Jahr zu Jahr wachsenden Beliebtheit und zunehmenden Verbreitung. Redaktion und Verlag sind unablässig bemüht, in jedem neu erscheinenden Jahrgang den **neuesten Stand der maschinentechnischen Wissenschaften** wiederzugeben. Auf diese Weise ist aus dem Kalender allmählich ein **unentbehrliches Vademekum** geworden, gleich wertvoll als **Unterrichtsmittel** wie zum **Gebrauch in der Praxis.**

Zu beziehen durch die meisten Buchhandlungen.